Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
99° (1981-82), Vol. V, fasc. 6, pagg. 73-86

ANTONIETTA CIOFFI (*)

Su problemi al contorno relativi ad una classe di operatori ellittici degeneri (**)

On boundary problems for a class of degenerate elliptic operators

SUMMARY. — We prove that some elliptic-parabolic operators are Noetherian.

In numerosi lavori (1) sono stati studiati problemi al contorno relativi ad operatori ellittico-parabolici L in un aperto limitato Ω, quasi ellittici nei domini di degenerazione.

In condizioni abbastanza generali sono stati ottenuti teoremi di esistenza in $L_2(\Omega)$ di una soluzione debole per il problema omogeneo di Dirichlet; per operatori di tipo più particolare sono stati ottenuti anche teoremi di unicità.

In questa nota considero una classe di operatori L che degenerano in un compatto $\bar{\Omega}_d \subset \Omega$: essi sono pertanto ellittici in un intorno di $\partial\Omega$; ciò induce a considerare per essi problemi al contorno con operatori di frontiera che ricoprono (cfr. [0]) L.

Sotto opportune ipotesi dimostro che tali problemi sono ad indice (n. 1, Teorema II), stabilendo preventivamente maggiorazioni a priori (n. 1, Teorema I) di tipo locale (anche intorno alla frontiera di Ω_d) per le soluzioni.

Le tecniche che utilizzo sono un opportuno adattamento di quelle impiegate da Visik e Grusin che in [12] studiano problemi per operatori ellittici che degenerano solo sulla frontiera di Ω.

1. - Posizione del problema ed enunciato dei risultati.

Indichiamo con R^s lo spazio euclideo reale ad s dimensioni di punto $y = (y_1, \dots, y_s)$. Se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ è una s-pla di interi non negativi, poniamo

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_s\,, \qquad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_s^{\alpha_s}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo G.N.A.F.A. del C.N.R., Università di Napoli.
(**) Memoria presentata dall'accademico Carlo Miranda il 13 Marzo 1982.
(1) Cfr. ad esempio [2], ..., [8], [10].

ISSN-0392-4106

con

$$D_i = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y_i}, \qquad i = 1, \dots, s.$$

Se $G \subseteq R^s$ e k è un intero positivo, indichiamo con $H_k(G)$ lo spazio delle funzioni $u(y)$ tali che

$$D^\alpha u \in L_2(G), \qquad |\alpha| \leqslant k;$$

la norma $\|u, G\|_k$ in $H_k(G)$ è definita da

$$\|u, G\|_k = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha u, G\|$$

dove $\|\cdot, G\|$ è la norma in $L_2(G)$.

Sia Ω un aperto regolare limitato di R^n; si abbia

$$\Omega = \Omega_e \cup \bar{\Omega}_d$$

con Ω_d aperto regolare ed $\bar{\Omega}_d \subset \Omega$.

Sia $B(y, D)$ un operatore differenziale di ordine r in $\bar{\Omega}$, uniformemente ellittico in un intorno di Ω_d su Ω; sia inoltre $A(y, D)$ un operatore definito in un intorno Ω'_e di Ω_e su $\bar{\Omega}$ ed ivi uniformemente ellittico di ordine

$$m = r + p, \qquad p > 0;$$

indichiamo con $\varrho(y)$ la distanza di $y \in \Omega$ da $\bar{\Omega}_d$ e sia σ un numero reale $> p$.

Sia infine $\{Q_i(y, D)\}$, $i = 1, \dots, m/2$ un sistema di $m/2$ operatori differenziali lineari di frontiera definiti su $\partial\Omega$. Assumiamo per semplicità che i coefficienti di A, B e Q_i siano di classe C^∞.

Supponiamo verificate le seguenti ipotesi:

a) gli operatori $A(y, iD)$ e $B(y, iD)$ sono a coefficienti reali ed ellittici positivi rispettivamente in Ω'_e ed $\bar{\Omega}$;

b) il sistema $\{Q_i(y, D)\}$ verifica la condizione complementare rispetto ad $A(y, D)$.

Ciò posto, consideriamo l'operatore

$$L(y, D) = \varrho^\sigma(y) A(y, D) + B(y, D)$$

che è ellittico-parabolico in Ω.

