Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
99° (1981-82), Vol. V, fasc. 5, pagg. 53-72

CLAUDIO CITRINI - CLELIA MARCHIONNA (*)

Sul problema dell'ostacolo puntiforme per l'equazione iperbolica $\Box y = f(x, t, y, y_x, y_t)$ (**)

On the problem of the point shaped obstacle for the vibrating string equation $\Box y = f(x, t, y, y_x, y_t)$

SUMMARY. — We solve the vibrating string equation $\Box y = f(x, t, y, y_x, y_t)$ with a pointshaped obstacle given by the unilateral constraint $y(\lambda(t), t) \geqslant \alpha(t)$. The problem is reduced to an « elementary » one, which is solved by contraction theorem in a suitable norm.

1. - INTRODUZIONE

Il problema del moto di una *corda vibrante* in presenza di *vincoli unilaterali puntiformi* è stato oggetto di numerosi lavori, a partire dal 1976 (cfr. Amerio [1], [2], [3] e, per una più estesa bibliografia, [4]).

In [3], [4] si suppone che la corda sia soggetta a forze esterne attive dipendenti in modo non lineare dalla incognita, ma non dalle sue derivate. Questa nota si propone di estendere i risultati di tali lavori al caso di *forza esterna dipendente anche dalle derivate dell'incognita*.

Precisamente consideriamo nel piano (x, t) il dominio Z definito dalle disuguaglianze

$$\begin{cases} t \geqslant \sigma(x), & x_1 \leqslant x \leqslant x_2 \\ p_1(t) \leqslant x \leqslant p_2(t), \end{cases} \tag{1.1}$$

e disegnato in fig. 1. La linea $t = \sigma(x)$ sia una spezzata con lati paralleli alle rette $t = \pm x$, con $p_i(T_i) = x_i$, $T_i = \sigma(x_i)$, $i = 1, 2$.

(*) Istituto di Matematica della Facoltà di Ingegneria del Politecnico di Milano. Gli autori aderiscono al G.N.A.F.A. - C.N.R.

(**) Memoria presentata dall'accademico Luigi Amerio il 25 Marzo 1981.

ISSN-0392-4106

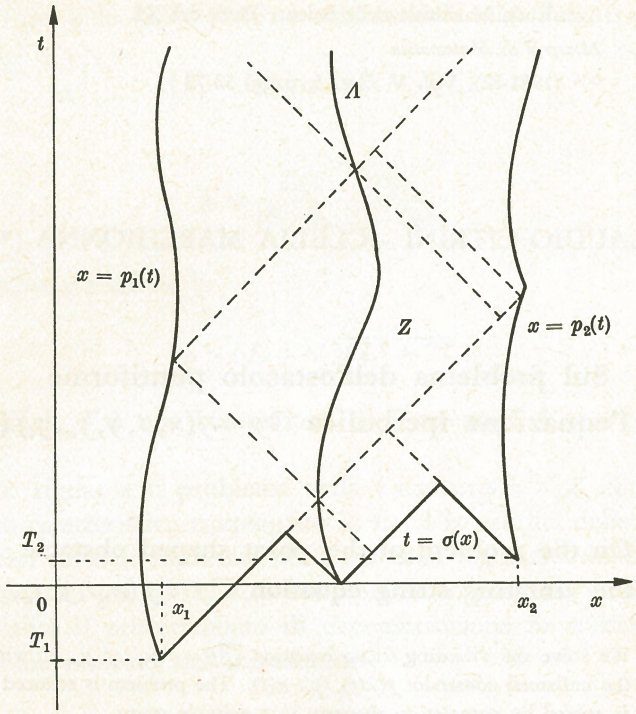

Fig. 1

Si suppone che

(1.2) $\quad p_i(t)$ *siano funzioni lipschitziane, con* $|p_i'(t)| < 1$ *q.o.*

(si potrebbe ammettere che risulti $p_1' = -1$ e $p_2' = 1$).

Sia poi data in Z una linea Λ di equazione $x = \lambda(t)$, $t \geqslant 0$, con $\lambda(t)$ soddisfacente le stesse ipotesi (1.2) di $p_i(t)$, e risulti:

$$p_1(t) < \lambda(t) < p_2(t) \qquad \forall t \geqslant 0\,. \tag{1.3}$$

Ci si propone di determinare una funzione $Y(x, t)$ soddisfacente in $Z \setminus \Lambda$ la equazione della corda vibrante libera

$$Y_{tt} - Y_{xx} = F(x, t, Y, Y_x, Y_t) \tag{1.4}$$

con le condizioni « iniziale »

$$Y(x, \sigma(x)) = A_0(x) \qquad \text{con } A_0 \in W^{1,1}(x_1, x_2) \tag{1.5}$$

e al contorno

$$Y(p_i(t), t) = A_i(t) \qquad \text{con } A_i \in W^{1,1}_{\text{loc}}([T_i, +\infty)) \ (i = 1, 2)\,, \tag{1.6}$$

nonché la condizione unilaterale

$$(1.7) \qquad Y(\lambda(t), t) \geqslant \alpha(t) \quad \forall t \geqslant 0\,, \qquad \text{con } \alpha \in W^{1,1}_{\text{loc}}([0, +\infty))\,.$$

Introduciamo le coordinate caratteristiche

$$(1.8) \qquad \xi = (x+t)/\sqrt{2}\,, \qquad \eta = (-x+t)/\sqrt{2}$$

e poniamo

$$(1.9) \qquad y(\xi, \eta) = Y\left(\frac{\xi-\eta}{\sqrt{2}}, \frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}\right),$$

$$(1.10) \qquad f(\xi, \eta, y, y_\xi, y_\eta) = \frac{1}{2} F\left(\frac{\xi-\eta}{\sqrt{2}}, \frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}, y, \frac{y_\xi - y_\eta}{\sqrt{2}}, \frac{y_\xi + y_\eta}{\sqrt{2}}\right).$$

La (1.4) si può scrivere allora nella forma caratteristica

$$(1.11) \qquad y_{\xi\eta} = f(\xi, \eta, y, y_\xi, y_\eta)\,.$$

Indichiamo con $C^*(Z)$ la classe delle funzioni $Y(x, t) = y(\xi, \eta)$ continue in Z, localmente assolutamente continue in ξ e η separatamente e tali che, detto R un arbitrario rettangolo caratteristico

$$\{\xi, \eta | \xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2, \eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_2\} \subset Z\,,$$

risulti

$$y_\xi \in L^1(\xi_1, \xi_2; L^\infty(\eta_1, \eta_2)), \qquad y_\eta \in L^1(\eta_1, \eta_2; L^\infty(\xi_1, \xi_2))\,.$$

I risultati del presente lavoro possono allora essere sintetizzati dal seguente

Teorema: *Se $F(x, t, y_1, y_2, y_3)$ è lipschitziana nelle variabili y_1, y_2, y_3 e $\in L^1_{\text{loc}}(Z)$ $\forall y_1, y_2, y_3$, il problema enunciato nelle* (1.1)-(1.7) *ammette una e una sola soluzione $Y \in C^*(Z)$.*

È noto che, suddividendo il dominio Z, mediante linee caratteristiche, in rettangoli e triangoli mistilinei, si può ricondurre la soluzione dell'equazione (1.4), o dell'equivalente (1.11), con le condizioni (1.5) e (1.6), alla risoluzione di una successione di problemi elementari di Darboux e di Goursat. Tali problemi, per l'equazione (1.11), sono stati studiati da vari autori: cfr. ad es. [5], [6], [9].

