Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica e di Scienze Fisiche e Naturali
100° (1982), Vol. VI, fasc. 8, pagg. 67-90.

GIUSEPPE SCORZA DRAGONI (*)

La Matematica nelle Memorie dell'Accademia dei XL (**)

Questa volta, o miei signori, sono stato imprudente. Ho accettato di parlare sulla matematica di un periodo storico limitato nei tempi e nei luoghi e da me vissuto soltanto in parte. E quelle ricostruzioni ideali che di solito ogni studioso si rifà per le teorie della propria disciplina, non mi basteranno. Dovrò ricorrere anche a documenti. Ma non me la sento di far poi troppo il topo d'archivio, epperò qualche volta mi manterrò nel vago e nell'evasivo. — Così, tanto per dare un esempio (sia pur fuori di quei tempi e luoghi), se nella pascaliana *Histoire de la roulette* leggessi (come ho letto): — Che Marsenne propose a parecchie persone lo studio della cicloide (a parecchie persone, fra le quali Galileo e Roberval): — Che Roberval dimostrò come una certa area fosse il triplo di quella di un certo disco circolare generatore: — Che Beaugrand ne scrisse a Galileo, senza per altro nominare il Roberval: — Che *Galilée mourut bientôt après, et M. de Beaugrand aussi*: e finalmente: Che *Torricelli succéda à Galilée et, tous ses papiers lui étant venus entre les mains, il y trouva entre autres ces solutions de la roulette sous le nom de cicloïde, écrites de la main de M. de Beaugrand, qui paraissait en être l'auteur; lequel étant mort, il crut qu'il avait assez de temps passé pour faire que la mémoire en fût perdue, et ainsi il pensa à en profiter* ecc., ecc.; — insomma, concludendo, se mi trovassi di fronte a una simile tirata probabilmente mi limiterei a dire che in essa ravviso giudizi temerari, insieme con processi alle intenzioni; e che non me la sento di escludere così alla svelta una buona fede compatibile con una sia pur eventualmente deplorevole ignoranza (dopo tutto, anche Blaise Pascal non sapeva che la sua *Pascaline* aveva un precedente nella macchina calcolatrice ideata da Wilhelm Schickard). Che se poi, nel volumetto di Guido Castelnuovo su *Le origini del calcolo infinitesimale nell'èra moderna* io poi leggessi (come ho letto): —

(*) Accademico dei XL.

(**) Conferenza letta in occasione della Seduta Straordinaria dell'Accademia a Modena il 27 maggio 1982 in occasione delle manifestazioni del Bicentenario.

ISSN: 0392-4106 0392-4130

Che la cicloide aveva attirato l'attenzione di Galileo fin dai di lui anni giovanili: — Che Galileo aveva proposto a Torricelli il calcolo di quella tal area, senza sapere trattarsi di un risultato già conseguito: — Che nella *Lettre de Monsieur Dettonville à Monsieur de Carcavi* Pascal difende il metodo degli indivisibili *senza mai nominare* Bonaventura Cavalieri e dando così l'impressione che egli (*forse per sostenere il Roberval* in un *suo reclamo di priorità*) *si sia lasciato dominare dalla tendenza nazionalista di cui aveva dato un'altra prova quando, nella Histoire de la roulette, lanciò l'ingiusta accusa di plagio al Torricelli, allora già scomparso, il quale aveva ritrovato l'area della cicloide senza conoscere i procedimenti (non ancora divulgati) che avevano condotto precedentemente i matematici francesi a conseguire quel risultato*: insomma, se mi trovassi di fronte a quest'altra tirata, oh allora metterei quella e questa insieme, e insieme le affiderei a chi mi ascolta! Sosterrei tutt'al più Castelnuovo, nella sua accusa di parzialità, ricordando che nelle polemiche con chi non accettava le sue idee sulla *pesanteur de l'air*, oh! per Pascal allora Torricelli *era le grand Torricelli*.

Un'accusa di parzialità io poi la muoverò qui e subito contro me stesso, per attenuare l'efficacia di quelle che mi potranno giungere da altre parti. Ma che volete, le memorie matematiche comparse nei novantanove volumi pubblicati da questa Accademia dei XL sono tante e poi tante, che qualche scelta si impone. E i criteri seguiti nelle mie scelte potranno sembrare, e talvolta essere piuttosto personali.

La collaborazione dei matematici è stata particolarmente intensa nei volumi della terza e quarta serie dei nostri Atti. Ricorderò, fra i nomi degli autori maggiormente significativi, quelli di Ugo Amaldi, Giuseppe Bagnera, Luigi Bianchi, Guido Castelnuovo, Annibale Comessatti, Michele de Franchis, Ulisse Dini, Federigo Enriques, Gino Fano, Eugenio Elia Levi, Mauro Picone, Salvatore Pincherle, Giovanni Sansone, Gaetano Scorza, Beniamino Segre, Francesco Severi, Francesco Tricomi e Vito Volterra. Nella scelta delle memorie sarò molto più drastico. Ne ricorderò rapidamente soltanto due: una di Eugenio Elia Levi e l'altra di mio padre. Nella prima sono considerati *I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali*; nella seconda viene stabilito *Il teorema fondamentale per le funzioni abeliane singolari*.

Incomincerò dagli ori di famiglia, cioè dalla memoria di mio padre. Si era allora più o meno intorno al 1915, quello centrale dei nostri tre anni parmensi. In casa si parlava di un « teoremone » che papà cercava di dimostrare. E la consegna materna qualche volta era: Oggi a tavola non si parla; non bisogna disturbare papà, che nella dimostrazione del suo teorema ha incontrato un punto nero. Io capivo alto alto, anche se il discorso di mamma mi suggeriva piuttosto l'immagine di una pallina nera verso cui convergevano tante frecciolline, nere anch'esse: l'immagine, insomma, di una specie di buco nero. Vattelappesca cosa ne pensassero i miei *Geschwister*, tutti più piccoli di me. Comunque, la consegna la rispettavano, forse perché la vedevano scrupolosamente rispettata da me. E venne il giorno della spe-

dizione del manoscritto. E quello dell'arrivo di due pacchi con cinquanta estratti ciascuno. Primo disappunto: Cento non era poi un numero tanto grande! Secondo disappunto: I due pacchi se ne stavano abbandonati per terra in un angolo dell'ingresso! Non ricordo come manifestai le mie impressioni. Ricordo invece che dai disappunti passai ad un vero isconforto quando mamma mi disse di non parlarne, perché a papà il « teoremone » non piaceva più. Possibile? Giungere e tenere un premio, poteva voler dire non apprezzare più quel premio? Oh, come poteva esser triste certe volte la vita! Oggi per altro mi son trovato motivi di conforto. La stesura di questo saggio mi ha ravvivato quei ricordi ma mi ha rammentato anche, che nella memoria immediatamente successiva a quella del « teoremone », e precisamente nella memoria *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann e ad alcune sue applicazioni*, mio padre scriveva: *La teoria delle funzioni abeliane (con che si intende alludere, nel tempo stesso, a tutto l'insieme delle quistioni analitiche che più o meno direttamente vi si riconnettono) e alcune delle più elevate teorie della geometria algebrica presentano analogie così frequenti e affinità tanto spiccate che, chiunque le esamini un po' da vicino, è condotto quasi spontaneamente a presumere, che esse debbano innestarsi tutte sopra una medesima teoria generale, e che in questo fatto debba ravvisarsi la spiegazione migliore dei vincoli numerosi e stretti che le collegano. E poiché al fondo di ogni ricerca istituita su quegli argomenti sta sempre, in modo più o meno esplicito, una certa « tabella di periodi », la quale, come è noto, in nessun caso è una matrice qualsivoglia, vien fatto subito di pensare che appunto le proprietà di questa matrice debbano rispondere in quelle teorie a un ufficio essenziale. Vero è che fino a qualche tempo addietro lo studio diretto delle tabelle in discorso era stato così poco approfondito che l'osservazione ora fatta, anche a ritenerla significativa, bisognava rassegnarsi a lasciarla cadere; ma in questi ultimi anni le cose sembrano mutate* ecc., ecc. E a me oggi piace pensare, che papà non tanto fosse insoddisfatto del « teoremone » quanto invece proteso verso la costruzione di quella tal teoria generale, esposta poi nei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo; e che mamma o fosse male informata o giudicasse il discorso troppo difficile per un bimbo sui sette anni (troppo difficile, anche se ridotto ai minimi termini).

In quegli anni, presso l'Università di Parma leggeva anche Beppo Levi, fratello di Eugenio Elia e padre di Giulio. Giulio, uno dei miei compagni di giuochi, non mi forniva affatto motivi di invidia o ammirazione: era troppo più piccolo di me. Mortificato di fronte a lui, lui assente, mi sentii nei giorni di Caporetto. Noi eravamo ormai in Catania da un anno, o quasi, e colà seppi che proprio in quelle tristi giornate lo zio Eugenio Elia era morto combattendo eroicamente, mentre che io non avevo zii morti in guerra! Che Beppo ed Eugenio Elia Levi fossero poi matematici e bravi, per me era la cosa più naturale del mondo. Quanto bravi, lo apprezzai a ragion veduta molti anni più tardi. Ma non vorrei uscire di nuovo fuori dello stretto seminato. Epperò qui mi affretterò a ricordare che quella lunga memoria di Eugenio Elia Levi sopra *I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali* era limitata, sì, al caso delle due variabili indipen-

denti, ma era pur sempre un lavoro di frontiera, tant'è vero, che *after Levi's memoir, forty years passed without new contributions of a general character being brought to the question*, come si legge nel trattato sulle *Partial differential equations of elliptic type* redatto da Carlo Miranda.