Indichiamo con H lo spazio delle distribuzioni u su Ω per le quali è finita la norma

$$|u, \Omega| = \sum_{|\alpha| = m} \|\varrho^\sigma(y) D^\alpha u, \Omega_e\| + \|u, \Omega\|_r$$

e per le quali si ha $Q_i(y, D)u = 0$ su $\partial\Omega$, $i = 1, \dots, m/2$.

Consideriamo il problema

$$(1.1)\qquad \begin{cases} L(y, D)u = f & \text{in } \Omega\,, \qquad f \in L_2(\Omega)\,, \\ u \in H\,. \end{cases}$$

Dimostreremo i seguenti

TEOREMA I: *Se $u \in H$ è soluzione del problema* (1.1), *vale la maggiorazione a priori*

$$|u, \Omega| \leqslant K(\|f, \Omega\| + \|u, \Omega\|)\,.$$

TEOREMA II: *L'operatore $L(y, D)$ da H ad $L_2(\Omega)$ è un operatore ad indice.*

2. - ALCUNE NOTAZIONI.

Sia y_0 un punto di $\Sigma = \partial\Omega_d$; per la supposta regolarità di Σ, esiste un intorno I di y_0 ed una trasformazione regolare di equazione

$$y_i = \psi_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad i = 1, \ldots, n\,,$$

la quale trasforma $\Sigma \cap I$ in una porzione dell'iperpiano $x_n = 0$ ed $x_n > 0$ in $\Omega_e \cap I$ mentre $x_n < 0$ in $\Omega_d \cap I$. Chiameremo $x = (x_1, \ldots, x_n) = (x', x_n)$ coordinate locali. Indichiamo con $\mathcal{A}(x, D)$, $\mathcal{B}(x, D)$, $\mathcal{L}(x, x_n, D)$ i trasformati degli operatori $A(y, D)$, $B(y, D)$ ed $L(y, D)$ secondo le coordinate locali.

Se $y_0 = (x_0', 0)$, porremo

$$\mathcal{A}(x_0'; D) = \mathcal{A}(x_0', 0, D)\,, \qquad \mathcal{B}(x_0'; D) = \mathcal{B}(x_0', 0, D)\,;$$

denoteremo poi con $\mathcal{A}_0(x_0'; D)$, $\mathcal{B}_0(x_0'; D)$ le loro parti principali. Porremo infine

$$\mathcal{L}(x_0'; x_n, D) = \varrho^\sigma \mathcal{A}(x_0'; D) + \mathcal{B}(x_0'; D)$$

dove

$$\varrho = \varrho(x_n) = \begin{cases} x_n & \text{per } x_n > 0\,, \\ 0 & \text{per } x_n \leqslant 0 \end{cases}$$

e

$$\mathcal{L}_0(x_0'; x_n, \xi', D_n) = \varrho^\sigma \mathcal{A}_0(x_0'; \xi', D_n) + \mathcal{B}_0(x_0'; \xi', D_n)$$

con $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in R^{n-1}$.

Ovviamente non è restrittivo supporre $\mathcal{A}_0(x_0'; 0, D_n) = D_n^m$ e porremo $\mathcal{B}_0(x_0'; 0, D_n) = b_0 D_n^r$: a causa dell'ipotesi *a*) risulta $b_0 > 0$.

Siano a e b numeri reali, con $a < b$, $b > 0$ e sia $q = \sigma/p$.

Lo spazio delle distribuzioni $u(x_n)$ sull'intervallo (a, b) per le quali è finita la norma

$$\|u, (a, b)\|_{\mathcal{K}} = \|u, (a, b)\| + \sum_{i=0}^{p} \|x_n^{qi} D_n^i u(x_n), (c, b)\|$$

dove $c = \max\{0, a\}$, sarà denotato con $\mathcal{K}(a, b)$, mentre con $\mathcal{H}(a, b)$ denoteremo lo spazio delle distribuzioni $u(x_n)$ per le quali è finita la norma

$$\|u, (a, b)\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{i=0}^{p} \int_c^b |x_n^{qi} D_n^{r+i} u(x_n)|^2 \, dx_n + \sum_{i=0}^{r} \int_a^b |D_n^i u(x_n)|^2 \, dx_n \,. \tag{2.1}$$

Con $\mathring{\mathcal{K}}(a, b)$ e $\mathring{\mathcal{H}}(a, b)$ denoteremo poi i sottoinsiemi di $\mathcal{K}(a, b)$ e $\mathcal{H}(a, b)$ rispettivamente costituiti dalle u di tali spazi il cui supporto abbia distanza positiva da a e da b.