Per affrontare il problema in presenza della condizione unilaterale (1.7) è opportuno effettuare la suddivisione di Z in modo tale che la linea Λ sia contenuta nell'unione di rettangoli caratteristici, aventi due vertici opposti su Λ (fig. 1).

Nei triangoli mistilinei e nei rettangoli che non contengono al loro interno alcun punto di Λ si risolveranno ancora, rispettivamente, i problemi di Goursat

e di Darboux; negli altri rettangoli si dovrà risolvere un altro tipo di problema elementare, indicato, analogamente ad Amerio [3], con il nome di problema $\Pi_{f\alpha}$. Ciò sarà l'oggetto del presente lavoro.

Precisamente introdurremo nel § 2 le ipotesi sui dati e lo spazio in cui ambientare la soluzione; nel § 3 daremo una maggiorazione a priori per il problema Π, che corrisponde al caso omogeneo del problema $\Pi_{f\alpha}$, ottenendo così un teorema di dipendenza continua; nel § 4 richiameremo alcuni risultati sull'equazione libera e nel § 5 risolveremo in maniera generale il problema $\Pi_{f\alpha}$.

Osserviamo infine che la scelta di un dominio Z della forma (1.1) consente di evitare ogni riferimento al problema di Cauchy. Tale scelta non è peraltro restrittiva: infatti l'usuale problema misto in un dominio $Z' = \{(x, t) | t \geqslant 0, p_1(t) \leqslant x \leqslant p_2(t)\}$, con dati iniziali

$$Y(x, 0) = A_0(x) \in W^{1,1}(p_1(0), p_2(0)), \qquad Y_t(x, 0) = B_0(x) \in L^1(p_1(0), p_2(0)),$$

si riduce agevolmente al caso da noi considerato mediante la risoluzione di due problemi di Cauchy per l'equazione libera.

2. - Notazioni e ipotesi

Indichiamo con R un rettangolo caratteristico che, senza perdita di generalità, potremo supporre definito dalle limitazioni

$$R = \begin{cases} 0 \leqslant \xi \leqslant a\,, \\ 0 \leqslant \eta \leqslant b\,. \end{cases} \tag{2.1}$$

La porzione di Λ contenuta in R (che, senza possibilità di equivoco, verrà ancora indicata con Λ) può essere espressa dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} \xi = \xi(t) \\ \eta = \eta(t) \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant T\,, \tag{2.2}$$

$$\xi(0) = \eta(0) = 0\,, \qquad \xi(T) = a\,, \qquad \eta(T) = b\,.$$

Per le ipotesi (1.2) su Λ, le funzioni $\xi(t)$ ed $\eta(t)$ risultano strettamente crescenti e lipschitziane; inoltre per le (1.8) si ha $\xi(t) = (\lambda(t) + t)/\sqrt{2}$, da cui $\xi'(t) = (\lambda'(t) + 1)/\sqrt{2}$, ed analogamente $\eta'(t) = (-\lambda'(t) + 1)/\sqrt{2}$. Per la (1.2) quindi risulta $\xi'(t) > 0$ q.o. ed $\eta'(t) > 0$ q.o.

Denotiamo con

$$\begin{cases} t = t_1(\xi) & 0 \leqslant \xi \leqslant a\,, \\ t = t_2(\eta) & 0 \leqslant \eta \leqslant b\,, \end{cases} \tag{2.3}$$

le funzioni inverse delle (2.2). Esse sono continue e strettamente crescenti; inoltre (per un teorema di Zaretzki, cfr. [8], pag. 308) risultano anche assolutamente continue.

Per ogni $P(\xi, \eta) \in R$ indicheremo poi con $P_\Lambda \in \Lambda$ il punto, disegnato in fig. 2, e definito da

$$P_\Lambda = \begin{cases} \big(\xi(t_2(\eta)), \eta\big) & \text{per } \xi(t_2(\eta)) \leqslant \xi\,, \\ \big(\xi, \eta(t_1(\xi))\big) & \text{per } \xi(t_2(\eta)) > \xi\,. \end{cases} \tag{2.4}$$

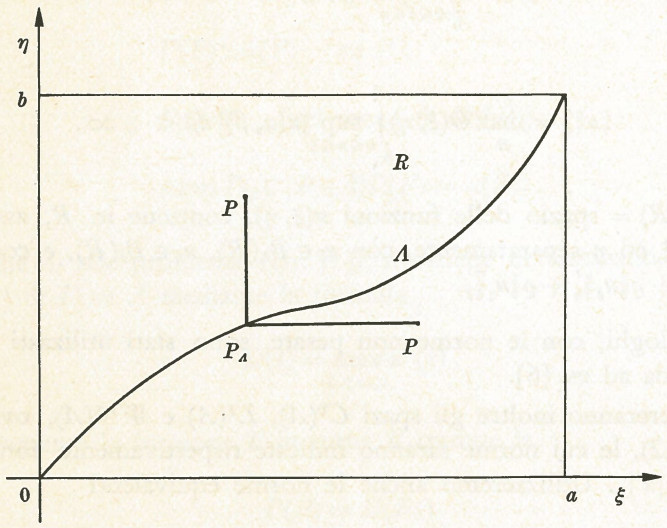

Fig. 2

Introduciamo ora le funzioni

$$\Theta(P) = \Theta(\xi, \eta) = \exp\left[-\varrho(\xi + \eta)\right], \qquad \theta(t) = \Theta(P)_{|\Lambda} = \exp\left\{-\varrho[\xi(t) + \eta(t)]\right\},$$

con $\varrho > 0$ da determinare, e consideriamo i seguenti spazi di Banach:

a) $C^0(R)$, spazio delle funzioni $u(\xi, \eta)$ continue in R, con la norma $\|u\|_0 = \max\limits_R |u(\xi, \eta)|$, o con l'equivalente $\|u\|_0' = \max\limits_R \Theta(\xi, \eta)|u(\xi, \eta)|$.

b) $B_\eta(R) = L^1(0, a; L^\infty(0, b))$ spazio delle funzioni $u(\xi, \eta)$ misurabili in R, limitate in η per q.o. ξ, e tali che

$$\|u\|_\eta = \int_0^a \sup_{0 \leqslant \eta \leqslant b} |u(\xi, \eta)|\, d\xi < +\infty\,;$$

o equivalentemente

$$\|u\|'_\eta = \max_R \Theta(\xi, \eta) \int_0^\xi \sup_{0 \leqslant \beta \leqslant \eta} |u(\alpha, \beta)| \, d\alpha < +\infty$$

(qui e nel seguito scriveremo sempre sup in luogo di ess sup).

c) $B_\xi(R) = L^1(0, b; L^\infty(0, a))$ con la norma

$$\|u\|_\xi = \int_0^b \sup_{0 \leqslant \xi \leqslant a} |u(\xi, \eta)| \, d\eta < +\infty \, ;$$

oppure

$$\|u\|'_\xi = \max_R \Theta(\xi, \eta) \int_0^\eta \sup_{0 \leqslant \alpha \leqslant \xi} |u(\alpha, \beta)| \, d\beta < +\infty \, .$$

d) $C^*(R)$ = spazio delle funzioni $u(\xi, \eta)$, continue in R, assolutamente continue in ξ ed η separatamente, con $u_\xi \in B_\eta(R)$, $u_\eta \in B_\xi(R)$, e con la norma $\|u\|'_* = \|u\|'_0 + \varrho \|u_\xi\|'_\eta + \varrho \|u_\eta\|'_\xi$.

Spazi analoghi, con le norme non pesate, sono stati utilizzati in [5]; per il peso si veda ad es. [6].

