Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
101° (1983), Vol. VII, fasc. 14, pag. 227-276

IACOPO BARSOTTI (*)

Le equazioni differenziali delle funzioni theta (**)

... the fairyland of mathematics
R. Bellman

Differential Equations of Theta Functions

Summary. — Main results: 1) A power series $\theta(x_1, \ldots, x_n)$ with coefficients in a field k of characteristic zero is a holomorphic theta type if and only if it satisfies the prosthaferesis formula $\theta(x+y)\theta(x-y) \in k[x] \otimes_k k[y]$. 2) For any commutative group-variety $\mathcal{A}$ over k, with a mild restriction, the hyperfield $k(\mathcal{A})$ is generated, over k, by $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$ for a suitable r and a suitable holomorphic theta type $\theta(u)$ in one indeterminate u, after setting $\theta_i = (i!)^{-1}(\partial^i/\partial u^i) \log \theta(u)$. 3) There are universal polynomials $P_0 = 1$, $P_1(y_1), \ldots, P_n(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots$, with rational coefficients, such that $\theta(u)$ is a holomorphic theta type if and only if the vector space generated over k by all the $P_n(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ is finite-dimensional; in other words, theta types are the solutions of certain standard nonlinear ordinary differential equations.

1. - Introduzione

Si parla di funzioni theta, nel senso di serie formali di potenze, su un corpo k di caratteristica zero. La caratteristica zero è essenziale per la parte più sorprendente di questa esposizione (sez. 5, 6); è probabilmente eliminabile dalle parti precedenti, dopo opportune e non ovvie modificazioni. Ho usato la parola «sorprendente» perchè in caratteristica zero si è talmente abituati a rifarsi al corpo complesso, che le proprietà di periodicità delle theta su questo corpo hanno finora favorito metodi di indagine che nascondono quei risultati che con la periodicità abbiano legami laschi o invisibili. Lo strumento, fornito in [1], per definire le theta senza ricorso alla periodicità permette ora di esplorare altri filoni, con risultati, appunto, sorprendenti. [Le blandizie della perio-

(*) uso del XL, il quale, seguendo l'usanza di nominare gli «sponsors», nomina lo Stato italiano che gli ha diminuito lo stipendio durante la preparazione del presente lavoro.
(**) Memoria presentata il 30 luglio 1983. Indirizzo dell'Autore: Univ. di Padova, via Belzoni 7, Padova.

ISSN-0392-4106

dicità sono tali che si ha notizia di almeno un caso in cui essa è apparsa, frutto di suggestione, là dove non era; cfr. l'introduzione alla Lecture note 980 della casa editrice Springer.]

Per una descrizione sia pure da «introduzione», ma un po' dettagliata, ricorderò che lo strumento citato sopra consiste nel definire «funzione di tipo theta» una serie di potenze $\theta(u) \in k[u] = k[u_1, \ldots, u_n]$ (anche un rapporto fra serie di potenze, ma fermiamoci pure alle serie di potenze) tale che la

$$F(u, v, w) = \frac{\theta(u+v+w)\theta(u)\theta(v)\theta(w)}{\theta(u+v)\theta(u+w)\theta(v+w)}$$

appartenga al corpo quoziente del prodotto tensoriale (su k) $k[u] \otimes k[v] \otimes k[w]$; le funzioni theta sono quelle funzioni di tipo theta per le quali certi due invarianti interi coincidono. Altra cosa da ricordare è la condizione di olomorfismo di una theta, e cioè la condizione a che il suo divisore sia effettivo; essa è data in [1] con la formula di prostaferesi

$$\theta(u+v)\theta(u-v) \in k[u] \otimes k[v] .$$

Bene; la sezione 3 di questo lavoro mostra come la prostaferesi sia sufficiente per definire le funzioni di tipo theta (cosa che sospettavo da diversi anni): essa svolge quindi per le theta il ruolo che il teorema di addizione di Weierstrass svolge per le funzioni abeliane (ed ora si potrebbe anche dire per le funzioni di tipo abeliano); fatto stranamente mai notato prima, benchè casi particolari, per es. $\sigma(u+v)\sigma(u-v) = \sigma^2(u)\sigma^2(v)(\wp(u) - \wp(v))$, fossero ben noti.

In [1] avevo ottenuto la theta di un divisore in modo fortemente geometrico, mediante le classi di ripartizioni e i differenziali di seconda e terza specie; tuttavia l'aggancio ad F era basato sul «teorema del quadrato», ossia sulla relazione $\sigma_{p+q}^{-1}X - \sigma_p^{-1}X - \sigma_q^{-1}X + X \sim 0$, che nasconde una faccenda di estensioni di gruppi (chiamata anche coomologia); la caratteristica p si prestava male al trattamento geometrico, e quindi in seguito (*Theta functions in positive characteristic*, Asterisque, 63, 1979, p. 5) ricavavo le theta direttamente dalla F, e quindi dal teorema del quadrato, cosa fattibile perchè F è, in ogni coppia di indeterminate, un sistema di fattori simmetrico; come ivi suggerito, il metodo è usabile in tutti gli ambienti nei quali è lecito aspettarsi una «teoria theta». La semplificazione attuale, che usa solo la prostaferesi, è basata sul caso particolare del teorema del quadrato ottenuto per $Q = -P$, ossia $\sigma_p^{-1}X + \sigma_{-p}^{-1}X - 2X \sim 0$ (teorema del triangolo?), ma le dimostrazioni in caratteristica zero sono di nuovo geometriche; per estendere alla caratteristica p, e magari a tutti gli ambienti nominati poco fa, sarà necessario appurare quale fatto «coomologico» sia nascosto sotto la formula precedente, e più precisamente: che cosa è, in termini di coomologia, la

$$g(u, v) = \theta(u+v)\theta(u-v)/\theta^2(u)\theta(v)\theta(-v)?$$

È caratterizzata, per esempio, dalla relazione

$$g(u+w,v)g(u-w,v)g^2(u,w) = g(u,w+v)g(u,w-v)g(v,w)g(-v,w)\,,$$

ed è funzione pari dei secondi argomenti.

Comunque sia, questo sprona ad investigare la vera natura delle tipo theta che non siano theta; è l'argomento della sez. 2, e la facile risposta è: una tipo theta non è altro che una theta nella quale gli argomenti vengano sostituiti da combinazioni lineari «generiche» di un numero minore di argomenti. Se questo «numero minore» si prende uguale ad 1 si ottiene la motivazione delle sez. 5, 6: le tipo theta in una indeterminata sono delle nuove trascendenti (e bastano quelle intere) senza periodicità, dalle quali si possono estrarre *tutte* le varietà gruppali commutative, di dimensione qualsiasi, con la sola eccezione di quelle aventi un fattore diretto vettoriale di dimensione > 1. Ed il modo di verificare se una serie di potenze sia o no di tipo theta è anche esso abbastanza singolare, benchè non proprio inaspettato [1]: ci sono dei polinomi tuttofare $P_0 = \frac{1}{2}$, $P_2(x_2), \ldots, P_{2i}(x_2, x_4, \ldots, x_{2i}), \ldots$, a coefficienti razionali, tali che l'imporre che da un certo i in poi essi dipendano linearmente, su k, dai precedenti quando si sostituiscano le x_i con le

$$\theta_i(u) = (i!)^{-1}(\partial/\partial u)^i \log \theta(u),$$

dà un sistema di infinite equazioni differenziali la cui soluzione è appunto una tipo theta olomorfa; non solo: il sistema è equivalente ad una sola equazione differenziale contenente solo le $\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_r$ per un certo r; tale equazione differenziale è una equazione algebrica fra le θ_i, ed è l'equazione di una varietà su k birazionalmente equivalente ad una varietà gruppale (commutativa). È addirittura possibile (risultato 6.5) scrivere un sistema universale di equazioni differenziali, con i coefficienti numeri razionali univocamente determinati, dal quale nel modo detto si ricavano tutte le varietà gruppali commutative, con la sola eccezione di quelle descritte prima. Qualche esempio (i calcoli diventano rapidamente formidabili) è nella sezione 7.

L'appendice propone una descrizione accurata delle varietà gruppali commutative, che anche dal punto di vista astratto, e cioè prescindendo dalla razionalità delle operazioni, sono costituite da un conglomerato fortemente strutturato di gruppi.

Parlando delle theta non si può passare sotto silenzio il fenomeno, non nuovo ma ora massiccio, della loro proliferazione in campi ben lontani da quello dove sono nate; parlo delle equazioni differenziali non lineari della fisica matematica. A parte la naturale gratificazione nel constatare come enti inventati e studiati dai geometri per motivi estetici si siano poi rivelati preziosi nella soluzione di problemi pratici (non sarebbe la prima volta), ci se ne può

[1] Cfr. la discussione che segue l'8.3 nel mio lavoro *Risultati e problemi nella teoria delle varietà gruppali*, Rend. Sem. Matem. Messina, 4, 1958-59, p. 1.

chiedere il motivo; questo è ben più profondo di una moda, ed è fornito molto precisamente dall'algebra differenziale: essenzialmente ogni equazione differenziale (e vi comprendo i sistemi di equazioni differenziali, ordinarie o alle derivate parziali, purchè algebriche nelle varie derivate delle incognite) ha il proprio gruppo di Galois differenziale, che è un gruppo algebrico, ossia l'aperto non degenere di una varietà gruppale G; si sa che ogni G contiene un sottogruppo lineare invariante V (varietà di Vessiot) tale che $A = G/V$ è varietà abeliana (cfr. nota 2). La soluzione dell'equazione differenziale può perciò spezzarsi in due scatti; il primo usa solo V, ed è un'equazione di Picard-Vessiot, ossia lineare; il secondo è la parte non lineare, ed ha A come gruppo di Galois; qualsiasi cosa connessa ad A è costruibile con le theta, ed ora posso anche dire con le tipo theta. Ecco quindi che la comparsa delle theta nella fisica matematica coincide con il progresso di questa disciplina dallo studio delle approssimazioni lineari a quello di approssimazioni di ordine più elevato, o magari delle leggi esatte anzichè approssimate. La cosa più simpatica è che vi è un rimbalzo (ed anche questo è già accaduto), in quanto la fisica matematica sta aiutando a risolvere problemi «estetici» sulle theta.

2. - Premesse e richiami

Indico con k un corpo di caratteristica zero; con $k[[u_1, \dots, u_n]] = k[[u]]$ l'anello delle serie di potenze nelle u, a coefficienti in k e ad esponenti interi non negativi; i prodotti tensoriali $\otimes$, o quelli completati $\overline{\times}$, si intendono sempre su k. Invece $k(u) = Q(k[[u]])$, ove $Q(?)$ indica, come sempre nel seguito, il corpo quoziente di $?$. Pongo $d_i = \partial/\partial u_i$, ma pongo anche, per un multiindice $r = (r_1, \dots, r_n)$,

$$d_r = (r!)^{-1} d^r = (r_1!)^{-1} \dots (r_n!)^{-1} d_1^{r_1} \dots d_n^{r_n};$$

il contesto dirà se in d_i la i è un indice od un multiindice. Se oltre alle indeterminate u vi sono anche delle indeterminate v, od altre, le d_r rispetto alle u saranno indicate con d_{u^r}, quelle rispetto alle v con d_{v^r}, ecc.. A proposito di multiindici, porrò $|r| = \sum_{i=1}^{n} r_i$, e $r < s$ se $r_i \leq s_i$ per ogni i, ma $r_i < s_i$ per almeno un valore di i. Altra cosa sui multiindici: la loro somma si fa sugli elementi; per un intero razionale q ed un multiindice r ad elementi razionali, qr significa $(qr_1, \dots, qr_n)$; infine, ε_i è il multiindice avente tutti gli elementi 0, eccetto lo i-esimo che è 1.

I 3.2, 3.3 di [1] saranno continuamente usati, ed è bene ripeterli qui:

2.1 Lemma: *Sia* $\varphi(u, v) \in k[[u, v]] = k[[u]] \overline{\times} k[[v]]$; *allora*:

1. *È* $\varphi \in k[[u]] \otimes k[[v]]$ *se e solo se lo spazio vettoriale* U *su* k *generato dalle* $(d_{u^r}\varphi)(u, 0)$ *ha dimensione finita. In tal caso l'analogo spazio vettoriale* V *generato dalle* $(d_{v^r}\varphi)(0, v)$ *è anch'esso di dimensione finita; si ha* $\dim V = \dim U$, *e* $\varphi(u, v) \in U \otimes V$.

2. *Se la condizione* 1 *è verificata, e se* C, D *sono i corpi generati, su* k, *da* U, V *rispettivamente, essi sono finitamente generati su* k; C *è il minimo sottocorpo* H *di* $k\{u\}$, *contenente* k, *tale che* $\varphi(u, v) \in H\{v\}$, *od anche tale che* $\varphi(u, v) \in \mathcal{Q}(H \otimes k\{v\})$; *infine,* $\varphi(u, v) \in \mathcal{Q}(C \otimes D)$.

3. *L'asserto* 2 *è valido anche sotto la sola ipotesi che* $\varphi(u, v) \in \mathcal{Q}(k\{u\} \otimes k\{v\})$.

L'anello $k\{u\}$ diviene un ipercampo locale di dimensione n se lo si munisce del *coprodotto* cocommutativo $\mathbf{P}$ dato da $\mathbf{P}u_i = u_i \overline{\times} 1 + 1 \overline{\times} u_i$, ed ovviamente dell'*inversione* $-\iota$ data da $(-\iota)u_i = -u_i$ (ι è sempre l'applicazione identica, ed il $-\iota$ è calcolato rispetto all'operazione di somma di omomorfismi data da $\alpha + \beta = \mu(\alpha \otimes \beta)\mathbf{P}$, ove μ è l'applicazione prodotto).

Un elemento $\varphi(u) \in k\{u\}$ è un *esponenziale quadratico* (risp. *lineare*) se $\varphi(u) = c \exp f(u)$, con $0 \neq c \in k$ ed $f(u)$ polinomio di grado ≤ 2 (risp. ≤ 1) nelle u tale che $f(0) = 0$. La nozione di *ipercorpo* (cocommutativo e finitamente generato) è data brevemente in [1], ed è più ampiamente trattata in [2]; i significati di «varietà gruppale», σ_p, σ_p^{-1}, A_d, A_m, $=$, $\approx$, λ_X sono dati nell'Appendice. Gli ipercorpi non sono altro che i $k(A)$ quando A è varietà gruppale, con il coprodotto $\mathbf{P}$ dell'ipercorpo e la legge di composizione μ della varietà gruppale legati da $(\mathbf{P}\times)(P \times Q) = \times(\mu(P \times Q))$ quando ambo i membri hanno senso; $C = k(A)$ è l'*ipercorpo di* A, ed A è la *varietà gruppale di* C. È proprio un peccato dover giostrare fra la teoria degli ipercorpi, che non ha problemi di oggetti «generici», di punti che rischiano di essere singolari, di varietà birazionalmente equivalenti ma non identiche, ecc., e quella delle varietà gruppali stesse; benchè quest'ultima preceda storicamente quella degli ipercorpi, sarebbe auspicabile che la teoria degli ipercorpi venisse completata in modo da non dover fare mai ricorso alle varietà, salvo che per il teorema di immersione proiettiva, che ha i suoi usi e vantaggi; ciò che essenzialmente manca, nella trattazione [2], è la teoria dei divisori su un ipercorpo; lacuna colmabile mediante una delle definizioni di «divisore» più alla moda, quella in cui ad ogni punto P (notazioni di [2]) di C si fa corrispondere un elemento di C^*/P^*, ove l'asterisco indica il gruppo delle unità dell'anello cui esso è apposto.

In [1] si è chiamata funzione di tipo theta delle u ogni $\theta(u) \in k\{u\}$ non nulla tale che

$$2.2 \qquad F(u, v, w) = \frac{\theta(u+v+w)\theta(u)\theta(v)\theta(w)}{\theta(u+v)\theta(u+w)\theta(v+w)} \in \mathcal{Q}(k\{u\} \otimes k\{v\} \otimes k\{w\}) ;$$

qui diremo semplicemente una *tipo theta*; due tipo theta sono *associate* se il loro quoziente è un esponenziale quadratico. Ad una tipo theta sono collegati due interi, la *dimensione* dim θ e la *trascendenza* trasc θ, ed un ipercorpo $C = C_\theta$ finitamente generato su k (*ipercorpo di* θ) nel modo seguente: C è il minimo sottocorpo di $k\{u\}$, contenente k, tale che $F \in C\{v, w\}$, nel qual caso $F \in \mathcal{Q}(C \otimes C \otimes C)$; il coprodotto di C è indotto dal $\mathbf{P}$ di $k\{u\}$; trasc θ = trasc C/k; dim θ è la dimensione del minimo sottoipercampo locale di $k\{u\}$ il cui corpo quoziente contenga una tipo theta associata a θ. È dim $\theta \leq n$, e θ è *non degenere*

se $\dim \theta = n$. La nozione di « funzioni associate », e quella di « degenere » la applicherò anche ad elementi di $k\{u\}$ che non siano necessariamente tipo theta. La varietà gruppale $A = A_\theta$ di C si chiamerà anche la *varietà gruppale di* θ.

Si ha trasc $\theta \geq \dim \theta$, e θ è funzione theta, o una *theta*, se e solo se vale la uguaglianza. L'ipercorpo C è generato, su k, dalle $d_r \log \theta$ con $|r| \geq 2$; la espressione $d_r \log \theta(u)$ ha un chiaro significato se $\theta(0) = 1$; negli altri casi si interpreta come suggerisce l'esempio seguente: $d_1^2 \log \theta = d_1^2 (d_1 \theta / \theta)$.

Debbo ora parlare di divisori; occorre ogni volta specificare se si tratti di divisori su A o di divisori su $A \setminus A_d$, questi ultimi avendo il divieto di avere componenti su A_d; è una distinzione che in [1] non ho fatto, ed infatti in [1] le varietà gruppali non abeliane sono state appena sfiorate. C'è un altro invariante legato alla tipo theta $\theta(u)$, ed è il suo *divisore* $\operatorname{div} \theta$, che è sempre un divisore su $A \setminus A_d$: è l'unico divisore X su A, che automaticamente è su $A \setminus A_d$, tale che il divisore di F su $A \times A \times A$, anch'esso automaticamente su $(A \times A \times A) \setminus (A \times A \times A)_d$, sia $X_{123} + X_1 + X_2 + X_3 - X_{12} - X_{13} - X_{23}$, con significato dei simboli che spero sia evidente: per es. $X_{12} = (\operatorname{div} \mu) X \times A$ (notare che $\operatorname{div} \mu$ opera contravariantemente sui divisori). Questo è veramente dimostrato in [1] solo per le theta, ma si estende agevolmente alle tipo theta osservando che F, in quanto elemento di $k(A \times A \times A)$, ha la proprietà che per P punto generico del primo fattore l'$F(P \cdot, \cdot)$ è sistema di fattori di $A \times A$ (secondo e terzo fattore) sulla varietà logaritmica unidimensionale (chiamata anche, chissà perchè, toro). Se θ è non degenere, il suo divisore X ha la proprietà che $\sigma_P^{-1} X = X$ solo se $P = O$ (punto identità). Gli invarianti descritti non cambiano quando θ viene sostituita con una propria associata.

Un ultimo richiamo: la $\theta(u)$, di tipo theta, è *olomorfa* (o *intera*) se $\operatorname{div} \theta$ è effettivo; questo è il caso, secondo il 3.9 di [1] (ivi dimostrato solo per le theta, ma facilmente estensibile) se e solo se

$$\theta(u+v)\theta(u-v) \in k\{u\} \otimes k\{v\}\,; \tag{2.3}$$

chiamerò questa la *prostaferesi olomorfa*; invece *prostaferesi* senza aggettivi è la

$$\theta(u+v)\theta(u-v) \in \mathcal{Q}(k\{u\} \otimes k\{v\})\,,$$

soddisfatta da ogni tipo theta. Posso ora interpretare le tipo theta:

2.4 Teorema: *Se $\theta(u) \in k\{u_1, \ldots, u_n\}$ è tipo theta non degenere, esistono una theta $\theta(v) \in k\{v_1, \ldots, v_m\}$ non degenere, e degli elementi $c_{ij} \in k$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$ tali che $m \geq n$, che la matrice (c_{ij}) abbia caratteristica n, e che $\theta(u) = \theta(x_1, \ldots, x_m)$, avendo posto $x_i = \sum_j c_{ij} u_j$. L'omomorfismo continuo di $k\{v\}$ su tutto $k\{u\}$ che manda v_i su x_i induce un isomorfismo σ di C_θ su tutto C_θ, tale che $(\operatorname{div} \sigma) \operatorname{div} \theta = \operatorname{div} \theta$. Reciprocamente, se $\theta(v) \in k\{v_1, \ldots, v_m\}$ è una theta non degenere, e se l'omomorfismo sopra descritto, con (c_{ij}) di caratteristica n, induce un isomorfismo di C_θ su $k\{u\}$, la $\theta(x)$ è tipo theta non degenere, con ipercorpo C_θ* (cfr. il commento dopo il 3.12).

Dim.: Data la $\theta(u)$, ne sia A la varietà gruppale, certo di dimensione $m \geq n$ se θ è non degenere, e ne sia X il divisore; supporrò $m > n$, chè altrimenti gli asserti sono banali. Se $k\{v\}$ è il completamento di $k(O/A)$, sia $\theta(v) = \theta_X(v) \in k\{v\}$. Se $C = C_\theta = k(A)$, l'immersione di C in $k\{u\}$ dà un'immersione di $k(O/A)$ in $k\{u\}$, che può essere prolungata per continuità ad un omomorfismo σ di $k\{v\}$ su tutto $k\{u\}$ (come ipercampi), dato appunto da $\sigma v_i = x_i = \sum_j c_{ij} u_j$. Previo cambiamento di parametri regolari, si può supporre $c_{ij} = \delta_{ij}$, ossia $\sigma v_i = x_i = u_i$ per $i = 1, \ldots, n$, e $\sigma v_i = 0$ per $i > n$. Ora $\theta(x) = \theta(u_1, \ldots, u_n, 0, \ldots, 0) = \sigma\theta(v_1, \ldots, v_m)$ è intanto $\neq 0$; per dimostrarlo, supponiamo che θ sia olomorfa, chè se è vero per le olomorfe è vero per tutte: se allora $\sigma\theta$ fosse $= 0$, talune delle $Q_{r,s}$ del 3.10 di [1] (o delle $H_{r,s}$ del 4.1 del presente lavoro), costruite con la $\theta(v)$, si annullerebbero per $v_{n+1} = \ldots = v_m = 0$; perciò il nucleo di σ intersecherebbe $k(O/A)$ in un ideale non nullo, e σ non potrebbe indurre un isomorfismo di C. La $\theta(x)$ è quindi, come elemento di $k\{u\}$, di tipo theta, certo non degenere; il suo F (cfr. 2.2), che indicherò con $F[\theta(x)]$, coincide con $\sigma F[\theta(v)]$, il che mostra, visto che σ induce un isomorfismo di $C \otimes C \otimes C$, che l'ipercorpo di $\theta(x)$ è σC; ma allora $F[\theta(x)] = F[\theta(u)]$ perchè X è divisore sia di $\theta(v)$ che di $\theta(u)$. Pertanto $\theta(x)$ e $\theta(u)$ sono associate, e una diversa scelta di $\theta(v)$ dà $\theta(x) = \theta(u)$, come asserito. Il reciproco è ora immediato, C.V.D.

2.5 Teorema: *Nelle notazioni dell'ultima parte del 2.4, suppongasi $m > n > 0$; si possono allora trovare delle c_{ij} con la proprietà descritta se e solo se l'eventuale fattore diretto vettoriale della varietà gruppale di θ ha dimensione $< n$. E le c_{ij} hanno la proprietà descritta se e solo se il corpo delle costanti, in C_θ, rispetto alle $\sum_i c_{ij} d_{ri}$ è k* (cfr. il commento dopo il 3.12).

Dim.: Mi pongo nella situazione generale di un ipercampo $R = k\{v_1, \ldots, v_m\}$ su k, e di un suo omomorfismo σ su tutto un $R_1 = k\{u_1, \ldots, u_n\}$, di nucleo J. Indico con der R, o der A se R proviene da una varietà gruppale A, il k-modulo delle derivazioni invarianti di R, e con der σ l'omomorfismo di der R_1 su der R prodotto da σ. Posto $R' = R \cap C = k(O/A)$ e $J' = J \cap R'$, ci interessa trasformare la relazione $J' = 0$ in una condizione su (der σ) der R_1. Ora, come spiegato nel 3.22 di *Metodi analitici per varietà abeliane in caratteristica positiva*, Capitoli 3, 4 (Ann. Scuola Norm. Sup., 19, 1965, p. 277), e nei suoi dintorni, J è l'ortogonale di (der σ) der R_1 in R, nella dualità $d\sigma\varphi(v) = (d\varphi)(0)$; quindi J' è l'ortogonale di (der σ) der R_1 in R'. D'altra parte il corpo delle costanti, in C, rispetto a (der σ) der R_1 è un sottoipercorpo F di C, e l'immersione produce un omomorfismo di A su tutta la varietà gruppale D di F, il cui nucleo ha in R' l'ideale J'; si ha anzi $J' = S^+ R'$ se $S = k(O/D)$, avendo indicato con S^+ l'ideale delle non unità di S. Si ha quindi $J' = 0$ se e solo se $S^+ = 0$, e cioè se e solo se $S = k$; dato che (der σ) der R_1 è generato dalle (der σ)$d_{ri} = \sum_i c_{ij} d_{ri}$ quando $\sigma v_i = \sum_j c_{ij} v_j$, ecco dimostrato l'ultimo asserto dell'enunciato.