Nel seguito faremo uso di norme dipendenti da un parametro $\xi' \in R^{n-1}$; esse sono definite da

$$\|u, (a, b)\|_1'^2 = \sum_{i=0}^{p} \int_c^b |x_n^{qi} D_n^{r+i} u(x_n)|^2 \, dx_n + \sum_{i=0}^{r} \int_a^b |\xi'|^{2(r-i)} |D_n^i u(x_n)|^2 \, dx_n \,,$$

$$\|u, (a, b)\|_2'^2 = \sum_{i=0}^{m} \int_c^b |\xi'|^{2(m-i)} |x_n^{\sigma} D_n^i u(x_n)|^2 \, dx_n \,.$$

La norma $\|\cdot, (a, b)\|_1'$, per $\xi' \neq 0$, è equivalente alla norma (2.1) e lo stesso avviene per la norma $\|u, (a, b)\|_2'$ quando sia $a > 0$. Poniamo infine

$$\|u, (a, b)\|_3'^2 = \|u, (a, b)\|_{\mathcal{H}}^2 + \|u, (a, b)\|_1'^2 + \|u, (a, b)\|_2'^2$$

ed indichiamo con $H(a, b)$ lo spazio delle distribuzioni $u(x', x_n)$ su $R^{n-1} x (a, b)$ per le quali è finita la norma

$$\left(\int_{R^{n-1}} \|\tilde{u}(\xi', x_n), (a, b)\|_3'^2 \, d\xi' \right)^{\frac{1}{2}}$$

dove $\tilde{u}(\xi', x_n)$ è la trasformata di Fourier di $u(x', x_n)$ rispetto alle variabili x'.

3. - Proposizioni e teoremi preliminari.

Consideriamo l'operatore

$$\mathcal{M}(x_n, D_n) = \varrho^{\sigma} D_n^p + b_0 \,;$$

esso è lineare e continuo da $\mathcal{K}(a, b)$ ad $L_2(a, b)$.

Sussiste la seguente

PROPOSIZIONE 3.1: *Se b è sufficientemente piccolo, esiste un inverso locale $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'(a, b)$ di $\mathcal{M}$ relativo a* $(\mathring{\mathcal{K}}(a, b), \mathcal{K}(a, b), L_2(a, b))$ (2).

DIM.: Se $a \geqslant 0$, l'asserto discende dalla Proposizione 2.2 di [12]. Se è $a < 0$, basta prolungare $\mathcal{M}'(0, b)$ a tutto $L_2(a, b)$ mediante l'operatore identico in $L_2(a, 0)$.

Sia ora $\xi' \in R^{n-1}$, $\xi' \neq 0$. Consideriamo l'operatore

$$\mathcal{N}_{\xi'} = \frac{1}{b_0} \mathcal{B}_0(x_0'; \xi', D_n) .$$

Esso è lineare e continuo da $H_r(a, b)$ ad $L_2(a, b)$; inoltre esso è anche invertibile da $H_r(-\infty, +\infty)$ ad $L_2(-\infty, +\infty)$. Dimostriamo che vale la seguente

PROPOSIZIONE 3.2: *L'operatore $\mathcal{N}_{\xi'}$ ammette un inverso locale $\mathcal{N}'_{\xi'}$ relativo ad* $(\mathring{H}_r(a, b), H_r(a, b), L_2(a, b))$. *$\mathcal{N}'_{\xi'}$ è continuo da $\mathcal{K}(a, b)$ ad $\mathcal{H}(a, b)$ e sussiste la maggiorazione*

$$\|u, (a, b)\|'_1 \leqslant C[1 + (b^a |\xi'|)^p] \, \|v, (a, b)\|_{\mathcal{K}} , \qquad v \in \mathcal{K}(a, b) , \; u = \mathcal{N}'_{\xi'} v , \tag{3.1}$$

C essendo una costante assoluta indipendente da $\xi' \neq 0$.