Si considereranno inoltre gli spazi $C^0(\Lambda)$, $L^1(\Lambda)$ e $W^{1,1}(\Lambda)$, ove Λ è definito dalle (2.2), le cui norme saranno indicate rispettivamente con $|u|_0$, $|u|_1$ e $\|u\|_1 = |u|_0 + |u'|_1$. Utilizzeremo anche le norme equivalenti

$$|u|'_0 = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \theta(t) |u(t)| \, ,$$

$$|u|'_1 = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \theta(t) \int_0^t |u(\tau)| \, d\tau \, ,$$

$$\|u\|'_1 = |u|'_0 + |u'|'_1 \, .$$

È immediato verificare che la traccia $v(t) = u(\xi(t), \eta(t))$ di una funzione $u \in C^*(R)$ su Λ è una funzione appartenente a $W^{1,1}(\Lambda)$, e che valgono le relazioni

$$|v'|'_0 \leqslant \|u\|'_0 \, , \tag{2.5}$$

$$|v|'_1 \leqslant \|u_\xi\|'_\eta + \|u_\eta\|'_\xi \, . \tag{2.6}$$

Per quest'ultima si osservi che

$$\int_0^t |v'(\tau)| \, d\tau \leqslant \int_0^{\xi(t)} \sup_{0 \leqslant \beta \leqslant \eta(t)} |u_\xi(\alpha, \beta)| \, d\alpha + \int_0^{\eta(t)} \sup_{0 \leqslant \alpha \leqslant \xi(t)} |u_\eta(\alpha, \beta)| \, d\beta \, .$$

3. - Il problema Π

Questo problema è stato introdotto e risolto da Amerio [1]. Data una funzione $\alpha \in C^0(\Lambda)$ che, senza possibilità di equivoco, indicheremo con $\alpha(t)$ o $\alpha(P)$, $\alpha(0) \leqslant 0$, esso consiste nel determinare una funzione $\Gamma \in C^0(R)$, soddisfacente le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \Gamma(\xi, 0) = 0 & 0 \leqslant \xi \leqslant a\,, \\ \Gamma(0, \eta) = 0 & 0 \leqslant \eta \leqslant b\,, \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\Gamma(P) \geqslant \alpha(P) \quad \text{su } \Lambda\,, \tag{3.2}$$

$$\Gamma_{\xi\eta} \geqslant 0 \quad (\text{nel senso di } \mathfrak{D}'(\mathring{R}))\,, \tag{3.3}$$

$$\operatorname{supp} \Gamma_{\xi\eta} \subseteq \{P \in \Lambda | \Gamma(P) = \alpha(P)\}\,. \tag{3.4}$$

La soluzione di tale problema (cfr. [1]) si ottiene determinando dapprima la traccia $\Omega(t)$ di Γ su Λ mediante la formula

$$\Omega(t) = \max_{0 \leqslant \tau \leqslant t} \alpha^+(\tau)\,, \tag{3.5}$$

e successivamente la funzione Γ in tutto R tramite la

$$\Gamma(P) = \Omega(P_\Lambda) \tag{3.6}$$

ove P_Λ è definito dalla (2.4).

Ricordiamo che la funzione $\Omega(t)$ risulta non decrescente; inoltre, se, in ogni intorno di $\bar{t}$, $\Omega(t)$ non è costante, il punto $\bar{P} = (\xi(\bar{t}), \eta(\bar{t}))$ appartiene a $\operatorname{supp} \Gamma_{\xi\eta}$, e quindi $\Omega(\bar{t}) = \alpha(\bar{t})$.

La dipendenza di Γ e Ω dall'ostacolo α è espressa dai seguenti Lemmi 1 e 2 e dal Teorema 1.

Lemma 1: *Dette Ω_1 e Ω_2 le tracce su Λ delle soluzioni Γ_1 e Γ_2 dei problemi Π corrispondenti rispettivamente alle funzioni α_1 ed α_2, risulta:*

$$|\Omega_1 - \Omega_2|_0 \leqslant |\alpha_1 - \alpha_2|_0\,, \tag{3.7}$$

$$|\Omega_1 - \Omega_2|_0' \leqslant |\alpha_1 - \alpha_2|_0'\,. \tag{3.8}$$

Poniamo $c = \min\{t \,|\, |\Omega_1(t) - \Omega_2(t)| = |\Omega_1 - \Omega_2|_0\}$, e supponiamo ad es. che sia $\Omega_1(c) > \Omega_2(c)$. Allora $\forall t < c$ deve risultare $\Omega_1(t) < \Omega_1(c)$; se infatti fosse $\Omega_1(t) = \Omega_1(c)$ si avrebbe

$$\Omega_1(t) - \Omega_2(t) = \Omega_1(c) - \Omega_2(t) \geqslant \Omega_1(c) - \Omega_2(c) = |\Omega_1 - \Omega_2|_0\,,$$

contro la definizione di c. Ne segue che il punto $P(\xi(c), \eta(c))$ appartiene a $\operatorname{supp} \Gamma_{1_{\xi\eta}}$, e quindi $\Omega_1(c) = \alpha_1(c)$. Pertanto si ha

$$|\Omega_1 - \Omega_2|_0 = \Omega_1(c) - \Omega_2(c) = \alpha_1(c) - \Omega_2(c) \leqslant \alpha_1(c) - \alpha_2(c) \leqslant |\alpha_1 - \alpha_2|_0 .$$

Ragionando soltanto su un intervallo $[0, t]$, la (3.7) si scrive:

$$\max_{0 \leqslant \tau \leqslant t} |\Omega_1(\tau) - \Omega_2(\tau)| \leqslant \max_{0 \leqslant \tau \leqslant t} |\alpha_1(\tau) - \alpha_2(\tau)| \; ;$$

moltiplicando per $\theta(t)$, che è funzione decrescente, e prendendo il massimo per $0 \leqslant t \leqslant T$ si ha la (3.8).

Osservazione 1: Questo lemma non è che un semplice raffinamento, in un caso particolare, di un precedente teorema di Amerio [3], relativo al problema $\Pi_{\alpha\beta}$; si veda per questo la Osservazione 4.

È poi immediato verificare che risulta

$$\alpha \in W^{1,1}(\Lambda) \Rightarrow \Omega \in W^{1,1}(\Lambda) , \tag{3.9}$$

con

$$|\Omega|_0 \leqslant |\alpha|_0 , \qquad |\Omega'|_1 \leqslant |\alpha'|_1 . \tag{3.10}$$

Per quanto riguarda la soluzione Γ del problema Π, vale il seguente

Lemma 2: *Se $\alpha \in W^{1,1}(\Lambda)$, risulta $\Gamma \in C^*(R)$; inoltre, se Γ_1 e Γ_2 corrispondono rispettivamente ad $\alpha_1, \alpha_2 \in W^{1,1}$, si ha:*

$$\|\Gamma_1 - \Gamma_2\|_0 = |\Omega_1 - \Omega_2|_0 , \tag{3.11}$$

$$\|\Gamma_{1_\xi} - \Gamma_{2_\xi}\|_\eta = \|\Gamma_{1_\eta} - \Gamma_{2_\eta}\|_\xi = |\Omega_1' - \Omega_2'|_1 \tag{3.12}$$

e, anche con le norme con peso:

$$\|\Gamma_1 - \Gamma_2\|_0' = |\Omega_1 - \Omega_2|_0' , \tag{3.13}$$

$$\|\Gamma_{1_\xi} - \Gamma_{2_\xi}\|_\eta' = \|\Gamma_{1_\eta} - \Gamma_{2_\eta}\|_\xi' = |\Omega_1' - \Omega_2'|_1' . \tag{3.14}$$

Poiché la dipendenza di Γ da Ω è lineare, la (3.6) fornisce ancora il legame tra la funzione $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2$ e $\Omega = \Omega_1 - \Omega_2$. La (3.11) è allora una diretta conseguenza della (3.6).