* * *

Proseguiamo con la metafora degli ori di famiglia. Ori di famiglia potevano vantare anche Giordano e Vincenzo Riccati, figli del conte Jacopo, *inventore primo*, scriverà Antonio Mario Lorgna (le parole son qui leggermente diverse, ma il concetto è rispettato), *inventore primo*, adunque, *della celebre equazione*

$$y' + ax^m y^2 + bx^n = 0 \ ,$$

che dal suo inventore, *di onorata e sempre illustre memoria*, ripete il nome di *Riccatiana*. E' sempre Lorgna che parla. Oggi si preferisce chiamare di Riccati l'equazione più generale

$$y' + p(x)\, y^2 + q(x)\, y + r(x) = 0 \ ,$$

che lo stesso Lorgna studia in alcuni casi particolari nel lavoro di cui si sta qui appunto discorrendo, cioè nello scritto *Sopra l'integrazione della formula* $Qdx + Py^2 dx + dy = 0$ (in questo titolo e nelle prime righe del suo articolo Lorgna dice formula, ma intende equazione). Il nome di Jacopo Riccati compare anche nella nota *Della figura del gorgo che la Natura forma in un vaso cilindrico ripieno d'acqua nel centro del cui fondo sia aperto un foro circolare* pubblicata nelle Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana dei XL dal conte Giordano Riccati. Il quale, parlandovi in prima persona vi scrive: *Nell'annotazione allo schediasma XXXVI del conte Jacopo Riccati mio padre contenuto nel tomo III delle sue Opere ho determinato la figura del gorgo* et cetera, et cetera. E con ciò mi fa pensare se non abbia per caso avuta anche lui la ventura di collaborare alla stampa o ristampa delle opere del proprio genitore.

Giordano Riccati fu uno dei XL. Non così il fratello, il conte ed abate Vincenzo, che lesse di matematica in Bologna e venne ricordato in quell'*Elogio di Giordano Riccati* che il canonico Antonio Pellizzari scrisse di suo tempo e pubblicò nelle solite Memorie della Società Italiana dei XL. Colà quel conte ed abate è mentovato in relazione alla *celebre controversia sopra la natura de' logaritmi* sviluppatasi inizialmente *tra il Leibnizio, e Giovanni Bernulli*, proseguitasi indi tra *l'Eulero, l'Alembert, ed altri* (fra i quali anche il Lagrange) e destinata a procacciare a Giordano Riccati *la gloria di pronunziar la sentenza perentoria intorno a questa lite*.

Gloria? vera gloria? Io temo che già i contemporanei, alcuni almeno, ne fossero tutt'altro che convinti. Mi spiego. In quell'*Elogio* il canonico Pellizzari rievoca un carteggio del proprio fratello con l'abate Vincenzo nonché un intervento, epistolare anch'esso, di Giordano. Tutte queste lettere sarebbero state

Ritratto di Paolo Ruffini. (Incisione in rame di Giuseppe Asioli su disegno di Geminiano Vincenzi da un dipinto di Biagio Magnanini, s.d.).

dedicate alla celebre questione; e quella di Giordano sarebbe stata appunto la conclusiva e avrebbe posto *fine alla tanto agitata controversia*. Le lettere dei due Riccati furono date alle stampe, ricorda il Pellizzari. E comparvero nel Nuovo Giornale de' Letterati Modenese, precisa il Malfatti in una pubblicazione accolta fra le Memorie della Reale Accademia di Mantova e dedicata a certi *Pensieri sulla famosa questione de' logaritmi de' numeri negativi*. Naturalmente io mi sono guardato bene dal partire alla ricerca di quel Nuovo Giornale; tanto più, che dalle affermazioni del Pellizzari e di Malfatti si deduce abbastanza facilmente che la posizione assunta dal Giordano in quella tal lettera conclusiva era, almeno concettualmente, quell'istessa dal Giordano sostenuta in uno scritto precedente, pubblicato nelle solite Memorie della Società Italiana dei XL e provvisto di un titolo (*Teorema: il nulla immaginario non può confondersi col reale*), che oggi sarebbe senz'altro sciocco mentre allora poteva anche essere soltanto provocatorio. In quest'ultimo scritto, Giordano Riccati crede di poter concludere con la diversità degli zeri complesso e reale partendo dalla circostanza che i due rami di una concoide di Nicomede non passano per il polo della concoide se il così detto intervallo di questa è minore della distanza del polo dalla retta base; e ritiene di poter quindi dedurre, *che il metodo del lodato autore*, cioè di Eulero, *determina tutti immaginarj i logaritmi e dei numeri positivi, e dei numeri negativi*, e *poichè ciò non esclude, che ai numeri positivi competano dei logaritmi reali, altrettanto deve altresì affermarsi dei numeri negativi, ai quali non meno i logaritmi reali si adattano, che la quadratura dell'iperbola fra gli assintoti* ed un'altra circostanza sulla quale sorvoleremo *dimostrano uguali a quelli dei numeri positivi*. Tiriamo le somme: Giordano Riccati reputa di dover piuttosto aderire alle tesi di Giovanni Bernoulli e D'Alembert che a quelle di Leibnitz, Eulero e Lagrange. Orbene, quel padre Gregorio Fontana, che nel primo volume delle solite Memorie della solita Società Italiana si era schierato decisamente in favore di Eulero, pur giudicando che il metodo da Eulero seguito lasciasse *non so qual nebbia e dubbietà* e rimanesse perciò *anco esposto alle eccezioni e agli attacchi* del D'Alambert; — quel padre Gregorio Fontana, dicevo, che in quel primo volume (e precisamente nello scritto *Sopra i logaritmi delle quantità negative; e sopra gl'immaginarj*) aveva dato *tre differenti brevissime dimostrazioni del famoso teorema* euleriano, che *il logaritmo di qualunque quantità positiva ha un'infinità di valori, de' quali uno solo è reale, e tutti gli altri immaginarj; ed il logaritmo di qualsivoglia quantità negativa ha un numero infinito di valori ma solamente immaginarj*; — quel padre Gregorio Fontana, ripeto, era difficile non reagisse alla provocazione. Nel fatto, in quelle Memorie egli intervenne con un altro scritto *Sopra la pretesa distinzione fra il nulla reale, e il nulla immaginario*; — con un altro scritto, in cui egli, accanto a certe tesi sostenute dal Frisi in una certa sua *Algebra* confuta anche quelle esposte da Giordano Riccati nella nota in discorso. E le ragioni erano dalla parte del Fontana. Il quale, se mai, ebbe soltanto il torto di prender troppo sul serio il Riccati e di volerlo battere sul suo terreno istesso, sostenendo che i poli delle concoidi di Nicomede son sempre punti, eventualmente isolati, delle curve concoidali rispettive. E tali son certamente, se dicendo « curve » si intende « curve algebriche »

e se queste parole si intendono nell'accezione oggi consueta. Tali sono certamente, dicevo, ma la circostanza è irrilevante, almeno per quello che ha tratto alla quistione attuale. Per la quistione attuale, la prima verità vera si è, che potrebbe non avere molto senso pretendere di arrivare a certe conclusioni circa la natura di un numero partendo da considerazioni o costruzioni geometriche che a quel numero possano aver eventualmente condotto o possano eventualmente condurre.

La prima verità vera, questa? E la seconda? Eccola, resa più chiara da uno sminuzzamento in affermazioni successive, le quali dicono: — Che il corpo (numerico) reale (astratto) è suscettibile di tante interpretazioni concrete dando luogo ad altrettanti corpi (numerici) reali (concreti), tutti isomorfi tra di loro, dicono i matematici, e tutti sostituibili l'un coll'altro ogni volta che la sostituzione possa rivelarsi conveniente: — Che tutto questo vale anche per il corpo (numerico) complesso (astratto): — Che ogni interpretazione concreta del corpo complesso ne contiene una del corpo reale, questa costituendo il sottocorpo reale (concreto) di quella (ed avendo come zero, questa, lo zero di quella; come unità, l'unità; eccetera, eccetera): — Che un'interpretazione concreta del corpo reale può essere per esempio costruita coi punti di una retta ed un'interpretazione concreta del corpo complesso coi punti di un piano: — Che in queste ultime costruzioni si possono scegliere a piacere i punti da assumere come numeri zero: — Che pertanto sarebbe un bel caso, se questi numeri zero concreti coincidessero: — Ma che un'eventuale mancata coincidenza non avrebbe assolutamente importanza, perché il sottocorpo reale di un corpo complesso concreto può essere sempre espulso e sostituito, elemento per elemento, con una qualsiasi altra interpretazione concreta del corpo reale astratto, lo zero di questa andando al posto dello zero di quel sottocorpo (epperò anche al posto dello zero di quel corpo complesso concreto), l'unità al posto dell'unità, eccetera, eccetera.