Il primo ne discende immediatamente: una scelta della matrice (c_{ij}) sceglie un sottospazio n-dimensionale H del k-spazio vettoriale m-dimensionale der A; se la scelta dà, come corpo delle costanti, un sottoipercorpo $k(D)$, con D immagine omomorfa, di dimensione positiva e certo $< m - n$, di A, lo spazio H deve essere ortogonale a $\mathrm{diff}_1 D$, considerato immerso in $\mathrm{diff}_1 A$ (diff_1 = differenziali invarianti); i c_{ij} con la proprietà descritta nell'enunciato sono inesistenti se e solo se ogni sottospazio di dimensione $m - n$ di $\mathrm{diff}_1 A$ contiene qualche $\mathrm{diff}_1 D \neq 0$; ciò accade certamente se la dimensione del fattore diretto vettoriale di A è $> n$, ma è falso altrimenti, perchè ci sono troppo poche D, C.V.D.

2.6 Corollario: *Sia n un intero positivo, e sia A varietà gruppale di dimensione m con componente vettoriale di dimensione $< n$; sia X un divisore effettivo su $A \setminus A_d$ tale che $\sigma_P^{-1} X \neq X$ quando $P \neq O$. Esiste allora una tipo theta olomorfa $\theta(u_1, \ldots, u_n)$ tale che:*

1. *$k(A)$ è l'ipercorpo di θ, ed è generato su k da un numero finito di $d_r \log \theta$, con $|r| > 1$;*

2. *$X = \mathrm{div}\, \theta$.*

Siano B varietà gruppale, D il suo ipercorpo, θ una tipo theta; dirò che θ è *tipo theta su B*, o *per D*, se l'ipercorpo di θ è sottoipercorpo di D, o equivalentemente se la varietà gruppale A di θ è immagine omomorfa di B in un omomorfismo α; il *divisore di θ su B* (e quindi su $B \setminus B_d$), in simboli $\mathrm{div}_B\, \theta$, non è altro che $(\mathrm{div}\, \alpha) X$ se $X = \mathrm{div}\, \theta = \mathrm{div}_A\, \theta$. Dopo opportuna scelta del fattore esponenziale quadratico, si ha $\theta \in k(B)$ se e solo se $X = \mathrm{div}_B\, \theta$ è linearmente equivalente, su B, ad un divisore E con componenti tutte su B_d; in tal caso θ ha un divisore su B anche in quanto elemento di $k(B)$, e non solo come tipo theta; tale divisore è $X - E$, e per distinguerlo da $\mathrm{div}_B\, \theta$ userò la frase completa « divisore di θ su B in quanto elemento di $k(B)$ ».

Ci si può chiedere, nel caso di una tipo theta ma non theta, quale sia la topologia di $k(O|A)$ che produce il completamento $k[u]$, di dimensione $u < \dim A$; osservo anzitutto che $R = C \cap k[u]$ è un anello locale regolare di dimensione u che contiene propriamente $S = k(O|A)$; il suo corpo residuo è k; inoltre $R^+ \cap S = S^+$, e $k[u]$ è il completamento di R, od anche di S, nella topologia locale di R; infine, S^+ è non ramificato in R, il che significa che $R^+ = S^+ R$. Però R non è il localizzato di S su qualche suo ideale primo, e quindi non è il $k(V|A)$ per qualche sottovarietà irriducibile V di A contenente O; anzi, il centro di R su qualunque modello proiettivo di C è un punto, e perciò R non è il $k(V|B)$ per nessuna sottovarietà V di una B birazionalmente equivalente ad A. È invece, in senso euristico, legato ad una sottovarietà analitica di A, che è anche sottogruppo: se $y_1, \ldots, y_{m-n}$ sono combinazioni lineari, a coefficienti in k, degli integrali invarianti normalizzati $v_1, \ldots, v_m$ su A, che generano il nucleo del σ del 2.4, la sottovarietà analitica V è definita dalle equazioni $y_i = 0$; questo diventa preciso quando k è il corpo com-

plesso. Una nota di cautela: se $x \in C$, l'esistenza di $x(O)$ significa che $x \in S$, nel qual caso $x \in R$ ed $x(0)$ esiste; invece l'esistenza di $x(0)$ significa solo che $x \in R$, e non comporta l'esistenza di $x(O)$.

3. - Criteri per funzioni tipo theta

La condizione 2.2, che usa la F per definire una tipo theta, è poco maneggevole perchè richiede di controllare che F sia in un certo corpo quoziente, anche nel caso in cui poi la tipo theta risulti olomorfa; invece la condizione 2.3 di olomorfismo è assai maneggevole, appunto per l'assenza del simbolo $Q(\ldots)$. È quindi fortunato che la 2.3 sia non solo condizione di olomorfismo, ma addirittura condizione a che $\vartheta(u)$ sia tipo theta; lo dimostrerò in questa sezione, ma prima voglio ricordare certe formule che coinvolgono i logaritmi. Se $\varphi \in k\{u\} = k\{u_1, \ldots, u_n\}$, porrò sempre, per un multiindice $r > 0$, $\varphi_r = d_r \log \varphi$; è già stato visto nella sezione 3 di [1] che esistono polinomi $Q_s(\varphi)$ nelle φ_r con $0 < s < r$, a coefficienti razionali positivi, tali che

$$d_r \varphi(u) = \varphi(u) Q_r(\varphi) . \tag{3.1}$$

Quindi si può anche definire $Q_0 = 1$. Se si dà peso r a φ_r, il Q_r è isobarico di peso r, e contiene il monomio φ_r se $r > 0$; l'espressione esplicita dei Q_r può essere trovata così: si parte dalla formula seguente, che vale anche quando $\log \varphi(u)$ non esiste:

$$\varphi(u + v) = \varphi(u) \exp \sum_{r>0} \varphi_r(u) v^r = \varphi(u) \sum_{r \geq 0} Q_r(\varphi(u)) v^r ; \tag{3.2}$$

uguagliando i coefficienti di v^r si ottiene il

3.3 Lemma: *Se $\varphi(u) \in k\{u_1, \ldots, u_n\}$, e se $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sono tutti i multiindici con n elementi che sono > 0 e $< r$, $Q_r(\varphi)$ è la somma di tutti i monomi $(j!)^{-1} \varphi_{s_1}^{j_1} \ldots \varphi_{s_n}^{j_n}$, ove $(j_1, \ldots, j_n)$ percorre tutte le n-ple di interi non negativi tali che $j_1 s_1 + \ldots + j_n s_n = r$.*

Vale la pena di dare esplicitamente il caso particolare in cui $n = 1$, ossia in cui vi è una sola u.

3.4 Corollario: *Se $\varphi(u) \in k\{u\}$ (una sola indeterminata), allora $Q_r(\varphi) = \sum_j (j!)^{-1} \varphi_1^{j_1} \ldots \varphi_r^{j_r}$, la somma essendo estesa a tutti i $(j_1, \ldots, j_r) > 0$ tali che $\sum_{i=1}^{r} i j_i = r$.*

Vale la regola, dedotta da 3.4:

$$Q_{r+1}(\varphi) = (r+1)^{-1} [\varphi_1 Q_r(\varphi) + d Q_r(\varphi)] \tag{3.5}$$

(si ricordi che $d\varphi_i = (i+1)\varphi_{i+1}$).

3.6 Lemma: *Siano $u_1, \ldots, u_n$ indeterminate, e siano $x_1, \ldots, x_r$ loro combinazioni lineari a coefficienti in k tali che le $y_i = \exp x_i$ siano algebricamente indipendenti su k.*

Sia $\delta \in k[u]$ non nullo tale che le sue derivate logaritmiche seconde rispetto alle u siano «polinomi» nelle u, y a coefficienti in k, ove nell'espressione «polinomio» si permette che le y_i compaiano con esponenti negativi. Suppongasi poi che

$$g(u, v) = \frac{\delta(u+v)\delta(u-v)}{\delta^2(u)\delta(v)\delta(-v)}$$

sia una funzione razionale fratta nelle u, y, v, z a coefficienti in k (le z sono costruite con le v come le y con le u). Allora δ è esponenziale quadratico nelle u.

Dim.: I «polinomi» sono elementi di $k[u]$; se δ non fosse unità di $k[u]$ non tutte le sue derivate logaritmiche seconde sarebbero in $k[u]$; quindi δ è unità di $k[u]$, e senza perdita di generalità posso supporre che $\delta(0) = 1$, cosicchè $\log \delta$ esiste. Se le sue derivate seconde sono «polinomi», tale deve essere il $\log \delta$ stesso, onde $\delta = \exp f(u, y)$, con f «polinomio». Il $g(u, v)$ è allora uguale ad

$$\exp\,[\,f(u+v, yz) + f(u-v, y/z) - 2f(u, y) - f(v, z) - f(-v, z^{-1})]\,;$$

un esponenziale è funzione razionale fratta se e solo se è costante, ossia $= 1$; quindi

$$f(u+v, yz) + f(u-v, y/z) = 2f(u, y) + f(v, z) + f(-v, z^{-1})\,;$$

applicando una qualsiasi $d_u d'_u$, e ponendo $v = 0$: $2dd' f(u, y) = 2[dd' f(u, y)]_{u=0} \in k$. Perciò le derivate logaritmiche seconde di δ sono in k, e δ è esponenziale quadratico, C.V.D.

Posso ora dimostrare il

3.7 Teorema: *Un elemento non nullo $\theta(u) \in k[u_1, \ldots, u_n]$ è tipo theta se e solo se $\theta(u+v)\theta(u-v) \in \mathcal{Q}(k[u] \otimes k[v])$.*

Dim.: Se $\theta(0)$ esiste e non è 0 la necessità della condizione si legge dal 2.2 ponendovi $w = -v$; e si badi che non c'è il pericolo che il denominatore dell'elemento di $\mathcal{Q}(k[u] \otimes k[v] \otimes k[w])$ si annulli per $w = -v$, perchè tale elemento è anche in $\mathcal{Q}(C \otimes C \otimes C)$ (lo si è dimostrato nell'[1], senza ricorso al «trucco» ivi usato, e del quale mi fido poco); l'essere in $\mathcal{Q}(C \otimes C \otimes C)$ ci permette di esprimerlo con un denominatore che non si annulla in O, e quindi neppure per $w = -v$. Se invece $\theta(0)$ non esiste o è 0, uso $\theta(u_1 + u_2) \in k[u_1][u_2]$ in luogo di $\theta(u)$; il $k[u_1]$ sostituisce k (è un ragionamento che dovrò ripetere alla fine di questa dimostrazione). Per essa è vero quanto ipotizzato sopra, e cioè che $\theta(u_1 + 0)$ esiste e non è 0, sicchè il

$$\frac{\theta^2(u_1+u_2)\theta(u_1+v)\theta(u_1-v)}{\theta(u_1+u_2+v)\theta(u_1+u_2-v)}$$

è elemento di $\mathcal{Q}(C' \otimes C')$, ove il $\otimes$ è preso su $k\{u_1\}$, e i due C' sono generati, su $k\{u_1\}$, dalle $\theta_r(u_1 + u_2)$, e rispettivamente $\theta_r(u_1 + v)$, con $|r| > 1$. Questa generazione dei C' dice che in realtà $C' = \mathcal{Q}(k\{u_1\} \otimes C)$, il $\otimes$ preso, al solito, su k; quindi il quoziente di varie θ scritto sopra è elemento di $\mathcal{Q}(k\{u_1\} \otimes C \otimes C)$; esso è però unità di $k\{u_2, v\}\{u_1\}$, e quindi di $(\mathcal{Q}(C \otimes C))\{u_1\}$, e come tale assume in $u_1 = 0$ un valore in $\mathcal{Q}(C \otimes C)$. Questo termina la dimostrazione della necessità.

Per la sufficienza, la dimostrazione sarà diretta e rapida nel caso in cui $\theta(0)$ esiste ed è non nullo, ed inoltre una certa varietà gruppale A che introdurrò è abeliana; eliminerò poi la condizione di abelianità, e infine quella su $\theta(0)$. Supporrò subito, senza perdita di generalità, che $\theta(u)$ sia non degenere, e porrò, per $i = 1, \ldots, n$, $\zeta_i(u) = d_i \log \theta(u) = \theta_{u_i}(u)$; applicando $d_{u_i} \log$ alla relazione 3.7 si ottiene $\zeta_i(u + v) + \zeta_i(u - v) \in \mathcal{Q}(k\{u\} \otimes k\{v\})$; ed applicando $d_{v_i} \log$:

$$\zeta_i(u + v) - \zeta_i(u - v) \in \mathcal{Q}(\ldots) \text{ ; perciò } \zeta_i(u + v) - \zeta_i(u) - \zeta_i(v) \in \mathcal{Q}(\ldots) .$$

A questo punto suppongo, fino ad avviso in contrario, che $\theta(0)$ esista e sia non nullo; siamo allora nella situazione dell'asserto 3 del 2.1, e quindi esiste un minimo sottocorpo C di $k\{u\}$, finitamente generato su k, tale che

$$\zeta_i(u + v) - \zeta_i(u) - \zeta_i(v) \in \mathcal{Q}(C \otimes C) ; \tag{3.8}$$

sempre per il 2.1, C è generato, su k, dalle $d_r \zeta_i(u)$ con $|r| > 0$, ossia dalle $\theta_r(u)$ con $|r| > 1$; e naturalmente basta un numero finito di queste. Il PC è generato dalle $\theta_r(u + v)$; ma applicando $d_{u_i - v_i}$ alla 3.8, dopo aver scelto i in modo che $r - \varepsilon_i > 0$, si ottiene $\theta_r(u + v) \in \mathcal{Q}(C \otimes C)$, sicchè $PC \subseteq \mathcal{Q}(C \otimes C)$, condizione necessaria a che C sia un ipercorpo (cfr. sez. 2 di [2]). Occorre dimostrare che $(-1)C \subseteq C$, o, nel simbolismo di [2], che $\varrho_0 C \subseteq C$, e questo si fa nello stesso modo usato per il Teorema del Pagano (3.5 di [1]); le condizioni 2.3, 2.4, 2.5 di [2] sono soddisfatte, e quindi C è ipercorpo.

Torno alla formula del 3.7 ed applico l'asserto 3 del 2.1; lo spazio vettoriale U in esso descritto è generato dalle $[d_{u_r}(\theta(u + v)\theta(u - v))]_{u=0}$, che per il 3.1 si ottengono da $\theta^2(u)\mathcal{Q}_r(\varphi(u))$ sostituendo nei $\mathcal{Q}_r$ i $\varphi_s(u)$ con 0 se $|s|$ è dispari, e con $2\theta_s(u)$ se $|s|$ è pari; questi nuovi $\mathcal{Q}_r$ (li chiamo ancora così) sono tutti in C, e perciò ogni elemento di U è il prodotto di $\theta^2(u)$ per un elemento di C. Quanto a V, esso è generato dalle $[d_{v_r}(\theta(u + v)\theta(u - v))]_{u=0}$, che nello stesso modo si ottengono da $\theta(v)\theta(-v)\mathcal{Q}_r(\varphi(v))$ sostituendo i $\varphi_s(v)$ con $\theta_s(v) + \theta_s(-v)$; questi sono di nuovo tutti in C, eccetto al più quelli con $|s| = 1$, vale a dire gli $\zeta_i(v) + \zeta_i(-v)$; ma anche questi sono in C, come si vede ponendo $u = -v$ nella 3.8. In conclusione,

$$\frac{\theta(u + v)\theta(u - v)}{\theta^2(u)\theta(v)\theta(-v)} \in \mathcal{Q}(C \otimes C) . \tag{3.9}$$

Nel leggere il seguito della dimostrazione è bene che il lettore osservi che la condizione su $\theta(0)$ non sarà più necessaria; quindi la dimostrazione nel caso generale sarà valida non appena essa giungerà alla conclusione 3.9. Continuo; detto $g(u, v)$ il primo membro del 3.9, e detta A la varietà gruppale di ipercorpo C, il $g(u, v)$ avrà su $A \times A$ un divisore Y. Applicando $d_{u_j} d_{u_i}$ al $\log g(u, v)$, con $i, j = 1, \ldots, n$, si ottiene

$$(d_j \zeta_i)(u+v) + (d_j \zeta_i)(u-v) - 2(d_j \zeta_i)(u) = d_{u_j} d_{u_i} \log g(u, v) ,$$

ossia

$$\mathrm{P} d_j \zeta_i + (\iota \otimes -\iota) \mathrm{P} d_j \zeta_i - 2 d_j \zeta_i \otimes 1 = (d_j d_i \otimes \iota) \log g .$$

Considero un divisore primo arbitrario Z su $A \setminus A_s$ e specializzo il primo membro della relazione precedente su un punto generico $-P$ del secondo fattore di $A \times A$ (può occorrere una estensione finita di k); esso diviene $\sigma_P d_j \zeta_i + \sigma_{-P} d_j \zeta_i - 2 d_j \zeta_i$; i primi due termini non hanno Z come polo, onde

$$-2 d_j \zeta_i = d_j d_i \log x_g \bmod k(Z/A) \tag{3.10}$$

se x_g è il valore di g in $A \times (-P)$. Tale x_g è poi un rappresentante di Y in $Z \times A$, ossia ha nella valutazione di $\mathcal{Q}(C \otimes C)$ con centro $Z \times A$ su $A \times A$ un valore uguale al coefficiente di $Z \times A$ in Y. Se però X è il divisore su $A \setminus A_s$ che per ogni Z è rappresentato in Z da x_g, e se si considera C immerso nel $k\{w_1, \ldots, w_m\}$ tale che $k\{w\}$ sia il completamento di $k(O/A)$, l'1.2 di [1] dà $d'_j d'_i \log \theta_g(w) = d'_j d'_i \log x_g \bmod k(Z/A)$, avendo indicato con d'_i la derivazione invariante di $k\{w\}$ che è la (der σ)-immagine della d_i per l'omomorfismo σ di $k\{w\}$ su $k\{u\}$ dato dall'immersione di C in $k\{u\}$ (cfr. 2.4); pertanto

$$d_j d_i \log \theta_g(\sigma w) = d_j d_i \log x_g ,$$

che con la 3.10 dà, se A_s è vuota e cioè se A è abeliana,

$$2 d_j \zeta_i(u) - d_j d_i \log \theta_g(\sigma w) \in k ;$$

quindi $\delta(u) = \theta^2(u)/\theta_g(\sigma w)$ è un esponenziale quadratico: $\theta^2(u)$ è tipo theta ed ha X come divisore su A. Per raggiungere il risultato che anche $\theta(u)$ è tipo theta proseguo così:

$$g^2(u, v) = \frac{\theta^2(u+v)\theta^2(u-v)}{\theta^2(u)\theta^2(v)\theta^2(-v)}$$

ha su $(A \times A) \setminus (A \times A)_s$ il divisore $X_{12} + X_{1,-2} - 2X_1 - X_2 - X_{-2}$, con significati abbastanza chiari dei simboli; ma il divisore di $g^2(u, v)$ su $A \times A$ è $2Y$, onde il divisore scritto sopra è il doppio di un divisore, ed $X = 2V$ per qualche divisore V. Ma allora $\theta_g(w)$ è associata a $\theta_V^2(w)$, e $\theta(u)$ è associata a

$\theta_\nu(\sigma u)$, ed è perciò tipo theta. Questo completa la dimostrazione quando $\mathcal{A}$ è abeliana.

Se $\mathcal{A}$ non è abeliana la via è un po' più lunga; ciò che si ottiene in quel caso con lo stesso ragionamento è che gli elementi $d_i d_i \log \delta(u) \in C$ hanno poli soltanto su $\mathcal{A}_d$; voglio di nuovo raggiungere la conclusione che essi sono in k. So che $\delta(u+v)\delta(u-v)$ appartiene a $\mathcal{Q}(k[u] \otimes k[v])$; il δ è così nella situazione iniziale della θ: ha un ipercorpo $E \subset C$ ed una varietà gruppale B immagine omomorfa di $\mathcal{A}$, ed ha inoltre la proprietà che i poli dei $d_i d_i \log \delta$ sono su B_d; è quanto dire che ogni $k(P|B)$ con $P \notin B_d$ contiene ogni $d_i d_i \log \delta$; contiene cioè un insieme di generatori di $k(B)$ (le derivate successive ci stanno automaticamente). È noto che solo le varietà gruppali razionali (= di Vessiot) hanno questa proprietà (*); quindi B è razionale, ed un suo punto generale non omogeneo è dato, per es., da $u_1, \ldots, u_r, \exp x_1, \ldots, \exp x_s$, con $r < n$ e con le x_i combinazioni lineari, a coefficienti in k, di $u_1, \ldots, u_n$; le $d_i d_i \log \delta$ sono « polinomi » negli argomenti ora scritti, se si permette, nell'espressione « polinomio », che le indeterminate $\exp x_i$ possano avere anche esponenti negativi (perchè B_d è formato dall'iperpiano all'infinito e dagli iperpiani $\exp x_i = 0$; d'accordo, non ho rispettato i patti sul dover essere B un prodotto alla Segre di rette, ed ho invece preso uno spazio proiettivo; va bene lo stesso, anzi, in questo caso va meglio). Scatta il 3.6, ed ecco che di nuovo $\delta(u)$ è esponenziale quadratico, come per le $\mathcal{A}$ abeliane.

La dimostrazione è ora completa per il caso in cui $\theta(0)$ esiste ed è non nullo. Se questa condizione non è soddisfatta procedo nel modo seguente: prendo copie u_1, u_2 delle u, e costruisco $\theta(u_1 + u_2)$; questa, come serie di potenze nelle u_2, soddisfa la prostaferesi, ed acquista in $u_2 = 0$ il valore non nullo $\theta(u_1)$. È quindi tipo theta, ed il suo ipercorpo è generato, su $k[u_1]$, dalle $\theta_\nu(u_1 + u_2)$ con $|\nu| > 1$, e certo da un numero finito di esse. Il polinomio minimo di una di queste sulle rimanenti può essere scelto a coefficienti in k, dato che u_1 ed $u_1 + u_2$ sono analiticamente indipendenti; perciò quell'ipercorpo è della forma $\mathcal{Q}(k[u_1] \otimes C_2)$, con C_2 corpo su k, generato dalle $\theta_\nu(u_2)$; non so ancora che C_2 sia ipercorpo su k. La $\theta(u_1 + u_2)$, come serie di potenze nelle u_2, è quindi nelle condizioni sotto le quali vale la 3.9, e perciò

$$\frac{\theta(u_1 + u_2 + u_3)\theta(u_1 + u_2 - u_3)}{\theta^2(u_1 + u_2)\theta(u_1 + u_3)\theta(u_1 - u_3)} \in \mathcal{Q}(k[u_1] \otimes C_2 \otimes C_3) .$$

Ma l'elemento ora scritto è una unità di $\mathcal{Q}(C_2 \otimes C_3)[u_1]$, ed assume perciò un valore in $\mathcal{Q}(C_2 \otimes C_3)$ per $u_1 = 0$; il valore che assume essendo

$$\frac{\theta(u_2 + u_3)\theta(u_2 - u_3)}{\theta^2(u_2)\theta(u_3)\theta(-u_3)} ,$$

(*) Cfr. il Teorema 1 del mio lavoro *Un teorema di struttura per le varietà gruppali*, Rend. Acc. Naz. Lincei, 18, 1955, p. 43; è il punto di partenza per la dimostrazione del teorema di struttura per varietà gruppali non necessariamente commutative.

ecco che questo elemento è in $\mathcal{Q}(C_1 \otimes C_2)$, e che perciò la 3.9 è valida. Attenzione, però: non sappiamo ancora che C sia ipercorpo; ma se vale la 3.9 vale anche la 3.8, e C è ipercorpo. Fine, C.V.D.

È forse non inutile ricordare che la $\theta = 0$ è veramente l'equazione di div θ quando ciò ha senso; le poche righe fra l'1.2 e l'1.3 di [1] dicono infatti che:

3.11 Teorema: *Se θ è tipo theta con varietà gruppale A, l'ideale fratto $\theta(u)k[u]$ è uguale all'ideale fratto di $k[u]$ generato da un rappresentante di* div θ *nel punto identità O di A.*

Il 3.7 ha poi il seguente

3.12 Corollario: *Ogni tipo theta è quoziente di due tipo theta olomorfe.*

Questo corollario comporta che sarebbe bastato dimostrare i 2.4, 2.5 solo per il caso olomorfo.