Dimostriamo ora la (3.12). $\Omega(t)$ è assolutamente continua in $[0, T]$; $t_1(\xi)$ è strettamente crescente e assolutamente continua in $[0, a]$ a valori in $[0, T]$. Ne segue (cfr. [7] pag. 51, [8] pag. 272) che $\Omega(t_1(\xi))$ è assolutamente continua in $[0, a]$. Fissato un valore $\eta = \bar{\eta}$, sia $\bar{\xi} = \xi(t_2(\bar{\eta}))$, e quindi $t_2(\bar{\eta}) = t_1(\bar{\xi})$

(fig. 3). Per la (3.6) si ha allora:

$$\Gamma(\xi, \bar{\eta}) = \begin{cases} \Omega(t_1(\xi)) & \text{per } \xi < \bar{\xi}, \\ \Omega(t_1(\bar{\xi})) & \text{per } \xi \geqslant \bar{\xi}, \end{cases} \tag{3.15}$$

e quindi $\Gamma(\xi, \bar{\eta})$ è assolutamente continua in ξ $\forall \bar{\eta}$.

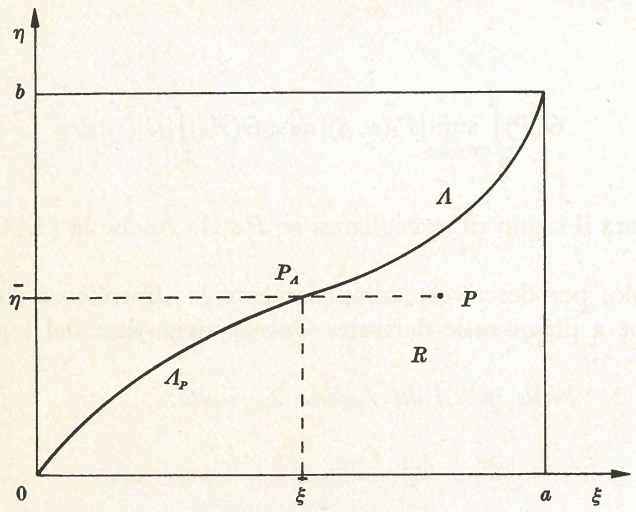

Fig. 3

Derivando la (3.15) si ottiene

$$\Gamma_\xi(\xi, \bar{\eta}) = \begin{cases} \Omega'(t_1(\xi))\, t_1'(\xi) & \text{per q.o. } \xi < \bar{\xi}, \\ 0 & \text{per } \xi > \bar{\xi}, \end{cases} \tag{3.16}$$

e quindi

$$\sup_{0 \leqslant \eta \leqslant b} |\Gamma_\xi(\xi, \eta)| = |\Omega'(t_1(\xi))|\, t_1'(\xi) \qquad \text{q.o. in } [0, a]. \tag{3.17}$$

Da ciò segue (cfr. [7] pag. 214, [8] pag. 292):

$$\|\Gamma_\xi\|_\eta = \int_0^a |\Omega'(t_1(\xi))|\, t_1'(\xi)\, d\xi = \int_0^T |\Omega'(t)|\, dt = |\Omega'|_1, \tag{3.18}$$

cioè la (3.12). Analogamente si ragiona per Γ_η.

Per quanto riguarda le norme con peso, notiamo che $\Theta(P) \leqslant \Theta(P_\Lambda)$, $\forall P \in R$, e quindi $\Theta(P)\Gamma(P) = \Theta(P)\Omega(P_\Lambda) \leqslant \Theta(P_\Lambda)\Omega(P_\Lambda)$, da cui segue la (3.13), osservando che per $P \in \Lambda$ vale il segno di uguaglianza.

Sia Λ_P la porzione di Λ compresa tra 0 e P. Si ha, dalla (3.16):

$$\sup_{0\leqslant\beta\leqslant\eta}|\Gamma_\xi(\xi,\beta)| = \begin{cases} |\Omega'(t_1(\xi))|t_1'(\xi) & \text{per q.o. } \xi<\xi(t_2(\eta)), \\ 0 & \text{per } \xi>\xi(t_2(\eta)), \end{cases}$$

da cui

$$\int_0^\xi \sup_{0\leqslant\beta\leqslant\eta}|\Gamma_\xi(\alpha,\beta)|\,d\alpha = \int_{\Lambda_P}|\Omega'(t_1(\xi))|t_1'(\xi)\,d\xi = \int_{\Lambda_P}|\Omega'(t)|\,dt\,.$$

Ne segue

$$\Theta(P)\int_0^\xi \sup_{0\leqslant\beta\leqslant\eta}|\Gamma_\xi(\alpha,\beta)|\,d\alpha \leqslant \Theta(P_\Lambda)\int_{\Lambda_P}|\Omega'(t)|\,dt\,, \tag{3.19}$$

ove vale ancora il segno di uguaglianza se $P\in\Lambda$. Anche la (3.14) è così dimostrata.

Manca solo, per descrivere completamente la dipendenza di Γ da α, una maggiorazione a priori sulle derivate. Questa viene data dal seguente

Teorema 1: *Nelle ipotesi del Lemma 2, risulta:*

$$|\Omega_1'-\Omega_2'|_1\leqslant 2|\alpha_1'-\alpha_2'|_1+|\alpha_1-\alpha_2|_0\,. \tag{3.20}$$

Poniamo

$$C_i = \operatorname{supp}\Gamma_{i_{\xi\eta}}\subseteq\{t\in[0,T]\,|\,\Omega_i(t)=\alpha_i(t)\} \qquad i=1,2\,, \tag{3.21}$$

$$A_i=[0,T]\setminus C_i \qquad i=1,2\,. \tag{3.22}$$

Risulta per la (3.5):

$$\Omega_i'(t)\equiv 0 \qquad \text{in } A_i\,, \tag{3.23}$$

$$\Omega_i'(t)=\alpha_i'(t)\geqslant 0 \qquad \text{q.o. in } C_i\,. \tag{3.24}$$

Poiché A_i è aperto in $[0,T]$, esso è l'unione al più di una infinità numerabile di intervalli disgiunti (p,q), i cui estremi appartengono a C_i, ed eventualmente di due intervalli del tipo $[0,\bar q)$ e $(\bar p,T]$.

Consideriamo dapprima, ad esempio, una componente (p,q), oppure l'intervallo $(\bar p,T]$, di A_1. Risulta allora, per le (3.23) e (3.5):

$$\Omega_1(t)\equiv\Omega_1(p)=\alpha_1(p) \qquad \text{in } [p,q]\,, \tag{3.25}$$

$$\int_p^c \alpha_1'(t)\,dt=\alpha_1(c)-\alpha_1(p)\leqslant 0 \qquad \forall c\in[p,q]\,. \tag{3.26}$$