Questa seconda verità appare ormai ovvia ai matematici di oggi. I quali peraltro non sorridono affatto di fronte a certe, diciamole ingenuità dei loro progenitori. Essi sanno benissimo quanto lento e faticoso possa essere il processo di chiarificazione di un'idea o di risoluzione di un problema. Essi, per dirla usando con qualche leggera infedeltà parole scritte da Malfatti in quella sua memoria mantovana, essi, dunque, sanno benissimo che anche oggi *controversie con tanti scritti agitate rimangono tuttora nel loro stato di dubbietà e d'incertezza*; e che anche oggi, di fronte a certi periodi sintatticamente ben costruiti si può rimanere perplessi e chiedersi se chi li ha costruiti non abbia per caso sfruttato a proprio vantaggio, sia pur senza intenzioni blasfeme, quel

Gewöhnlich glaubt der Mensch, wenn er nur Worte hört,
Es müsse sich dabei doch auch was denken lassen

con intenzioni blasfeme asserito da Mefistofele in una scena del *Faust* goethiano. Alludo a situazioni che si presentano quando la matematica si avventura in certe plaghe abissali; e cercherò di spiegarmi con un esempio tratto dalla teoria degli insiemi. Io ero ancora un ragazzetto di fronte alla matematica, ma tale non ero

più di fronte alla filosofia, e in ogni caso ero ormai fuori (diciamola con Proust) *de l'âge où on croit qu'on crée ce qu'on nomme* quando mi trovai posto di fronte alla famosa antinomia di Russel. Scena: Piazza della Minerva, in Roma. Interlocutori, oltre a me: mio padre e Ferdinando Lori, allora professore di elettrotecnica presso il Politecnico di Padova. Io non so ben ridir come fu e come non fu, ma probabilmente proprio in seguito a qualche domanda di Lori, spirito curioso e versatile quant'altri mai, mi sentii improvvisamente chiedere da mio padre se secondo me fra gli elementi di un insieme potesse esservi l'insieme istesso. Di fronte a una simile mostruosità, nella quale sentivo riecheggiare l'*argumentum mentiens* di ciceroniana memoria (*Si dicis te mentiri verumque dicis, mentiris; dicit autem te mentiri verumque dicis; mentiris igitur*) o, se si preferisce, il sofisma del cretese, di memoria galileiana (*Questo è un di quegli argomenti cornuti, che si chiamano soriti: come quello del Candiotto, che diceva che tutti i Candiotti erano bugiardi, però, essendo egli Candiotto, veniva a dir la bugia, mentre diceva che i Candiotti erano bugiardi; bisogna adunque, et cetera, et cetera*); di fronte ad una simile mostruosità, dicevo, non ebbi esitazioni e negai al discorso ogni significato. Un po' più cauto mi sembrò di dover essere allorché, continuando, mi sentii domandare se potevo concedere che un insieme potesse non comparire fra i propri elementi. Ma in fine decisi che se il primo discorso era privo di significato, sprovvisto doveva esserne anche il secondo. Decisi! E ben me ne incolse! imperocché altrimenti sarei stato invitato a considerare la totalità di quegli insiemi che non compaiono fra i loro rispettivi elementi; a riconoscere che questa totalità, *in quanto insieme*, può comparire ovvero non comparire fra i propri elementi; che se essa vi compare, essa non vi può comparire, per definizione; e, finalmente, che se essa non vi compare, essa vi deve comparire, sempre per definizione; mi sarei insomma ritrovato appunto davanti all'antinomia di Russel, alla quale, per mia fortuna, avevo negato *a priori* ogni significato! Per mia fortuna, con riguardo alla mia tranquillità interiore! Per « mia » fortuna, perché altri preferisce vedere nel discorso di Russel una dimostrazione per assurdo. Secondo altri, quel discorso proverebbe che quella tal totalità *non è un insieme*. Secondo altri, se si assume che gli insiemi siano *classi* di *tipo zero*, quel discorso proverebbe che il *tipo* di quella totalità, pensata come *classe*, potrà porsi per esempio uguale ad *uno*, ma non mai a *zero*; dopo di che con le classi di *tipo uno* si potrà tentare di procedere in qualche guisa analoga a quella tenuta con le classi di *tipo zero*, pervenendo eventualmente a *classi* di *tipo due*, e così via (anche quest'ultimo discorso non è nuovo). La sentenza chiarificatrice su questa, come su certe altre antinomie, verrà quando verrà, se verrà. Ma se verrà, essa sarà in gran parte debitrice della propria chiarezza alla lunga teoria degli studiosi che la avranno ricercata, così come noi dobbiamo ai matematici del Sette-Ottocento se abbiamo idee chiare e sui logaritmi dei numeri negativi e, per esempio, sulle serie. Di queste parleremo tra poco. Prima vorrei precisare che l'invenzione di quei sofismi riportati da Cicerone e Galileo è attribuita a Eubulide di Mileto, adepto della scuola eleato-socratica megarese fondata da quell'Euclide, che Platone finge abbia

redatto il *Teeteto* e che nel *Fedone* è ricordato come uno dei discepoli di Socrate presenti alla fine del maestro.

* * *

E passiamo alle serie. Anche qui è consigliabile una riduzione drastica: limitarsi a lavori pubblicati nei primi trenta o trentacinque anni di vita della nostra Società. Era vicino il giorno nel quale Henrik Niels Abel avrebbe scritto: *Les séries divergentes sont en général quelque chose de bien fatal, et c'est une honte qu'on se soit avisé d'y fonder aucune démonstration. On peut démontrer tout ce qu'on veut en les employant, et se sont elles qui ont fait tant de malheurs et qui ont enfanté tant de paradoxes. Peut-on imaginer rien de plus horrible que de débiter*

$$0 = 1 - 2^n + 3^n - 4^n + \ldots$$

où n est un nombre entier positif? Enfin mes yeux se sont dessillés d'une manière frappante, car à l'exception des cas les plus simples, par exemple les séries géométriques, il ne se trouve dans les mathématiques presque aucune série infinie dont la somme est déterminée d'une manière rigoureuse, c'est-à-dire, la partie la plus essentielle des mathématiques est sans fondement. Pour la plus grande partie les résultats sont justes, il est vrai, mais c'est là une chose bien étrange. Je m'occupe à en chercher la raison, et cetera, et cetera. Che son parole dure e non del tutto immeritate. Ma anche non del tutto meritate. I matematici si trovavano ancora una volta di fronte ad algoritmi più bravi di loro; cercavano di impadronirsene e di dominarli; e forse avevano soltanto vaghi sospetti sulle scoperte alle quali sarebbero stati condotti. Tenterò di spiegarmi con un esempio. Leibnitz, già nei primi anni del Settecento attribuiva al Fatzius una trasformazione della serie

$$1 - (1/3) + (1/5) - (1/7) + \ldots$$

nella serie

$$(1/2)\,(1 + (1/3) + ((1\cdot 2)\,/\,(3\cdot 5)) + ((1\cdot 2\cdot 4)\,/\,(3\cdot 5\cdot 7)) + \ldots),$$

che converge verso $\pi/4$, come la precedente. La portata di quella tal trasformazione fu ampliata da Eulero verso la metà del Settecento. Ma bisognava aspettare il Novecento perché si riconoscesse che la trasformazione di Eulero mutava in convergenti tutte le serie convergenti, conservandone le somme rispettive; e poteva mutare, in convergenti, serie non convergenti, fornendo così uno dei tanti procedimenti generalizzati di sommazione oggi conosciuti. Un altro tal procedimento è quello che ripete il suo nome da Abel perché trae la sua ragion d'essere da un teorema di Abel. In particolare, questo procedimento attribuisce alla somma (generalizzata) della serie indeterminata

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

quel valore di 1/2, nel quale, anche se su basi piuttosto fantasiose concordavano, fin dagli ultimi anni del Seicento ed i primi del Settecento, tanto Jacopo Bernoulli, quanto Guido Grandi e Leibnitz.

Ma ritorniamo al nostro assunto. E ricordiamo che per Fontana, Lorgna, Malfatti ed altri dei XL già lo studio della convergenza ordinaria e dell'ordinaria non convergenza era affascinante. Così vediamo Lorgna che nelle solite Memorie della solita Società Italiana pubblica una *Nuova investigazione della somma generale delle serie* col proposito (cito liberamente) di *aprire in questa immensa dottrina una strada non battuta*; — vediamo Malfatti, che nella prima parte del lavoro dedicato all'*Esame di una dimostrazione, che dà l'Eulero d'un teorema analitico; e di una celebre regola per determinare la natura e i valori prossimi delle radici di qualunque equazione* mira a giustificare completamente *una secca decisione pronunziata dall'Eulero* nella riprova di una formula famosa, dovuta a James Stirling, e nella parte seconda confuta una regola piuttosto cervellotica, basata sulla convergenza o non convergenza di certe serie e presentata dall'abate Gianella come del tutto conveniente *per conoscere il valor prossimo delle radici reali di qualunque equazione determinata* (algebrica, nonché reale nei coefficienti), *e per conoscere il numero delle radici immaginarie che in essa* (si) *hanno*; e vediamo l'abate Fontana, il quale si professa piuttosto sicuro, che *se si giugnesse a tanto di poter assegnare la somma di ciascheduna serie, tutto si sarebbe fatto nelle matematiche* e indica *Teoremi sopra le serie infinite convergenti formate dai prodotti de' numeri dispari successivi diviti pe' prodotti de' numeri pari corrispondenti*, mentre in un lavoro precedente *Sopra le serie*, ve ne aveva sommate parecchie altre.

Parecchie altre, sì, ma che si direbbero tutte costruite a bella posta in tal guisa, da potersene appunto calcolare le somme rispettive. Così, dopo aver qui ricordato che il fattoriale, $n\,!$, dell'intero positivo n è, per definizione, il prodotto dei primi n numeri naturali, di quelle serie consideriamone la prima, scrivendola

$$1 + (x^4/4\,!) + (x^8/8\,!) + (x^{12}/12\,!) + (x^{16}/16\,!) + \ldots,$$

chiara essendone la struttura. Orbene, Fontana deriva questa sua serie termine a termine quattro volte; riconosce che essa soddisfa all'equazione differenziale lineare

$$y^{(4)} - y = 0$$

e ne identifica la somma con quell'integrale dell'equazione uguale a *uno*, lui, per $x = 0$, *nulle* essendo invece le prime tre sue derivate, sempre per $x = 0$ (ovvii, per i matematici, i motivi di queste imposizioni); ne identifica cioè la somma con la funzione

$$(e^x + e^{-x} + 2\cos x)\,/\,4\ ,$$

che soddisfa appunto a quell'equazione e a tutte le condizioni imposte a quell'integrale. Per altro, chi si rammentasse della

$$e^x = 1 + (x/1\,!) + (x^2/2\,!) + (x^3/3\,!) + (x^4/4\,!) + \ldots,$$

e quindi della

$$e^{-x} = 1 - (x/1\,!) + (x^2/2\,!) - (x^3/3\,!) + (x^4/4\,!) - \ldots,$$

e si ricordasse altresì della

$$\cos x = 1 - (x^2/2\,!) + (x^4/4\,!) - (x^6/6\,!) + (x^8/8\,!) - \ldots,$$

potrebbe verificare immediatamente che la funzione

$$e^x + e^{-x} + 2\cos x$$

espressa in serie di potenze della x restituisce appunto la serie considerata dal Fontana, moltiplicata per quattro. Comunque, anche al procedimento seguito dal Fontana non vi sarebbe nulla da eccepire, almeno oggi. Almeno oggi! perché oggi ogni matematico ha sulla punta delle dita i teoremi che fanno allo scopo. Che se *temporibus illis* questi teoremi non erano noti, allora bisognerebbe dire che Fontana è stato piuttosto disinvolto; e la decisione richiederebbe una ricerca che non sarebbe forse del tutto di archivio, ma quasi. Per altro e per la verità, anche Malfatti mi è talvolta sembrato discretamente disinvolto quando completava le considerazioni di Eulero sul comportamento del fattoriale di n al divergere di n. E qui la decisione richiederebbe l'esame approfondito di una dimostrazione piuttosto ingarbugliata relativa ad una formula meno espressiva di un'altra, che si può stabilire con metodi forse meno elementari, ma certamente più spediti. E il giuoco non mi pare che valga la candela. D'altra parte, qualche esempio sicuro di disinvoltura desidero pur darlo (e se ne comprenderà in seguito il motivo); pertanto uscirò forse un altro po' dal seminato, ma potrò fornire tutte le garanzie sui controlli effettuati a proposito di una prestazione di Agostino Luigi Cauchy, uno dei più grandi matematici di tutti i tempi e già nostro socio onorario.