4. - Divagazioni

Vorrei anzitutto precisare l'enunciato e la dimostrazione del 3.10 di [1], che è anche stato usato nel 2.4 di questa esposizione; l'enunciato originale, e la sua dimostrazione, sono un po' fumosi, e si applicano come scritti solo alle varietà abeliane; sono anche complicati dalla menzione del carattere di omogeneità, che non è cosa germana all'argomento; spero fra l'altro (ma non lo so dimostrare) che quel carattere di omogeneità sia 1. Prima di ri-enunciare il 3.10 di [1] invito il lettore a rileggersi le argomentazioni che lo precedono; esse sono espresse per una varietà abeliana, e filano; si dice poi che per varietà gruppali non abeliane « occorre ricordarsi delle sottovarietà eccezionali » (intendevo dire degeneri); vedrò di « ricordarmene » con precisione ora, ripetendo quelle argomentazioni con le modifiche necessarie per varietà gruppali qualunque. Si parte quindi dal punto generale omogeneo $\{x_0, \ldots, x_n\}$ della varietà gruppale A; per ogni $y \in k[x]$ omogeneo si denota con X_y il divisore di y nel senso proiettivo, come spiegato in [1]; si chiama θ_i una tipo theta il cui divisore (certo su $A \setminus A_d$) sia il pezzo di X_{x_i} ottenuto da X_{x_i} cancellandovi le componenti degeneri; ora θ_i/θ_0 ed x_i/x_0 hanno, come tipo theta, lo stesso divisore, onde differiscono per un fattore esponenziale quadratico, che modificando solo θ_i può essere fatto $= 1$: $\theta_i/\theta_0 = x_i/x_0$. Se θ_0 è trascendente su $k(\ldots, \theta_i/\theta_0, \ldots)$ tutto il resto procede come prima, ossia come nell'[1]. Resta il caso in cui θ_0 è algebrico su quel corpo; ma in tal caso basta moltiplicare ogni θ_i per un esponenziale quadratico ϱ (e per non rovinare i primi due termini dello sviluppo di θ è bene prendere come esponente proprio una forma quadratica), ed ecco che il nuovo θ_0 diviene trascendente, e tutto fila liscio. È come se ϱ assorbisse i divisori degeneri, e questa cosa meriterebbe maggiore studio. Quindi, nel ri-enunciato che segue si supporrà di aver già fatto

la eventuale modifica, che è nascosta sotto le parole «punto generale omogeneo $\{U_0, \ldots, U_k\}$».

4.1 Teorema: *Sia $\theta(u) \in k\{u_1, \ldots, u_n\}$ non nulla; essa è tipo theta olomorfa se e solo se gli*

$$H_{r,s}(\theta(u)) = \sum_{\substack{p+q=s \\ i+j=r}} (-)^{i+p}(d_i\theta)(d_p\theta)(d_j d_q\theta)$$

generano un k-spazio vettoriale di dimensione finita. Se questo è il caso, detione $\{U_0, \ldots, U_k\}$ una k-base, e chiamate A, B rispettivamente la varietà gruppale di θ e la varietà di punto generale omogeneo $\{U_0, \ldots, U_k\}$, si ha $k(A) = k(B) = k(\ldots \theta^{-2} U_i \ldots)$. La corrispondenza birazionale α fra A e B così prodotta è tale che: esiste una sottovarietà propria B_d di B con la proprietà che α è applicazione razionale biunivoca di $A \setminus A_d$ su $B \setminus B_d$. Le $H_{r,s}$ sono tipo theta olomorfe, con divisori proiettivi linearmente equivalenti a $3X$ se $X = \operatorname{div} \theta$; invece il divisore di $H_{r,s}$ nel senso delle tipo theta è ottenuto cancellando dal divisore nel senso proiettivo le componenti su A_d (o su B_d per maggior precisione: ho identificato i divisori su A con quelli su B mediante l'applicazione $\operatorname{div} \alpha$). Infine, α applica A_d su tutta B_d, e vi è solo un numero finito di punti di A_d con la stessa immagine su B_d.

Dim.: Le $H_{r,s}$ sono le $[d_{rr} d_{ss} \psi(u, v, w)]_{v=w=0}$ del 2.1 per la

$$\psi(u, v, w) = \theta(u + v + w)\theta(u - v)(u - w);$$

la condizione espressa è quindi equivalente al richiedere che $\psi(u, v, w) \in k\{u\} \otimes k\{v, w\}$, che per $w = 0$ diviene la condizione 3.7 a che θ sia tipo theta olomorfa. La condizione è anche necessaria perchè se θ è tipo theta olomorfa si ha

$$g(u, v) = \frac{\theta(u + v)\theta(u - v)}{\theta^2(u)\theta(v)\theta(-v)} \in \mathcal{Q}(C \otimes C),$$

ed anche $F(u, v, w) \in \mathcal{Q}(C \otimes C \otimes C)$, con l'$F$ di 2.2; quindi

$$\frac{\theta(u + v)\theta(u + w)\theta(u - v - w)\theta(-v + w)}{\theta^2(u)\theta(v)\theta^2(-v)\theta(-w)\theta^2(w)} = g(u, v + w)g(-v, -w)F(u, v, w) \in \mathcal{Q}(C \otimes C \otimes C),$$

ed ha su $A \times A \times A$ i poli $3X_1$, X_2, $2(\operatorname{div} - \iota)X_2$, $(\operatorname{div} - \iota)X_3$, $2X_3$; l'espressione appartiene perciò a $C \otimes C \otimes C$, ed il numeratore a $k\{u\} \otimes k\{v\} \otimes k\{w\}$. Quindi $\psi(u, -v, -w) = \theta(u + v)\theta(u + w)\theta(u - v - w) \in k\{u\} \otimes k\{v, w\}$, come richiesto.

Sia la A che la B hanno C come corpo; la $\psi(u, v, w)$, come funzione di v, w, è associata ad una tipo theta olomorfa su $A_C \times A_C$, ed ha su questa il divisore $Y = (\sigma_G^{-1} \otimes \operatorname{div} \iota)X_{12} + (\sigma_G^{-1} X)'_1 + (\sigma_G^{-1} X)'_2$, ove $Z' = (\operatorname{div} - \iota)Z$, e G è il punto di A_C nel quale le coordinate affini su A, comunque scelte, assumono

come valori le proprie copie in C. Questo Y è perciò una corrispondenza algebrica fra C ed $A \times A$, e fa corrispondere ad una valutazione v di dimensione 0 di C (rango qualunque) un divisore $Y(v)$, che è poi

$$(\sigma_P^{-1} \otimes \operatorname{div} i) X_{12} + (\sigma_P^{-1} X)'_1 + (\sigma_P^{-1} X)'_2$$

se P è il centro di v su A. D'altra parte $\psi(u, v, w)$ è combinazione lineare di elementi di $k[v, w]$, con gli U_i come coefficienti; i residui degli U_i mod $\mathfrak{P}_v$ (dopo aver diviso tutti per uno fra essi di minimo v-valore) sono elementi di k, determinati a meno di un fattore non nullo in k, e sono poi le coordinate proiettive del centro P' di v su B; questi valori sono determinati da $Y(v)$ e quindi da P; è quanto dire che P' è l'unico punto di B che corrisponde a P secondo α, od anche che $P' = \alpha P$.

Restano da dimostrare la biunivocità, l'essere le U_i tipo theta olomorfe, e la faccenda dei divisori delle U_i; cominciano dai divisori. Le $\vartheta^{-2} H_{r,s}$ sono elementi di C, onde sono tipo theta; tali sono perciò le $H_{r,s}$; la faccenda dei divisori è ora chiara, dopo la premessa che precede l'enunciato, e mostra anche che div $H_{r,s}$, nel senso delle theta, è effettivo; perciò le $H_{r,s}$ sono olomorfe. Ciò deriverebbe d'altronde anche dal lemma che segue questa dimostrazione.

Per la biunivocità, se $\alpha P = \alpha Q$ si deve avere, fra l'altro, $\sigma_P^{-1} X = \sigma_Q^{-1} X$, che se $P \notin A_d$ significa $\sigma_{Q-P}^{-1} X = X$, falsa se $Q \neq P$ per la proprietà caratteristica di X. Se tanto P quanto Q sono degeneri, la relazione dice intanto che essi sono r-degeneri per lo stesso r, e che le componenti D_P, D_Q di A_{dr} che contengono P, Q o sono coincidenti, o sono legate da $D_Q = -D_P$. Poniamoci nel primo caso, ed indichiamo D_P con D, mentre G è la varietà di Severi-Albanese di A; posto $Z = \sigma_{O_P}^{-1} X$, il divisore Z è $\approx X$, ed è somma di un divisore effettivo a componenti degeneri contenenti D (cfr. l'Appendice) e di uno $Z_2 = (\operatorname{div} \beta) Z_1$ senza componenti degeneri, ove Z_1 è l'intersezione $(X \cap 1D, A)$, che è un divisore su D, mentre β è l'omomorfismo $P \to O_P + P$ di A su tutta D; inoltre, per ipotesi, $\sigma_P^{-1} Z_1 = \sigma_Q^{-1} Z_1$, che è una relazione su D, e che su D significa $\sigma_{Q-P}^{-1} Z_1 = Z_1$. Ora $X = Z_2$, onde $\lambda_X = \lambda_{Z_1} = \beta \lambda_{Z_1}$; poichè dim ker $\lambda_X =$ dim $A -$ dim G, la precedente dà dim ker $\lambda_{Z_1} =$ dim $D -$ dim G, e comporta che la componente H dell'identità, nella sottovarietà gruppale (riducibile) di D formata da tutti gli $R \in D$ tali che $\sigma_R^{-1} Z_1 \sim Z_1$, è proprio la sottovarietà gruppale razionale massima di D. Se ci fossero infiniti $Q \in D$ tali che $\sigma_{Q-P}^{-1} Z_1 = Z_1$, ci sarebbe una sottovarietà gruppale razionale L di H, di dimensione 1, tutta formata dai $Q - P$ descritti; se $E \in H_d$ è componente di L_d, lo Z_1 differisce da $\sigma_E^{-1} Z_1$ per componenti su D_d, e ciò mostra che P appartiene ad A_{ds} per un $s > r$, contro l'ipotesi; si conclude che i Q sono in numero finito.

Nel secondo caso tutto funziona nello stesso modo, dopo aver posto $D = D_P$ e $Z_1 = (X' \cap 1D, A)$. C.V.D.

Che la non biunivocità su A_d sia nella natura delle cose e non nella carenza di dimostrazione lo si vede dalla cubica con un nodo, che è B, mentre A è la retta (cfr. esempio 1 nella sez. 7).

Ecco ora un facile ma utile risultato:

4.2 LEMMA: *Ogni derivata, mediante derivazioni invarianti, di una tipo theta è tipo theta, ed è olomorfa se tale è la data.* [Non ha in generale la stessa trascendenza.]

DIM.: Farò solo il caso olomorfo: sia d la derivazione; alla relazione $\theta(u+v)\theta(u-v) \in k[u] \otimes k[v]$ applico la d_u^n; poi, alla stessa relazione applico d_v^n, e faccio la differenza; il risultato è $\theta'(u+v)\theta'(u-v) \in k[u] \otimes k[v]$, avendo indicato $d\theta$ con θ', C.V.D.

4.3 LEMMA: *Se $\theta(u)$ è tipo theta, e se A è la sua varietà gruppale, le θ_r con $|r|>1$ acquistano valori in k in ogni punto P di A che non sia sul sostegno* rad X *di* $X = \operatorname{div}\theta$; *in altre parole, $\theta_r \in k(P|A)$ per ogni tale P; invece $\theta_r \notin k(P|A)$ se $P \in \operatorname{rad} X$.*

DIM.: Nel 4.1 si ha $k[\ldots, \theta_r, \ldots] = k[\ldots, \theta^{-1}U_i, \ldots]$ se ogni $|r|$ è >1; l'esistenza di $\alpha P \in B$ per $P \in A$ (notazioni del 4.1) comporta che ogni $(\theta^{-1}U_i)(P)$ esiste se $P \notin \operatorname{rad} X$; quindi esiste anche ogni $\theta_r(P)$. Se invece $P \in \operatorname{rad} X$, il punto αP sta sulla sottovarietà di equazione $\theta^0 = 0$ di B, onde qualche θ_r non appartiene a $k(\alpha P|B)$ e neppure a $k(P|A)$; ma allora già non ci appartiene θ_0, nè ci appartiene nessun θ_r, C.V.D.

Data una $\theta(u)$ tipo theta olomorfa (e per le non olomorfe si usi il 3.12), ne sia X il divisore sulla varietà gruppale A; per ogni $P \in A$ voglio definire una $\theta_P(u)$ con il divisore ottenuto cancellando da $\sigma_P^{-1}X$ le componenti degeneri. Se $P \notin \operatorname{rad} X$ la $\theta_P(u) = \exp \sum_{|r|>1} \theta_r(P)u^r$, che esiste per 4.3, soddisfa alla condizione, in quanto $\theta_r(P) = (\sigma_P^{-1}\theta_r)(O)$ per definizione. La $\theta_P(u)$ così definita ha anche il vantaggio di essere normalizzata nel modo seguente: $\theta_P(0) = 1$, $\theta_{P,u}(0) = 0$. Se invece $P \in \operatorname{rad} X$ la strada è un po' più lunga: se G è il punto usato nella dimostrazione del 4.1, esso è nelle condizioni per le quali la $\theta_G(u)$ appena definita esiste, si intende in $C[u]$ se $C = k(A)$; scrittala come $\sum_r Q_r u^r$, con $Q_r \in C$, l'anello $k[\ldots, Q_r, \ldots]$ è finitamente generato su k, per il 4.1 di [1], ed è omogeneo perchè le relazioni che legano le Q_r (che sono poi circa le $d_i\theta$) provengono da relazioni fra le θ_r. Se perciò v è un posto di C con centro P su A, esiste un Q_s tale che $v(Q_r/Q_s) > 0$ per ogni r; la $\theta_P(u) = \sum_r (Q_r/Q_s)(v)u^r$ è ciò che cerchiamo; dipende solo da P, e perciò le Q_r/Q_s devono appartenere a $k(P|A)$; la formula finale è

$$\theta_P(u) = \sum_r (Q_r/Q_s)(P)u^r .$$

Una normalizzazione sensata ora manca, ma può essere reintrodotta nel caso speciale $n = 1$; in tal caso basta scegliere per s il minimo valore possibile, che sarà certo >1, sicchè si avrà $\theta_P(u) = \sum_{r=s}^{\infty} (Q_r/Q_s)(P)u^r$ (una sola u!). Ed anzi, in questo caso è facile trovare l'espressione esplicita dei Q_r; eccola:

4.4 $Q_r(\vartheta) = \sum_j (j!)^{-1} \vartheta_1^{j_1} \vartheta_2^{j_2} \dots \vartheta_r^{j_r}$, *con la somma estesa a tutti i multiindici* $(j_1, \dots, j_r) \geq 0$ *tali che* $\sum_i i j_i = r$.

Una formula utile è la $(\vartheta_q)_r = (\vartheta_r)_q = \vartheta_{r+q}$ se $P \in A \setminus A_d$. Se k è il corpo complesso, ogni tipo theta olomorfa in $k\{u_1, \dots, u_n\}$ dà una funzione intera di n variabili complesse: infatti la dimostrazione del 4.1 di [1], ossia della convergenza della serie per valori complessi qualsiansi dati alle u_i, è basata solo sulla prostaferesi olomorfa. Ed allora, se ϑ è theta olomorfa, è facile convincersi che $\vartheta_p(u)$ è associata a $\vartheta(u(P) + u)$; è facile perchè si capisce chi sia $u(P)$ per $P \in A$: uno qualunque dei valori che gli integrali invarianti assumono in P (in questa discussione P non deve essere degenere). Per ϑ tipo theta ma non theta si può solo dire che quando gli u_i percorrono il corpo complesso, il punto $(U_0(u), \dots, U_n(u))$ del 4.1 percorre una sottovarietà non algebrica di A, di dimensione n se ϑ è non degenere, che è anche un sottogruppo di $A \setminus A_d$ isomorfo a k^n; se per un valore p dato alle u si ottiene il punto P, resta vero che $\vartheta_p(u)$ è associata a $\vartheta(p + u)$.

4.5 Lemma: *Sia $C = k(A)$ l'ipercorpo della varietà gruppale A, e siano $d_1, \dots, d_n$ derivazioni invarianti di C su k tali che k sia il corpo delle costanti rispetto ad esse. Un automorfismo σ di C su k è invariante (cfr. [2]), ossia è il σ_P^{-1} per qualche $P \in A \setminus A_d$, se e solo se $\sigma d_i = d_i \sigma$ per ogni i.*

Dim.: Se σ è invariante è $\sigma d = d\sigma$ per ogni derivazione invariante d di C: è la più antica fra le definizioni di derivazioni invarianti. Per il reciproco, osservo anzitutto che, per il 2.5, le d_i permettono di immergere C in $k\{u_1, \dots, u_n\}$, con $d_i = \partial/\partial u_i$. Per $x \in C \cap k\{u\}$, e se r è multiindice, si ha

$$(\sigma \otimes \iota) \mathrm{P} x = (\sigma \otimes \iota) x(u + v) =$$
$$(\sigma \otimes \iota) \sum_r (d_r x)(u) v^r = \sum_r (\sigma d_r x)(u) v^r = \sum_r (d_r \sigma x)(u) v^r = (\sigma x)(u + v) = \mathrm{P} \sigma x,$$

che mostra appunto che σ è invariante, C.V.D.

La condizione del 4.5 si esprime nel linguaggio dell'algebra differenziale col dire che σ è invariante se e solo se è automorfismo differenziale del corpo differenziale C, con questo intendendosi C insieme con il k-spazio vettoriale generato dalle $d_1, \dots, d_n$.

È da notare che l'assegnazione degli automorfismi invarianti di C ne determina essenzialmente il P; lo determina cioè a meno della scelta del punto identità, ossia della schiera R_C, nelle notazioni di [2], da appaiare all'automorfismo identico.

4.6 Teorema: *Notazioni come nel 4.5; un punto $P \in A$ è sul luogo di degenerazione A_d se e solo se $k(P|A)$ ha un ideale proprio non nullo $\mathfrak{a}$ tale che $d_i \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$ per ogni i; in tal caso ogni primo minimale di $\mathfrak{a}$ ha la stessa proprietà.*

Dim.: Si vede dall'Appendice che per ogni $Q \in A \setminus A_d$, e quindi per Q generico, σ_Q trasforma in sè ogni componente di A_d; questo comporta che se $P \in A_d$, e se $x = x(v)$ appartiene al primo minimale $\mathfrak{P}$ di $k(P|A)$ che corrisponde ad una componente di A_d passante per P, il $\mathbf{P}x = x(u+v)$ deve appartenere a $\mathfrak{P}[v]$; la considerazione dello sviluppo (con r multiindice) $x(u+v) = \sum_r (d_r x)(u) v^r$ implica quindi che $d_r x \in \mathfrak{P}$, sicchè $\mathfrak{P}$ è uno degli $\mathfrak{a}$ richiesti; resta così dimostrato il «solo se». Questo $\mathfrak{a}$ è già primo minimale di se stesso, ma se non lo fosse, l'asserto sui primi minimali discenderebbe dal Lemma 1.8 e dal Teorema 7.5 di [3]. Per dimostrare il «se» basta dimostrare che se $P \notin A_d$ l'$\mathfrak{a}$ non esiste, od anche che non esiste un siffatto $\mathfrak{a}$ che sia primo, nel qual caso lo chiamo $\mathfrak{P}$. Ma il ragionamento è lo stesso: se quel $\mathfrak{P}$ ci fosse, il discorso precedente dimostrerebbe che la sottovarietà di A che gli corrisponde sarebbe trasformata in sè da ogni σ_Q con $Q \notin A_d$, cosa impossibile. C.V.D.

5. - Le equazioni differenziali

In tutta questa sezione, e nelle due successive, u indica una sola indeterminata; se $g(u,v) = \theta(u+v)\theta(u-v)$ per una $\theta(u) \in k\{u\}$, si indichi con $P_{2r}(\theta)$ il polinomio nelle $\theta_2, \theta_4, \ldots, \theta_{2r}$ che nel 3.4 sarebbe indicato con $\S[\mathcal{Q}_{2r}(g(u,v))]_{v=0}$ quando $g(u,v)$ è considerato come funzione della sola v; il $2P_{2r}(\theta)$ si ottiene anche da $\mathcal{Q}_{2r}(\theta)$ sostituendovi le θ_i con 0 se i è dispari, e con $2\theta_i$ se i è pari; il 3.4 stesso dà:

$$P_{2r}(\theta) = \sum_j 2^{|j|-1}(j!)^{-1}\theta_2^{j_1}\theta_4^{j_2}\ldots\theta_{2r}^{j_r}, \tag{5.1}$$

la $\sum_j$ essendo estesa a tutti i multiindici $j \geq 0$ tali che $j_1 + 2j_2 + \ldots + rj_r = r$. Invece i $[\mathcal{Q}_{2r+1}(g(u,v))]_{v=0}$ sono nulli. Si ha così, per 3.2,

$$\theta(u+v)\theta(u-v) = 2\theta^2(u)\sum_{r=0}^{\infty} P_{2r}(\theta(u))\, v^{2r}; \tag{5.2}$$

per 3.7 e 2.1 la $\theta(u)$ è tipo theta e olomorfa se e solo se le $P_{2r}(\theta)$ generano su k uno spazio vettoriale P di dimensione finita; in tal caso l'ipercorpo C di θ è generato dalle $\theta_2, \theta_3, \theta_4, \ldots$ (naturalmente ne basta un numero finito); a norma dei 2.5, 2.6, per ogni varietà gruppale A che abbia l'eventuale fattore diretto vettoriale di dimensione al più 1, e per ogni divisore effettivo X su $A \setminus A_d$ tale che $\sigma_Q^{-1}X \neq X$ quando $Q \neq O$, una $\theta(u)$ ottenuta come nel 2.6 rende P di dimensione finita. Quanto precede indica che l'imporre a P di avere dimensione finita è un modo per ottenere tutti gli ipercorpi C (con la condizione esposta per fattori diretti vettoriali) e tutte le θ tipo theta olomorfe che li producono; le varietà gruppali A di questi C non si ottengono direttamente dai P_{2r}, ma possono essere ottenute in buona approssimazione con un

passo ulteriore, che ora indicherò: pongo

5.3 $$P_{2r+1}(\theta) = (2r+1)^{-1}\, dP_{2r}(\theta)\,,$$

che arieggia la 3.5; questi P_{2r+1} generano uno spazio vettoriale P^r su k, anche esso di dimensione finita se tale è P, e precisamente di dimensione dim $P-1$ (la P_1 è sempre 0). Le 5.3 sono legate alla funzione $b(u, v, w) = \theta(u+v+w)\cdot\theta(u-v)\theta(u-w)$, la cui appartenenza a $k[u]\otimes k[v, w]$ è anch'essa necessaria e sufficiente a che θ sia tipo theta olomorfa (cfr. 4.1). Se infatti nella 3.2 si sostituisce $\varphi(u)$ con $b(u, v, w)$ in quanto funzione di v, w, sicchè i Q acquistano due indici, si trova subito, nella notazione del 4.1, che $H_{2r,0}(\theta) = 2\theta^2(u)P_{2r}(\theta)$, dato che $b(u, v, 0) = g(u, v)\theta(u)$. Invece $H_{2r,1}(\theta)$ è il coefficiente di $v^{2r}w$ nella serie, nelle v, w, che dà $b(u, v, w)$, od anche il coefficiente di v^{2r} nella serie di $d_w b(u, v, w)$, o equivalentemente in

$$\theta_1(u+v)\theta(u+v)\theta(u-v)\theta(u) - \theta(u+v)\theta(u-v)\theta_1(u)\theta(u) =$$
$$g(u, v)[\theta_1(u+v) - \theta_1(u)]\theta(u)\,;$$

e tale coefficiente è appunto

$$2\theta^2(u)\sum_{i=0}^{r-1}(2r-2i+1)P_{2i}(\theta(u))\,\theta_{2r-2i+1}(u) = \theta^2(u)\,dP_{2r}(\theta(u))\,.$$

L'ultima uguaglianza è conseguenza del

5.4 Lemma: *Se le θ_i sono considerate come indeterminate, e se ∂ è il simbolo di differenziazione in $k(\theta_1, \theta_2, \ldots)$ su k, si ha*

$$\partial P_{2r}(\theta) = 2\sum_{i=1}^{r} P_{2(r-i)}(\theta)\,\partial\theta_{2i}\,.$$

Dim.: Posto $g(u, v) = \theta(u+v)\theta(u-v)\theta^{-2}(u)$, si ha

$$\partial g(u, v) = g(u, v)[\partial\log\theta(u+v) + \partial\log\theta(u-v) - 2\partial\log\theta(u)]\,;$$

ma

$$g(u, v) = 2\sum_{i=0}^{\infty} P_{2i}(\theta(u))\,v^{2i}\,, \qquad \theta(u+v) = \theta(u)\exp\sum_{i=1}^{\infty}\theta_i(u)v^i\,;$$

quindi

$$2\sum_{i=0}^{\infty}\partial P_{2i}(\theta(u))\,v^{2i} = \Big[2\sum_{h=0}^{\infty}P_{2h}(\theta(u))\,v^{2h}\Big]\Big[2\sum_{j=1}^{\infty}\partial\theta_{2j}(u)v^{2j}\Big]\,.$$

L'asserto segue confrontando i coefficienti delle potenze di v. C.V.D.

Nel risultato che segue, la parte riguardante A e B è vera anche nel caso in cui vi sia più di una u; in altre parole, quella parte è un raffinamento del 4.1, ed asserisce che quasi tutto ciò che è detto nel 4.1 resta vero se in luogo di considerare tutte le $H_{r,s}$ si considerano solo le $H_{2r,0}$ e le $H_{2r,1}$.