DIM.: Sia $v(x_n) \in L_2(a, b)$ e $v_1(x_n)$ il suo prolungamento a zero per $x_n < a$ e $x_n > b$. Sia poi $u(x_n)$ la funzione di $H_r(-\infty, +\infty)$ definita da

$$\mathcal{N}_{\xi'} u(x_n) = v_1(x_n) ;$$

da noti risultati discende che vale la maggiorazione

$$\sum_{i=0}^{r} \int_R |\xi'|^{2(r-i)} |D_n^i u(x_n)|^2 \, dx_n \leqslant C \int_R |v_1(x_n)|^2 \, dx_n = C \int_a^b |v(x_n)|^2 \, dx_n . \tag{3.2}$$

Se poniamo, su (a, b)

$$\mathcal{N}'_{\xi'} v(x_n) = u(x_n) ,$$

in virtù della (3.2) resta provata la prima parte della proposizione.

(2) Abbiamo qui usato la terminologia di [12]: siano ψ_1 e ψ_2 spazi di Banach, con ϕ sottoinsieme lineare di ψ_1; A: $\psi_1 \to \psi_2$, R: $\psi_2 \to \psi_1$ operatori lineari e continui; diremo che R è un inverso locale (near inverse) di A relativo a (ϕ, ψ_1, ψ_2) se R è un inverso destro, e un inverso sinistro su ϕ, di A, cioè se

$$AR = E_2 \qquad \text{e} \qquad RA = E \text{ su } \phi ,$$

dove E_2 è l'operatore identico in ψ_2 e E è l'operatore identico su ϕ.

Sia ora $v(x_n) \in \mathcal{K}(a, b)$. L'asserto sarà completamente provato una volta dimostrata la diseguaglianza

$$(3.3) \qquad \int_c^b |x_n^{qi} D_n^{r+i} u(x_n)|^2 \, dx_n \leqslant C[1 + (b^q |\xi'|)^i]^2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{i} \int_c^b |x_n^{qk} D_n^k v(x_n)|^2 \, dx_n + \int_a^b |v(x_n)|^2 \, dx_n \right) \qquad 0 \leqslant i \leqslant p .$$

Poiché tale maggiorazione, per $i = 0$, segue dalla (3.2), possiamo procedere per induzione, supponendo che essa sia vera per $i \leqslant h$ e dimostrando che è vera anche per $i = h + 1$. Poniamo, con $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$

$$\mathcal{N}_{\xi'} = \sum_{\substack{j=0,\ldots,r \\ |\alpha'|+j=r}} b_{\alpha',j} (\xi')^{\alpha'} D_n^j \qquad b_{0,r} = 1$$

per cui, su (a, b) è:

$$D_n^r u(x_n) = v(x_n) - \sum_{\substack{j=0,\ldots,r-1 \\ |\alpha'|+j=r}} b_{\alpha',j} (\xi')^{\alpha'} D_n^j u(x_n) .$$

È quindi anche

$$x_n^{q(h+1)} D_n^{r+h+1} u(x_n) = x_n^{q(h+1)} D_n^{h+1} v(x_n) - \sum_{\substack{j=1,\ldots,r \\ |\alpha'|+j=r+1}} b_{\alpha',j-1} (\xi')^{\alpha'} x_n^{q(h+1)} D_n^{j+h} u(x_n)$$

da cui

$$(3.4) \qquad \int_c^b |x_n^{q(h+1)} D_n^{r+h+1} u(x_n)|^2 \, dx_n \leqslant C \left[\int_c^b |x_n^{q(h+1)} D_n^{h+1} v(x_n)|^2 \, dx_n + \sum_{j=1,\ldots,r} |\xi'|^{2(r+1-j)} \int_c^b x_n^{2q} |x_n^{qh} D_n^{j+h} u(x_n)|^2 \, dx_n \right] .$$