Negli Atti della solita nostra Società Italiana dei XL compaiono tre pubblicazioni di Cauchy: la prima verte *Sulla interpolazione*, la seconda riguarda il *Calcolo degli indici delle funzioni* e la terza si è la *Memoria sui rapporti che esistono fra il calcolo dei residui e il calcolo dei limiti e sui vantaggi che offrono questi due nuovi calcoli nella soluzione delle equazioni algebraiche o trascendenti*. La seconda e la terza erano state già illustrate verbalmente dall'autore istesso presso l'Accademia delle Scienze di Torino. La terza dice già molto ai matematici col titolo puro e semplice: spiegazioni anche di un'ora, non direbbero niente o quasi niente ai profani. Ed ormai mi dedicherò a quell'esempio, che ci interessa e relativo a quell'integrale secondo Cauchy, che gli italiani talvolta preferiscono nominare

secondo Mengoli-Cauchy. E dovrò rifarmi al primo biennio dei miei studi universitari. Nella mia ingenuità di matricolino o quasi, sentendo parlare di integrale secondo Cauchy per quelle tali funzioni continue di una variabile, ero convinto che Cauchy avesse considerato quelle tali somme e ne avesse dimostrato quella tale convergenza verso quel tale limite, che sarebbe poi stato, per definizione, quel tale integrale definito. E mi ci arrovellavo: non capivo come lui avesse potuto ottenere questo risultato una cinquantina di anni prima che Heinrich Eduard Heine dimostrasse la continuità uniforme di quelle tali funzioni continue. Alla fine, visto che da solo non ce la facevo, attinsi alla fonte e di Cauchy consultai il *Traité d'analyse*: esposizione chiarissima per tre pagine (tre pagine? per quelle premesse? troppe!), ma arrivati nel punto in cui lo aspettavo al varco, ohimè! che vuoto d'aria! da dar le vertigini! Un vuoto d'aria, che vidi poi ricordato anche nell'*Encyclopedie der Mathematischen Wissenschaften* e che ricordato sarà stato chissà mai quante altre volte. Ma qui non è il caso di insistere sull'argomento. Piuttosto vorrei osservare come, in quel volumetto su *Le origini del calcolo infinitesimale nell'èra moderna* Castelnuovo ricordi che Pietro Mengoli aveva appunto già dimostrato quella tale convergenza di quelle tali somme, sia pure in un caso particolare. E forse è ancor più interessante rilevare quanto ivi si rammenti a proposito di Luca Valerio, uno dei primi accademici lincei (e *massimo geometra*, dice di lui Galileo nella quarta delle giornate di cui nei suoi *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*). Presenterò qui in riassunto i risultati di Luca Valerio sugli integrali definiti così come si possono evincere da quel volumetto. Sarò costretto, sia pure per poco, a fare uso di un linguaggio strettamente tecnico, senza indugiare in ispiegazioni che non spiegherebbero alcunché ai profani e che sarebbero completamente superflue per i matematici. Luca Valerio considera adunque funzioni reali di una variabile reale, continue e crescenti (o decrescenti), assegnate in intervalli unidimensionali, chiusi e limitati; considera quelle solite tali somme e ne dimostra quella solita tale convergenza, eccetera, eccetera. — Oh bella! e con la continuità uniforme come la mettiamo? sento chiedere. — Ecco! quella tale convergenza si può dedurre dalla continuità uniforme dimostrando che questa implica sia soddisfatta una condizione indicata da Riemann verso la metà del secolo scorso; una condizione appunto necessaria e sufficiente per l'integrabilità secondo Riemann di una funzione reale, definita in un intervallo unidimensionale, chiuso e limitato (l'integrazione secondo Riemann equivalendo poi all'integrazione secondo Mengoli-Cauchy quando si tratti per di più di funzioni continue). Ebbene, Luca Valerio conclude correttamente, dimostrando appunto, in sostanza, che nel suo caso la condizione di Riemann è soddisfatta e traendo poi le debite conseguenze di questo risultato. Una vera anticipazione!

* * *

Riparleremo tra poco delle serie, in occasione di un *pot-pourri*, che sarà velocemente ammannito. Qui desidero porre subito in evidenza come anticipazioni si possano ravvisare anche nelle ricerche di Gabrio Piola relative ad una *Nuova analisi per tutte le questioni della meccanica molecolare* ed in quelle *Intorno alle equazioni fondamentali del movimento di corpi qualsivogliono, considerati secondo la naturale*

loro forma e composizione. In queste ultime intervengono esplicitamente certi tensori, introdotti ivi da Piola ed oggi usualmente considerati in meccanica dei continui quando si faccia riferimento al caso generale delle trasformazioni finite (in meccanica dei continui, dicevo: in particolare, nella teoria dell'elasticità). A questi tensori, per esempio, fece sempre capo Antonio Signorini nei suoi studi sulle trasformazioni termoelastiche finite. Veramente Signorini non disse mai che quei tensori risalivano a Piola; e si sarebbe quindi portati a dedurne che egli non fosse a conoscenza del fatto. Il merito di avere rilevato l'importanza delle ricerche di Piola sembrerebbe pertanto risalire quasi per intero a Clifford Ambrose Truesdell e collaboratori. — Debbo tutte queste notizie alla cortesia di Dionigi Galletto, al quale mi sono rivolto, attesa la mia nessuna competenza in materia. Incompetenza che peraltro non mi ha affatto impedito di essere gradevolmente sorpreso dallo stile piano e scorrevole di questo studioso. Stile, preciserò, sempre o per lo meno quasi sempre piano e scorrevole. Quasi sempre? Direi di sì. Comunque, certo si è che questo scrittore non mi ha mai indotto a riandare col pensiero i commenti ironici, che nel suo *Rome, Naples et Florence (1826)* Stendhal dedica a certa prosa italiana del tempo.

Non ostante qualche traccia di cufuismo, analoga impressione gradevole posso dire di averla ricevuta anche dalla lettura delle pubblicazioni di Giusto Bellavitis. Di questo ricorderò la memoria *Sulla classificazione delle curve del terz'ordine*, quella dedicata a una *Sposizione del metodo delle equipollenze* (cioè a un'illustrazione della teoria dei vettori) e finalmente quella sul *Calcolo dei quaternioni di W. R. Hamilton e sua relazione col metodo delle equipollenze*, la prima presentata a questa nostra Accademia nel 1851, la seconda nel 1854 e la terza nel 1858: — e qui ricorderò di sfuggita che la collaborazione di Piola con gli Atti dei XL, iniziata nel 1828 con un lavoro *Sulla trasformazione delle formole integrali duplicate e triplicate*, si è conclusa nel 1845, appunto con la lunga memoria su quelle tali equazioni fondamentali; e noterò, sempre di sfuggita, che motivi di equilibrio nell'esposizione non mi consentono di parlare del suo lavoro *Sulla teoria delle funzioni discontinue* (nel quale ho avvertito, talvolta, una certa qual sia pur leggera ampollosità) e della *Nota a due capitoli dell'opera di Eulero che ha per titolo: Theoria motus corporum rigidorum.*

E ritorniamo a Bellavitis. Forse il modo migliore per illustrare i suoi contributi si è quello di riprodurre le primissime pagine della sua *Sposizione* (nelle quali si lascia garbatamente intravedere una rivendicazione di priorità). Ecco quelle pagine (in rotondo le parole che sono in corsivo nell'originale; e viceversa, naturalmente): *Nella memoria sulla classificazione delle curve del terzo ordine (pag. 1 del pres. volume) mi proposi di esporre dettagliatamente un metodo di Geometria analitica da me immaginato or sono venti anni, e che da prima dissi metodo delle* equazioni geometriche; *cangiando poscia questo nome in quello più breve di* equipollenze. *Gli scritti principali, in cui trattai di questo metodo sono: il* Saggio *pubblicato nel 3° volume (1835) degli Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto; — il* Metodo *nel tomo VII (1837) della stessa opera periodica; — le* Soluzioni grafiche *nel volume I (1843) delle Memorie dell'Imperial Regio Istituto Veneto. — Forse*

perchè mi tenni a soverchia concissione, accennando a molte applicazioni geometriche e meccaniche, anzichè sufficientemente estendermi in alcune poche; — forse perchè in tanta vastità della scienza geometrica ogni Dotto sta ritroso ad impiegare anche poco tempo per apprendere un nuovo metodo, e ritiene che con quelli da lui conosciuti potrà giungere agli stessi risultamenti; — forse per altre ragioni; — i Geometri non posero attenzione al metodo da me proposto, nè alle soluzioni di incontestabile semplicità che io ne ricavai in quelli ed in alcuni altri miei scritti. — Pure parecchi dei principj da me assunti si vanno ognora più adottando: il Saint-Venant mostrò i vantaggi di considerare le quantità geometriche; *le sue* somme geometriche *sono precisamente quelle che io pure da prima così denominava, ma che poscia dissi* composte-equipollenti: *ed il Cauchy notò a più riprese i pregi delle teorie del Saint-Venant. Spero adunque non del tutto inopportuno ritornare ancora una volta sul metodo delle equipollenze, esponendolo con tutta la maggior chiarezza che mi sarà possibile. Questo metodo soddisfa un desiderio del Carnot di trovare un algoritmo, che rappresenti nello stesso tempo e la grandezza e la posizione delle varie parti di una figura; ne risultano quindi, per via diretta, eleganti e semplici soluzioni grafiche dei problemi geometrici. Il metodo delle equipollenze comprende come casi particolari i metodi delle coordinate parallele o polari, il calcolo baricentrico ecc.: i problemi sulle curve vi si risolvono in generale senza preferire una maniera di rappresentazione ad un'altra; perlochè i calcoli sono più spediti di quelli della Geometria analitica, ed i risultamenti sono espressi in forma più semplice.*