Scegliamo ora il punto c mediante la relazione (fig. 4):

$$c = \min \{t \in [p, q] \,|\, \Omega_2(t) = \Omega_2(q)\} . \tag{3.27}$$

Non si esclude che possa essere $c = p$ o $c = q$. In tal modo si ha

$$\Omega_2(t) \equiv \Omega_2(c) = \Omega_2(q) \qquad \text{in } [c, q] . \tag{3.28}$$

$$\Omega_2'(t) \equiv 0 \qquad \text{in } (c, q) . \tag{3.29}$$

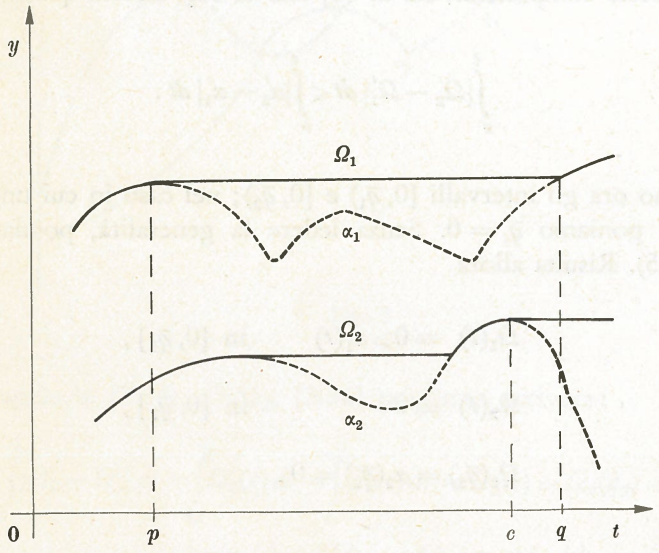

Fig. 4

Se $c = p$ si ha immediatamente

$$\int_p^q |\Omega_2' - \Omega_1'| \, dt = 0 . \tag{3.30}$$

Se invece $c > p$, vale l'uguaglianza

$$\Omega_2(c) = \alpha_2(c) \tag{3.31}$$

$\big($in quanto il punto $P = (\xi(c), \eta(c)) \in \operatorname{supp} \Gamma_{2_{\xi\eta}}\big)$.

Dalle precedenti relazioni segue:

$$(3.32)\qquad \int_p^q |\Omega_2' - \Omega_1'|\,dt = \int_p^q \Omega_2'(t)\,dt = \int_p^c \Omega_2'(t)\,dt = \Omega_2(c) - \Omega_2(p) =$$

$$= \alpha_2(c) - \Omega_2(p) \leqslant \alpha_2(c) - \alpha_2(p) = \int_p^c \alpha_2'(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_p^c \alpha_2'(t)\,dt - \int_p^c \alpha_1'(t)\,dt \leqslant \int_p^c |\alpha_2' - \alpha_1'|\,dt \leqslant \int_p^q |\alpha_2' - \alpha_1'|\,dt\,.$$

Per tutte queste componenti, sia di A_1 che di A_2, risulta quindi:

$$(3.33)\qquad \int_p^q |\Omega_2' - \Omega_1'|\,dt \leqslant \int_p^q |\alpha_2' - \alpha_1'|\,dt\,.$$

Consideriamo ora gli intervalli $[0, \bar{q}_1)$ e $[0, \bar{q}_2)$; nel caso in cui uno o entrambi mancassero, poniamo $\bar{q}_i = 0$. Senza ledere la generalità, possiamo supporre $\bar{q}_1 \geqslant \bar{q}_2$ (fig. 5). Risulta allora

$$(3.34)\qquad \Omega_1(t) \equiv 0 \geqslant \alpha_1(t) \qquad \text{in } [0, \bar{q}_1]\,,$$

$$(3.35)\qquad \Omega_2(t) \equiv 0 \qquad \text{in } [0, \bar{q}_2]\,,$$

$$(3.36)\qquad \Omega_2(\bar{q}_2) = \alpha_2(\bar{q}_2) = 0\,,$$

e quindi

$$(3.37)\qquad \int_0^{\bar{q}_2} |\Omega_2' - \Omega_1'|\,dt = 0 \leqslant \int_0^{\bar{q}_2} |\alpha_2' - \alpha_1'|\,dt\,.$$

Sommando le (3.33) per ogni componente di A_2, e la (3.37) si ottiene:

$$(3.38)\qquad \int_{A_2} |\Omega_2' - \Omega_1'|\,dt \leqslant \int_{A_2} |\alpha_2' - \alpha_1'|\,dt\,.$$

Per quanto riguarda l'intervallo $[0, \bar{q}_1)$, se $\bar{q}_1 = \bar{q}_2$ la (3.38) vale anche per A_1. Se invece $\bar{q}_1 > \bar{q}_2$ poniamo

$$(3.39)\qquad c = \min\{t \in [\bar{q}_2, \bar{q}_1]\,|\,\Omega_2(t) = \Omega_2(\bar{q}_1)\}\,,$$

analogamente alla (3.27): si osservi che è necessariamente $c > \bar{q}_2$ in quanto $\Omega_2(\bar{q}_1) > 0 = \Omega_2(\bar{q}_2)$, e quindi $\Omega_2(c) = \alpha_2(c)$ come per la (3.31).

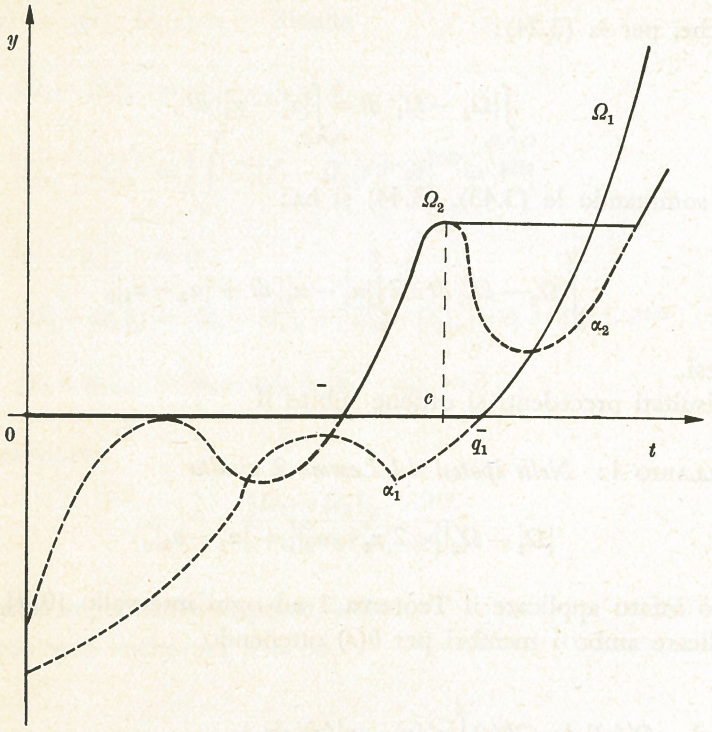

Fig. 5

Utilizzando le (3.34), (3.35), (3.36) possiamo scrivere:

$$(3.40)\qquad \int_0^{\bar{q}_1} |\Omega_2' - \Omega_1'|\, dt = \int_{\bar{q}_2}^{\bar{q}_1} \Omega_2'(t)\, dt = \int_{\bar{q}_2}^{c} \Omega_2'(t)\, dt = \Omega_2(c) - \Omega_2(\bar{q}_2) =$$

$$= \alpha_2(c) \leqslant \alpha_2(c) - \alpha_1(c) \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant T} |\alpha_2(t) - \alpha_1(t)| = |\alpha_2 - \alpha_1|_0 .$$

Sommando la (3.40) con le (3.33) per tutte le componenti di A_1 si ha

$$(3.41)\qquad \int_{A_1} |\Omega_2' - \Omega_1'|\, dt \leqslant \int_{A_1} |\alpha_2' - \alpha_1'|\, dt + |\alpha_2 - \alpha_1|_0 .$$