Teniamo ora conto che per l'ipotesi di induzione è:

$$(3.5) \qquad \sum_{\substack{j=1,\ldots,r \\ j+h \geqslant r}} |\xi'|^{2(r+1-j)} \int_c^b x_n^{2q} |x_n^{qh} D_n^{j+h} u(x_n)|^2 \, dx_n$$

$$\leqslant \sum_{\substack{j=1,\ldots,r \\ j+h \geqslant r}} (b^q |\xi'|)^{2(r+1-j)} \int_c^b |x_n^{q[h-(r-j)]} D_n^{r+[h-(r-j)]} u(x_n)|^2 \, dx_n$$

$$\leqslant C[1 + (b^q |\xi'|)^{h+1}]^2 \left(\sum_{k=0}^{h} \int_c^b |x_n^{qk} D_n^k v(x_n)|^2 \, dx_n + \int_a^b |v(x_n)|^2 \, dx_n \right)$$

mentre per la (3.2) è

$$(3.6)\qquad \sum_{\substack{j=1,\dots,r\\ j+h<r}} |\xi'|^{2(r+1-j)} \int_c^b x_n^{2q} |x_n^{qh} D_n^{j+h} u(x_n)|^2 \, dx_n$$

$$\leqslant \sum_{\substack{j=1,\dots,r\\ j+h<r}} (b^q |\xi'|)^{2(h+1)} \int_c^b |\xi'|^{2[r-(j+h)]} |D_n^{j+h} u(x_n)|^2 \, dx_n$$

$$\leqslant C[1 + (b^q|\xi'|)^{h+1}]^2 \int_a^b |v(x_n)|^2 \, dx_n \, .$$

Dalla (3.4), per le (3.5) e (3.6), segue la (3.3) per $i = h + 1$, ciò che completa la dimostrazione.

Dalle Proposizioni 3.1 e 3.2 discende immediatamente la seguente:

Proposizione 3.3: *L'operatore $\mathcal{N}'_{\xi'}\mathcal{M}'$ è un inverso locale dell'operatore $\mathcal{M}\mathcal{N}_{\xi'}$ relativo a $(\mathring{\mathcal{H}}(a, b), \mathcal{H}(a, b), L_2(a, b))$. Posto*

$$\mathcal{N}'_{\xi'}\mathcal{M}' f = u \, , \qquad f \in L_2(a, b)$$

sussiste la maggiorazione

$$(3.7)\qquad \|u, (a, b)\|'_1 \leqslant C[1 + (b^q|\xi'|)^p] \, \|f, (a, b)\|$$

C essendo una costante assoluta indipendente da $\xi' \neq 0$.

Dimostriamo ora che sussiste la seguente

Proposizione 3.4: *Esistono due numeri positivi A e $\tau < 1$ tali che per $|\xi'| \geqslant A$ e $b \leqslant \tau|\xi'|^{-1/q}$, l'operatore $\mathfrak{L}(x'_0; x_n, \xi', D_n)$ ha un inverso locale $R^{(1)}_{\xi'} = R^{(1)}_{\xi'}(a, b)$ relativo a $(\mathring{\mathcal{H}}(a, b), \mathcal{H}(a, b), L_2(a, b))$; posto*

$$u(x_n) = R^{(1)}_{\xi'} f, \qquad f \in L_2(a, b)$$

vale la maggiorazione

$$(3.8)\qquad \|u, (a, b)\|'_1 \leqslant C \|f, (a, b)\|$$

C essendo una costante assoluta.

Dim.: Poiché si ha

$$\mathfrak{L} = \mathcal{M}\mathcal{N}_{\xi'} + (\mathfrak{L}_0 - \mathcal{M}\mathcal{N}_{\xi'}) + (\mathfrak{L} - \mathfrak{L}_0) \, ,$$

in virtù del Lemma 2.1 di [12] e della Proposizione 3.3 per provare l'asserto basterà far vedere che, se il prodotto $b^q|\xi'|$ è sufficientemente piccolo e $|\xi'|$ suf-

ficientemente grande, per $w = \mathcal{N}'_{\xi'} \mathcal{M}' f$, $f \in L_2(a, b)$, valgono le maggiorazioni:

$$\|(\mathfrak{L}_0 - \mathcal{M}\mathcal{N}_{\xi'}) w, (a, b)\| \leqslant \tfrac{1}{4} \|f, (a, b)\| , \tag{3.9}$$

$$\|(\mathfrak{L} - \mathfrak{L}_0) w, (a, b)\| \leqslant \tfrac{1}{4} \|f, (a, b)\| . \tag{3.10}$$

Osserviamo ora che dalla (3.7) segue, se $b \leqslant \tau |\xi'|^{-1/q}$ e $\tau < 1$,

$$\|w, (a, b)\|'_1 \leqslant C_1 \|f, (a, b)\| \tag{3.11}$$

con C_1 costante assoluta.