Altre notizie sulla teoria dei vettori son per esempio esposte nel primo volume delle *Lezioni di Analisi* di Francesco Severi. Ivi si legge precisamente: — Che *la denominazione* (di vettore) *è di Hamilton (1843)*: — Che *i primi germi della teoria dei vettori possono farsi risalire a Wessel (1797), Gauss (1799), Argand (1806), ai quali è dovuta la* (ben nota) *rappresentazione geometrica dei numeri complessi*: — E che *la teoria dei vettori fu sviluppata organicamente da Bellavitis (sotto il nome di metodo delle equipollenze, 1835), da Hamilton (1843-1853) e da Grassmann (1844)*. Dalla viva voce di Francesco Severi, in un anno ormai lontanissimo, appresi poi di una targa apposta sulla casa abitata dal Bellavitis in Trezze sul Brenta, vicinissima a Bassano del Grappa; di una targa, dicevo, la di cui epigrafe si chiudeva con un « Visse felice ». Il testo completo dell'epigrafe mi è stato fornito, in occasione di questo mio saggio, da Edmondo Morgantini. Eccolo:

> Giusto Bellavitis / nacque a Bassano (1803) / da Ernesto e Giovanna Navarini / Amore per lo studio / e fortunate circostanze / lo fecero / Professore a Vicenza (1842), a Padova (1845) / e Senatore del Regno d'Italia (1866) / Scrisse di Matematica / Inventò il metodo delle equipollenze / Marito e Padre affettuosissimo / Visse felice;

eccolo, quel testo! un testo da cui traspare quanto Bellavitis fosse affezionato anche alla sua creatura scientifica, non appena si sappia che si tratta di un'epigrafe dettata dall'interessato medesimo! Il quale *fin dal 1877 aveva preparato — scritti di suo*

pugno e con i rispettivi indirizzi — diversi pacchi degli annunci funebri che la Moglie e il Figlio avrebbero dovuto spedire dopo la Sua morte ai Senatori, agli amici, ai Consiglieri comunali di Padova, ai membri dell'Istituto Veneto, ai corrispondenti ed amici stranieri. — E sia per inciso detto che debbo a Edmondo Morgantini anche questo passo di una commemorazione a suo tempo letta da E. N. Legnazzi presso l'Università di Padova.

* * *

Nell'ambito sempre della geometria, parlerò adesso rapidamente di una quistione posta da Malfatti nella *Memoria sopra un problema stereometrico*. La quistione interessò notevolmente i matematici, che interloquirono numerosi. Dato un triangolo, essa consiste nel costruire tre dischi circolari, contenuti nel triangolo, privi a due a due di punti interni in comune e siffatti, che la somma delle loro aree sia la massima possibile, ferme le altre condizioni. Un problema simile e suscettibile anch'esso di qualche applicazione pratica è stato poi da Malfatti considerato nella memoria su un *Problema geometrico: fra i triangoli equilateri, i quadrati e il circolo, che si possono inscrivere in un dato triangolo, sceglier la figura dell'aja massima*. Il titolo è lunghetto, anzi che no; in compenso ci dice tutto e ci esonera da spiegazioni ulteriori sui contenuti. — Quasi quasi dimenticavo: Malfatti ha fornito risposte tanto per il problema quanto per la quistione.

Per quello poi che ha tratto a notizie ulteriori relative all'analisi matematica mi limiterò a citazioni pure e semplici, salvo qualche generica osservazione finale. E ricorderò le ricerche di Pietro Abbati Marescotti, Gianfrancesco Malfatti, Giovanni Plana e Luigi Rangoni su problemi appartenenti al calcolo delle probabilità; nonché quelle di Gregorio Fontana, Giuliano Frullani, Gianfrancesco Malfatti, Pietro Paoli e Luigi Rangoni sulle equazioni differenziali e sulle serie (precisamente sulle cosiddette serie ricorrenti oppure sulle serie in quanto istrumento per il calcolo di funzioni e integrali, nonché per l'integrazione di equazioni differenziali). Un cenno a parte per la memoria di Malfatti a proposito *Delle formole differenziali la cui integrazione dipende dalla rettificazione delle sezioni coniche* e per quella su certe *Applicazioni dei trascendenti ellittici alla quadratura di alcune curve sferiche* dovuta a Barnaba Tortolini, il fondatore degli Annali di Matematica Pura ed Applicata, una rivista ancor oggi viva e vitale. — Tutte queste citazioni perché desideravo confermare la varietà degli interessi di quei nostri progenitori. Ma sia ben chiaro che qui non intendo dilungarmi in osservazioni critiche circa il valore di quelle note e memorie, considerate nel tempo in cui furono scritte, e circa eventuali inesattezze. Dirò soltanto che giudico pertinenti le obiezioni mosse dal Paoli al Frullani nella *Nota sugl'integrali definiti*, nella quale si discorre di una memoria del secondo *Sopra gl'integrali definiti*. Ed avvertirò che preferisco tacere completamente certi lavori che mi hanno indotto a mutare il ciceroniano *ut parva magnis conferamus* in un *ut parva parvis conferam* ed a comparare le *problematiche* ivi dibattute con certe domandine che mi ponevo, matricolino, per capire a fondo qualche enunciato o qualche dimostrazione.

Nell'ambito della fisica-matematica, la mia competenza, ripeto, è presso che nulla,

specialmente se riferita a quell'epoca. Ma non volevo nemmeno infastidire troppo colleghi competenti. Sicché mi sono limitato a chiedere conferma di un paio di giudizi tendenzialmente favorevoli. E così ho potuto elogiare tranquillamente l'opera di Gabrio Piola e posso tranquillamente assicurare buona la memoria di Malfatti sulla *Determinazione del tempo che impiega un grave discendente per un canale circolare*. Più tenue, e di molto, sembra che sia, dello stesso, quel *Tentativo sul problema delle pressioni che soffrono gli appoggi collocati agli angoli di una figura, derivate da un peso posto dentro la sua aja.* — Più tenue? Ma allora, perché parlarne? Ebbene, ecco! *Les matières de géométrie sont si sérieuses d'elles-mêmes qu'il est avantageux qu'il s'offre quelque occasion pour les rendre un peu divertissantes* diceva Blaise Pascal nella *Suite de l'histoire de la roulette* prima di approfittare, da par suo, di un'occasione fornitagli da uno sprovveduto. E io approfitterò di un certo altro appiglio, per ispettegolare un po' su quel *Tentativo* e le conseguenze. Quel tentativo era stato criticato dal Paoli in una nota *Sul problema degli appoggi* ed il Malfatti aveva ritenuto opportuno replicare mediante certe *Brevi riflessioni alla critica del tentativo sul problema delle pressioni, fatta dal Signor Paoli nel tomo IX di questa Società.* A queste riflessioni egli fece seguire una lettera al Longna (pubblicata nel tomo XI delle stesse memorie) per dirgli come gli avesse *fatto molto caso la notizia, che* (gli era stata) *comunicata, essersi ritrovato nelle* (sue) *Brevi riflessioni stampate nel tomo X della Società alcune espressioni riputate offensive contro il Socio Signor Paoli, ed esserne stata* (a quella) *Presidenza fatta querela*; e per *protestargli che, e per la morale, e per la dottrina* (nutriva) *nell'animo un'altissima stima per il Signor Paoli, e per tutti quelli, che gli somigliano, fra i quali in prima fila da gran tempo* egli riponeva *lo stimatissimo Presidente* Longna. Malfatti protestava, ma probabilmente otteneva soltanto il risultato di versare altro veleno nel dente del Paoli, il quale non credo si sia mai lasciata sfuggire l'occasione di tagliargli i panni addosso nelle lettere successivamente inviate a Paolo Ruffini. Per esempio, nella lettera del 23 novembre 1804 si legge: *Nelle altre memorie matematiche non ho trovato maniera di consolarmi del disgusto che mi ha arrecato quella del Signore Malfatti*; in quella dello 11 agosto 1806: *Le risposte da Lei date ai dubbj del Signore Malfatti, compariscono a me molto convincenti, ma non so se tali compariranno a lui, che non si persuade così facilmente*; e in quella del 18 settembre 1807: *Mi pare di averLe scritto altre volte che credevo da Lei rimosse tutte le obbjezioni del signor Malfatti. Gran parte di queste avrebbe probabilmente tralasciate, se si fosse messo a portata di quel ramo di analisi da Lei cotanto illustrato, che comprende la vera teoria della risoluzione delle equazioni. Non so però se Egli sarà persuaso delle Sue risposte, perchè non è facile a persuadersi. Dopo quello che era stato detto sul problema degli appoggi, rimasi veramente sorpreso nel leggere una pretesa dimostrazione fondata sulla necessità di rimuovere il paradosso della indeterminazione delle pressioni, che è già dimostrato dovere essere indeterminato.*

Con quella *pretesa dimostrazione* Pietro Paoli probabilmente alludeva a quell'*Appendice al problema delle pressioni*, che nel 1805 Malfatti aveva pubblicato presso i soliti Atti dei XL. Ma noi concluderemo questo saggio parlando piuttosto della *vera teoria della risoluzione delle equazioni* algebriche in una incognita, premet-

tendo qualche parola su una nota di Lorgna ed esponendo poi, sull'argomento, i risultati di Abbati Marescotti, di Ruffini e dello stesso Malfatti.