Dopo aver osservato che ovviamente

$$(3.42)\qquad \int_{A_1 \cap A_2} |\Omega_2' - \Omega_1'|\, dt = 0$$

dalle (3.38) e dalle (3.41) ricaviamo:

$$(3.43)\qquad \int_{A_1 \cup A_2} |\Omega_2' - \Omega_1'|\, dt = \int_{A_1} |\Omega_2' - \Omega_1'|\, dt + \int_{A_2} |\Omega_2' - \Omega_1'|\, dt \leqslant \int_{A_1} |\alpha_2' - \alpha_1'|\, dt +$$

$$+ \int_{A_2} |\alpha_2' - \alpha_1'|\, dt + |\alpha_2 - \alpha_1|_0 \leqslant 2 \int_{A_1 \cup A_2} |\alpha_2' - \alpha_1'|\, dt + |\alpha_2 - \alpha_1|_0 .$$

Ma è anche, per la (3.24):

$$\int_{C_1 \cap C_2} |\Omega_2' - \Omega_1'| \, dt = \int_{C_1 \cap C_2} |\alpha_2' - \alpha_1'| \, dt \,, \tag{3.44}$$

e infine, sommando le (3.43), (3.44) si ha:

$$\int_0^T |\Omega_2' - \Omega_1'| \, dt \leqslant 2 \int_0^T |\alpha_2' - \alpha_1'| \, dt + |\alpha_2 - \alpha_1|_0 \tag{3.45}$$

cioè la tesi.

Dai risultati precedenti si ottiene subito il

Corollario 1: *Nelle ipotesi del Lemma* 2 *risulta*

$$|\Omega_1' - \Omega_2'|_1' \leqslant 2|\alpha_1' - \alpha_2'|_1' + |\alpha_1 - \alpha_2|_0' \,. \tag{3.46}$$

Si può infatti applicare il Teorema 1 ad ogni intervallo $[0, t]$, con $t \leqslant T$, e moltiplicare ambo i membri per $\theta(t)$ ottenendo

$$\theta(t) \int_0^t |\Omega_1'(\tau) - \Omega_2'(\tau)| \, d\tau \leqslant 2\theta(t) \int_0^t |\alpha_1'(\tau) - \alpha_2'(\tau)| \, d\tau +$$

$$+ \theta(t) \max_{0 \leqslant \tau \leqslant t} |\alpha_1(\tau) - \alpha_2(\tau)| \leqslant 2\theta(t) \int_0^t |\alpha_1'(\tau) - \alpha_2'(\tau)| \, d\tau + \max_{0 \leqslant \tau \leqslant t} \theta(\tau) |\alpha_1(\tau) - \alpha_2(\tau)| \,,$$

in quanto $\theta(t)$ è funzione decrescente. Prendendo ora il massimo su Λ di entrambi i membri si ottiene la (3.46).

Corollario 2: *Nelle ipotesi del Lemma* 2 *risulta:*

$$\|\Omega_1 - \Omega_2\|_1 \leqslant 2 \|\alpha_1 - \alpha_2\|_1 \,. \tag{3.47}$$

Basta infatti sommare la (3.7) e la (3.20).

Osservazione 2: La costante 2 che compare nella (3.47) è la migliore possibile, come mostra l'esempio $\alpha_1(t) = t = \Omega_1(t)$, $\alpha_2(t) = t - T$, $\Omega_2(t) = 0$ per cui $|\alpha_1 - \alpha_2|_0 = T$, $|\alpha_1' - \alpha_2'|_1 = 0$, $|\Omega_1 - \Omega_2|_0 = T$, $|\Omega_1' - \Omega_2'|_1 = T$ e quindi $\|\Omega_1 - \Omega_2\|_1 = 2T = 2\|\alpha_1 - \alpha_2\|_1$.

Osservazione 3: Non vale nessuna maggiorazione del tipo (3.47) nello spazio $W^{1,p}(\Lambda)$ con $p > 1$. Basta considerare il caso

$$\alpha_1(t) = \begin{cases} t & t \leqslant \delta \,, \\ \delta & t > \delta \,, \end{cases} \qquad \alpha_2(t) = \begin{cases} t - \delta & t \leqslant \delta \,, \\ 0 & t > \delta \,, \end{cases}$$

in cui $\Omega_1(t) \equiv \alpha_1(t)$, $\Omega_2(t) \equiv 0$. Risulta

$$|\Omega_1 - \Omega_2|_0 = |\alpha_1 - \alpha_2|_0 = \delta\,,$$

$$|\Omega_1' - \Omega_2'|_p = \left\{\int_0^T |\Omega_2'(t) - \Omega_2'(t)|^p\, dt\right\}^{1/p} = \delta^{1/p}\,,$$

$$|\alpha_1' - \alpha_2'|_p = 0\,,$$

$$\|\Omega_1 - \Omega_2\|_p = |\Omega_1 - \Omega_2|_0 + |\Omega_1' - \Omega_2'|_p = \delta + \delta^{1/p} > \delta^{1/p}\,,$$

$$\|\alpha_1 - \alpha_2\|_p = |\alpha_1 - \alpha_2|_0 + |\alpha_1' - \alpha_2'|_p = \delta\,,$$

per cui il rapporto

$$\frac{\|\Omega_1 - \Omega_2\|_p}{\|\alpha_1 - \alpha_2\|_p} > \frac{\delta^{1/p}}{\delta}$$

non è limitato superiormente per $\delta \to 0$.

L'esempio vale anche per $p = \infty$.

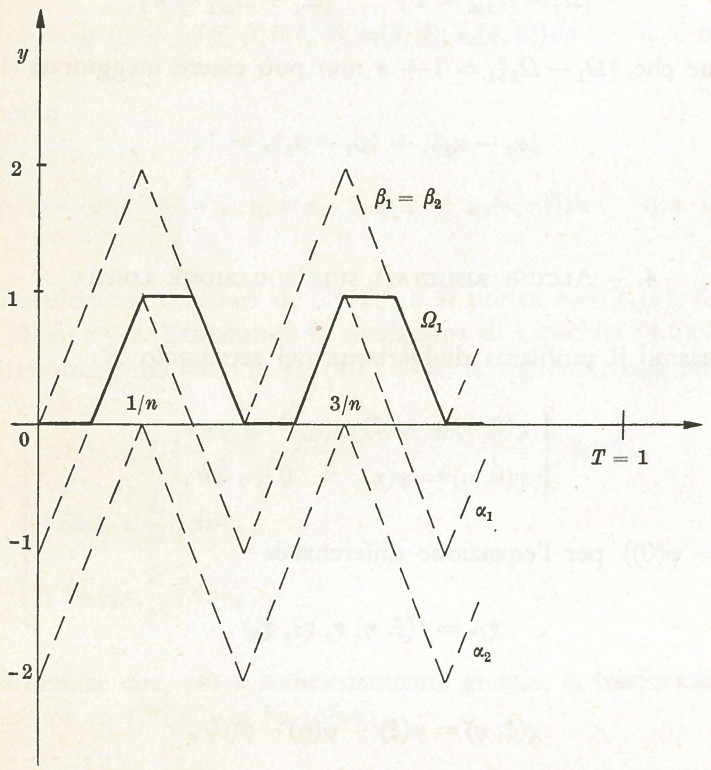

Fig. 6

Osservazione 4: In Amerio [3] è stato introdotto e risolto un problema più generale, detto problema $\Pi_{\alpha\beta}$, in cui compaiono due ostacoli. Precisamente la (3.2) viene sostituita dalla

$$\alpha(P) \leqslant \Gamma(P) \leqslant \beta(P) \qquad \text{su } \Lambda\,, \tag{3.48}$$

mentre le (3.3) e (3.4) sono convenientemente modificate. La soluzione di tale problema soddisfa, come dimostrato in [3], la disuguaglianza

$$|\Omega_1 - \Omega_2|_0 \leqslant 2\{|\alpha_1 - \alpha_2|_0 + |\beta_1 - \beta_2|_0\}\,, \tag{3.49}$$

che generalizza la (3.7).