5.5 Teorema: *Se $0 \neq \theta(u) \in k[u]$ (una sola indeterminata u), pongasi $H_{2r}(\theta) = \frac{1}{2} H_{2r,0}(\theta)$ (cfr. 4.1, ove r, s sono ora indici, non multiindici), e $H_{2r+1}(\theta) = (2r+1)^{-1} H_{2r,1}(\theta)$. Allora, nelle notazioni dei 5.1, 5.3, si ha $H_i(\theta) = \theta^2 P_i(\theta)$. La $\theta(u)$ è tipo theta olomorfa se e solo se lo spazio vettoriale P generato su k da $P_0, P_2, P_4, \ldots$ ha dimensione finita, per es. m; in tal caso lo spazio vettoriale P' generato su k da $P_1 = 0, P_3, P_5, \ldots$ ha dimensione $m-1$. Se la condizione è soddisfatta, l'ipercorpo C di θ è generato su k da una k-base di $P + P'$, sia essa $\theta^{-2} U_0, \ldots, \theta^{-2} U_h$, con $U_0, \ldots, U_h$ k-base dell'analogo spazio $H + H'$; è anche $C = k(\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_r)$, con $\theta_2, \ldots, \theta_{r-1}$ algebricamente indipendenti su k, e θ_r algebrica su $k(\theta_2, \ldots, \theta_{r-1})$. Se A, B sono rispettivamente la varietà gruppale di θ, e la varietà di punto generale omogeneo $\{U_0, \ldots, U_h\}$ (ma vedasi la discussione che precede il 4.1), l'immersione delle U_i/U_0 in $k(A)$ produce una corrispondenza birazionale fra A e B che è biunivoca fuori di $A_s \cup \operatorname{rad} X$ se $X = \operatorname{div} \theta$. Le H_i sono tipo theta olomorfe, ed hanno come divisori proiettivi dei divisori linearmente equivalenti a $3X$; i loro divisori come tipo theta si ottengono cancellando nei precedenti le componenti in A_s.*

Dim.: Le relazioni fra le H e le P sono conseguenza immediata delle definizioni di questi enti, e del 5.4. L'ipercorpo C è generato da una base di $P + P'$, ossia da $P + P'$, perchè, per induzione, le θ_i con $i > 1$ sono polinomi nelle P_j, P'_j, e questi in quelle (a coefficienti numeri razionali); l'asserto $C = k(\ldots, \theta_i, \ldots)$, con i dettagli, è banale. Passo a parlare di A e B: tutto procede come nella dimostrazione del 4.1, eccetto la biunivocità; ora si sa solo che $g(u, v) = \theta(u+v)\theta(u-v)$, come funzione di v, è associata ad una tipo theta olomorfa su A_C, ed ha su questa il divisore $\sigma_G^{-1} X + (\sigma_G^{-1} X)'$, ove $X' = (\operatorname{div} - i) X$; se $\alpha S = \alpha Q$ (non uso più P per denotare punti, perchè ormai P è occupato) si avrà $\sigma_S^{-1} X + (\sigma_S^{-1} X)' = \sigma_Q^{-1} X + (\sigma_Q^{-1} X)'$, e questo può benissimo accadere anche con $S \neq Q$. Però, se S, Q non sono su $\operatorname{rad} X$, le $\theta_S(u)$, $\theta_Q(u)$ dipendono solo dai valori assunti dalle $\theta_i(u)$ per $i > 1$ in S e risp. Q; quindi solo dai valori assunti dalle U_i/U_0 in S e risp. Q, ed hanno i divisori $\sigma_S^{-1} X$, $\sigma_Q^{-1} X$ (cfr. 4.3 e la discussione che lo segue). La $\alpha S = \alpha Q$ comporta che questi valori coincidono, onde $\sigma_S^{-1} X = \sigma_Q^{-1} X$, $S = Q$. C.V.D.

Il resto di questa sezione sarà dedicato alla costruzione di $\theta(u)$ e di C partendo dalle relazioni lineari fra i P_{2i} descritte nel 5.5; mi limiterò a costruire le $\theta(u)$ *normalizzate*, ossia tali che $\theta(0) = 1$, $\theta_1(0) = 0$. È un problema nel campo delle equazioni differenziali, o se si vuole in quello dell'algebra differenziale, per la quale rimando a [3] e [4]; il [3] è meno dettagliato e quindi più facilmente consultabile; supporrò anche, d'ora in poi, che k sia algebricamente chiuso, ma segnalerò tutti i punti nei quali questa ipotesi verrà effettivamente usata.

Un po' di definizioni per non ripetermi troppo; sia dato un insieme finito N di interi non negativi, contenente lo 0; siano $y_2, y_3, y_4, \ldots$ indeterminate; per ogni intero positivo $i \notin N$ sia $D_i(y)$ un polinomio nelle y, a coefficienti in k, così costruito: $D_i(y)$ è una combinazione lineare, a coefficienti in k, dei $P_{2j}(y)$ (i polinomi tuttofare) aventi $j \in N \cup \{i\}$, nella quale $P_{2i}(y)$ abbia coefficiente 1; questi coefficienti dei $P_{2j}(y)$ si chiamano i *coefficienti* in D_i; ogni D_i così fatto sarà detto un *vincolo*, od un *N-vincolo*, su k, e l'insieme di tutti i D_i un *sistema* di vincoli o di N-vincoli. Inoltre, un vincolo D_r, con r maggiore del massimo fra gli elementi di N, sarà scelto fra i vincoli, e chiamato l'*equazione differenziale*; gli altri vincoli saranno le *condizioni iniziali*. Se una certa $\theta(u) \in k[u]$ tipo theta olomorfa normalizzata è tale che i $P_{2i}(\theta)$ per $i \in N$ siano linearmente indipendenti su k, e che per ogni $j \notin N$ si abbia $D_j(\theta) = 0$, dirò che θ *produce* il sistema di vincoli $\{D_j\}$; se solo la seconda condizione è soddisfatta, ossia se si lascia indecisa la dipendenza lineare o meno dei $P_{2i}(\theta)$ per $i \in N$, dirò che θ *ammette* il sistema di vincoli $\{D_i\}$.

Sia allora dato il sistema di N-vincoli $D_i(y)$, e fra essi sia D_r l'equazione differenziale; si consideri y_2 come una indeterminata differenziale, il che per noi significa che in $k[y]$ è data una derivazione d avente k come anello delle costanti, e tale che $dy_i = (i+1)y_{i+1}$. I vincoli sono, nel linguaggio dell'algebra differenziale, dei polinomi differenziali nella y_2. Il 5.5 dice che la ricerca delle tipo theta olomorfe normalizzate consiste nel trovare le soluzioni z_2 del sistema di infinite equazioni differenziali $D_i(y) = 0$, e nell'immergere z_2 nell'anello differenziale $k[u]$ con $du = 1$. Per fortuna c'è una sola equazione differenziale, appunto la $D_r(y) = 0$, come ora spiegherò. Poichè i $d^i D_r(y)$, per $i = 0, 1, 2, \ldots$, sono lineari nelle y_{2r+i}, essi generano un ideale primo J di $k[y_2, y_3, \ldots]$; detta z_i l'immagine di y_i mod J, la soluzione generale della $D_r(y) = 0$ è z_2; si noti subito che $k[z_2, z_3, \ldots] = k[z_2, z_3, \ldots, z_{2r-1}]$, con le $z_2, \ldots, z_{2r-1}$ algebricamente indipendenti su k, e che d opera in modo naturale su $k(z)$; ed è importante notare anche subito che se $W(y)$ (notazione mantenuta) è il wronskiano delle $P_{2j}(y)$ per $j \in N$, rispetto a d, si ha $W(z) \neq 0$, ossia $W(y) \notin J$, come conseguenza del Lemma 7.8 di [3]. Ora ogni altro vincolo $D_j(y)$ con $j \neq r$ richiede la riduzione di $k[z]$ modulo un primo minimale dell'ideale generato dalle $d^i D_j(z)$ per $i = 0, 1, 2, \ldots$, e ne basta un numero finito perchè $k[z]$ è noetheriano; tale D_j è perciò una relazione algebrica fra le $z_2, \ldots, z_{2r-1}$. Per tenere conto di tutte le D_j, e per ottenere come risultato un campo d'integrità, basta ridurre $k[z]$ modulo un qualsiasi primo minimale $\mathfrak{P}$ dell'ideale Δ generato dalle $d^i D_j(z)$ per $i = 0, 1, 2, \ldots$, e per $r \neq j \notin N$, di queste naturalmente bastandone un numero finito; chiamerò θ_i le immagini delle z_i (non ancora $\theta_i(u)$). Naturalmente per raggiungere questo risultato occorre che Δ sia un ideale proprio; ciò accade certamente se si sa già che i D_j sono ammessi da una data tipo theta, tramite il 5.5; se erano arbitrari, Δ può essere improprio, nel qual caso dirò che i vincoli sono *incompatibili*; dunque i vincoli sono incompatibili se l'ideale di $k[y_2, y_3, \ldots]$ generato dai $d^i D_j(y)$ per $i = 0, 1, 2, \ldots$ e per $j \notin N$ non è proprio; dirò invece che il sistema dei vincoli è *singolare* se quell'ideale è proprio ma il suo radicale contiene

il wronskiano $W(y)$, ossia se i $P_{ij}(\theta)$, per $j \in N$, sono linearmente dipendenti sul corpo delle costanti K di $k(\theta_2, \theta_3, \ldots)$ per ogni scelta di $\mathfrak{P}$. Bene, se i vincoli erano singolari, ossia se automaticamente le θ_i soddisfano ulteriori vincoli $D_j(\theta) = 0$ a coefficienti in K, che siano M-vincoli per un $M \subset N$, potrò completare il sistema dei vincoli, rendendolo in tal modo non singolare, con lo specializzare i nuovi vincoli in modo che i loro coefficienti divengano elementi di k (essendo k algebricamente chiuso). Fatto questo, se ricomincio da principio trovo che i vincoli non sono più singolari; proseguirò quindi sotto l'ipotesi che i dati N-vincoli già non fossero singolari, e che il $\mathfrak{P}$ prescelto non contenga $W(\xi)$, sicchè $W(\theta) \neq 0$; eventuali $\mathfrak{P}$ contenenti $W(\xi)$ li chiamerò *singolari*, sicchè il sistema dei vincoli è singolare se e solo se tale è ogni $\mathfrak{P}$.

Ora vediamo come si immerge in anelli di serie di potenze: inizio con $k[y_2, y_3, \ldots]$; ad esso aggiungo una indeterminata u e definisco $du = 1$; costruisco la valutazione archimedea discreta v di $k(u, y)$ la cui schiera valutante è il localizzato di $k[u, y]$ sul primo $uk[u, y]$, e completo $k[u, y]$ rispetto a v, estendendovi d per continuità; il completamento contiene, per $i = 2, 3, \ldots$, le

$$x_i = \sum_{j=0}^{\infty} (-)^j \binom{j+i}{i} y_{j+i} u^j ,$$

che si controlla subito essere costanti rispetto a d; perciò il v-completamento di $k[u, y]$ è $k[x][u]$, e le y sono immerse in esso mediante le relazioni

$$y_i \to y_i(u) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{i+j}{i} x_{i+j} u^j , \tag{5.6}$$

con le $x_2, x_3, \ldots$ algebricamente indipendenti su k, e costanti rispetto a d. Un ragionamento analogo, ma senza la penultima asserzione, può essere fatto partendo da $k[\xi]$ o da un suo ridotto mod qualcosa; esso mostra che non solo le y, ma anche le ξ e le loro specializzazioni θ possono essere espresse come serie di potenze nella u; quindi tutte le riduzioni effettuate dianzi in modo astratto possono essere ripetute concretamente sulle serie di potenze, cosa che mi accingo a fare.

Riduco $k[x]$ modulo l'ideale generato dai coefficienti della serie di potenze $D_r(y(u))$, ossia dai coefficienti delle potenze di u in detta serie; questo automaticamente produce la riduzione di $k[y]$ mod J; il risultato è perciò la soluzione generale della equazione differenziale $D_r(y(u)) = 0$, ed è facile convincersi che le immagini $t_2, \ldots, t_{2r-1}$ delle $x_2, \ldots, x_{2r-1}$ restano algebricamente indipendenti su k, mentre quelle delle rimanenti x_i, che indico ancora con t_i, divengono elementi di $k[t_2, \ldots, t_{2r-1}]$; la 5.6 dà perciò la soluzione generale (veramente la soluzione è solo z_2):

$$z_i \to z_i(u) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{i+j}{i} t_{i+j} u^j .$$

Passiamo ad utilizzare gli altri vincoli $D_j(y)$ con $j \neq r$; intanto, come sopra per $D_r(y)$, posso trascurare di usare anche i $d^h D_j(y)$: l'immersione nelle

serie di potenze se li tira dietro. Se i vincoli sono compatibili e non singolari, considero dunque un primo minimale non singolare, che chiamo ancora $\mathfrak{P}$, dell'ideale di $k[t_2, \ldots, t_{2r-1}]$ generato dai coefficienti delle serie $D_j(\zeta(u))$ con $j \neq r$, e riduco $k[t]$ modulo $\mathfrak{P}$; ricordo però che quell'ideale è generato da un numero finito di elementi, sicchè basta usare un numero finito di coefficienti fra quelli descritti; ed osservo inoltre che, per es., il coefficiente di u^m in $D_j(\zeta(u))$ coincide, a meno di un fattore razionale non nullo, con $[d^m D_j(\zeta(u))]_{u=0}$; ecco perciò giustificato il nome «condizioni iniziali» dato ai vincoli D_j con $j \neq r$; l'appellativo di non singolare assegnato a $\mathfrak{P}$ significa ora, naturalmente, che $W(t) \notin \mathfrak{P}$. Se τ_i è l'immagine di t_i mod $\mathfrak{P}$, ecco che le immagini θ_i delle ζ_i restano immerse in $k[\tau][[u]]$:

$$\theta_i \to \theta_i(u) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{i+j}{j} \tau_{i+j} u^j ;$$

questa, per 5.5, dà una tipo theta olomorfa normalizzata

$$\theta(u) = \exp \sum_{i=2}^{\infty} \tau_i u^i ,$$

che però è sul corpo $E = k(\tau)$, ossia è in $E[u]$ anzichè in $k[u]$; il suo ipercorpo è $E(\theta_2(u), \theta_3(u), \ldots)$, e naturalmente basta un numero finito di θ_i, certo $< 2r - 1$.

•• Manca ancora parecchio per capire la natura di questo ipercorpo; comincio col notare che $\theta(u+v)\theta(u-v) = \theta^2(u) \sum_{i=0}^{\infty} P_{2i}(\theta(u)) v^{2i}$; facendo giocare i vincoli, ossia le relazioni lineari fra le $P_{2i}(\theta(u))$, a coefficienti, ricordo, in k, questa assicura che $\theta(u+v)\theta(u-v)$ è il prodotto di $\theta^2(u)$ per un elemento del prodotto tensoriale, su k, del corpo $C = k(\theta_2, \theta_3, \ldots)$ per un corpo D finitamente generato su k, immerso in $k\{v\}$: non sono più in evidenza le serie di potenze, ma restano la d_u che opera su C, e la d_v che opera su D. Ripeto il ragionamento che condusse alla dimostrazione del 3.8, ed applico $d_u \log$: $\zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta(u) \in \mathcal{Q}(C \otimes D)$; applico invece $d_v \log$: $\zeta(u+v) - \zeta(u-v) \in \mathcal{Q}(C \otimes D')$, ove $D' = Dd_vD$ è il composto di D e d_vD, ossia il minimo sottocorpo di $k\{v\}$ che contiene D e le derivate dei suoi elementi. Sommando, $\zeta(u+v) - \zeta(u) \in \mathcal{Q}(C \otimes D')$, e applicando d_u: $\theta_2(u+v) \in \mathcal{Q}(C \otimes D'')$, con $D'' = D'd_vD'$; e perciò anche $\theta_i(u+v) \in \mathcal{Q}(C \otimes D'')$ quando $i > 1$. Se allora L è il minimo sottocorpo di $k\{v\}$, fra quelli contenenti k, tale che $\theta_2(u+v) \in \mathcal{Q}(C \otimes L)$ (ci vorrebbe forse un lemma per stabilire che esiste, ma lo salto), quanto precede serve a mostrare che L è finitamente generato su k. Poi, $\theta_2(u+v) \in \mathcal{Q}(EC \otimes_E \mathcal{Q}(E \otimes L))$, e $\mathcal{Q}(E \otimes L)$ è il minimo sottocorpo di $E\{v\}$, fra quelli contenenti E, che rende questa vera. Ma per 2.1 quel minimo sottocorpo è la copia di EC in $k\{v\}$; quindi $EC \simeq \mathcal{Q}(E \otimes L)$ su E, e la copia di L in $k\{v\}$ non ha altra scelta che quella di essere l'intersezione di EC con $k\{v\}$.

** Questo $EC = E(\theta_2, \theta_3, \ldots)$ è ipercorpo su E; se per ogni punto $\mathcal{Q}$ (ideale primo massimale) di $k[\varepsilon]$ si sostituiscono le $\theta_i(u) \in k[\varepsilon][u]$ con gli elementi $\theta_{i\mathcal{Q}}(u) \in k[u]$ ottenuti sostituendo le ε_i con i valori in k che esse assumono in $\mathcal{Q}$ (e qui gioca l'essere k algebricamente chiuso), e se questo punto $\mathcal{Q}$ è generico, le $\theta_{i\mathcal{Q}}(u)$ generano L su k, sicchè L stesso è ipercorpo, e la $\theta_{\mathcal{Q}}(u) = \exp \sum_{j=2}^{\infty} \varepsilon_j(\mathcal{Q}) u^j$ è una tipo theta olomorfa normalizzata che ha L come ipercorpo. Per punti $\mathcal{Q}$ particolari le $\theta_{i\mathcal{Q}}$ possono generare un sottoipercorpo proprio di L, e prima di andare avanti voglio mostrare che questo accade se e solo se le $P_{2i}(\theta(u))$ con $i \in N$, che formano una base di P, sono tali che le $P_{2i}(\theta_{\mathcal{Q}}(u))$ siano linearmente dipendenti su k. Infatti, il corpo L soddisfa anche la

$$g(u, v) = \frac{\theta(u+v)\theta(u-v)}{\theta^2(u)\theta(v)\theta(-v)} \in C \otimes L ,$$

ed il primo membro ha sulla varietà gruppale $A \times A$ (se A è quella di $\theta(u)$) un divisore una cui componente è $A \times X$, se $X = \operatorname{div} \theta$; nessun sottoipercorpo proprio di $\mathcal{Q}(E \otimes L)$ può avere un divisore che si rialza a questo X, e perciò L è il minimo sottoipercorpo di $k[u]$ che soddisfa la formula scritta; esso è cioè generato su k (come ipercorpo, non come corpo) dai coefficienti in L, in numero di $n = \operatorname{card} N$, della combinazione lineare dei $P_{2i}(\theta(u))$, per $i \in N$, che è l'elemento di $C \otimes L$ uguale a $g(u, v)$. Se la sostituzione $\theta \to \theta_{\mathcal{Q}}$ produce, nel modo detto, un sottoipercorpo proprio di L, ciò significa che il $g(u, v)$ costruito con $\theta_{\mathcal{Q}}$ necessita di meno di n fra i $P_{2i}(\theta_{\mathcal{Q}}(u))$ con $i \in N$ per essere espresso come elemento di $L \otimes L$, e che quindi i $P_{2i}(\theta_{\mathcal{Q}}(u))$ sono diventati linearmente dipendenti su k. Il ragionamento è invertibile, e mostra che il punto $\mathcal{Q}$ è «particolare» se e solo se esso (il suo primo in $k[\varepsilon]$) contiene tutti i $(d^i W)(\varepsilon)$ per $i = 0, 1, 2, \ldots$; chiamerò perciò questi punti, ed i loro ideali, *singolari*, per essere in accordo col significato precedente dell'aggettivo; ma non sono punti singolari di una varietà nel solito senso geometrico.

Ora posso continuare; si è visto che L è ipercorpo, onde

$$EC = E(\theta_2, \theta_3, \ldots) = \mathcal{Q}(E \otimes L)$$

ne è l'estensione su E (ora scambio liberamente L in $k[\varepsilon]$ con la sua copia in $k[u]$); pongasi $K = E \cap C =$ corpo delle costanti di C rispetto a d, tali costanti essendo poi ciò che nella terminologia classica si chiamavano «integrali primi»; l'applicazione $\theta_i(u) \to \theta_i(0) = \varepsilon_i$ è un isomorfismo di C su tutto E, che manda in sè ogni elemento di K; questo è perciò algebricamente chiuso sia in C che in E. Se $\theta_2, \ldots, \theta_h$, con $h \leq 2r-1$, generano C su k, basteranno $\theta_2, \ldots, \theta_s$, con $h \geq s$, per generare EC su E, od anche C su K, dato che $EC = \mathcal{Q}(E \otimes_K C)$; il polinomio minimo (monico) di θ_s su $E(\theta_2, \ldots, \theta_{s-1})$ ha coefficienti in K, e si ha $s - 2 = \operatorname{trasc} L/k$. A questo punto la vita è complicata dal fatto che K non è necessariamente il corpo quoziente di un sottoanello di $k[\varepsilon]$; tuttavia l'immersione di K in E dà una corrispondenza alge-

brica Γ fra K e la varietà V su k di punto generale non omogeneo $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{2r-1}$. La Γ fa corrispondere alle valutazioni v di K di corpo residuo k (algebricamente chiuso!) dei cicli effettivi $\Gamma\{v\}$ di V, il cui radicale (= supporto) è una sottovarietà $\Gamma[v]$ di V; sia $\Gamma\{v\}$ che $\Gamma[v]$ hanno dimensione pura $r-2$. Esistono quindi un modello proiettivo Z di K su k, ed una corrispondenza algebrica fra Z e V, che ora chiamerò Γ' ma che subito dopo chiamerò di nuovo Γ, tali che $\Gamma\{v\} = \Gamma'\{S\}$ se S è il punto di Z che è centro di v su Z, e tali inoltre che $\Gamma\{v\} = \Gamma\{v'\}$ se e solo se $S = S'$; quindi non solo chiamerò Γ la Γ', ma addirittura indicherò con $v, v', \ldots$ i punti di Z; la Γ naturalmente opera in ambedue le direzioni: $\Gamma[v] \subset V$ e $\Gamma[Q] \subset Z$ se $Q \in V$; anzi, $\Gamma\{Q\}$ è un punto di Z, con molteplicità 1, se Q è generico su V. Scegliamo un $v \in Z$ tale che $\Gamma[v]$ contenga un punto Q di V al finito per $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$; sia A^v una componente di $\Gamma[v]$ contenente Q, ne sia $\mathfrak{A}^v$ il primo in $k[v]$, e sia ε_i' l'immagine di $\varepsilon_i \bmod \mathfrak{A}^v$, onde $\{\varepsilon_i'\}$ è il punto generale non omogeneo di A^v. L'ideale $\mathfrak{A}^v$, esteso su $k(v/Z)[\varepsilon]$, è primo minimale dell'ideale massimo di $k(v/Z)$, ed è perciò ideale « differenziale », tale cioè che $\delta\mathfrak{A}^v \subset \mathfrak{A}^v$ se δ è la copia in E della d di C; tanto basta per stabilire che la copia di $\mathfrak{A}^v$ in $k[\ldots \theta_i \ldots]$ è ottenuta nello stesso modo dall'immersione di K in C, e che perciò il corpo $E^v = k(\varepsilon^v) = k(A^v)$ è isomorfo a $C^v = k(\ldots \theta_i'(u) \ldots)$ se $\theta_i'(u)$ è ottenuto da $\theta_i(u)$ sostituendo le ε_i con le ε_i'. Ma $E^v \cap C^v = k$, ed $E^v C^v$ è sottocorpo di $\mathcal{Q}(E^v \otimes L)$, ed anzi si vede col ragionamento già fatto per L che esso è proprio $\mathcal{Q}(E^v \otimes L^v)$, con L^v sottoipercorpo di L. Quindi A^v è birazionalmente equivalente ad una varietà gruppale, immagine omomorfa della varietà gruppale A di L; A^v è anzi isogena ad A, avendone la stessa dimensione; come visto prima, è poi $L^v \subset L$ se e solo se $\mathfrak{A}^v$ contiene $\mathbb{W}(\varepsilon)$, od anche se e solo se $\mathbb{W}(\varepsilon^v) = 0$; se v è tale che ogni $\mathfrak{A}^v$ ha questa proprietà (ma vedremo che c'è sempre un solo $\mathfrak{A}^v$), dirò che v è *singolare*. Comunque sia, la $\theta^v(u) = \exp \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i' u^i$ è tipo theta olomorfa normalizzata sull'estensione di A su E^v, ed ha su questa varietà un divisore X^v. Se ora Q è punto generico di A^v, le $\theta_{Qi}(u)$ ottenute da $\theta^v(u)$ con le sostituzioni $\varepsilon_j' \to \varepsilon_j(Q)$ generano ancora L^v; se allora S è un altro punto generico di A^v, la $\theta_{Qi} \to \theta_{Si}$ genera un automorfismo invariante di L^v, e precisamente il σ_{S-Q}^{-1}. Posto $X_Q = \operatorname{div}_A \theta_Q(u)$ (ma più tardi darò un raffinamento di questa notazione), i vari X_Q con $Q \in A^v \setminus A_q^v$ formano un aperto nel sistema algebrico irriducibile dei traslati di uno di essi; questo mostra fra l'altro che $\Gamma[Q] = v$ se $Q \in A^v \setminus A_q^v$. Prima di tirare le conclusioni consideriamo il caso in cui $\mathfrak{A}^v$ non è singolare: in tal caso $L^v = L$, $A^v \simeq A$. Quando Q percorre i punti di questi $A^v \setminus A_q^v$ variando anche v, X_Q percorre un aperto di un sistema algebrico irriducibile $\mathcal{S}$ di divisori su A; se $\Gamma[Q] = \Gamma[P]$, X_Q ed X_P sono traslati l'uno dell'altro; altrimenti, $X_P \sim X_Q$, onde X_P è linearmente equivalente, su A, a qualche traslato di X_Q. Un aperto di $\mathcal{S}$ è chiaramente in corrispondenza biunivoca con un aperto affine di V al finito per $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ (vedasi il diagramma che seguirà fra poco), ma si tenga presente che per un Q singolare l'elemento di $\mathcal{S}$ che gli corrisponde non è necessariamente X_Q, ma è X_Q più un eventuale divisore effettivo a componenti degeneri; in particolare, se $L^v = L$ ma Q è

singolare, l'ideale di Q su $k[t^e]$ contiene un a come quello richiesto nel 4.6, e precisamente l'ideale generato dai $(d^i W^i)(t^e)$; pertanto $Q \in A_d^*$; viceversa, se $Q \in A_d^*$ le $\theta_{0i}(u)$ generano un sottoipercorpo proprio di L, avente anzi trascendenza (su k) minore di trasc L/k, onde Q è singolare. Qui è il momento di raffinare la definizione di X_φ: d'ora in poi X_φ sarà l'elemento di $\mathcal{S}$ che corrisponde a Q, e si avrà perciò sempre $X_\varphi \approx X_\theta$; invece $\mathrm{div}_A\, \theta_\varphi$ si ottiene cancellando da X_φ le sue eventuali componenti su A_d, e si ha quindi $\mathrm{div}_A\, \theta_\varphi = \mathrm{div}_A\, \theta_\theta$. Ho detto l'elemento di $\mathcal{S}$ che corrisponde a Q senza dire in quale corrispondenza; ma posto $X = \mathrm{div}\, \theta(u)$, tale X, in quanto divisore su A_E (ricordo che A è ora la varietà gruppale di L), è una corrispondenza algebrica fra E ed A, e dà una corrispondenza algebrica, temporaneamente chiamata Ξ, fra V ed A; se $Q \in A^* \setminus A_d^*$ il corrispondente $\Xi(Q)$ è ciò che ho chiamato $X_\varphi = \mathrm{div}\, \theta_\varphi(u)$; se invece $Q \in A_d^*$, ossia se Q è singolare ma sempre al finito per t, può darsi che $\Xi(Q)$ non esista, nel qual caso Q è certamente singolare su V anche nel senso geometrico; esistono però gli $X(\mu)$ quando μ percorre i posti di E su k di centro Q su V; ciascuno di essi consiste di $\mathrm{div}_A\, \theta_\varphi(u)$ + eventuale divisore effettivo a componenti degeneri. Poichè di queste componenti degeneri ne esiste solo un numero finito, ecco che Q può essere irregolare ma non fondamentale per Ξ; chiamerò quindi X_φ uno qualunque degli $X(\mu)$, in numero finito, e dovrò ricordarmi che X_φ, in certi casi, non è univocamente determinato da Q.