Pertanto, per provare la (3.9), basterà provare che, per $b \leqslant \tau |\xi'|^{-1/q}$ e τ sufficientemente piccolo,

$$\sum_{\substack{|\alpha'|+j=r+p \\ |\alpha'|>0}} \|\varkappa_n^\sigma (\xi')^{\alpha'} D_n^j w, (c, b)\| \leqslant \frac{1}{4C_1} \|w, (a, b)\|'_1 \tag{3.9$'$}$$

mentre per la (3.10) è sufficiente provare che, per $b \leqslant \tau |\xi'|^{-1/q}$ e τ sufficientemente piccolo si ha

$$\sum_{|\alpha'|+j<r+p} \|\varkappa_n^\sigma (\xi')^{\alpha'} D_n^j w, (c, b)\| \leqslant \frac{1}{8C_1} \|w, (a, b)\|'_1 \tag{3.10$'$}$$

e per $|\xi'|$ sufficientemente grande si ha

$$\sum_{|\alpha'|+j<r} \|(\xi')^{\alpha'} D_n^j w, (a, b)\| \leqslant \frac{1}{8C_1} \|w, (a, b)\|'_1 . \tag{3.10$''$}$$

Cominciamo col provare la (3.9)$'$.

Per gli operatori $\varkappa_n^\sigma (\xi')^{\alpha'} D_n^j$ con $|\alpha'| + j = r + p$, $|\alpha'| > 0$ abbiamo: se $j \leqslant r$

$$\varkappa_n^\sigma |\xi'|^{|\alpha'|} D_n^j = (\varkappa_n^q |\xi'|)^p |\xi'|^{r-j} D_n^j$$

da cui, se $b \leqslant \tau |\xi'|^{-1/q}$

$$\|\varkappa_n^\sigma (\xi')^{\alpha'} D_n^j w, (c, b)\| \leqslant \tau^{qp} \| |\xi'|^{r-j} D_n^j w, (a, b)\| \leqslant \tau^{pq} \|w, (a, b)\|'_1 ; \tag{3.9$'_1$}$$

se invece $j = r + h$, con $1 \leqslant h (< p)$

$$\varkappa_n^\sigma |\xi'|^{|\alpha'|} D_n^j = (\varkappa_n^q |\xi'|)^{p-h} \varkappa_n^{qh} D_n^{r+h}$$

da cui, se $b \leqslant \tau |\xi'|^{-1/q}$

$$\|\varkappa_n^\sigma (\xi')^{\alpha'} D_n^j w, (c, b)\| \leqslant \tau^{q(p-h)} \|\varkappa_n^{qh} D_n^{r+h} w, (c, b)\| \leqslant \tau^{q(p-h)} \|w, (a, b)\|'_1 . \tag{3.9$'_2$}$$

Dalle (3.9)$'_1$ e (3.9)$'_2$ segue la (3.9)$'$ per τ sufficientemente piccolo.

Con ragionamento analogo si può stabilire la (3.10)$'$; completiamo quindi dimostrando la (3.10)$''$.

Per gli operatori $(\xi')^{\alpha'} D_n^j$ con $|\alpha'| + j < r$ abbiamo, posto $|\alpha'| + j = r - \lambda$, $\lambda > 0$

$$|\xi'|^{|\alpha'|} D_n^j = |\xi'|^{-\lambda} |\xi'|^{r-j} D_n^j .$$

Conseguentemente

$$\|(\xi')^{\alpha'} D_n^j w, (a, b)\| \leqslant |\xi'|^{-\lambda} \| |\xi'|^{r-j} D_n^j w, (a, b)\| \leqslant |\xi'|^{-\lambda} \|w, (a, b)\|_1'$$

da cui la (3.10)'' per $|\xi'| \geqslant A$ con A sufficientemente grande.