Non è possibile, peraltro, estendere la (3.47) (almeno nel caso generale), come mostra il seguente esempio.

Si considerino le funzioni $\beta_1 = \beta_2$, $\alpha_1 = \beta_1 - 1$, $\alpha_2 = \beta_1 - 2$ disegnate in fig. 6. Si ha allora $\Omega_2(t) \equiv 0$ e quindi

$$\begin{aligned} |\alpha_1 - \alpha_2|_0 &= 1\,, & |\alpha_1' - \alpha_2'|_1 &= 0\,, \\ |\beta_1 - \beta_2|_0 &= 0\,, & |\beta_1' - \beta_2'|_1 &= 0\,, \\ |\Omega_1 - \Omega_2|_0 &= 1\,, & |\Omega_1' - \Omega_2'|_1 &= n\,, \end{aligned}$$

da cui segue che $\|\Omega_1 - \Omega_2\|_1 = 1 + n$ non può essere maggiorata da

$$\|\alpha_1 - \alpha_2\|_1 + \|\beta_1 - \beta_2\|_1 = 1\,.$$

4. - Alcuni risultati sull'equazione libera

Consideriamo il problema di Darboux nel rettangolo R:

$$\begin{cases} z(\xi, 0) = \varphi(\xi) & 0 \leqslant \xi \leqslant a\,, \\ z(0, \eta) = \psi(\eta) & 0 \leqslant \eta \leqslant b\,, \end{cases} \tag{4.1}$$

(con $\varphi(0) = \psi(0)$) per l'equazione differenziale

$$z_{\xi\eta} = f(\xi, \eta, z, z_\xi, z_\eta)\,. \tag{4.2}$$

Posto

$$g(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta) - \varphi(0)\,, \tag{4.3}$$

tale problema equivale a un problema di punto unito per la trasformazione

$v = T_1(u)$ definita ponendo

$$v(\xi, \eta) = g(\xi, \eta) + \int_0^\xi \int_0^\eta f(\alpha, \beta, u(\alpha, \beta), u_\xi(\alpha, \beta), u_\eta(\alpha, \beta))\, d\alpha\, d\beta\,. \tag{4.4}$$

Teoremi di esistenza e unicità per questo problema e per l'analogo problema di Goursat sono stati provati, sotto ipotesi assai ampie, da numerosi autori: si veda ad es. [5], [6], [9].

Per semplicità ci limiteremo al caso in cui

$$\varphi \in W^{1,1}(0, a)\,, \quad \psi \in W^{1,1}(0, b) \Leftrightarrow g \in C^*(R)\,, \tag{4.5}$$

$$\begin{cases} f(P, K_1, K_2, K_3) \quad \text{misurabile in } R \quad \forall K_1, K_2, K_3\,, \\ f(P, O, O, O) \in L^1(R)\,, \\ |f(P, u_1, u_2, u_3) - f(P\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)| \leqslant L\{|u_1 - \bar{u}_1| + |u_2 - \bar{u}_2| + |u_3 - \bar{u}_3|\}\,. \end{cases} \tag{4.6}$$

Sotto le predette condizioni si può agevolmente provare che la trasformazione T_1: $C^*(R) \mapsto C^*(R)$ ammette un unico punto unito (cfr. [6], [9]).

Derivando la (4.4) rispetto a ξ si ottiene

$$v_\xi(\xi, \eta) = \varphi'(\xi) + \int_0^\eta f(\xi, \beta, u(\xi, \beta), u_\xi(\xi, \beta), u_\eta(\xi, \beta))\, d\beta \qquad \text{q.o. in } [0, a]\,, \tag{4.7}$$

ed analogamente

$$v_\eta(\xi, \eta) = \psi'(\eta) + \int_0^\xi f(\alpha, \eta, u(\alpha, \eta), u_\xi(\alpha, \eta), u_\eta(\alpha, \eta))\, d\alpha \qquad \text{q.o. in } [0, b]\,. \tag{4.8}$$

Siano $u, \bar{u}$ due elementi arbitrari di $C^*(R)$, e si ponga $v = T_1(u)$, $\bar{v} = T_1(\bar{u})$, $\Delta u = u - \bar{u}$, $\Delta v = v - \bar{v}$. Utilizzando la condizione di Lipschitz (4.6), con classici passaggi si ottengono dalle (4.4), (4.7), (4.8) le seguenti maggiorazioni

$$\begin{cases} \|\Delta v\|_0' \leqslant L\left\{\dfrac{\|\Delta u\|_0'}{\varrho^2} + \dfrac{\|\Delta u_\xi\|_\eta'}{\varrho} + \dfrac{\|\Delta u_\eta\|_\xi'}{\varrho}\right\} = \dfrac{L}{\varrho^2}\|\Delta u\|_*'\,, \\ \|\Delta v_\xi\|_\eta' \leqslant \dfrac{L}{\varrho^2}\|\Delta u\|_*'\,, \\ \|\Delta v_\eta\|_\xi' \leqslant \dfrac{L}{\varrho^2}\|\Delta u\|_*'\,, \end{cases} \tag{4.9}$$

dalle quali si deduce che, per ϱ sufficientemente grande, la trasformazione T_1 è una contrazione in $C^*(R)$: si ha infatti

$$\|\Delta v\|_*' \leqslant (L(1 + 2\varrho)/\varrho^2)\, \|\Delta u\|_*'\,.$$

Costruiamo ora una nuova trasformazione T_2: $C^*(R) \mapsto C^*(R)$ indicando con $T_2(\Gamma)$ la soluzione z dell'equazione $z = T_1(z + \Gamma)$. La dipendenza di z da Γ si può ottenere dalle disuguaglianze precedenti, che si scrivono, con ovvio significato dei simboli, nella forma:

$$(4.10)\qquad \begin{cases} \|\Delta z\|_0' \leqslant \dfrac{L}{\varrho^2}(\|\Delta z\|_*' + \|\Delta\Gamma\|_*'), \\ \|\Delta z_\xi\|_\eta' \leqslant \dfrac{L}{\varrho^2}(\|\Delta z\|_*' + \|\Delta\Gamma\|_*'), \\ \|\Delta z_\eta\|_\xi' \leqslant \dfrac{L}{\varrho^2}(\|\Delta z\|_*' + \|\Delta\Gamma\|_*'). \end{cases}$$

Risolvendo il sistema (4.10) si ottiene infine (cfr. la prima delle (4.9)):

$$(4.11)\qquad \|\Delta z\|_0' \leqslant H\|\Delta\Gamma\|_*',$$

$$(4.12)\qquad \|\Delta z_\xi\|_\eta' \leqslant H\|\Delta\Gamma\|_*',$$

$$(4.13)\qquad \|\Delta z_\eta\|_\xi' \leqslant H\|\Delta\Gamma\|_*'.$$

ove, per ϱ sufficientemente grande:

$$(4.14)\qquad H = L/(\varrho^2 - L(1 + 2\varrho)).$$

5. - Il problema $\Pi_{f\alpha}$

Questo problema corrisponde al caso particolare $\beta = +\infty$ del problema $\Pi_{f\alpha\beta}$, introdotto e risolto da Amerio in [3], nel caso in cui f sia indipendente dalle derivate y_ξ e y_η. Esso consiste nel determinare una coppia di funzioni z, $\Gamma \in C^*(R)$, la cui somma indicheremo con y, tali che

$$(5.1)\qquad \begin{cases} z(\xi, 0) = \varphi(\xi), \quad \Gamma(\xi, 0) = 0 \qquad \text{per } 0 \leqslant \xi \leqslant a, \\ z(0, \eta) = \psi(\eta), \quad \Gamma(0, \eta) = 0 \qquad \text{per } 0 \leqslant \eta \leqslant b, \end{cases}$$