Prima di congelare tutto in enunciati formali, che non possono contenere ogni dettaglio senza diventare prolissi, è bene rendersi bene conto della natura di $\mathcal{S}$ e V. Intanto $\mathcal{S}$ è massimale, per il 5.9 che dimostrerò, onde V è birazionalmente equivalente al prodotto della varietà di Picard B di A per uno spazio proiettivo Π; il diagramma commutativo che segue mostra tutte le interdipendenze, e congloba il diagramma che permette la costruzione di B e dell'omomorfismo λ_X di A su B (anche se A è non abeliana; B lo è sempre) legato al divisore X; qui X sta per qualunque $\mathrm{div}\, \theta_\varphi(u)$ con Q generico; darò prima il diagramma, poi i legenda, poi le spiegazioni.

$$
5.7 \qquad
\begin{tikzcd}
k(a) \simeq L & \to k(a,\eta) = k(a,\xi) & = Q(k(t) \otimes_k k(\eta)) & k(\eta) \arrow[l] \\
\lambda_X \uparrow \; k(a') \arrow[u] & \to k(a',\xi) = k(t) \otimes_k K' = Q(K' \otimes k(a)) & & K' \arrow[u] \\
k(b) = k(B) \arrow[uu, bend left] & \to k(b,\xi) = k(B \times \Pi) & = k(t) = k(V) & K = k(Z) = k(\eta) \cap k(t) \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Legenda: Le frecce sono tutte immersioni; se (ij) è il corpo nella riga i e colonna j, allora: $(2j)$ è la chiusura algebrica di $(3j)$ in $(1j)$; il corpo $(2j)$ è normale su $(3j)$, con gruppo di Galois isomorfo al nucleo (finito) dell'omomorfismo della varietà abeliana A' di punto generale non omogeneo a', sulla B; la corrispondente immersione di $k(B)$ in $k(A')$ è il $\lambda_{X'}$ per un opportuno divisore X' su A'. Il corpo $(i3)$ è il corpo delle costanti in $(i2)$; se l, q sono le

trascendenze di $k(\eta)$ e rispettivamente K su k, il corpo $(1f)$ è puramente trascendente di trascendenza $l-q$ su $(2f)$; il corpo $(i2)$ è puramente trascendente di trascendenza l su $(i1)$. Gli ipercorpi rispetto al P di A, opportunamente esteso, sono gli $(i1)$, su k; poi (12) su $k(\eta)$ ma non su $k(\xi)$; (22) su K'; e se si vuole essere pignoli, ogni $(i3)$ su se stesso. Infine, K' è trascendente puro su k.

Spiegazione: Si parte da $k(a) = k(A) \simeq L$, con $a = \{a_1, a_2, \ldots\}$ punto generale non omogeneo di A su k; su A si considera il sistema algebrico irriducibile massimale S di divisori effettivi; il suo elemento generale è un divisore della estensione di A su $k(a, \eta)$, con $\eta_1, \ldots, \eta_l$ indeterminate su $k(a)$; la derivazione d di $k(a)$ si estende a $k(a, \eta)$, con $dk(\eta) = 0$. Si sa che la varietà rappresentativa di S è $B \times \Pi$, con corpo $k(b, \xi)$ se $\{b_1, b_2, \ldots\}$ è punto generale non omogeneo della varietà di Picard B di A, e $\xi_1, \ldots, \xi_l$ sono indeterminate su $k(b)$ (danno il punto generale non omogeneo di Π). L'immersione di $k(b, \xi)$ in $k(a, \eta)$ produce l'immersione λ_x di $k(b)$ in $k(a)$. Il $B \times \Pi$ è birazionalmente equivalente alla nostra V, che ha punto generale non omogeneo v; notare che la d di C la ho trasportata su $E = k(v)$ mediante l'isomorfismo fra i due corpi. Se $k(a')$ è il sottoipercorpo massimo di $k(a)$ la cui varietà gruppale è abeliana, essa varietà abeliana è la varietà di Severi-Albanese di A, od anche la varietà di Picard di B (per la bidualità), e reciprocamente; ed il $k(a')$ è la chiusura algebrica di $k(b)$ in $k(a)$. Le prime due colonne del diagramma sono così spiegate; gli elementi della terza colonna sono i corpi delle costanti di quelli della seconda; K' è la chiusura algebrica di K in $k(\eta)$, e per forza $k(\eta)$ è puramente trascendente su K' (lo è $k(a)$ su $k(a')$). Il corpo K è anche il corpo della varietà Z su k rappresentativa del minimo sistema algebrico su V contenente le A^v con v generico; l'elemento generale di questo sistema algebrico ha punto generale non omogeneo v su K' o su K. Il corpo K' è puramente trascendente su k perchè gioca per $k(a')$ il ruolo che $k(\eta)$ gioca per $k(a)$. Fine delle spiegazioni.

Si è così visto che benchè C non sia ipercorpo su K, il $K' \otimes_K C$ è ipercorpo su K', isomorfo a $Q(K' \otimes L)$. Ora che siamo in possesso di K' possiamo precisare, ed anche rendere visibili a colpo d'occhio, le varie eventualità; chiamo Z' la varietà su k un cui anello affine è la chiusura aritmetica in K' dell'anello affine di Z; chiamo Γ' la corrispondenza algebrica fra Z' e V che proviene nel modo ovvio da Γ; considero i due diagrammi:

$$\begin{tikzcd} & \Gamma'\{v\} = \Gamma'\{v'\} = mA^v & \\ v \arrow[ur] & & v' \arrow[ul] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X_Q & \\ & Q \in A^v \arrow[u] \arrow[d] & \\ & \theta_Q(u) \to \operatorname{div}_A \theta_Q(u) . & \end{tikzcd}$$

Il primo indica come il corrispondente di un $v \in Z$ (sempre al finito) dia vari $v' \in Z'$, in numero di $[K':K]$ contando le molteplicità; come $\Gamma'\{v\}$ coincida

con ogni $\Gamma^{\nu}\{v\}$, e sia sempre, come spiegherò, della forma $m\mathcal{A}^{\nu}$ (mai due componenti diverse); il secondo indica come, scelto un $\mathcal{Q} \in \mathcal{A}^{\nu}$, che è poi un qualsiasi $\mathcal{Q} \in V$, al finito, se ne deduca uno $\theta_{\mathcal{Q}}(u)$, che ha un divisore su $\mathcal{A}$; a $\mathcal{Q}$ si appaia anche l'elemento $X_{\mathcal{Q}}$ di $\mathcal{S}$ che corrisponde a $\mathcal{Q}$, e si ha sempre $X_{\mathcal{Q}} = \operatorname{div}_{\mathcal{A}} \theta_{\mathcal{Q}} +$ eventuali componenti su $\mathcal{A}_{\infty}$, con molteplicità non negative. La richiesta «al finito» che viene fatta ogni volta che me lo ricordo significa che si considerano solo i divisori in $\mathcal{S}$ nessuna delle cui componenti passa per $O = O_{\mathcal{A}}$.

È giunto il momento di mostrare che c'è un solo $\mathcal{A}^{\nu}$; ed infatti sappiamo ora che, tornando per un momento a considerare v come posto di K su k, ossia valutazione su k con corpo residuo k (algebricamente chiuso), si trova $\mathfrak{M}^{\nu}$ così: si estende v ad un posto v' di K' (il risultato è indipendente dal v' scelto), e si estende v' ad un posto v'' di $\mathcal{Q}(K' \otimes L) = K' \otimes_K E$ su L; il v'' è unico quando v' sia fissato. Ora $\mathfrak{M}^{\nu}$ è l'intersezione di $k[t]$ con il primo massimo della schiera valutante di v''. Casi degni di nota:

1. $\mathcal{Q}$ non singolare, ossia $(d^i\mathbb{W}^{\nu})(t(\mathcal{Q})) \neq 0$ per qualche i; allora $\mathcal{A}^{\nu} = \mathcal{A}$, e $X_{\mathcal{Q}} = \operatorname{div} \theta_{\mathcal{Q}}$ è il traslato di un qualunque X_S con $S \in \mathcal{A}^{\nu}$ nelle stesse condizioni di $\mathcal{Q}$. Il punto v è determinato da $\mathcal{Q}$ perchè $X_{\mathcal{Q}}$ determina $\mathcal{Q}$ ed $\mathcal{A}^{\nu}$: $v = \Gamma[\mathcal{Q}]$.

2. $\mathcal{Q}$ singolare ma v non singolare; la seconda condizione comporta che $\mathcal{A}^{\nu} = \mathcal{A}$; quindi $\mathcal{Q} \in \mathcal{A}^{\nu}_{\infty}$, e l'ipercorpo di $\theta_{\mathcal{Q}}$ è sottoipercorpo di $k(\mathcal{A}) = L$ ed ha dimensione $< \dim \mathcal{A}$. Il punto $\mathcal{Q}$ determina un numero finito di $X_{\mathcal{Q}}$, ed un numero, che può anche essere infinito, di $\mathcal{A}^{\nu}$: $\Gamma[\mathcal{Q}]$ non è necessariamente nè un punto nè un numero finito di punti.

3. v singolare; in tal caso $\mathcal{A}^{\nu}$ è isogena ad $\mathcal{A}$, ed $L^{\nu} \subset L$; questo può accadere, e accade, se e solo se per $\mathcal{Q} \in \mathcal{A}^{\nu} \setminus \mathcal{A}^{\nu}_{\infty}$ il gruppo dei punti $S \in \mathcal{A}$ tali che $\sigma_S^{-1} X_{\mathcal{Q}} = X_{\mathcal{Q}}$ è finito ed ha ordine > 1; quell'ordine è il grado della isogenia ed è certamente un divisore dell'm che compare in $\Gamma\{v\} = m\mathcal{A}$, onde $m > 1$ in questo caso (ma non solo in questo caso). Di nuovo, $\Gamma[\mathcal{Q}] = v$ se $\mathcal{Q} \in \mathcal{A}^{\nu} \setminus \mathcal{A}^{\nu}_{\infty}$, ma non necessariamente se $\mathcal{Q} \in \mathcal{A}^{\nu}_{\infty}$ (sempre $\mathcal{Q}$ al finito). Un pensierino: se H è la sottovarietà di V luogo dei punti singolari, H è certo unione del luogo H_1 dei $\mathcal{Q} \in \mathcal{A}^{\nu}_{\infty}$ e dell'unione H_2 di tutti gli $\mathcal{A}^{\nu}$ con v singolare: basta pensare alle dimensioni degli ipercorpi di $\theta_{\mathcal{Q}}$; le H_i sono varietà.

Sono debitore di un risultato, che ora enuncerò e dimostrerò dopo un paio di definizioni; dato un sistema di N-vincoli, i loro coefficienti generano un corpo sul corpo razionale; la chiusura algebrica di questo corpo sarà chiamata il *corpo del sistema*, o *dei vincoli*. Poi, se C è un ipercorpo su un corpo F, e se C', F' sono sottocorpi di C, F rispettivamente, tali che C' sia ipercorpo su F' rispetto al coprodotto di C, che F' sia algebricamente chiuso, e che $C = \mathcal{Q}(F \otimes_{F'} C')$, dirò che C è *definito su* F', o che F' è un *corpo di definizione* di C. Il risultato è il seguente:

5.8 Teorema: *Sia k algebricamente chiuso, e sia $\varphi(u) \in k\{u\}$ tipo theta olomorfa normalizzata (una sola indeterminata u); se $\varkappa \subset k$ è il corpo del sistema di vincoli prodotto da $\varphi(u)$, esso è anche un corpo di definizione dell'ipercorpo di $\varphi(u)$; e reciprocamente, dopo eventuale sostituzione di $\varphi(u)$ con una associata.*

Dim.: Sia $\varkappa$ il corpo del sistema di vincoli; se si segue passin passetto la esposizione che precede, si trova che $\varkappa[\tau_2, \tau_3, \ldots]$ è generato da $\tau_2, \ldots, \tau_{2r-1}$ perchè le successive τ_i sono polinomi in quelle scritte a coefficienti in $\varkappa$; si ha così $k[\tau] = k \otimes_\varkappa \varkappa[\tau]$; lo stesso vale per $k[t_2, t_3, \ldots]$. L'ipercorpo L di $\varphi(u)$ su k si ottiene già al livello delle $\theta_i(u) \in k[t]\{u\}$; ma in realtà $\theta_i(u) \in \varkappa[t]\{u\}$, e questo produce un ipercorpo L' su $\varkappa$ tale che $L = \mathcal{Q}(k \otimes_\varkappa L')$; pertanto l'ipercorpo di $\varphi(u)$ è definito su $\varkappa$. Reciprocamente, suppongasi che $L \subset k\{u\}$ sia definito su $\varkappa$, e precisamente $L = \mathcal{Q}(k \otimes_\varkappa L')$; ricordiamo che, per il 4.1 di [1], i coefficienti $e_i \in k$, ridotti degli e_i, nella serie di potenze $\varphi(u)$, appartengono ad un anello finitamente generato sul corpo razionale; pertanto $\varkappa[e'_2, e'_3, \ldots]$ è generato su $\varkappa$ da un numero finito di e'_i. Se v è una valutazione generica di k su $\varkappa$ con corpo residuo $\varkappa$, la riduzione di k mod v, ossia della schiera valutante di v modulo il suo primo massimo, applica (una schiera di) L su L', onde L' è generato, su $\varkappa$, da ciò che diventano i $\varphi_2(u), \varphi_3(u), \ldots$ quando gli e'_i sono sostituiti dalle loro immagini e'_i mod v. È come dire che l'applicazione diretta $e_i \to e'_i \in k$ manda $\theta(u)$ in una $\theta_0(u)$ che come tipo theta in $k\{u\}$ ha l'ipercorpo L, ma come tipo theta in $\varkappa\{u\}$ ha l'ipercorpo L'. Le $\varphi(u)$, $\theta_0(u)$, $\theta(u)$ producono gli stessi vincoli, che debbono quindi essere a coefficienti in $\varkappa$ perchè $\theta_0(u) \in \varkappa\{u\}$. C.V.D.

5.9 Corollario: *Sia A varietà gruppale sul corpo algebricamente chiuso k; siano X, Y divisori effettivi su $A \setminus A_\pi$, e suppongasi che $\sigma_Q^{-1} X \neq X$ se $Q \neq O$. Se $X = Y$ si possono scegliere funzioni tipo theta normalizzate di X, Y, in una indeterminata, tali che quella di Y ammetta i vincoli prodotti da quella di X, e li produca se e solo se $\sigma_Q^{-1} Y \neq Y$ quando $Q \neq O$, nel qual caso $Y \approx X$. Un parziale reciproco è il seguente: dato X come prima, esistono divisori effettivi $X_1 = X, X_2, \ldots, X_n$ su $A \setminus A_\pi$, a due a due algebricamente inequivalenti, e con la stessa proprietà di X riguardo a σ_Q^{-1}, le cui tipo theta normalizzate in una indeterminata possono essere scelte in modo da produrre gli stessi vincoli, e tali che se Y è un divisore effettivo su $A \setminus A_\pi$ una cui tipo theta normalizzata produca quei vincoli, si abbia $Y \approx X_i$ per un i opportuno.*

Dim.: Per la prima parte: se X ha il significato detto, si consideri l'elemento generale X' del sistema algebrico irriducibile massimale che contiene X; esso è un divisore su A_π se H è il corpo delle funzioni razionali sulla varietà rappresentativa (su k) del sistema algebrico stesso; per 5.8, i vincoli prodotti da una opportuna tipo theta normalizzata di X' hanno coefficienti in k, e sono ammessi dalle tipo theta normalizzate degli elementi del sistema algebrico, dopo avere in essi cancellato le componenti degeneri. Qui sto naturalmente usando il fatto che su una varietà gruppale due divisori effettivi sono algebricamente equivalenti se e solo se appartengono allo stesso sistema algebrico irriducibile.

Per la seconda parte: l'X è un X_φ con Q generico su V nelle notazioni usate fino ad ora; ricordo però che c'erano vari $\mathfrak{P}$ non singolari, dai quali si deducevano vari L, e che taluni L per $\mathfrak{P}$ diversi potevano essere isomorfi come ipercorpi (coincidenti come sottocorpi di $k(v)$). Dimostrerò che in realtà tutti i $\mathfrak{P}$ non singolari danno lo stesso L; è assai più di quanto occorra ora, e ne rimando l'enunciato formale alla prossima sezione. Il $\mathfrak{P}$ che è stato usato fino ad ora lo chiamo $\mathfrak{P}_1$, gli altri $\mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$. Chiamo $\mathfrak{B} \supseteq \operatorname{rad} \Delta$ la intersezione dei $\mathfrak{P}_i$. A questo punto mi rileggo quella parte, della lunga discussione che precede il 5.7, compresa fra gli asterischi (**) ad inizio capoverso; la citerò appunto col simbolo (**); la rileggo e la modifico, usando, nella riduzione $t_i \to e_i$, e quindi nella $\xi_i \to \theta_i$, non il nucleo $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1$, ma il nucleo $\mathfrak{B}$. Nella (**) si incontra prima C, che là era corpo quoziente di $k[\ldots, \theta_i, \ldots]$, e che ora sarà l'anello quoziente del medesimo, ove nei denominatori sono permessi gli elementi, formanti un insieme moltiplicativamente chiuso, che non sono divisori dello zero; quelli, cioè, che non stanno in nessun primo minimale di 0. Questo C è somma diretta di n corpi, ma lo si esprime meglio dicendo che vi sono in C n idempotenti $p_1, \ldots, p_n$, con $p_i p_j = 0$ se $i \neq j$, e con $\sum_i p_i = 1$; gli n corpi sono i $p_i C = C_i$ (il vecchio C è C_1). Invece il D di (**) resta un corpo, e proseguendo L è un corpo, mentre $E = \sum_i E_i$ con $E_i = p_i E$: i p_i sono costanti in $C \cap E$. Di nuovo, $L = EC \cap k(v)$, e continua a valere la $EC = Q(E \otimes L)$, ove Q vuole ora dire anello quoziente, nel modo spiegato. Il corpo L usato ora è proprio lo stesso L trovato in (**): infatti il presente L è generato su k da certe funzioni razionali fratte, a coefficienti in E, negli $\theta_i(v)$; le stesse funzioni razionali fratte nei $p_j \theta_i(v)$ (j fisso) generano $p_j L \cong L$, che è l'L trovato in (**) quando $j = 1$, e quando p_1 venga identificato con 1. Ogni $\mathfrak{P}_i$, tramite il proprio $p_i k[v]$, genera un sistema algebrico irriducibile massimale $\mathcal{S}_i$. Le X_i sono elementi generici degli $\mathcal{S}_i$. C.V.D.

Si noti che nulla sarebbe cambiato, eccetto la richiesta che Y *produca* i vincoli, se fra i $\mathfrak{P}_i$ avessi incluso i singolari; piuttosto, è da notare che fra gli $\mathcal{S}_i$ ci sono tutti i trasformati di $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$ mediante automorfismi di A; ce ne sono altri? (ci sarebbero se i $\mathfrak{P}$ singolari fossero permessi). Si tratta di decidere se i $p_i k[v]$ siano tutti isomorfi fra loro negli isomorfismi $p_i v_j \to p_k v_j$; che poco ci manchi si vede dal 5.7, ove è scritto $k(v) = k(b, \xi)$, ma non so dirimere la questione. Comunque resta provato, in modo inconsueto, che quando α percorre gli automorfismi di A, gli $\alpha\mathcal{S}$ distinti sono in numero finito; è equivalente al seguente asserto su End (A) per A abeliana: *se X è effettivo e λ_X è ingenia, l'indice, nel gruppo delle unità di* End (A), *del sottogruppo formato dalle unità α tali che $\bar{\alpha}\lambda_X\alpha = \lambda_X$, è finito; qui $\bar{\alpha}$ è il duale di α.*

Osservazione: Probabilmente i 5.8, 5.9 restano veri con k qualsiasi se nella definizione di « corpo dei vincoli » e « corpo di definizione » non si richiede la chiusura algebrica. Ho sempre evitato, talora con danno, queste precisazioni scarsamente geometriche, con l'eccezione dell'esposto del 1953 citato nell'Ap-

pendice, quando l'incertezza sul corpo di definizione di una varietà gruppale impediva seri progressi nell'argomento. Chi abbia necessità di usare, in tutto quanto precede o segue, un k non algebricamente chiuso può fruire del risultato seguente, la cui ovvia dimostrazione, che non riporto, è basata sull'applicazione a $k^*\{u\}$ dei k-automorfismi di k^*:

5.10 Lemma: *Sia k^* la chiusura algebrica del corpo k; un sottocorpo L di $k\{u\}$, finitamente generato su k, tale che $k^* \otimes L$ sia ipercorpo su k^* rispetto al* **P** *indotto da quello di $k^*\{u\}$, è già ipercorpo su k rispetto a tale* **P**.

6. - I risultati differenziali

6.1 Risultato preventivo: *Se k è algebricamente chiuso, ogni sistema di N-vincoli su k, compatibile ma singolare, è completabile ad un sistema di M-vincoli su k, compatibile e non singolare, per un opportuno $M \subset N$. Ad ogni sistema di N-vincoli compatibile e non singolare corrisponde una varietà gruppale A; ogni $\theta(u) \in k\{u\}$, in una indeterminata u, che sia tipo theta olomorfa normalizzata e che produca quel sistema di vincoli, ha quella A come varietà gruppale; ed i divisori di tutte quelle $\theta(u)$ formano un aperto in un sistema algebrico $\mathcal{S}$ (non necessariamente irriducibile) di divisori su A; ogni componente di $\mathcal{S}$ è massimale, ed è tale che ogni divisore algebricamente equivalente a 0 è linearmente equivalente alla differenza fra due elementi di quella componente.*

6.2 Risultato parziale: *Sia k algebricamente chiuso, siano $y_2, y_3, \ldots$ indeterminate su k, e si consideri un sistema compatibile non singolare $D_i(y_2, y_3, \ldots)$, per $i \notin N$, di N-vincoli su k; sia d la derivazione di $k(y)$ tale che $dk = 0$, $dy_i = (i+1)y_{i+1}$. Se $r > n$ per ogni $n \in N$, sia J l'ideale di $k[y]$ generato dai $d^i D_i(y)$ per $i = 0, 1, 2, \ldots$; allora J è primo. Se z_i è l'immagine di y_i nella riduzione di $k[y] \bmod J$, si ha*

$$k[z_2, z_3, \ldots] = k[z_2, \ldots, z_{2r-1}]\,;$$

se poi l'immagine di d è ancora indicata con d, sia Δ l'ideale di $k[z]$ generato dalle $d^j D_i(z)$ per $i = 0, 1, 2, \ldots$ e per $j \neq r$. Allora Δ è generato da un numero finito fra gli elementi scritti, ed è ideale proprio. Se $\mathfrak{P}$ è un qualunque primo minimale di Δ che sia non singolare, e cioè che non contenga il wronskiano $W(z)$ dei $P_{2i}(z)$ per $i \in N$, e se θ_i è l'immagine di $z_i \bmod \mathfrak{P}$, sia K il corpo delle costanti in $k(\theta)$ rispetto a d (nuova immagine della vecchia d); allora esistono un prolungamento normale K' di K, di grado finito su K, ed un ipercorpo L su k, quest'ultimo indipendente dalla scelta di $\mathfrak{P}$, tali che K' sia puramente trascendente su k, che d sia derivazione invariante di L, e che

$$K'(\theta_2, \theta_3, \ldots) = K' \otimes_K k(\theta_2, \theta_3, \ldots) = Q(K' \otimes L).$$

Se il sistema di vincoli era prodotto da una $\varphi(u) \in k\{u\}$ tipo theta olomorfa normalizzata in una indeterminata u, l'ipercorpo di φ è L; se poi A è la varietà gruppale

di L, ossia di φ, ed $X = \operatorname{div}\varphi$, il grado $[K' : K]$ è uguale al numero di componenti irriducibili del nucleo dell'omomorfismo λ_x di A sulla propria varietà di Picard, mentre il gruppo di Galois di K' su K è isomorfo al gruppo quoziente di tale nucleo modulo la propria componente dell'identità.