La (3.8) segue poi dal fatto che

$$\|u, (a, b)\|_1' \leqslant 2 \|w, (a, b)\|_1'$$

e dalla (3.11).

La proposizione seguente discende dal Teorema 3.2 di [12].

Proposizione 3.5: *Esistono due numeri positivi A e $\delta < 1$ tali che, per $|\xi'| \geqslant A$ e $0 < a < b < \delta$, l'operatore $\mathfrak{L}(x_0'; x_n, \xi', D_n)$ ha un inverso locale $R_{\xi'}^{(2)} = R_{\xi'}^{(2)}(a, b)$ relativo a $(\mathring{\mathcal{H}}(a, b), \mathcal{H}(a, b), L_2(a, b))$. Posto*

$$u(x_n) = R_{\xi'}^{(2)} f, \qquad f \in L_2(a, b)$$

vale la maggiorazione

$$\|u, (a, b)\|_2' \leqslant C \|f, (a, b)\|$$

C essendo una costante dipendente solo da a.

Nel seguito A denoterà un numero fissato in modo che per esso valgono le Proposizioni 3.4 e 3.5.

Dimostriamo la seguente

Proposizione 3.6: *Esiste un numero positivo δ tale che, per $|\xi'| < A$, l'operatore $\mathfrak{L}(x_0'; x_n, \xi', D_n)$ ha un inverso locale $R_{\xi'}^{(3)} = R_{\xi'}^{(3)}(-\delta, \delta)$ relativo a $(\mathring{\mathcal{H}}(-\delta, \delta), \mathcal{H}(-\delta, \delta), L_2(-\delta, \delta))$.*

Posto

$$u(x_n) = R_{\xi'}^{(3)} f, \qquad f \in L_2(-\delta, \delta)$$

vale la maggiorazione

$$\|u, (-\delta, \delta)\|_{\mathcal{H}} \leqslant C \|f, (-\delta, \delta)\|$$

C essendo una costante assoluta.

Dim.: Decomposto in questo modo l'operatore $\mathfrak{L}$:

$$\mathfrak{L} = \mathcal{M} D_n^r + (\mathfrak{L} - \mathcal{M} D_n^r)$$

la dimostrazione procede secondo lo schema della Proposizione 3.4, quando

si utilizzi in luogo dell'operatore $\mathcal{N}'_{\xi'}$ l'operatore Z_r definito da

$$Z_r v(x_n) = \frac{i^r}{(r-1)!} \int_{\delta}^{x_n} (x_n - t)^{r-1} v(t)\, dt \qquad v \in \mathcal{K}(-\delta, \delta)\,.$$

Sia ora δ un numero per cui valgono le Proposizioni 3.5 e 3.6; sia poi $b < \delta$ un numero per cui vale la Proposizione 3.4 e a un numero tale che $0 < a < b$.

Dalle Proposizioni 3.4 e 3.5, attraverso il procedimento utilizzato in [12] per dimostrare il Teorema 3.3, discende la seguente

PROPOSIZIONE 3.7: *Sia* $|\xi'| \geqslant A$. *L'operatore* $\mathfrak{L}(x'_0; x_n, \xi', D_n)$ *ammette un inverso destro* $R'_{\xi'}$ *da* $L_2(-\delta, \delta)$ *ad* $\mathcal{H}(-\delta, \delta)$ *per il quale si ha*

$$\| R'_{\xi'} f, (-\delta, b)\|'_1 + \| R'_{\xi'} f, (a, \delta)\|'_2 \leqslant C \| f, (-\delta, \delta)\| \qquad f \in L_2(-\delta, \delta)\,;$$

esiste inoltre un operatore $R''_{\xi'}$ *lineare e continuo da* $L_2(-\delta, \delta)$ *ad* $\mathcal{H}(-\delta, \delta)$ *il quale è un inverso sinistro di* $\mathfrak{L}(x'_0; x_n, \xi', D_n)$ *su* $\mathring{\mathcal{H}}(-\delta, \delta)$ *e tale che si ha*

$$\| R''_{\xi'} f, (-\delta, b)\|'_1 + \| R''_{\xi'} f, (a, \delta)\|'_2 \leqslant C \| f, (-\delta, \delta)\| \qquad f \in L_2(-\delta, \delta)$$

C essendo una costante assoluta.