In questa esposizione mi sarà di ausilio un pregevole articolo di Heintich Burkhardt pubblicato negli Annali di Matematica Pura ed Applicata in una traduzione dovuta a Ernesto Pascal (il testo originale, *Die Anfänge der Gruppentheorie und Paolo Ruffini*, compare in un supplemento alla trentasettesima annata della Zeitschrift für Mathematik und Physik; il titolo della traduzione si è, poi, *Paolo Ruffini ed i primordii della teoria dei gruppi*); e mi saranno di ausilio anche le prefazioni scritte da Ettore Bortolotti per i tre volumi delle *Opere Matematiche di Paolo Ruffini*, volumi editi, il primo presso il Circolo Matematico di Palermo e gli ultimi due presso le Edizioni Cremonese della Casa Editrice Perrella, in Roma. E si tratterà di aiuti direi essenziali. *Il modo di esprimersi* di Ruffini *è difficile ad intendersi*, scrive Burkhardt (in quella traduzione!), *e la difficoltà ha dovuto essere ancora maggiore per quel tempo, in cui una gran parte delle idee da lui adoperate era completamente nuova pel lettore; e di ciò fan fede sufficiente i dubbi sollevati da Malfatti* (il quale, per altro, nei suoi *Dubbj proposti al socio Paolo Ruffini sulla sua dimostrazione della impossibilità di risolvere le equazioni superiori al quarto grado* fa spesso ricorso *a ragionamenti lunghi e continuamente interrotti da frequenti disgressioni* — sempre a stare a quello che ne dice Burkhardt in quella tal traduzione). Avverto poi subito che nelle prossime considerazioni intenderò sempre che si operi su numeri complessi, a meno di avvisi espliciti in contrario.

* * *

Per una migliore intelligenza della prima parte di questo paragrafo sarà opportuno dedicare qualche cenno alla risoluzione dell'equazione cubica, che si può scrivere

$$x^3 - px - q = 0 \tag{1}$$

senza ledere la generalità (p e q coefficienti numerici). Le radici della (1) si ottengono dall'espressione

$$(2)\quad ((q/2) + ((q^2/4) - (p^3/27))^{1/2})^{1/3} + ((q/2) - ((q^2/4) - (p^3/27))^{1/2})^{1/3}\ ;$$

nella quale la determinazione della radice quadrata può essere fissata a piacere, ma deve essere fissata una volta per tutte, mentre le determinazioni delle radici cubiche bisogna farle variare ogni volta in tal guisa che il loro prodotto sia sempre uguale a $p/3$ — veramente nel caso di $p = q = 0$ c'è poco da far variare e la (2) porge senz'altro l'unica radice, tripla, della $x^3 = 0$, mentre in tutti gli altri casi la (2) porge ogni radice della (1) ripetuta tante volte quant'è la molteplicità rispettiva.

Le formule risolutive implicate dalla (2) sono note come le *formule di Cardano*, atteso che come primo Girolamo Cardano le pubblicò per le stampe (nel 1545); peraltro, la (1) è stata risoluta per la prima volta da Scipione dal Ferro (verso il 1515) e successivamente da Niccolò Tartaglia (nel 1534). Ma non è di ciò che

intendo occuparmi. Desidero invece porre in evidenza che la (2) ci ripropone una circostanza già rilevata a proposito delle serie: i matematici di fronte a quelle formule risolutive si sono ritrovati ancora una volta davanti ad algoritmi più bravi di loro.

Mi spiego. Consideriamo intanto, a titolo di esempio, il caso di

$$p = 1 \quad \text{e} \quad q = 0 \ ,$$

cioè il caso dell'equazione

$$x^3 - x = 0 \ , \tag{3}$$

che ha le sue radici date dai numeri reali 0, 1 e -1. Ebbene, proprio in questo caso nella (2) compare la radice quadrata di un numero reale e negativo, quella del numero $-1/27$. E la circostanza ha caratteri di generalità. Precisamente: se tutte le radici della (1) sono reali, i coefficienti p e q sono reali; e se per di più si tratta di radici semplici, il numero $(q^2/4) - (p^3/27)$, cioè il *discriminante* della (1), è negativo: viceversa, se i coefficienti p e q sono reali e il discriminante è negativo, la (1) possiede soltanto radici reali, tutte semplici. Sicché: in questo caso della realità e semplicità delle radici, nella (2) compare la radice quadrata di un numero negativo. Ed in questo, noto come il *casus irreducibilis*, una simil stranezza non può essere eliminata, se si vuole ricorrere soltanto ad operazioni razionali ed estrazioni di radici. Il sospetto ne vigeva da tempo e Lorgna ne discorre nella sua nota *Dell'irreducibilità della formula cardanica a forma finita, algebraica, e libera da aspetto immaginario*. Ma è soltanto nelle opere di Ruffini che *il caso irreducibile, quell'apparenza di paradosso che presentano, strana cosa, le Matematiche, inevitabile si dimostra e necessario*, come scriverà Giuseppe Bianchi nel suo *Elogio* del Nostro. A conferma poi dell'importanza che un fatto apparentemente paradossale può avere per le nostre conoscenze, ed a conferma altresì della circostanza che qualche volta le formule ritrovate dai matematici vedono più lontano che non i matematici istessi, a conferma, dicevo, di tutto ciò, non sarà inopportuno qui ricordare, a titolo di esempio, che nella piuttosto recente *Einführung in die Höhere Mathematik* scritta da Karl Strubecker e edita presso lo Oldenbourg Verlag in Monaco di Baviera e Vienna, si legge: *Die Unvermeidbarkeit des Komplexen zum Gewinnen eines reellen Ergebnisses, die sich in diesem Falle trotz aller Versuche, es zu umgehen, immer wieder zeigte, hat viel dazu beigetragen, das Zutrauen zu dem vorerst rein formalen Rechnen mit komplexen Grössen zu befestigen und schliesslich diesen Grössen mehr de facto als de jure Bürgerrecht in in der Mathematik zu verleihen*; e si legge altresì: *Ihren mathematisch legalen Bürgerbrief hat dann erst Gauss geschrieben und gesiegelt* — ed il ricordo non è inopportuno anche se in quella *Einführung* il nostro Ruffini è completamente ignorato ed il suo teorema sul *casus irreducibilis* è attribuito ad Otto Hölder e datato 1891 (peraltro non si può tacere che una volta posseduta, la certezza di quella tale inevitabilità deve essere stata dimolto stimolante, anzi dimolto più stimolante a ricercare la verità nascosta sotto il velame di quella istrana espressione (2)).

Maggiore rinomanza ha conseguito l'altro maggior grande risultato quasi completamente ottenuto da Paolo Ruffini: quello che l'equazione algebrica generale in una incognita non ammette *soluzioni algebraiche* se nel grado essa supera il quarto — e precisiamo qui, anche se forse potevamo farlo prima, precisiamo adunque qui che per *algebraica* si intendeva una soluzione che tutti gli zeri dell'equazione esprimesse con un numero finito di operazioni razionali (addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni) e di estrazioni di radici eseguite sui coefficienti (e su espressioni ottenute a partire dai coefficienti dell'equazione mediante finite operazioni siffatte).

Ruffini conseguì quel risultato quasi completamente nel senso *che nella catena delle sue deduzioni c'è qualche lacuna*, come scrive Ettore Bortolotti, aggiungendo che in quei *tempi lacune di quel genere non potevano essere avvertite, nonché colmate* (e chi fosse eccessivamente sorpreso per una simile affermazione cerchi di ricordarsi la disinvoltura con la quale in quel *Traité d'analyse* è considerata la quistione della convergenza di quelle tali somme verso quel tale integrale secondo Cauchy). E qualche lacuna vi rimase non ostante la sua *mirabile tenacia nel riprendere, e semplicizzare, e sviscerare in ogni sua parte quel teorema, che dovrebbe pur chiamarsi suo* (son sempre parole di Bortolotti) e per il quale, *dopo sei successive redazioni expose* una dimostrazione *in forma per quei tempi perfetta, e con semplicità non più superata.*

Ritorneremo tra poco sulle ultime redazioni, contenute nella memoria in cui si tratta *Della insolubilità delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al 4°, qualunque metodo si adoperi, algebraico esso siasi o trascendente* (e pubblicata, in verità, presso le Memorie dell'Istituto Nazionale Italiano); e nell'opuscolo che contiene certe *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebraiche generali* (volumetto in verità pubblicato presso una Società Tipografica modenese). Prima desidero dedicare qualche cenno a quei *dubbj* proposti dal Malfatti.

A proposito dei quali *era da supporsi*, scrive Burkhardt (in quella tal traduzione), *che gli antichi matematici, i quali molto si erano affaticati sul problema della risoluzione delle equazioni di 5° grado senza veder coronati i loro sforzi, non lasciassero passare senza opposizione le deduzioni di Ruffini. Tale opposizione fu per la prima volta* (*a quanto* al Burkhardt era *noto*) *sostenuta dal matematico ferrarese Gianfrancesco Malfatti*, il quale molto probabilmente non voleva disperare a proposito di quella risolvente di sesto grado, che egli aveva costruito per l'equazione del quinto. Una risolvente siffatta era già nota a Vandermonde, come è per esempio ricordato anche nello scritto di Burkhardt; ma a proposito almeno di quella indicata da Malfatti non bisogna dimenticare che sia pur dopo decenni Francesco Brioschi dimostrò *come, col mezzo di una facile trasformazione, riducasi la risolvente di Malfatti, per la equazione del quinto grado, ad avere la forma di quella equazione del sesto grado, la quale comprende come casi particolari le equazioni del moltiplicatore e le altre equazioni, che incontransi nella teorica delle funzioni ellittiche. Questa trasformata della risolvente di Malfatti conduce quindi alla risoluzione delle equazioni di quinto grado* mediante trascendenti ellittiche (e fornisce un'altra dimostrazione di una da qualche anno già nota simil possibilità).