6.3 Primo risultato differenziale: *Sia k algebricamente chiuso; siano $u, x_0, x_2, \ldots$ indeterminate su k, e pongasi, per $i = 2, 3, \ldots$,*

$$y_i(u) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{i+j}{i} x_{i+j} u^j \in k[x][u];$$

sia d la derivazione continua di $k(x)\{u\}$ tale che $dk(x) = 0$, $du = 1$, onde $dy_i(u) = (i+1)y_{i+1}(u)$. Siano N, D_i, r, $W = W(y)$ come nel 6.2, e sia J l'ideale di $k[x]$ generato dai coefficienti che compaiono nella serie di potenze $D_r(y(u))$; allora J è primo, e se t_i è l'immagine di $x_i \bmod J$, si ha $k[t_2, t_3, \ldots] = k[t_2, \ldots, t_{2r-1}]$. Siano $z_i(u)$ le serie di potenze ottenute dalle $y_i(u)$ con le sostituzioni $x_i \to t_i$, e sia Δ l'ideale di $k[t]$ generato dalle $[d^i D_j(z(u))]_{u=0}$ per $i = 0, 1, 2, \ldots$ ed $j \neq r$; allora Δ è proprio, ed è generato da un numero finito fra questi elementi. Dettone $\mathfrak{P}$ un primo minimale non singolare, ossia non contenente $W(t)$, sia e_i l'immagine di $t_i \bmod \mathfrak{P}$, e sia $\theta_i(e, u)$ la serie di potenze ottenuta da $z_i(u)$ con la sostituzione $t_i \to e_i$. Pongasi $E = k(e)$, $C = k(\theta_1(e, u), \theta_2(e, u), \ldots)$, $K = E \cap C$; allora $dC \subseteq C$, e K è il corpo delle costanti in C rispetto a d. Valgono gli asserti seguenti, ove le y_i, z_i, θ_i sono quelle del 6.2:

1. *Le applicazioni $y_i \to y_i(u) \to y_i(0) = x_i$ producono dei k-isomorfismi fra gli anelli $k[y]$, $k[y(u)]$, $k[x]$, nei quali si corrispondono il presente J e quello del 6.2.*

2. *Le applicazioni $z_i \to z_i(u) \to z_i(0) = t_i$ producono dei k-isomorfismi fra gli anelli $k[z]$, $k[z(u)]$, $k[t]$, nei quali si corrispondono il presente Δ e quello del 6.2.*

3. *Il presente $\mathfrak{P}$ corrisponde ad uno di quelli del 6.2 nell'isomorfismo descritto in 2, e le applicazioni $\theta_i \to \theta_i(e, u) \to \theta_i(e, 0) = e_i$ producono dei k-isomorfismi fra gli anelli $k[\theta]$, $k[\theta(e, u)]$, $k[e]$.*

4. *Posto $L = EC \cap k\{u\}$, tale L è un ipercorpo su k, sottoipercorpo di $k\{u\}$, ed è quello così indicato in 6.2; si ha $EC = Q(E \otimes_K C) = EL = Q(E \otimes L)$; pongasi $\theta(e, u) = \exp \sum_{i=1}^{\infty} e_i u^i$; allora $\theta(e, u)$ è tipo theta olomorfa normalizzata che produce gli N-vincoli D_i, ed EL è l'ipercorpo di $\theta(e, u)$ su E; si ha $\theta_i(e, u) = d_i \log \theta(e, u)$; se A è la varietà gruppale di L, A_E è quella di $\theta(e, u)$; perciò $X = \operatorname{div}\theta(e, u)$, si intende su A_E.*

5. *Il corpo E è isomorfo ad un prolungamento trascendente puro del corpo della varietà di Picard B di A; esiste inoltre un prolungamento di grado finito K' di K, che è puramente trascendente su k, tale che $[K' : K]$ sia uguale al numero di componenti irriducibili del nucleo dell'omomorfismo λ_x di A su B, e tale che $K'(e) = K' \otimes_K E \cong Q(K' \otimes L)$ su K'; vedasi il 5.7 ed i suoi legenda per maggiori dettagli; questo K'*

è isomorfo, su k, a quello del 6.2. L'immersione di $k(B)$ in E e quindi in $Q(K \otimes L)$ è un'immersione in L, e produce λ_ξ. Scritto E come prolungamento trascendente puro di $k(B)$ mediante certe indeterminate, siano b i valori assunti dalle e quando a tali indeterminate si assegnino valori generici in k; allora il divisore di $\theta(b, u)$ su $A_{u(B)}$ proviene da un divisore di Poincaré su $B \times A$.

6. *Sia V la varietà su k di punto generale non omogeneo $e_1, \ldots, e_{2r-1}$; allora X, visto come corrispondenza algebrica fra E ed A, induce una corrispondenza algebrica fra V ed A, che è biunivoca, ed indicata con $Q \to X_Q$, fra i punti di V al finito per e e non «singolari» (ossia non tali che $(d'W)(e(Q)) = 0$ per ogni i), ed un aperto di un sistema irriducibile massimale $\mathcal{S}$ di divisori su A; per punti Q al finito ma singolari, X_Q indicherà uno qualunque degli elementi di $\mathcal{S}$, in numero finito, che corrispondono a posti di E su k con centro Q su V. Ora l'insieme degli X_Q è l'aperto $\mathcal{S}'$ di $\mathcal{S}$ consistente degli elementi di $\mathcal{S}$ nessuna cui componente passa per il punto identità O di A. Anche la corrispondenza $\mathfrak{P} \to \mathcal{S}$ è biunivoca, per $\mathfrak{P}$ non singolare; gli $\mathcal{S}$ sono a due a due disgiunti, i $\mathfrak{P}$ sono a due a due primi fra loro, ed ogni automorfismo di A scambia fra loro i vari $\mathcal{S}$ o $\mathfrak{P}$.*

7. *Sia Γ la corrispondenza algebrica fra K e V generata dall'immersione di K in $E = k(V)$, e sia Z, con $k(Z) = K$, la varietà rappresentativa del sistema algebrico irriducibile di cicli su V formato dai $\Gamma[v]$ quando v percorre i posti di K su k. Se si indica ancora con Γ la corrispondenza algebrica irriducibile fra Z e V indotta da Γ, e si chiamano genericamente v i punti di Z tali che nessuna componente di $\Gamma[v] = \operatorname{rad} \Gamma[v]$ (= supporto di $\Gamma[v]$) sia all'infinito per e, si ha $\Gamma[v] = m_v A^v$ per ogni v, con m_v intero positivo (uguale ad 1 per v generico), ed A^v sottovarietà irriducibile di V. Inoltre $\Gamma[Q]$ è un punto v di Z per ogni $Q \in V$ al finito, con la possibile eccezione dei Q singolari.*

8. *Per $Q \in V$ al finito, $\operatorname{div}_A \theta(e(Q), u)$ si ottiene da X_Q cancellandovi le eventuali componenti su A_d; se v è non singolare, ossia se non tutti i $Q \in A^v$ al finito sono singolari, A^v è birazionalmente equivalente ad A, la corrispondenza birazionale essendo biunivoca al finito (rispetto ad e); per v non singolare e per $Q \in A^v \setminus A^v_d$ al finito, l'ipercorpo di $\theta(e(Q), u)$ è L, il suo divisore è X_Q, e si ha $\Gamma[Q] = v$; inoltre $\theta(e(Q), u)$ produce il sistema di vincoli D_1. Sempre per v non singolare, ma per $Q \in A^v_d$ al finito, l'ipercorpo L^v di $\theta(e(Q), u)$ è un sottoipercorpo di L di trascendenza su k minore di $\dim A$, e $\theta(e(Q), u)$ ammette, ma non produce, il sistema di vincoli D_1. Se poi $Q \in A^v \setminus A^v_d$ ed $S \in A^v$, ambedue al finito, l'applicazione $\theta_i(e(Q), u) \to \theta_i(e(S), u)$ per $i > 1$ produce l'endomorfismo invariante $\sigma_S^{-1}\sigma_Q$ di L. Si ha comunque $Q \in A^v_d$ se e solo se Q è singolare.*

9. *Se v è singolare, A^v è birazionalmente equivalente ad una varietà gruppale isogena ad A, con biunivocità come al punto 8; se $Q \in A^v \setminus A^v_d$ al finito, si ha $\Gamma[Q] = v$, e l'ipercorpo di $\theta(e(Q), u)$ è un sottoipercorpo proprio $L^v \simeq k(A^v)$ di L, l'immersione producendo l'isogenia nominata sopra; si ha $\operatorname{div}_A \theta(e(Q), u) = X_Q$, ed m_v è multiplo del grado della isogenia, ossia dell'ordine del gruppo degli $S \in A$ tali che $\sigma_S^{-1} X_Q = X_Q$. Sempre per v singolare, ma per $Q \in A^v_d$ al finito, l'ipercorpo di $\theta(e(Q), u)$ è sotto-*

ipercorpo di L^s di trascendenza $<\dim A$ *su* k; *in ambo i casi, ossia per* $Q \in A^s$ *al finito,* $\theta(e(Q), u)$ *ammette, ma non produce, il sistema di vincoli* D_i.

10. *Per* $Q \in V$ *non singolare, sia* $v = \Gamma[Q]$, *e sia* $\{e^v\}$, *immagine di* $\{e\}$, *il punto generale non omogeneo di* A^v; *se* $k(A^v)$, $k(\ldots \theta_i(e^v, u) \ldots)$ *vengono identificati con* L *mediante le* $e^v_i \to \theta_i(e^v, u) \to \theta_i(e(Q), u) \in L$, *un* $\mathbf{P}$ *di* L, *essenzialmente unico, è dato dall'immersione di* $k(\ldots \theta_i(e^v, u) \ldots)$ *in* $Q(k(e^v) \otimes L)$; *è il* $\mathbf{P}$ *per il quale* Q *è il punto identità di* A.

11. *Sia* H *la minima sottovarietà di* V *che al finito è il luogo dei punti singolari nel senso di 6; allora* $H = H_1 \cup H_2$, *con* H_1, H_2 *varietà, ove* H_1 *è, al finito, l'unione degli* A^v_k, *mentre* H_2 *è, al finito, l'unione di tutti gli* A^v *per* v *singolare.*

12. *Se una* $\varphi(u) \in k\{u\}$ *tipo theta olomorfa normalizzata produce il sistema di vincoli* D_i, *si ha* $\varphi(u) = \theta(e(Q), u)$ *per una sola scelta di* $\mathfrak{P}$ *non singolare, e per un unico* $Q \in V$ *al finito non singolare.*

13. *Nella situazione del punto 8, con* Q *singolare, sia* Q' *un punto di* A *che corrisponde a* Q; *supposto* Q' *r-degenere, sia* D *la componente di* A_{kr} *che lo contiene; allora l'*L^s *del punto 8 è isogeno all'ipercorpo di* D.

Dal punto di vista dell'algebra differenziale, il gruppo dei punti non degeneri di A_{kr} è il gruppo di Galois differenziale del corpo $K(\theta_2, \theta_3, \ldots)$, con la derivazione d_r su K; tutto il discorso fa parte del caso meno studiato nell'algebra differenziale, quello non lineare, e dovrebbe essere sviluppato fino a stabilire il risultato esposto da E. R. Kolchin, solo per il corpo complesso, in *Abelian extensions of differential fields* (Amer. Journ. of Math., 82, 1960, p. 779); è il risultato che indica nelle theta lo strumento per la soluzione dei sistemi di equazioni differenziali non lineari (cfr. la fine della sez. 1). Sul rovescio della medaglia sta il fatto che per le equazioni più studiate nell'algebra differenziale, quelle di Picard-Vessiot che producono come gruppo di Galois differenziale i gruppi, appunto, delle varietà di Vessiot (le chiamai così proprio per questo motivo; Picard era già stato troppo sfruttato), non aveva affatto sorpreso che equazioni differenziali ordinarie, e quindi in una sola variabile, producessero varietà di Vessiot di tutte le possibili dimensioni; come ora per le D_r (una sola variabile u) e le A (dimensione qualsiasi).

Forse qui non è fuori luogo un caveat psicologico: l'analisi ci ha abituati a pensare che ogni funzione «importante» sia definibile mediante la propria equazione differenziale, salvo poi ad usare condizioni iniziali per sceglierne di più simpatiche nel mucchio; per es., $\exp u$ fra le varie $c \exp u$. Per le tipo theta, invece, sono proprio indispensabili le condizioni iniziali, escluso il caso, credo unico, descritto nell'esempio 1 della sez. 7, e cioè $N = \{0, 1\}$, che dà la theta di un punto su una curva cubica. Ho infatti ammannito ad un calcolatore l'equazione differenziale D_3 per $N = \{0, 1, 2\}$, con coefficienti indeterminati, ed ho chiesto se $W_4(\varrho) = 0$, il che dovrebbe essere se la D_3 già definisse una tipo theta (sarebbe quella di due punti su una sestica di genere <1); mi ha sciorinato, come $W_4(\varrho)$, un polinomio che, contando i coefficienti della D_3 come indeterminante, ha 97 termini. Un altro pezzetto di saga calcolatoria è

descritto nell'esempio 2 della sez. 7. Resta tuttavia il fatto che il corpo differenziale $k(t, \mathfrak{z})$ ha, sul proprio corpo delle costanti, un gruppo di Galois differenziale del quale qualcosa di intimamente legato ad A dovrebbe essere il centro; varrebbe la pena di descrivere accuratamente questo gruppo (varietà gruppale non commutativa).

È possibile migliorare, o comunque modificare, il metodo descritto nel 6.3 per fabbricare ipercorpi; assegno N, e chiamo D l'equazione differenziale D_r; gli altri vincoli D_i non li assegno. Risolvo l'equazione differenziale $D(y) = 0$, ottenendo le $\mathfrak{z}_i$ nel simbolismo del 6.2 o le $\mathfrak{z}_i(u)$ e le t_i in quello del 6.3. Posto $T = k(t)$, i corpi T, $k(\mathfrak{z})$, $k(\mathfrak{z}(u))$ sono isomorfi; il $k(\mathfrak{z})$ contiene il proprio corpo delle costanti, che denoterò con $F = k(f_1, \ldots, f_s)$; si ha di nuovo $F = T \cap k(\mathfrak{z}(u))$, e $T(\mathfrak{z}(u)) = \mathcal{Q}\big(T \otimes_F k(\mathfrak{z}(u))\big)$.

Visto questo, impongo che ogni $P_{ri}(\mathfrak{z})$ con $r \neq i \notin N$ sia combinazione lineare dei $P_{rj}(\mathfrak{z})$ per $j \in N$, a coefficienti in F; sia $W_i(\mathfrak{z})$, per $i \notin N \cup \{r\}$, il wronskiano, rispetto a d, delle $P_{ri}(\mathfrak{z})$ con $j \in N \cup \{i\}$, e sia $W_{ij}(\mathfrak{z})$, per gli stessi i e per $j \in N$, quello delle $P_{rh}(\mathfrak{z})$ quando h percorre l'insieme ordinato ottenuto sostituendo j con i nell'insieme ordinato N. Considero l'ideale di $k[\mathfrak{z}]$ generato da tutti i $d^j W_i(\mathfrak{z})$, $i \notin N \cup \{r\}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$; naturalmente basta un numero finito di questi; o, equivalentemente, l'ideale di $k[t]$ generato da tutti i $[d^j W_i(\mathfrak{z}(u))]_{u=0}$; se è l'ideale unità, l'equazione differenziale $D = D_r$ tutta sola era *incompatibile*; se l'ideale è proprio ma il suo radicale contiene il wronskiano $W(\mathfrak{z})$, era *singolare*. Se D non è nè incompatibile nè singolare, sia $\mathfrak{P}$ un primo minimale dell'ideale detto, non singolare e cioè non contenente $W(\mathfrak{z})$, sicchè il suo localizzato conterrà tutti i $W_{ij}(\mathfrak{z})/W(\mathfrak{z})$; costruiamo le ε_i, θ_i nel solito modo (sez. 5) come $\mathfrak{P}$-immagini delle t_i, $\mathfrak{z}_i$. Dato che ora $W_i(\theta) = 0$, il $P_{ri}(\theta)$ sarà combinazione lineare dei $P_{rj}(\theta)$ per $j \in N$, con coefficienti $\varkappa_{ij} = W_{ij}(\theta)/W(\theta)$, necessariamente nel corpo delle costanti K di $k(\theta_2, \theta_3, \ldots)$, tale K essendo diverso da quello del 6.3, e tale K contenendo necessariamente il corpo generato su k dalle immagini g_i delle f_i mod $\mathfrak{P}$. Noto che l'essere D incompatibile significa che ogni sistema di N-vincoli su k comprendente D è incompatibile; similmente per l'essere singolare; credo che nessuno dei due casi possa mai avverarsi, ma questa conclusione casomai farà parte del senno di poi. Tornando a K, esso coincide con $k(\varepsilon) \cap k(\theta_2, \theta_3, \ldots)$, e contiene la chiusura algebrica in ciascuno dei due corpi del corpo quoziente di $k[\varkappa, g]$; sia $\mathfrak{Q}$ un primo di $k[\varepsilon]$ che non contenga $W(\varepsilon)$, ossia non singolare, e la cui estensione al proprio localizzato tagli $k[\varkappa]$ in un primo massimale di quest'ultimo; suppongasi inoltre che $\mathfrak{Q}$ sia minimale rispetto a tutte queste proprietà. La riduzione di $k[\varepsilon]$ mod $\mathfrak{Q}$ è equivalente all'aggiunta a D di vincoli D_i, $i \notin N \cup \{r\}$, che, con $D = D_r$, sono N-compatibili, non singolari, ed a coefficienti in k; perciò gli ε mod $\mathfrak{Q}$ sono gli ε del 6.3; il $k(g \bmod \mathfrak{Q})$ è contenuto nel K del 6.3; ed il $k(\varkappa \bmod \mathfrak{Q})$ è naturalmente k. Oppure, alternativamente e senza ridurre mod $\mathfrak{Q}$: gli ε, θ presenti sono gli ε, θ del 6.3; la chiusura algebrica di $k(\varkappa)$ è il k del 6.3; e il composto del presente K con la detta chiusura algebrica è il K del 6.3. Concludendo, e adottando solo il secondo punto di vista:

6.4 Secondo risultato differenziale: *Sia k algebricamente chiuso, e siano $N, n, x_i, y_i, d, W(y)$ come nel 6.3; sia $D(y)=D_r(y)$ una equazione differenziale che sia un N-vincolo su k, e che suppongo compatibile e non singolare; siano t_i, z_i ottenuti come nel 6.3; sia $W_i(y)$, per $i \notin N \cup \{r\}$, il wronskiano dei $P_{2j}(y)$ per $j \in N \cup \{i\}$, e sia infine, per lo stesso i e per $j \in N$, $W_{ij}(y)$ il wronskiano dei $P_{2h}(y)$ quando h percorre l'insieme ordinato ottenuto sostituendo j con i nell'insieme ordinato N. Sia $\mathfrak{P}$ un primo minimale dell'ideale di $k[t_2, \ldots, t_{2r-1}]$ generato da tutti i $[d^i W_j(z(u))]_{u=0}$ per $i = 0, 1, 2, \ldots$ e per $j \notin N \cup \{r\}$, scelto in modo da non contenere $W(z)$ (ne esistono e sono i non singolari), e si indichino con e_i, θ_i, K le stesse cose così indicate nel 6.3 per il $\mathfrak{P}$ del 6.3; allora K contiene i $\varkappa_{ij} = W_{ij}(e)/W(e)$. Se nel 6.3 si sostituisce k con la chiusura algebrica k_1 di $k(\varkappa)$, e K col composto di k_1 e del presente K, valgono tutti gli asserti 1, ..., 13 del 6.3 ad eccezione di quelli riguardanti dei $\mathfrak{P}$ diversi dal prescelto, purchè come vincoli $D_i(y)$ per $i \notin N \cup \{r\}$ si scelgano quelli in cui il coefficiente di P_{2i} è $-\varkappa_{ij}$, tale sistema di vincoli essendo compatibile e non singolare. Ogni $\varphi(u) \in k[u]$ tipo theta olomorfa normalizzata che produca un sistema di N-vincoli su k comprendente il presente $D_r(y)$ si ottiene, dopo opportuna scelta di $\mathfrak{P}$, specializzando in k i coefficienti e_i della $\theta(e, u)$ in maniera che i $-\varkappa_{ij}$ si specializzino ai coefficienti dei P_{2i} in D_i.*

Sono pronto per un'ultima semplificazione, che consiste nel non dare neppure l'equazione differenziale D_r; usa invece come equazione differenziale, che non posso chiamare vincolo, il wronskiano $W_r(y)$; mi interessa un primo minimale J, non contenente $W(y)$, dell'ideale J' generato dalle $d^i W_r(y)$ per $i = 0, 1, 2, \ldots$; intanto, per il Lemma 7.8 di [3] e poichè $W(y)$ è irriducibile, nessuna potenza di $W(y)$ appartiene a J'; quindi $J = (\mathrm{rad}\, J') : (W(y))$, con $(W(y))$ indicante l'ideale di $k[y]$ generato da $W(y)$, è un ideale primo per il Lemma 7.9 di [3], e non contiene $W(y)$ per quanto visto prima; è quindi l'unico primo minimale di J' non contenente $W(y)$. Uso questo J come ho usato il J nel ragionamento che ha portato al 6.4, ivi comprese le definizioni di *incompatibile* e *singolare* applicate, questa volta, al solo N. In conclusione:

6.5 Risultato differenziale universale: *Sia k algebricamente chiuso, siano $N, n, x_i, y_i, d, W, W_i, W_{ij}, r$ come nel 6.4, e suppongasi N nè incompatibile nè singolare; sia J' l'ideale di $k[x]$ generato dai $[d^i W_r(y(u))]_{u=0}$ per $i = 0, 1, 2, \ldots$, e pongasi $J = (\mathrm{rad}\, J') : (W(x))$. Allora J è primo; dette t_i le J-immagini delle x_i, e dette $z_i(u)$ le corrispondenti immagini delle $y_i(u)$, pongasi $\varkappa_i = W_{ri}(t)/W(t)$; allora le t, z sono quelle del 6.4 qualora in esso si sostituisca k con la chiusura algebrica k_2 di $k(\ldots \varkappa_i \ldots)$, e si prenda come equazione differenziale su k_2 la D_r nella quale $-\varkappa_i$ è il coefficiente di P_{2i}. Vale perciò, con queste sostituzioni, tutto il 6.4, l'ultima frase di esso potendosi applicare ad ogni $\varphi(u) \in k[u]$ tipo theta olomorfa normalizzata che produca un sistema di N-vincoli su k.*

I tre risultati differenziali ci permettono di descrivere l'ambiente astratto nel quale vivono le tipo theta olomorfe, a prescindere dalle loro realizzazioni concrete come serie di potenze, o applicazioni del corpo p-adico su k, o funzioni intere di variabile complessa, e simili:

6.6 Teorema: *Siano $\zeta_2, \zeta_3, \ldots$ elementi di un corpo C, possedente un sottocorpo k algebricamente chiuso tale che $C = k(\zeta)$, e possedente una derivazione d tale che $d\zeta_i = (i+1)\zeta_{i+1}$, e che k sia il corpo delle costanti rispetto a d. Suppongasi inoltre che esistano un insieme finito N di interi non negativi comprendente lo zero, ed un sistema di N-vincoli D_i su k tali che $D_i(\zeta) = 0$. Allora C è ipercorpo su k rispetto ad un coprodotto $\mathfrak{P}$ essenzialmente ben determinato, per il quale d è derivazione invariante; ed esistono un suo prolungamento F, un prolungamento δ di d ad F, ed uno $\zeta \in F$, tali che $\zeta_i = \delta_i \log \zeta$ e che $F = C(\zeta, \delta \log \zeta)$. Se A è la varietà gruppale di C, esiste un unico divisore X su $A \setminus A_d$, certamente effettivo, tale che per ogni divisore primo Z su $A \setminus A_d$ si abbia $\zeta_2 \equiv \delta_2 \log x_2 \bmod k(Z|A)$ se x_2 è un rappresentante di X in Z. Reciprocamente, ogni ipercorpo C su k la cui A non abbia fattori diretti vettoriali di dimensione > 1 è ottenibile nel modo descritto.*

Dim.: Si può supporre che il sistema di N-vincoli sia massimale, non estensibile con altri vincoli; nel linguaggio usabile dopo la dimostrazione del risultato, che ζ produca il sistema. Dato che le ζ_i soddisfano le $D_i(\zeta) = 0$, esse sono immagini omomorfe delle $\theta_i(e, n)$ del 6.3 ottenute da quel sistema di vincoli, dopo una opportuna scelta di un $\mathfrak{P}$ non singolare, in un omomorfismo τ di $k[\ldots \theta_i(e, n) \ldots]$ su $k[\ldots \zeta_i \ldots]$, subito estensibile ad uno di $k[e, \theta]$ su $k[\tau e, \zeta]$; per 6.3 il $k(\tau e, \zeta)$ è ipercorpo su $k(\tau e)$, e $k(\tau e) \cap k(\zeta)$ è il corpo delle costanti di $k(\zeta)$, onde $k(\tau e) \cap k(\zeta) = k$.