(con $\varphi(0) = \psi(0)$),

$$(5.2)\qquad \alpha(P) \leqslant y(P) \qquad \text{su } \Lambda,$$

$$(5.3)\qquad z_{\xi\eta} = f(\xi, \eta, y, y_\xi, y_\eta) \qquad \text{q.o. in } R,$$

$$(5.4)\qquad \Gamma_{\xi\eta} \geqslant 0 \qquad (\text{nel senso di } \mathcal{D}'(\mathring{R})),$$

$$(5.5)\qquad \operatorname{supp} \Gamma_{\xi\eta} \subseteq \{P \in \Lambda \mid y(P) = \alpha(P)\}.$$

Risulta evidentemente $y_{\xi\eta} = f + \Gamma_{\xi\eta}$, e pertanto nei punti in cui y non tocca l'ostacolo è soddisfatta l'equazione libera (1.11); la $\Gamma_{\xi\eta}$ appare quindi come la reazione vincolare (impulsiva) dell'ostacolo.

Si può constatare che z, Γ sono soluzione di questo problema se e solo se Γ soddisfa il problema Π con ostacolo $\alpha - z_{|A}$, e z soddisfa l'equazione integrale

$$(5.6) \qquad z(\xi,\eta) = g(\xi,\eta) + \int_0^\xi\int_0^\eta f(\alpha,\beta,y(\alpha,\beta),y_\xi(\alpha,\beta),y_\eta(\alpha,\beta))\,d\alpha\,d\beta\,,$$

cioè, in forma sintetica:

$$(5.7) \qquad z = T_1(z+\Gamma) \Leftrightarrow z = T_2(\Gamma)\,.$$

Vale allora il seguente

Teorema 2: *Se* α, φ, ψ, *ed* f *soddisfano le* (3.9), (4.5) *e* (4.6), *il problema* $\Pi_{f\alpha}$ *ammette una e una sola soluzione.*

Per la dimostrazione introduciamo il sottospazio $C_0^*(R)$ di $C^*(R)$ costituito dalle funzioni che si annullano sui lati $\xi = 0$ ed $\eta = 0$ di R.

Possiamo allora considerare le seguenti trasformazioni: T_2: $C_0^*(R) \mapsto C^*(R)$ definita nel § 4, e T_3: $C^*(R) \mapsto C_0^*(R)$ che associa ad una funzione $z \in C^*(R)$ la soluzione del problema Π con ostacolo $\alpha - z_{|A}$. Sia infine

$$T = T_3 \cdot T_2\colon\ C_0^*(R) \mapsto C_0^*(R)\,.$$

Mostriamo, che, per ϱ sufficientemente grande, T è una contrazione. Il punto unito Γ di tale contrazione e la funzione $z = T_2(\Gamma)$ danno, per quanto detto precedentemente, la soluzione (unica) del problema $\Pi_{f\alpha}$.

Siano Γ_1, $\Gamma_2 \in C_0^*(R)$, $z_i = T_2(\Gamma_i)$, $\alpha_i = \alpha - z_{i|A}$, $\bar\Gamma_i = T_3(z_i) = T(\Gamma_i)$, $\bar\Omega_i = \bar\Gamma_{i|A}$. Applicando nell'ordine le (3.13), (3.8), (2.5), e (4.11) otteniamo

$$(5.8) \qquad \|\bar\Gamma_1 - \bar\Gamma_2\|_0' = |\bar\Omega_1 - \bar\Omega_2|_0' \leqslant |\alpha_1 - \alpha_2|_0' = |(z_1 - z_2)_{|A}|_0' \leqslant$$
$$\leqslant \|z_1 - z_2\|_0' \leqslant H\|\Gamma_1 - \Gamma_2\|_*'\,.$$

ove H è data dalla (4.14). Applicando poi le (3.14), (3.46), (2.6), (2.5), (4.12), (4.13) e (4.11) abbiamo:

$$(5.9) \qquad \|\bar\Gamma_{1_\xi} - \bar\Gamma_{2_\xi}\|_\eta' = |\bar\Omega_1' - \bar\Omega_2'|_1' \leqslant 2|\alpha_1' - \alpha_2'|_1' + |\alpha_1 - \alpha_2|_0' =$$
$$= 2\left|\frac{d}{dt}(z_1 - z_2)_{|A}\right|_1' + |(z_1 - z_2)_{|A}|_0' \leqslant 2\|z_{1_\xi} - z_{2_\xi}\|_\eta' +$$
$$+ 2\|z_{1_\eta} - z_{2_\eta}\|_\xi' + \|z_1 - z_2\|_0' \leqslant 5H\|\Gamma_1 - \Gamma_2\|_*'\,,$$

ed analogamente

$$(5.10) \qquad \|\bar\Gamma_{1_\eta} - \bar\Gamma_{2_\eta}\|_\xi \leqslant 5H\|\Gamma_1 - \Gamma_2\|_*'\,.$$

Moltiplicando per ϱ le (5.9), (5.10) e sommandole alla (5.8), risulta

$$\|\bar{\Gamma}_1 - \bar{\Gamma}_2\|'_* \leqslant K\|\Gamma_1 - \Gamma_2\|'_* \tag{5.11}$$

ove

$$K = \frac{L(1+10\varrho)}{\varrho^2 - L(1+2\varrho)}. \tag{5.12}$$

Ne risulta che, se ϱ soddisfa la

$$\varrho > 6L + \sqrt{36L^2 + 2L} \tag{5.13}$$

è $K < 1$ e quindi T è una contrazione. Il Teorema 2 è così completamente dimostrato.

Per quanto riguarda il problema nella « semistriscia » Z notiamo che per ogni segmento caratteristico tratteggiato in fig. 1 la validità delle (4.5) è garantita dalle ipotesi sui dati enunciate nel § 1 e dalla regolarità delle soluzioni dei problemi elementari già risolti. Ciò consente la costruzione della soluzione in tutto Z mediante il procedimento di decomposizione in successivi problemi elementari, come indicato nell'introduzione.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. Amerio, *Su un problema di vincoli unilaterali per l'equazione non omogenea della corda vibrante*, Pubbl. Ist. Appl. Calcolo (3), **109** (1976).

[2] L. Amerio, *On the motion of a string vibrating through a moving ring with continuously variable diameter*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **62** (1977), 134-142.

[3] L. Amerio, *A unilateral problem for a non linear vibrating string equation*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **64** (1978), 8-21.

[4] C. Citrini, *Discontinuous solutions of a non linear hyperbolic equation with unilateral constraints*, Manuscripta Math., **29** (1979), 323-352.

[5] K. Deimling, *Das Picard-Problem für $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$ unter Carathéodory-Voraussetzungen*, Math. Z., **114** (1970), 303-312.

[6] J. Kisyńsky, *Solutions généralisées du problème de Cauchy-Darboux pour l'équation $\partial^2 z/\partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A, **14** (1960), 87-109.

[7] E. J. Mc Shane, *Integration*, Princeton University Press, 1947.

[8] I. P. Natanson, *Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen*, Akademie Verlag, Berlin, 1961.

[9] W. Walter, *Differential and integral inequalities*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

Direttore responsabile: Prof. P. Di Mattei - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
« Monograf » - Via Collamarini, 5 - Bologna