Allo scioglimento di quelle obiezioni Ruffini dedicò la sua *Risposta di Paolo Ruffini ai dubbi propostigli dal socio Gian-Francesco Malfatti sopra la insolubilità algebraica dell'equazioni di grado superiore al quarto*; nella seconda parte della qual risposta si trova altresì la *risoluzione di alcuni altri dubbi* proposti dal Ruffini a se stesso e sempre *riguardanti l'insolubilità algebraica della equazione generale di grado 5°*. A questa risposta Ruffini fece seguire certe *Riflessioni intorno al metodo proposto dal consocio Malfatti per la soluzione delle equazioni di 5° grado*, con le quali riflessioni si dimostra come si possa *a priori* individuare in sei il grado di quelle risolventi e dalle quali si apprende che una risolvente di sesto grado era stata indicata anche da Lagrange, che per altro non ne *aveva infine determinato che il grado, ed un solo coefficiente*, quello del secondo termine (parla sempre Ruffini!). A proposito delle quali riflessioni poi non è male ricordare come Bortolotti ne informi che quel valore di sei era stato indicato dal Paoli in una lettera a Ruffini datata li 23 di novembre del 1804; e che del Paoli sarebbe anche la dimostrazione appunto del potersi individuare *a priori* nel numero sei il grado di quelle risolventi.

Un altro valido collaboratore il Ruffini ebbe nella persona dell'*amicissimo* conte Pietro Abbati Marescotti, il quale nella *Lettera di Pietro Abbati modenese al socio Paolo Ruffini* conseguì importanti risultati, che al Marescotti consentirono notevoli semplificazioni in ragionamenti del Ruffini, e che indussero il Ruffini a pubblicare un'altra dimostrazione *Della insolubilità delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al quarto*, la prima trovandosi esposta nel trattato sulla *Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto*, mentre nella memoria intitolata *Della soluzione delle equazioni algebraiche determinate particolari di grado superiore al quarto* il Ruffini aveva appunto fissato l'attenzione su equazioni particolari.

Il caso di equazioni singole sarebbe stato ripreso dopo decenni e ricondotto a quistioni gruppali da quella teoria sulle equazioni algebriche, che prende il nome dal suo ideatore, Évariste Galois. Ma considerazioni gruppali son così strettamente connaturate con questo nostro attuale ordine di idee, che anche Ruffini ed Abbati Marescotti si son visti portati a svolgerne e svilupparne compiutamente tante, da consentire a Burkhardt di ritenere Ruffini ed Abbati Marescotti come i fondatori della teoria dei gruppi (con una riserva, nei riguardi del secondo, sulla quale ritorneremo fra poco) e da permettergli di scrivere (in quella traduzione!): Ruffini *per il primo applicò al suo speciale campo di ricerca l'idea fondamentale di gruppo di operazioni, e distinse i vari gruppi che a quelle ricerche occorrevano*; inoltre *egli dette la dimostrazione del teorema che non è possibile la soluzione per radicali delle equazioni di grado superiore* (al quarto!) *con funzioni che si esprimano razionalmente mediante le radici, e tale dimostrazione non solo la dette per il primo, ma dopo varie redazioni la ridusse anche a quella forma che ora si suole attribuire a Wantzel* (e qui il Burkhardt non parla affatto di lacune); e finalmente egli *riconobbe il legame che c'è fra la irriducibilità di un'equazione e la transitività del suo gruppo, e fra la risolubilità mediante equazioni ausiliarie di grado inferiore, e la imprimitività del-*

lo stesso gruppo, mentre il conte Abbati Marescotti dimostrò *per la prima volta due teoremi fondamentali in queste ricerche* (per quanto ha poi tratto a quella riserva, secondo Burkhardt l'Abbati Marescotti non potrebbe essere annoverato fra i fondatori della teoria dei gruppi, se si dovesse attribuire al Ruffini *anche l'ispirazione del contenuto principale del lavoro del suo amico* — e questo sarebbe proprio il caso, almeno se si vuol stare a quanto Ettore Bortolotti scrive in una memoria pubblicata nei soliti Atti dei XL e dedicata al *Carteggio di Paolo Ruffini con alcuni scienziati del suo tempo, relativo al teorema sulla insolubilità di equazioni algebriche, generali, di grado superiore al quarto*; carteggio raccolto, ordinato e pubblicato a cura dello stesso Bortolotti).

Ritorniamo a quella memoria pubblicata presso l'Istituto Nazionale Italiano e a quel volumetto stampato in Modena presso la Società Tipografica. Ivi Ruffini considerò impossibili anche *soluzioni trascendentali*, ma ebbe il torto di non precisare sufficientemente a quali trascendenti si riferisse. Ebbe il torto, e ne ebbe certamente danno. Per altro, secondo Burkhardt e Bortolotti le tarscendenti ivi implicitamente considerate sarebbero state quelle logaritmiche e quelle circolari; e per queste l'affermazione di Ruffini sarebbe esatta.

Il teorema sulla risoluzione algebrica impossibile per le equazioni superiori a quattro nel grado venne poi riconsiderato da Abel; e da Abel ripete il nome presso dimolti. Ma vediamo come si esprime Leonard E. Dickson nelle sue *Algebraic Theories*, edite presso le Dover Publications in New York. Ivi si legge: *Euler, the leading mathematician of the eighteenth century, believed that every algebraic equation is solvable by radicals. Beginning in 1799, Ruffini published several attemps to prove that the general equation of degree* >4 *is not solvable by radicals, employing substitutions on the roots. His final and simplest proof is essentially the same as that now known as Wantzel's simplification of Abel's proof; but he gave only a trivial remark by way of proof of the auxiliary theorem, now known as Abel's, that, if an equation is solvable by radicals, the roots can be given a form such that all the radicals occurring in their expressions are rational functions of the roots (and roots of unity, with rational coefficients). Abel's proof of the last theorem has two defects. As noted by Sir W.R. Hamilton, the n-th root of* $p^n_\mu q^n$ *is in general of order higher than* $p^{1/n}$. *This first defect is best remedied by ignoring Abel's unneccesary classification of radicals. Second, Abel's proof is vitiated by the occurrence of roots of unity and is remedied by adjoining to the field at the outset all k-th roots of unity, where k takes the values of the indices of all the radicals involved in the expression for a root y.* Mi sembra quindi perfettamente giustificato il senso di dispetto ch'io provo ogni volta che un certo teorema lo sento nominare come di Abel anzi che come di Ruffini-Abel. E tanto più facilmente si ammetterà in me il compiacimento provato leggendo, in uno scritto recente, quello di Raymond G. Ayoub sulle *Paolo Ruffini's contributions to the quintic*, leggendovi, dicevo, del come Wantzel abbia a suo tempo esplicitamente dichiarato di essersi nelle proprie ricerche sulla quintica servito e dell'opera di Abel e dell'opera di Ruffini.

Di Ruffini ricorderò finalmente una memoria, ignorata in quei tre volumi di *Opere Matematiche* e dedicata a certe *Riflessioni intorno alla rettificazione, ed alla*

quadratura del circolo. Ivi egli ritiene *di poter asserire con tutta sicurezza la proposizione medesima* espressa e sostenuta da Newton e Saurin circa l'impossibilità di indicare per quelle rettificazioni e quadrature soluzioni, il cui valore *sia determinabile algebraicamente col mezzo di un'equazione finita* (nel grado) — proposizione espressa, ma sostenuta con *raziocinii* che anche ai matematici di quel tempo sembra lasciassero ancora troppo da desiderare.

Confesso che il silenzio sotto il quale questa memoria di Ruffini è in quelle *Opere* passata, mi lascia molti dubbi. Confesso che non ho minimamente cercato di sciogliérli: la trascendenza di π ormai è cosa completamente appurata. Confesso che ho considerato quella memoria più che altro come una curiosità; e che ne ho parlato più che altro per una coincidenza. Essa è datata li 21 di ottobre del 1801; e li 24 dello stesso mese Tommaso Valperga Caluso presentava alla Società dei XL un lavoro nel quale trattava anche lui *Della impossibilità della quadratura del cerchio* e nel quale scriveva: *Una persona ostinata a perdere il tempo dietro una sua pretesa quadratura del cerchio mi fa seriamente pensare quanto sarebbe utile, che da tutti i Maestri di geometria si desse ai discepoli per certissimo essere la mentovata quadratura impossibile quale da male istruiti si cerca siccome cognitissima e possibile; perché non per altro alcuni tuttora si stillano inutilmente il cervello in sì sciagurato problema, se non perché si dice non esserne dimostrata l'impossibilità, la qual cosa essi interpretano come s'ella fosse negata.* — Via, il rimedio mi sembrerebbe un po' troppo disinvolto. E certamente inefficace: oggi sappiamo che quella impossibilità può essere affermata, eppure quadratori del cerchio ce ne sono ancora. Uno lo ho purtroppo conosciuto di persona!

* * *

Sto per concludere. Se debbo essere sincero, contavo di conchiudere in levità rifacendomi a Pietro Ferroni e ad una sua *Lettera al signor Presidente cavaliere Anton Mario Lorgna sopra diversi aneddoti matematici*. Ma al momento del dunque, che delusione! Tanto per dare un esempio, da quella lettera si apprende come una volta Laplace nell'*andare in cerca del valore* di un certo integrale abbia *peccato per tre differenti ragioni*, la terza consistendo nell'aver preso le cose da lontano, mentre almeno in un certo punto avrebbe potuto procedere molto più rapidamente se si fosse accorto di una circostanza già rilevata dallo stesso Ferroni.