Diciamo meglio: c'è un $k[e']$, immagine omomorfa di $k[e]$, tale che $k[\ldots \theta_i(e', n) \ldots]$ sia k-isomorfo a $k[\zeta]$ nell'isomorfismo $\theta_i(e', n) \to \zeta_i$; ed inoltre $k(e') \cap k(\ldots \theta_i(e', n) \ldots) = k$; quest'ultima dimostra che τ induce nell'anello affine di Z (notazioni del 6.3) un omomorfismo su k, ossia un punto v; in definitiva, $e' = e^v$ è il punto generale non omogeneo di un A^v con v non singolare. Se $Q \in A'|A'_d$, si ha un isomorfismo di $k(\zeta)$ su tutto $k(\ldots \theta_i(e(Q), n) \ldots) = L$ dato da $\zeta_i \to \theta_i$, uno su tutto $k(e')$ dato da $\zeta_i \to e'_i$, ed uno su tutto $k(\ldots \theta_i(e', n) \ldots)$ dato da $\zeta_i \to \theta_i$. L'asserto su $\mathfrak{P}$ è ora conseguenza del punto 10 di 6.3; il penultimo asserto segue dall'1.2 di [1], ora valido per la sola d, C.V.D.

Il 6.5 giustifica l'aggettivo «singolare» attribuito a certi ideali primi, a certi sistemi di N-vincoli, ecc.; nella nomenclatura dell'algebra differenziale, ed anche in quella classica delle equazioni differenziali, una soluzione di *una* equazione differenziale $D(y) = 0$ di ordine h è singolare se annulla il separante $\partial D/\partial y_h$ della equazione; per la $W_r(y) = 0$ usata nel 6.5 tale separante è appunto $W(y)$. Noi abbiamo considerato nel 6.5 un sistema di infinite equazioni differenziali, quasi tutte con lo stesso separante $W(y)$, ed abbiamo esteso l'aggettivo «singolare» a questo caso. Negli altri casi è usato per analogia, e perchè i $\mathfrak{P}$ singolari hanno sempre la proprietà di far diminuire la dimensione del P del 5.5.

Un commento riguardo alla frase del 6.4 ove si fa eccezione ai $\mathfrak{P}$ diversi dal prescelto, frase che si applica anche al 6.5 in quanto questo rimanda al 6.4; seguiamo l'evolversi delle conseguenze della scelta di un $\mathfrak{P}$, per es. nel 6.4: esso mi dà le $\varkappa_{ij}$ e quindi k_1; sostituisco k_1 al k del 6.3 e ottengo i vari $\mathfrak{P}$ (non

singolari) descritti nel 6.3, uno dei quali è certamente l'estensione a $k_1[\tau]$ (le τ_i del 6.4) del $\mathfrak{P}$ scelto nel 6.4. Gli altri $\mathfrak{P}$ del 6.3 danno delle θ_i con gli stessi vincoli, e quindi sono per forza anch'essi estensioni a $k_1[\tau]$ di altri $\mathfrak{P}$ del 6.4; questo ci dice che vi possono essere vari $\mathfrak{P}$ nel 6.4, tanti quanti ne richiede il 6.3, per i quali i $k[\varkappa]$ sono isomorfi in isomorfismi su k che mutano ogni $\varkappa_{ij}$ ottenuto da un certo $\mathfrak{P}$ nel $\varkappa_{ij}$ ottenuto da un altro $\mathfrak{P}$; non informa però se questo accada per ogni coppia di $\mathfrak{P}$ non singolari del 6.4.

Il risultato universale 6.5 termina quanto mi sono proposto di esporre, ed anche quanto sono riuscito a dimostrare; il 6.6 è un contentino aggiunto; è chiaro che l'esposto apre più problemi di quanti non ne risolva, primo fra questi il problema dei «moduli», che ovviamente sono legati in modo intimo ai coefficienti nei vincoli; per esempio, l'assegnare valori in k alle $\varkappa_{ij}$ del 6.4, o ad esse più le $\varkappa_i$ del 6.5, individua una varietà gruppale, o molte se si accettano i $\mathfrak{P}$ singolari, la cui dimensione dipende dai valori stessi, pur avendo un massimo che dipende solo da N; essi ne danno quindi i moduli, che però andrebbero dirozzati; veramente danno moduli di varietà gruppali «polarizzate», per usare un neologismo elettronico di moda. Mi limiterò ad esporre taluni problemi di natura tecnica, la cui soluzione faciliterebbe i progressi e migliorerebbe i risultati. Mi pare che il modo migliore di esporli consista nel porsi nella situazione di un signore che voglia impiantare una fabbrica di varietà gruppali, o diciamo pure abeliane, che sono le gruppali più nobili; per ogni ciclo di produzione sceglierà intanto un N; primo problema: è sufficiente scegliere per N gli insiemi $\{0, 1, \ldots, n\}$ per gli $n > 0$? La risposta è sì per una tipo theta prefissata (che produca i vincoli) se e solo se è non nullo il

$$\left[\det \frac{\partial^{i+j}\big(\theta(u+v)\theta(u-v)\big)}{\partial u^i \partial (v^2)^j}\right]_{v=0}$$

per $i, j = 1, \ldots, \operatorname{card} N - 1$; ma non so se ciò accada per ogni θ che produce N-vincoli. Certo, se non si insiste nella fabbricazione di $\theta(u)$ che *producano* gli N-vincoli, la risposta è sì, perchè ogni N è sottoinsieme di uno del tipo descritto, e se ci si adatta ad usare anche i $\mathfrak{P}$ singolari si raggiungono tutte le θ che *ammettono* N-vincoli.

Continuiamo con la fabbrica: mi scelgo un $N = \{0, \ldots, n\}$, e poi non sono così ingenuo da scegliere a caso un sistema di N-vincoli su k, chè so benissimo che risulterebbero incompatibili; posso non sceglierne neanche uno, come nel 6.5, ma è forse meglio sceglierne uno, il D_r con $r = n + 1$, come nel 6.4; penso che non sarà mai incompatibile (ma non l'ho dimostrato). Questo vincolo mi dà subito gli τ_i con $i \geq 2r$ come polinomi negli altri; poi devo cominciare ad imporre $\mathbb{W}_{r+1} = 0$, $d\mathbb{W}_{r+1} = 0, \ldots$, ovviamente riducendo gli τ ad ogni passo; mi fermo quando trovo $d^h\mathbb{W}_{r+1} = 0$. Il passo successivo è $\mathbb{W}_{r+2} = 0$, ecc.; ho diritto di fermarmi appena trovo un $\mathbb{W}_{r+h}$ che, eseguite le riduzioni precedenti, sia già zero di propria iniziativa? Non sono riuscito a dare una risposta.

Superato in qualche modo questo scoglio, specializzo le $\varkappa_{ij}$ del 6.4 in tutti i possibili modi che lascino $\mathbb{W}(t) \neq 0$ (oppure no se accettavo vincoli singo-

lari), e poi le s del 6.3 in maniera generica, e sono sicuro di ottenere le varietà gruppali cui miravo con le theta desiderate (quelle non abeliane sono scarti di produzione); di che dimensione saranno? O meglio: come scelgo r per raggiungere una data dimensione? Certo, la dimensione è $<2r-1$, ma questa è una stima troppo rozza, e si può dire qualcosa di più preciso, ma sempre non abbastanza preciso, come ora spiegherò.

Nei 6.3 i punti Q di V al finito sono in corrispondenza quasi biunivoca coi divisori X_0 di $\mathcal{S}'$, aperto di $\mathcal{S}$; nei 6.4, 6.5, al variare dei valori in k assegnati alle $\varkappa$, gli $\mathcal{S}$ mantengono la stessa dimensione, salvo che per valori particolari che la fanno aumentare; ad ogni $\mathcal{S}$ corrisponde un K nel senso del 6.3, e si ha $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{S} - \operatorname{trasc} K/k$; anche K mantiene una stessa trascendenza, salvo casi particolari in cui essa aumenta. Tutto sommato, la ricerca di $\dim \mathcal{A}$ è piuttosto complicata. Comunque, sia $\vartheta(u)$ una qualunque $\vartheta(\sigma(Q), u)$ con Q generico su V, e pongasi $v = \Gamma[Q]$, sempre nelle notazioni del 6.3; nella espressione di $g(u, v) = \vartheta(u+v)\vartheta(u-v)\vartheta^{-2}(u)\vartheta^{-1}(v)\vartheta^{-1}(-v)$ come elemento di $L \otimes L$, il numero $n = \operatorname{card} N = \dim P$ (il P del 5.5) è il minimo numero di elementi di un fattore L dei quali $g(u, v)$ è combinazione lineare a coefficienti nell'altro fattore L, e può quindi essere visto indifferentemente come dimensione, aumentata di 1, del minimo sistema lineare $\mathfrak{L}_1$ di divisori su $\mathcal{A}$ che contiene tutti gli $X_R + X_{-R}$ quando $R \in \mathcal{A}^r$, od anche come dimensione, sempre aumentata di 1, del minimo sistema lineare $\mathfrak{L}_2$ di divisori su $\mathcal{A}$ che contiene tutti gli $X_R + X'_R$ per gli stessi R, avendo scritto X'_R in luogo di $(\operatorname{div} -\iota)X_R$. Mentre $\mathfrak{L}_1$ dipende da v, il sistema $\mathfrak{L}_2$ dipende solo da $\mathcal{S}$, ossia dal $\mathfrak{P}$ scelto nel 6.3, ed è il minimo sistema lineare contenente tutti gli $X_R + X'_R$ quando X_R percorre $\mathcal{S}$, od anche quando R percorre V (ma lo prenderò al finito); infatti $X + X^\iota$ (la X del punto 4 del 6.3) è il divisore su $\mathcal{A}_K$ di $\vartheta(\varepsilon, u)\vartheta(\varepsilon, -u) = 2\sum_{i=0}^{\infty} P_{2i}(\varepsilon)u^{2i}$. L'applicazione $X_R \to X_R + X'_R$ di $\mathcal{S}$ su $\mathfrak{L}_2$ conserva la dimensione, e pertanto $1 + \dim \mathcal{S} \leq 1 + \dim \mathfrak{L}_2 = n$, od anche $\dim \mathcal{A} \leq \dim \mathcal{S} \leq n-1$, che è già un notevole miglioramento della limitazione $\dim \mathcal{A} \leq 2r-1$ data prima, visto che nel caso più favorevole si ha $2r-1 = 2n-1$. Nella disuguaglianza precedente $\dim \mathcal{S}$ è la trascendenza su k dell'anello generato su k dai $P_{2i}(\varepsilon)$, mentre n è la dimensione su k dello spazio vettoriale su k generato dagli stessi elementi. Si può dire abbastanza di più quando $\mathcal{A}$ è abeliana, e forse sempre; infatti per $\mathcal{A}$ abeliana la dimensione del massimo sistema lineare $|Y|$ contenente un dato divisore effettivo Y del tipo che a noi interessa (il cui λ_Y sia isogenia) è nota: vedasi il Teorema 3 di *Some results on abelian varieties*, di M. Nishi (Nat. Science Rep. Ochanomizu Univ., 9, 1958, p. 1). Indico con $\operatorname{gr} Y$ il numero di autointersezioni di Y, ossia l'ordine del ciclo di dimensione 0 dato da $(\sigma_{S_1}^{-1}Y \cap \ldots \cap \sigma_{S_m}^{-1}Y, \mathcal{A})$ se $m = \dim \mathcal{A}$ e $S_1 \times \ldots \times S_m$ è generico su $\mathcal{A} \times \ldots \times \mathcal{A}$; allora

$$1 + \dim |Y| = (m!)^{-1} \operatorname{gr} Y\,;$$

bene, si ha $\dim \mathcal{S} = m + \dim |X|$, e pertanto $m + (m!)^{-1} \operatorname{gr} X \leq n$; applichiamo

tutto questo non ad X, ma ad bX per b abbastanza elevato; in tal caso u viene sostituito dalla funzione caratteristica di Hilbert $\chi(b)$ dell'anello omogeneo

$$k[\theta^2(u)P_0(\theta), \theta^2(u)P_2(\theta), \theta^2(u)P_4(\theta), \ldots],$$

mentre gr X viene sostituito da gr $bX = b^m$ gr X, e si ha

$$m + (m!)^{-1} b^m \operatorname{gr} X < \chi(b) ; \tag{6.7}$$

è sempre una disuguaglianza, salvo casi fortunati, come quello in cui θ ha varietà gruppale A che è birazionalmente equivalente ad una curva cubica ellittica o razionale, ed è inoltre la funzione theta normalizzata di un punto $\neq O$ su A; vedremo nell'esempio 1 della sez. 7 che in tal caso $N = \{0, 1\}$, e che una k-base di P è data da $P_0 = 1$ e $P_2 = \theta_2$, con θ_2 trascendente su k. Pertanto θ^h ha lo stesso C e la stessa A, ha il divisore h div θ, ed ha l'N di cardinalità $h + 1$ = numero dei termini di $(1 + \theta_2)^h$; è anzi facile convincersi che una k-base del suo P (cfr. 5.5) è data da $P_0, P_2, \ldots, P_{2h}$; qui naturalmente si tratta proprio di funzioni theta, non delle più generali tipo theta. Nel caso ora descritto si ha, nella 6.7, $m = 1$, gr $X = 1$, onde il primo membro è appunto $1 + h$, uguale al $\chi(h)$ appena trovato.

Altra cosa: siano $\varphi(u)$, $\psi(u)$ tipo theta olomorfe normalizzate con ipercorpi C, D e varietà gruppali A, B, non entrambe con fattori diretti vettoriali; siano M, N gli insiemi N del 6.2 o 6.3 che loro competono. Se a, b sono generici in k, la $\theta(u) = \varphi(au)\psi(bu)$ è tipo theta olomorfa normalizzata (cfr. 2.5), con ipercorpo $\mathcal{Q}(C \otimes D)$ e varietà gruppale $A \times B$ (per 2.5); con ragionamento analogo al precedente, ma più semplice, si trova che l'N che compete a θ ha come cardinalità il prodotto delle cardinalità di N ed M. Se prendiamo di nuovo come φ, ψ delle theta su curve cubiche (e se le curve non sono isogene si può prendere $a = b = 1$), e se usiamo h fattori anzichè due, troviamo che una varietà gruppale di dimensione h che sia prodotto di h varietà gruppali di dimensione 1 (una al massimo vettoriale) può essere data da una tipo theta il cui N abbia cardinalità 2^h ma non meno, e il cui P abbia come k-base la $\{P_0, P_2, \ldots, P_{2^{h-1}-2}\}$. Quindi, per esempio, se volessimo fabbricare varietà abeliane di dimensione 3 perderemmo il nostro tempo se usassimo come k-base per P qualunque cosa di cardinalità minore di 8: se non basta per gli specialissimi prodotti di tre cubiche non può certo fabbricare nessuna abeliana di dimensione 3.

Ora posso esibire un controesempio ad una presunta uguaglianza nel 6.7. Prendo per A il prodotto di due cubiche ellittiche A_1, A_2, e per X, o meglio dovrei dire per X_0 dato che X è su A_k, il divisore $R_1 \times A_2 + A_1 \times R_2$, con R_i punto generico su A_i. Per quanto appena detto è $\chi(h) = (1 + h)^2$; d'altra parte nel 6.7 si ha $m = 2$, gr $X = 2$, onde il primo membro è $2 + h^2$, certo minore di $(1 + h)^2$.

C'è poi il grosso problema della caratteristica $p \neq 0$, che nella ipotetica fabbrica sarebbe al reparto ricerca (i reparti complesso e p-adico, per prodotti

di vasto consumo, sarebbero nelle mani di tecnici del ramo). La caratteristica p offre resistenze di varia natura, talune tecniche per la presenza di p al denominatore, ma la maggior parte dovute al fatto che gli sviluppi in serie di potenze, che sappiamo dover avere esponenti fratti con potenze di p al denominatore, usano non derivazioni iterate, ma iperderivazioni; l'algebra differenziale, per esempio, è completamente carente in questo ramo; inoltre, sia in caratteristica p che nel caso p-adico della caratteristica 0 su un anello anzichè su un corpo, la riduzione ad una sola indeterminata manca (*), fatta eccezione del supersfruttato esempio delle varietà con le sole pendenze 0 e 1 (varietà ordinarie), e di altri casi fra cui l'altro estremo, sola pendenza $\frac{1}{2}$. Tuttavia ciò che può farsi va fatto: la sorpresa è stata, in quanto ho esposto, l'uso di una sola u, ma il sugo sta nelle equazioni differenziali, e queste, con le modifiche suggerite prima, esistono anche in caratteristica p e nel caso p-adico.

Ultimo commento: le tipo theta olomorfe non normalizzabili, ossia quelle il cui divisore X ha componenti passanti per O, sono state perse cammin facendo; è perdita da poco per guadagnare grosse semplificazioni di esposizione e di pensiero. Anch'esse producono gli stessi vincoli di quelle con divisore algebricamente equivalente ad X ma non passante per O, e anch'esse sono ottenibili, come mostra la discussione terminante col 4.4, mediante specializzazione non delle t del 6.3, ma di loro funzioni razionali fratte; sono in corrispondenza biunivoca non (almeno, non sempre) con punti all'infinito della V' del 6.3, ma con punti di una V' birazionalmente equivalente alla V'; o se si vuole sono in corrispondenza non biunivoca con posti di $k(V')$ il cui centro su V' è all'infinito per t.

7. - Esempi

Tanto per cominciare scrivo le prime $P_n(y)$ del 5.1:

$$P_0 = \tfrac{1}{2}; \qquad P_2 = y_2; \qquad P_4 = y_2^2 + y_4; \qquad P_6 = \tfrac{4}{3} y_2^3 + 2y_2 y_4 + y_6;$$

$$P_8 = \tfrac{1}{3} y_2^4 + 2y_2^2 y_4 + 2y_2 y_6 + y_4^2 + y_8.$$

Esempio 1: Prendo $N = \{0, 1\}$, $r = 2$, $D_2(y) = P_4(y) - x_2 P_2(y) - x_4 P_0(y)$, con $x_i \in k$. La relazione $D_2(z) = 0$, insieme con le sue derivate, dà

7.1 $$z_4 = -z_2^2 + x_2 z_2 + \tfrac{1}{2} x_4, \qquad z_6 = -\tfrac{4}{3} z_2 z_4 + \tfrac{4}{3} x_2 z_4,$$

onde

7.2 $$z_8 = \tfrac{8}{3} z_2^3 - \tfrac{8}{3} x_2 z_2^2 + (\tfrac{8}{3} x_2^2 - \tfrac{8}{3} x_4) z_2 + \tfrac{4}{3} x_2 x_4 - \tfrac{8}{3} z_2^2, \quad \text{ecc.}.$$

(*) Il minimo numero di indeterminate usabile in quei casi è il minimo fra i numeratori delle pendenze non nulle.

Nel simbolismo del 6.4, cerco le costanti nel corpo $k(\tau_2, \tau_3)$: si controlla direttamente che

7.3 $$b = \tau_2^3 + \tfrac{3}{2}\tau_2^2 - \tfrac{1}{2}\alpha_2\tau_2^2 - \tfrac{3}{2}\alpha_4\tau_2$$

è una costante, ossia che $db = 0$; perciò $k(b)$ è sottocorpo del corpo K delle costanti. Tale K ha certo trascendenza 1 su k, perchè se avesse trascendenza 2 coinciderebbe con $k(\tau_2, \tau_3)$; resta da vedere se ci possano essere costanti algebriche su $k(b)$ ma non in $k(b)$. Ora, $k(\tau_2, \tau_3)$ si ottiene aggiungendo a $k(b)$ prima l'indeterminata τ_2 e poi l'elemento τ_3, che è radice quadrata di

$$b - \tfrac{3}{2}\tau_2^2 + \tfrac{1}{2}\alpha_2\tau_2^2 + \tfrac{3}{2}\alpha_4\tau_2 ;$$

questo non aggiunge elementi algebrici di grado 2 su $k(b)$, onde $k(b)$ è algebricamente chiuso in $k(\tau_2, \tau_3)$; si ha cioè $K = k(b)$. Ora si riconosce, perchè lo sappiamo a memoria, che $C = k(\tau_2, \tau_3)$ è ipercorpo su K, e precisamente $C = K(A)$ se A è la cubica di equazione 7.3.

Anzichè correre dietro alle altre relazioni lineari (vincoli) a coefficienti in K fra i $P_{2j}(\tau)$, che sono automaticamente soddisfatte, dimostrerò direttamente (ma seguirebbe dal 6.6) che $\tau_2 = \theta_2$ se θ è la theta del punto improprio Q_∞ di A. Intanto $\tau_2 \equiv 0 \bmod K(Q/A)$ per ogni punto Q al finito, come desiderato; poi, per lavorare intorno a Q_∞ pongo $\xi = \tau_3^{-1}$, $\eta = \tau_2\tau_3^{-1}$, col che l'equazione della cubica diventa

$$\xi = -\tfrac{3}{2}\eta^3 + \tfrac{1}{2}\alpha_2\xi\eta^2 + \tfrac{3}{2}\alpha_4\xi^2\eta + k\xi^3 ,$$

e Q_∞ acquista coordinate $\xi = \eta = 0$; un parametro uniformizzante di $K(Q_\infty/A)$ è η, e lo sviluppo di ξ è $\xi = -\tfrac{3}{2}\eta^3 + 0\eta^4 + \ldots$. Si ha

$$d\eta = 3 - 4\tau_2\tau_3^{-2}\tau_4 = 3 - 4\tau_2\tau_3^{-2}(-\tau_2^2 + \alpha_2\tau_2 + \tfrac{1}{2}\alpha_4) =$$
$$3 + 4\eta^3\xi^{-1} - 4\alpha_2\eta^2 - 2\alpha_4\xi\eta = -\tfrac{3}{2} + 0\eta + \ldots$$

Pertanto

$$d_2 \log \eta = -\tfrac{3}{2}\eta^{-2} = \tau_2 \bmod K(Q_\infty/A) ;$$

dato che η rappresenta il divisore $1Q_\infty$ nel punto Q_∞, ecco provato che $\tau_2 = d_2 \log p \bmod (Q/A)$ per ogni $Q \in A$ e per un rappresentante p di $1Q_\infty$ in Q; quindi, per l'1.2 di [1], $\tau_2 = d_2 \log \theta$ se θ è la theta di Q_∞ su A. Ma allora, in questo caso, nella situazione del 6.4 non occorrono altri wronskiani oltre all'equazione differenziale: la chiusura algebrica di K può essere presa come k nel 6.3, e le τ_2, τ_3 divengono θ_2, θ_3.

Vediamo invece come si applica il 6.3 direttamente; mediante l'equazione differenziale otteniamo $k[t_2, t_3][\tau_2(u), \tau_3(u)]$, con t_2, t_3 algebricamente indipendenti su k; le τ_i soddisfano la relazione 7.3 con

$$b = t_2^3 + \tfrac{3}{2}t_2^2 - \tfrac{1}{2}\alpha_2 t_2^2 - \tfrac{3}{2}\alpha_4 t_2 ;$$

devono soddisfarla perchè b è costante; comunque, provare per credere. Ora occorrono altri vincoli; suppongo di aver assegnato $D_3(y) = P_4(y) - \beta_4 P_2(y) - \beta_6 P_0(y)$, con $\beta_i \in k$. Il $D_3(\tau)$ è $\tau_6 + 2\tau_2\tau_4 + \frac{8}{3}\tau_2^3 - \beta_4\tau_2 - \frac{1}{2}\beta_6$: sostituendo τ_4 e τ_6 da 7.1, 7.2:

$$-\tau_2^3 + \tfrac{4}{3}\alpha_2\tau_2^2 + (\tfrac{8}{3}\alpha_2^2 + \tfrac{8}{3}\alpha_4 - \beta_4)\tau_2 + (\tfrac{4}{3}\alpha_2\alpha_4 - \tfrac{1}{2}\beta_6) - \tfrac{8}{3}\tau_2^2 .$$

Devo ridurre $k[t_2, t_3]$ modulo un primo minimale $\mathfrak{P}$ dell'ideale generato dai valori in $u = 0$ del polinomio scritto e delle sue derivate; il valore in $u = 0$ è la stessa espressione, nelle t anzichè nelle τ; se chiamo e_i l'immagine di t_i, le e_i soddisfano perciò la

$$7.4 \qquad e_2^3 = -\tfrac{8}{3}e_2^2 + \tfrac{4}{3}\alpha_2 e_2^2 + (\tfrac{8}{3}\alpha_2^2 + \alpha_4 - \tfrac{8}{3}\beta_4)\, e_2 + (\tfrac{4}{3}\alpha_2\alpha_4 - \tfrac{1}{2}\beta_6) ;$$

e per la derivata prima soddisfano anche la

$$8e_3e_4 = -8e_2^2e_3 + 8\alpha_2 e_2 e_3 + (2\alpha_2^2 + 3\alpha_4 - 5\beta_4)e_3 ,$$

ossia la

$$(2\alpha_2^2 - \alpha_4 - 5\beta_4)e_3 = 0 .$$

Se $2\alpha_2^2 - \alpha_4 - 5\beta_4 \neq 0$ vi sono due $\mathfrak{P}$, ognuno generato da t_3 e da uno dei $t_2 - q$ quando q percorre le soluzioni dell'equazione in y_2 ottenuta ponendo $y_4 = 0$ nella 7.1 (questi due $\mathfrak{P}$ possono ridursi ad uno per valori speciali delle α, β); in questo caso non occorrono altri vincoli: se ci sono, o sono superflui o sono incompatibili; la varietà gruppale è un punto, ed i $P_0(t)$, $P_2(t)$ sono linearmente dipendenti su $E = k(t) = k$; è un caso di vincoli singolari, ed infatti $W(t) = \frac{8}{3}t_3$. Se invece $2\alpha_2^2 - \alpha_4 - 5\beta_4 = 0$, la 7.4 diviene

$$7.5 \qquad e_2^3 = -\tfrac{8}{3}e_2^2 + \tfrac{4}{3}\alpha_2 e_2^2 + \tfrac{8}{3}\alpha_4 e_2 + \tfrac{1}{2}\alpha_2\alpha_4 - \tfrac{1}{2}\beta_6 .$$

Il corpo E del 6.3 è $k(e_2, e_3)$, ipercorpo di trascendenza 1 su k; il K del 6.3 è k, cosa da aspettarsi perchè Q_- è linearmente isolato; si confronti con 7.3. Anche qui, se sono stati dati altri vincoli, essi sono o superflui o incompatibili (o singolari).

Osservo che le due varietà gruppali di dimensione 0 trovate prima, per i $\mathfrak{P}$ singolari, sono ritrovabili ora come corrispondenti dei punti di A_d se A è la cubica 7.5, quando tale A_d è non vuota, ossia quando β_6 è tale che il termine noto della 7.5, che è poi b, assume il valore che gli compete per fare acquistare alla A un punto singolare nel senso geometrico (punto doppio), tale valore essendo $-\frac{4}{3}(\alpha_2^2 + 2\alpha_4)q - \frac{8}{3}\alpha_2\alpha_4$; ed il punto doppio che acquista è proprio quello di coordinate $e_3 = 0$, $e_2 = q$. È cuspide o nodo secondochè $\alpha_2^2 + 2\alpha_4$ è o no nullo (è cuspide quando vi è un solo $\mathfrak{P}$ singolare); cuspide corrisponde a varietà vettoriale, nodo a varietà logaritmica. Bene, se nel 6.3, ove ora $K = k$, si prende il punto Q di V nel quale $e_3(Q) = 0$, $e_2(Q) = q$, il corpo $k[\theta_2(e(Q), u), \theta_3(e(Q), u)]$ coincide con $k(q) = k$.

Esempio 2: Prendo $N = \{0, 1, 2\}$, $r = 3$; non ripeto i calcoli analoghi a quelli dell'esempio 1, che sarebbero troppo lunghi. So già, però, che la cardinalità 3 per N non può dare varietà gruppali di dimensione > 1 (cfr. la fine della sez. 6); dovrò perciò ricascare sulla curva ellittica, ma trovare una theta che è, per esempio, il quadrato di quella che dà la 7.3, con b e k per semplicità (si è visto che la ζ_i del 7.3 ha diritto ad essere una θ_i); diciamo $\theta = \theta^2$. Posto questo, mi limiterò a mostrare che θ soddisfa appunto una equazione differenziale $D_3(\theta) = 0$. Si ha $\theta_i = 2\theta_i$, onde in luogo della 7.3 vale la

$$b = \tfrac{1}{4}\theta_0^2 + \tfrac{1}{8}\theta_2^2 - \tfrac{1}{4}\alpha_2\theta_2^2 - \tfrac{3}{4}\alpha_4\theta_2 ;$$

inoltre

$$P_0 = \tfrac{1}{2} ; \quad P_2 = \theta_2 ; \quad P_4 = \theta_2^2 + \theta_4 = \theta_2^2 + 2\left(-\theta_2^2 + \alpha_2\theta_2 + \tfrac{1}{2}\alpha_4\right) = \tfrac{1}{2}\theta_2^2 + \alpha_2\theta_2 + \alpha_4 ;$$

$$P_6 = \tfrac{3}{8}\theta_2^3 + 2\theta_2\left(-\tfrac{1}{2}\theta_2^2 + \alpha_2\theta_2 + \alpha_4\right) + 2\left[\tfrac{3}{16}\theta_2^3 - \tfrac{3}{16}\alpha_2\theta_2^2 + \left(\tfrac{1}{8}\alpha_2^2 - \tfrac{1}{4}\alpha_4\right)\theta_2 + \tfrac{1}{4}\alpha_2\alpha_4 - \tfrac{3}{16}\theta_2^2\right] = \alpha_2\theta_2^2 + \left(\tfrac{3}{2}\alpha_4 + \tfrac{3}{4}\alpha_2^2\right)\theta_2 + \left(\tfrac{3}{2}\alpha_2\alpha_4 - \tfrac{3}{2}b\right).$$

Ecco allora che P_4 non è combinazione lineare di P_0, P_2, ma P_6 è combinazione lineare di P_0, P_2, P_4:

$$P_6 = 2\alpha_2 P_4 + \left(\tfrac{3}{2}\alpha_4 - \tfrac{3}{4}\alpha_2^2\right)P_2 + \left(-\tfrac{15}{8}\alpha_2\alpha_4 - \tfrac{15}{8}b\right)P_0 .$$

Ho però controllato con un calcolatore che l'equazione differenziale, ossia la relazione $P_6(\zeta) = \beta_2 P_4(\zeta) + \beta_4 P_2(\zeta) + \beta_6 P_0(\zeta)$, non è sufficiente a definire una theta, come invece era nell'Esempio 1; più precisamente, il wronskiano delle $P_{2i}(\zeta)$ per $i = 0, 1, 2, 4$ non è nullo, come già spiegato dopo il 6.3; e l'omomorfismo, nelle notazioni di 6.3, di $k[t]$ su $k[\varepsilon]$ non è un isomorfismo. Alcune precisazioni sull'ultimo vincolo scritto, che è un D_3: col calcolatore ho imposto anche un D_4 ed il dD_4; ho eliminato $\theta_3, \theta_6, \theta_7, \ldots$ fra le $d^i D_3(\theta) = 0$, $D_4(\theta) = 0$, $dD_4(\theta) = 0$, e mi è rimasta una relazione di sesto grado fra le $\theta_2, \theta_3, \theta_4$, consistente in un polinomio che, considerando anche i 6 coefficienti nelle D_3, D_4 come indeterminate, ha 70 termini. Il $k(\theta_2, \theta_3, \theta_4)$ deve contenere un K puramente trascendente, di trascendenza 1, su k (notazioni del 6.3), che però non ho cercato; vi sarà una relazione di sesto grado fra θ_2, θ_3 a coefficienti in K, e questa sarà l'equazione della curva su K, specializzabile genericamente alla stessa curva su k ($\Gamma\{v\} = A^v$ per v generico), ma che in due casi particolari si specializza ad una cubica contata due volte ($\Gamma\{v\} = 2A^v$); un caso è per v singolare, ed è quello in cui $\operatorname{div}\theta = 1Q_1 + 1Q_2$, con Q_1, Q_2 punti sulla curva tali che $2(Q_1 - Q_2) = O$; l'altro caso è quello con cui inizia l'esempio, e cioè $\operatorname{div}\theta = 2Q$, ed il v questa volta è non singolare.

Esempio 3: Questo si riferisce ad $N = \{0, 1, 2, 3\}$, $r = 4$, ma come lo esempio 2 va all'indietro: partendo da una varietà gruppale nota trova l'equa-

zione differenziale, che questa volta è la D_4. Prendo due cubiche ellittiche o razionali su k, e su di esse due theta, precisamente $\varphi(u)$ e $\psi(u)$; i due ipercorpi saranno generati da φ_2, φ_3 e rispettivamente ψ_2, ψ_3, legati da relazioni di tipo 7.3, ove però ora pongo $\alpha_2 = 0$, visto che si può:

7.6 $$\varphi_3^2 = -\tfrac{8}{9}\varphi_2^3 + a_4\varphi_2 + a_6 ;$$

7.7 $$\psi_3^2 = -\tfrac{8}{9}\psi_2^3 + b_4\psi_2 + b_6 .$$

Intendo considerare, su A, la $\theta(u) = \varphi(u)\psi(u)$; veramente questo non va bene se le due curve sono isogene, e si dovrebbe prendere, per es., $\theta(u) = \varphi(u)\psi(\varepsilon u)$ con $\varepsilon \in k$ generico; ma le $\psi_2(\varepsilon u)$, $\psi_3(\varepsilon u)$ soddisfano la stessa equazione delle $\psi_2(u)$, $\psi_3(u)$, purchè b_4, b_6 vengano sostituite con $\varepsilon^4 b_4$, $\varepsilon^6 b_6$; tanto vale chiamarle ancora b_4, b_6, e tenere presente che debbono essere « generiche ».

Ora si ha $\theta_i = \varphi_i + \psi_i$, e vogliamo calcolare i $P_{2i}(\theta)$ per $i = 0, 1, 2, 3, 4$; anzitutto le φ_i:

$$\varphi_4 = -\varphi_2^2 + \tfrac{8}{9}a_4 ; \qquad \varphi_5 = -\tfrac{8}{9}\varphi_2\varphi_3 ; \qquad \varphi_6 = \tfrac{8}{9}\varphi_2^3 - \tfrac{8}{27}a_4\varphi_2 - \tfrac{8}{9}a_6 ;$$

$$\varphi_7 = \tfrac{16}{9}\varphi_2^2\varphi_3 - \tfrac{8}{27}a_4\varphi_3 ; \qquad \varphi_8 = -2\varphi_2^4 + \tfrac{8}{3}a_4\varphi_2^2 + \tfrac{8}{9}a_6\varphi_2 - \tfrac{8}{243}a_4^2 ;$$

queste, e le analoghe per ψ, ci danno le $P_{2i}(\theta)$:

$$P_0 = \tfrac{1}{2} ; \qquad P_2 = \varphi_2 + \psi_2 ; \qquad P_4 = 2\varphi_2\psi_2 + \tfrac{8}{9}(a_4 + b_4) ;$$

$$P_6 = (-\tfrac{8}{27}a_4 + \tfrac{8}{9}b_4)\varphi_2 + (\tfrac{8}{9}a_4 - \tfrac{8}{27}b_4)\psi_2 - \tfrac{8}{9}(a_6 + b_6) ;$$

$$P_8 = -\tfrac{8}{27}(a_4 + b_4)\varphi_2\psi_2 + (\tfrac{8}{27}a_4 - \tfrac{8}{9}b_6)\varphi_2 + (-\tfrac{8}{9}a_6 + \tfrac{8}{27}b_6)\psi_2 + \tfrac{16}{243}(a_4^2 + b_4^2) + \tfrac{8}{27}a_4 b_4 .$$

Da queste espressioni risulta subito, come ci si aspettava, che P_0, P_2, P_4, P_6 sono linearmente indipendenti su k, mentre P_8 è loro combinazione lineare.

Non che occorra, ma se si vuole trovare direttamente la relazione di dipendenza algebrica di θ_4 da $k(\theta_2, \theta_3)$ basta eliminare $\varphi_2, \psi_2, \varphi_3, \psi_3$ dalle:

a) la 7.6,

b) la 7.7,

c) $\varphi_2 + \psi_2 = \theta_2$,

d) $\varphi_3 + \psi_3 = \theta_3$,

e) $-\varphi_2^2 - \psi_2^2 + \tfrac{8}{9}(a_4 + b_4) = \theta_4$;

l'eliminazione di può fare sul serio così: ricavo ψ_2, ψ_3 da *c*, *d*; sostituisco in *b*, *e*, ottenendo *b'*, *e'*; sottraggo *a* da *b'*, ottenendo $2\theta_3\varphi_3 =$ (*polinomio nella sola* φ_2); moltiplico la *a* per $4\theta_3^2$ e sostituisco al primo membro il $(2\theta_3\varphi_3)^2$ con il quadrato dell'espressione trovata sopra; resta un'equazione di sesto grado nella

sola φ_2; l'altra equazione nella sola φ_2 è la e', di secondo grado; la eliminazione di φ_2 da queste, col metodo del risultante, dà una relazione fra $\theta_2, \theta_3, \theta_4$, che è ciò che si cercava.

Esempio 4: Questo esempietto serve a suggerire che l'N di tipo $\{0, 1, \ldots, n\}$ sia non solo sempre possibile, ma addirittura privilegiato. Prendo per A la curva cubica vettoriale, che dall'esempio 1 si vede essere, se x_2 viene scelto $= 0$, la $\theta_3^2 = -\frac{8}{3}\theta_2^3$ quando θ è la theta di un punto. Prendo $\theta = \theta^b$, sicchè $\theta_3^2 = -\frac{8}{3}\theta_2^{3b}$, e calcolo le θ_{2r}; risparmio i conti al lettore, ma il risultato è $\theta_{2r} = (-2)^{r-1} r^{-1} b^{-r+1} \theta_2^r$. Quindi

$$\theta(u+v)\theta(u-v) = \theta^2(u) \exp 2 \sum_{i=1}^{\infty} \theta_{2i}(u) v^{2i} =$$

$$\theta^2(u) \exp b \sum_{r=1}^{\infty} (-)^{r-1} 2^r b^{-r} r^{-1} \theta_2^r(u) v^{2r} = \theta^2(u)(1 + 2b^{-1}\theta_2(u) v^2)^b;$$

ma il coefficiente di v^{2i} deve essere $2\theta^2(u) P_{2i}(\theta(u))$, e questo mostra che i P_{2i} per $i = 0, 1, \ldots, b$ sono linearmente indipendenti su k, mentre gli altri sono tutti nulli: l'unico N per il quale θ produce N-vincoli è $N = \{0, 1, \ldots, b\}$.

Appendice

Le varietà gruppali non abeliane possiedono il luogo di degenerazione, sbadatamente chiamato «varietà eccezionale» in [1]; è caratterizzato dal 4.6 di questa esposizione, o dal Teorema 1 di *A note on abelian varieties*, Rend. Circ. Matem. Palermo, 2, 1953, p. 236; fu in un caso lo strumento indispensabile per stabilire un risultato importante (il teorema di struttura in *Structure theorems for group varieties*, Ann. Matem. Pura e Appl., 38, 1955, p. 77), ma più spesso è stato considerato solo come fonte di guai, dai quali talune scuole («varietà astratte» e «schemi») si difendono mediante mutilazione delle varietà gruppali. Penso che chi la sapesse più lunga sull'argomento fosse Severi nel suo trattato *Funzioni quasi abeliane*, purtroppo in un periodo in cui molti altri punti erano oscuri. In una prima stesura del presente lavoro mi sono accorto che le funzioni theta o tipo theta, ignare del ruolo minore assegnato dai matematici al luogo di degenerazione, persistono nel produrre, insieme ad ogni varietà gruppale, anche ogni componente del suo luogo di degenerazione; occorre quindi una volta per tutte decidersi ad affrontarne l'esistenza, e ad usarlo a nostro vantaggio anzichè ignorarlo. Ci si può porre dal punto di vista degli ipercorpi o da quello delle varietà gruppali; scelgo il secondo, e presento degli «assiomi», sovrabbondanti ma per questo più descrittivi, che poi dimostro poter essere soddisfatti; parlo solo di varietà irriducibili e di corpi algebricamente chiusi, essendo poi facile immaginare il caso generale.

Sia k corpo algebricamente chiuso di caratteristica 0; una varietà proiettiva irriducibile A, di dimensione n su k, è *varietà gruppale* (*commutativa*) se è priva di singolarità e se soddisfa gli assiomi seguenti, ove si suppone di conoscere le varietà gruppali commutative di dimensione $n-1$ (quelle di dimensione 0 sono i punti):

1. Per ogni $P \in A$ sono definite razionalmente due applicazioni raziobali $P+$, $P-$ di A su A;

2. Esiste una sottovarietà A_s (notazione mantenuta) di A, eventualmente vuota, di dimensione pura $n-1$, detta il *luogo di degenerazione*, tale che $P \in A_s$ se e solo se $P + A \subset A$, od anche se e solo se $P - A \subset A$;

3. Se D è componente di A_s, le relazioni $P \in D$, $P + A \subseteq D$, $P - A \subseteq D$ sono equivalenti;

4. Per $P, Q, R \in A$, si ha $(P+Q) \pm R = P + (Q \pm R)$ e $(P-Q) \pm R = P - (Q \mp R)$;

5. Posto $A_g = A \setminus A_s$ (complementare di A_s in A), è $P + Q = Q + P$ se $P \in A_g$ e $Q \in A$;

6. $O = O_A = P - P$ è un punto di A_g indipendente dal $P \in A_g$ scelto, e si ha $Q \pm O = Q$ se $Q \in A$; quindi A_g è gruppo commutativo con identità O rispetto all'operazione $+$ ed alla sua inversa $-$;

7. Ogni componente D di A_s è varietà gruppale commutativa di dimensione $n-1$ rispetto ai $P \to P+$ e $P \to P-$ indottivi da quelli di A, e D_g è l'intersezione di D con l'unione delle altre componenti di A_s; quindi l'applicazione $\alpha: P \to \alpha P = O_D + P$ applica A su tutta D, e soddisfa le $\alpha(P \pm Q) = \alpha P \pm \alpha Q$.

Ogni ipercorpo cocommutativo C su k ha modelli proiettivi A che soddisfano gli assiomi. I $P+$ sono i σ_P operanti sui punti, ed i $P-$ sono i $\sigma_P(-t)$, dei quali parlerò fra un momento; per verificare l'esistenza di A si ragiona per induzione su $\dim A$, partendo dalle varietà abeliane, il che è possibile perchè ogni candidata A di dimensione $n > 1$, che non sia abeliana, è prodotto incrociato di una G di dimensione $n-1$ per una retta R, vettoriale o logaritmica; il modello $G \times R$ (prodotto alla Segre) di C manca di poco per essere varietà gruppale; manca perchè il polo, o il polo e lo zero, del sistema di fattori γ usato nel definire la legge di composizione produce dei guai (punti fondamentali e simili); però si possono usare n sistemi di fattori associati a γ, i cui divisori abbiano intersezione vuota: la varietà composta normalizzata dei vari $G \times R$ ottenuti, che sono tutti modelli proiettivi di C, soddisfa agli assiomi.

Ricordo che per $P \in A_g$ la *traslazione* σ_P è sempre stata definita da $\sigma_P Q = P + Q$ se anche $Q \in A_g$; ora è stata estesa ai $Q \in A_s$ in modo ovvio, ed ai $P \in A_s$ mediante il Teorema 1 del lavoro *A note* ... citato dianzi. Già che siamo sui σ_P faccio presente che vi è un σ_P^{-1} operante su $k(A)$, che per $P \in A_g$ è

sempre stato definito mediante $(\sigma_P^{-1}x)(Q) = x(\sigma_P Q)$ per Q generico; la definizione resta valida per $P \in A_d$, ma ora il -1 in esponente fa parte del simbolo e non comporta l'esistenza di un reciproco; il σ_P^{-1} di $C = k(A)$ può anche essere definito come in [2], compreso il caso $P \in A_d$: $\sigma_P^{-1} = (s_P \otimes \iota)P$, ove s_P è la riduzione di $k(P|A)$ modulo il suo primo massimo. Vi era infine un σ_P^{-1} operante sui divisori X di A, che era soltanto un modo impreciso di scrivere div σ_P; ora che σ_P esiste anche per $P \in A_d$, è meglio cambiare il σ_P^{-1} dei divisori, in modo da ottenere che $\sigma_P^{-1}X$ sia sempre algebricamente equivalente ad X. Ed allora devo parlare prima di *equivalenza algebrica* ($\approx$), che sulle varietà gruppali coincide con la numerica, e che è la solita cosa valida su ogni varietà: $X \approx 0$ se e solo se esistono un divisore effettivo Z ed un sistema algebrico irriducibile $\mathcal{S}$ di divisori (effettivi) su A tali che $X + Z$ sia effettivo e che $\mathcal{S}$ contenga Z ed $X + Z$. C'è anche la equivalenza $\equiv$ definita da: $X \equiv 0$ se e solo se $\sigma_P^{-1}X \sim X$ per ogni $P \in A_s$, che resterà poi vera anche per $P \in A_d$ quando $\sigma_P^{-1}X$ sarà definito (ricordo che $\sim$ è il simbolo della equivalenza lineare); la $X \equiv 0$ è equivalente al richiedere che $X \approx Y$ per un Y a componenti degeneri. Bene, definirò $\sigma_P^{-1}X = (\text{div}\,\sigma_P)X + X'$, ove X' è l'unico divisore, con componenti degeneri e passanti per P, che rende il $\sigma_P^{-1}X$ ora definito algebricamente equivalente ad X. Si noti che se P è molto degenere (cfr. la fine dell'appendice), il $\sigma_P^{-1}X$ è molto « spezzato »; questo è simile al giochetto, usato talvolta per dimostrare Bezout, di fare spezzare i divisori mediante le proiettività degeneri.

Una proprietà delle equivalenze valida sulle varietà gruppali è la seguente: se X è divisore effettivo senza componenti degeneri, e se $\sigma_P^{-1}X = X$ solo per un numero finito di $P \in A$, vi è un solo sistema algebrico irriducibile massimale di divisori su A che contenga X; esso consiste di tutti gli $Y \approx X$ effettivi, od anche di tutti i divisori effettivi ciascuno dei quali è linearmente equivalente a $\sigma_P^{-1}X$ per qualche $P \in A$.

Veniamo al λ_X, omomorfismo di A sulla propria varietà di Picard B, che è poi la varietà di Picard (Castelnuovo-Picard veramente) della varietà G di Severi-Albanese di A; se Δ è un divisore di Poincarè su $B \times A$ (prodotto alla Segre), λ_X è definita da $\sigma_P^{-1}X - X \sim \Delta(-\lambda_X P) - \Delta(O)$; si ha $\lambda_X = 0$ se e solo se $X \equiv 0$, e non se e solo se $X \approx 0$; però sulle abeliane le $\approx$, $\equiv$ coincidono.

Le componenti di A_d sono le varietà polari dei differenziali invarianti su A; una componente D di A_d è *polare* o *ciclica* secondochè $D' = O - D$ coincide, o no, con D; se non coincide, si ha $O - D' = D$. È bene munirsi di una nomenclatura più fine per A_d; la A_d stessa sarà anche indicata con A_{d1} e detta il *primo* luogo di degenerazione, di dimensione pura $n-1$; l'unione delle D_d quando D percorre le componenti di A_{d1} sarà indicata con A_{d2} e detta il *secondo* luogo di degenerazione, di dimensione pura $n-2$; eccetera, fino ad A_{dm} se $m = \dim A - \dim G$; la $A_{d,m+1}$ è vuota; un punto su A_{dr} ma non su $A_{d,r+1}$ sarà *r-degenere*; anche alle componenti di A_{dr} si applica la nomenclatura delle « polari » e « cicliche ». La A_{d0} è naturalmente tutta A.

BIBLIOGRAFIA

[1] I. Barsotti, *Considerazioni sulle funzioni theta*, Symp. Math., 3, 1970, p. 247.
[2] G. Gerotto, *Alcuni elementi di teoria degli ipercorpi*, Ann. Matem. Pura e Appl., 115, 1977, p. 349.
[3] I. Kaplansky, *An introduction to differential algebra*, Parigi, 1957.
[4] E.R. Kolchin, *Differential algebra and algebraic groups*, New York, 1973.

(Il testo contiene parecchi altri riferimenti che occorrono una sola volta. Per quanto riguarda riferimenti più antichi, non si può passare sotto silenzio l'opera di Baker, a cavallo del secolo, con i suoi quasi profetici commenti.)

INDICE DELLE DEFINIZIONI E DEI SIMBOLI, ESCLUSI QUELLI DELLA SEZ. 2 E QUELLI SUPPOSTI NOTI

$\mathcal{A}_d$, $\mathcal{A}_{d'}$ . . . . . Appendice
ammette 248
ciclica . . . . . Appendice
coefficienti in un vincolo 248
condizioni iniziali 248
corpo del sistema di vincoli 255
corpo di definizione di un ipercorpo 255
definito su ..., ipercorpo 255
degenerazione, r-esimo luogo di . . . . . Appendice
degenere, r-degenere . . . . . Appendice
equazione differenziale 248
equivalenza algebrica . . . . . Appendice
incompatibili 248, 262, 263
normalizzata, theta 247
N-vincolo 248
P_1, P 245, 246
polare . . . . . Appendice
produce 248
singolare 248, 251, 252, 262, 263
sistema di vincoli 248
varietà gruppale . . . . . Appendice
vincoli 248
$\mathbb{W}$ 249
ϕ_P 243
λ_X . . . . . Appendice
σ_P^{-1}, σ_P . . . . . Appendice
φ_r 235
$\equiv$ . . . . . Appendice
$\approx$ . . . . . Appendice

Direttore responsabile: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
« Monograf » - Via Collamarini, 5 - Bologna