Eh no! Per concludere in levità sarebbe molto meglio ricorrere a Stendhal e alla sua *Vie de Henry Brulard*, soltanto che bisognerebbe sostituire Laplace con Legendre. Nel fatto, in quella Vita si legge: *Le célèbre Legendre, géomètre de premier ordre, recevant la croix de la Légion d'Honneur, l'attacha à son habit, se regarda au miroir et sauta de joie. L'appartement était bas, sa tête heurta le plafond, il tomba à moitié assommé. Digne morte c'eût été pour ce successeur d'Archimède!*

Alla fine del suo terzo anno di studi presso l'*École Centrale* in Grenoble Stendhal ottenne un brillante primo premio in matematica. E direi che nei suoi scritti egli ci metta una certa civetteria nel mostrare dimestichezza col mondo matematico, specie dell'*École Polytechnique* (e col mondo accademico in genere). Egli fa essere Lucien Leuwen espulso dall'*École Polytechnique* e fa esprimere da Henry

Brulard insoddisfazione per quella giammai ben ispiegatagli faccenda del «meno per meno, che fa più». Allo stesso Henry egli attribuisce poi profonda ammirazione per Giuseppe Luigi Lagrange, nonché per Gaspard Monge, mentre, bontà sua, gli fa considerare Laplace soltanto come *un esprit de lumière destiné à faire comprendre, à éclaircir, mais non à inventer*. E l'ammirazione per Lagrange si manifesta anche quando il suo comportamento è giudicato *moins plat* nel passo istesso di quella *Vie* nel quale George Cuvier e Pierre Simon Laplace sono bollati di *lâcheté* nei riguardi di Napoleone.

In quel passo, dopo di essersela presa con questi ultimi due l'Autore attacca un po' Accademie e Accademici in generale. Ma insistere qui su questo argomento potrebbe diventare rischioso. Troppo rischioso. Meglio sorvolare. Sarebbe a dire: Imprudente, sì; temerario, no!

BIBLIOGRAFIA

PIETRO ABBATI MARESCOTTI, *Lettera di Pietro Abbati modenese al socio Paolo Ruffini* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, volume X, 1803).

RAYMOND G. AVOUR, *Paolo Ruffini's contributions to the quintic* (Archive for history of exact sciences, volume XXIII, 1980).

GIUSTO BELLAVITIS, *Sulla classificazione delle curve del terz'ordine* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, volume XXV, 1855).

— *Spositione del metodo delle equipollenze* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, volume XXV, 1855).

— *Calcolo dei quaternioni di W.R. Hamilton e sua relazione col metodo delle equipollenze* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, serie II, volume I, 1862).

GIUSEPPE BIANCHI, *Elogio del professor Paolo Ruffini presidente della Società Italiana delle Scienze* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, volume XIX, 1821).

ETTORE BORTOLOTTI, *Carteggio di Paolo Ruffini con alcuni scienziati del suo tempo, relativo al teorema sulla insolubilità di equazioni algebriche, generali di grado superiore al quarto* (Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), serie III, volume XIV, 1907).

FRANCESCO BRIOSCHI, *Sulla risolvente di Malfatti per le equazioni del quinto grado* (Annali di Matematica pura ed applicata, volume V, 1863).

HEINRICH BURKHARDT, *Die Anfänge der Gruppentheorie und Paolo Ruffini* (Zeitschrift für Mathematik und Physik, supplemento al volume XXXVII, 1892).

GUIDO CASTELNUOVO, *Le origini del calcolo infinitesimale nell'età moderna* (Zanichelli, Bologna, 1938).

AGOSTINO LUIGI CAUCHY, *Sulla interpolazione* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, volume XXI, 1836).

— *Memoria sui rapporti che esistono fra il calcolo dei residui e il calcolo dei limiti e sui vantaggi che offrono questi due nuovi calcoli nella soluzione delle equazioni algebriche o trascendenti* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, volume XXII, 1839).

— *Calcolo degli indici delle funzioni* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, volume XXII, 1839).

PIETRO FERRONI, *Lettera al signor Presidente cavaliere Anton Mario Lorgna sopra diversi aneddoti matematici* (Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana, volume VII, 1794).

GIROLAMO FONTANA, *Sopra i logaritmi delle quantità negative; e sopra gl'immaginarj* (Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana, volume I, 1782).

— *Sopra le serie* (Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana, volume II, 1784).

— *Teoremi sopra le serie infinite convergenti formate dai prodotti de' numeri dispari successivi divisi pe' prodotti de' numeri pari corrispondenti* (Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana, volume III, 1786).

— *Sopra la pretesa distinzione fra il nulla reale e il nulla immaginario* (Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana, volume VIII, 1799).

GIULIANO FRULLANI, *Sopra gli integrali definiti* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, volume XX, 1828).

EUGENIO ELIA LEVI, *I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali* (Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), serie III, volume XVI, 1910).

ANTON MARIO LORGNA, *Nuova investigazione della somma generale delle serie* (Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana, volume I, 1782).

— *Dell'irreducibilità della formula cardanica a forma finita, algebraica e libera da aspetto immaginario* (Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana, volume I, 1782).

— *Sopra l'integrazione della formula* $Qdx + Py^2 dx + dy = 0$ (Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana, volume III, 1786).

GIANFRANCESCO MALFATTI, *Delle formole differenziali la cui integrazione dipende dalla rettificazione delle sezioni coniche* (Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana, volume II, 1784).

— *Esame di una dimostrazione che dà l'Eulero di un teorema analitico; e di una celebre regola per determinare la natura e i valori prossimi delle radici di qualunque equazione* (Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana, volume IV, 1788).

— *Determinazione del tempo che impiega un grave discendente per un canale circolare* (Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana, volume VII, 1794).

— *Pensieri sulla famosa questione de' logaritmi de' numeri negativi* (Memorie della Reale Accademia di Mantova, volume I, 1795).

— *Tentativo sul problema delle pressioni che soffrono gli appoggi collocati agli angoli di una figura, derivate da un peso posto dentro la sua aja* (Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana, volume VIII, 1799).

— *Memoria sopra un problema stereometrico* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, volume X, 1803).

— *Brevi riflessioni alla critica del tentativo sul problema delle pressioni, fatta dal Signor Paoli nel tomo IX di questa Società* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, volume X, 1803).

— *Lettera al Presidente della Società Italiana delle Scienze* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, volume XI, 1804).

— *Dubbj proposti al socio Paolo Ruffini sulla sua dimostrazione della impossibilità di risolvere le equazioni superiori al quarto grado* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, volume XI, 1804).

— *Appendice al problema delle pressioni* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, volume XII, 1805).

— *Problema geometrico: Fra i triangoli equilateri, i quadrati e il circolo, che si possono iscrivere in un dato triangolo, scegliere la figura dell'aja massima* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, volume XII, 1805).

CARLO MIRANDA, *Partial differential equations of elliptic type* (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1970).

PIETRO PAOLI, *Sul problema degli appoggi* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, volume IX, 1802).

— *Nota sugli integrali definiti* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, volume XXI, 1836).

Ernesto Pascal, *Paolo Ruffini e i primordi della teoria dei gruppi* (traduzione della memoria di Heinrich Burkhardt già citata) (Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, volume XXII, 1894).

Antonio Pellizzari, *Elogio di Giordano Riccati* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, volume IX, 1802).

Gabrio Piola, *Sulla trasformazione delle formole integrali duplicate e triplicate* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, volume XX, 1828).

— *Sulla teoria delle funzioni discontinue* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, volume XX, 1828).

— *Nuova analisi per tutte le questioni della meccanica molecolare* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, volume XXI, 1836).

— *Nota a due capitoli dell'opera di Eulero che ha per titolo: Theoria motus corporum rigidorum* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, volume XXII, 1839).

— *Intorno alle equazioni fondamentali del movimento di corpi qualsivogliono, considerati secondo la naturale loro forma e costituzione* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, volume XXIV, 1848).

Giordano Riccati, *Della figura del gorgo che la natura forma in un vaso cilindrico ripieno d'acqua nel centro del cui fondo sia aperto un foro circolare* (Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana, volume III, 1786).

— *Teorema: Il nulla immaginario non può confondersi col reale* (Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana, volume IV, 1788).

Paolo Ruffini, *Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto* (Stamperia di San Tommaso d'Aquino, Bologna, 1799).

— *Della soluzione delle equazioni algebraiche determinate particolari di grado superiore al quarto* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, volume IX, 1802).

— *Riflessioni intorno alla rettificazione, ed alla quadratura del circolo* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, volume IX, 1802).

— *Della insolubilità delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al quarto* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, volume X, 1803).

— *Risposta di Paolo Ruffini ai dubbi propostigli dal socio Gianfrancesco Malfatti sopra l'insolubilità algebraica dell'equazioni di grado superiore al quarto* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, volume XII, 1805).

— *Riflessioni intorno al metodo proposto dal consocio Malfatti per la soluzione delle equazioni di quinto grado* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, volume XII, 1805).

— *Della insolubilità delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al quarto, qualunque metodo si adoperi, algebraico esso siasi o trascendentale* (Memorie dell'Istituto Nazionale Italiano, Classe di Fisica e Matematica, volume I, 1806).

— *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebraiche generali* (Società tipografica, Modena, 1813).

Gaetano Scorza, *Il teorema fondamentale per le funzioni abeliane singolari* (Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), serie III, volume XIX, 1916).

— *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann e ad alcune sue applicazioni* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, volume XLI, 1916).

Francesco Severi, *Lezioni di Analisi* (Zanichelli, Bologna, volume I, 1933).

Barnaba Tortolini, *Applicazioni dei trascendenti ellittici alla quadratura di alcune curve sferiche* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, volume XXIV, 1850).

Tommaso Valperga Caluso, *Della impossibilità della quadratura del cerchio* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, volume IX, 1802).

Direttore respons.: Prof. F. Di Mattei - Autorizz. Trib. di Roma n. 7189 del 28-12-1959 - Tip. della Pace, Roma