Possiamo ora dimostrare il seguente

TEOREMA 3.1: *L'operatore* $\mathfrak{L}(x'_0; x_n, \xi', D_n)$ *da* $\mathcal{H}(-\delta, \delta)$ *ad* $L_2(-\delta, \delta)$ *ammette un inverso destro* $R^{(0)}_{\xi'}$ *per il quale si ha*:

$$\| R^{(0)}_{\xi'} f, (-\delta, \delta)\|'_3 \leqslant C \| f, (-\delta, \delta)\| \tag{3.12}$$

C essendo una costante indipendente da ξ'.

DIM.: Ricordando le Proposizioni 3.6 e 3.7 basta porre

$$R^{(0)}_{\xi'} = (1 - \vartheta(|\xi'| - A))\, R^{(3)}_{\xi'} + \vartheta(|\xi'| - A)\, R'_{\xi'}$$

dove $\vartheta(|\xi'| - A) = 1(0)$ per $|\xi'| \geqslant A$ $(< A)$, ed osservare che $\|u, (-\delta, \delta)\|'_3$ è maggiorata, per $|\xi'| \geqslant A$ dalla $\|u, (-\delta, \delta)\|'_1 + \|u, (-\delta, \delta)\|'_2$ e, per $|\xi'| < A$ da $\|u, (-\delta, \delta)\|_{\mathcal{H}}$.

Mediante il Teorema 3.1 dimostriamo poi immediatamente il seguente

TEOREMA 3.2: *L'operatore* $\mathfrak{L}(x'_0; x_n, D)$ *da* $H(-\delta, \delta)$ *ad* $L_2(R^{n-1} \times (-\delta, \delta))$ *ha un inverso destro* $R^{(0)}$ *lineare e continuo.*

DIM.: Basta infatti porre

$$\widetilde{R^{(0)}} f = R^{(0)}_{\xi'} \tilde{f}, \qquad f \in L_2(R^{n-1} \times (-\delta, \delta))\,.$$

Sia ora $\varphi(x)$ una funzione di classe $C_0^\infty(R^n)$ avente il supporto in un intorno del punto $(x_0', 0) \in \Sigma$, e tale che $\varphi(x_0', 0) = 1$. Vale il seguente

TEOREMA 3.3: *Se il supporto di φ è sufficientemente piccolo, l'operatore*

$$\varphi \mathfrak{L}(x, x_n, D) + (1-\varphi)\mathfrak{L}(x_0'; x_n, D)$$

da $H(-\delta, \delta)$ ad $L_2(R^{n-1} \times (-\delta, \delta))$ ammette un inverso destro lineare e continuo R.

DIM.: In virtù del Lemma 2.2 di [12], ove si tenga conto del Teorema 3.2, per dimostrare l'asserto basta provare che, per $f \in L_2(R^{n-1} \times (-\delta, \delta))$ si ha

$$\|\varphi(\mathfrak{L}(x, x_n, D) - \mathfrak{L}(x_0'; x_n, D))\, R^{(0)} f,\ R^{n-1} \times (-\delta, \delta)\| \leqslant \tfrac{1}{2}\| f,\ R^{n-1} \times (-\delta, \delta)\| .$$

Ma se il supporto di φ è sufficientemente piccolo, tale maggiorazione si ottiene immediatamente per la continuità sia dei coefficienti di $\mathfrak{L}(x, x_n, D)$ che dell'operatore $R^{(0)}$.

4. - DIMOSTRAZIONE DEI TEOREMI I E II.

Consideriamo un ricoprimento aperto finito U di $\bar{\Omega}$ costituito da sferette di diametro minore di δ.

Poniamo $U = \{\Sigma_i\}_{i=1,\dots,t} \cup \{\Sigma_i'\}_{i=t+1,\dots,s}$ dove, per ogni i, $\Sigma_i \cap \Sigma \neq \emptyset$ mentre $\Sigma_i' \cap \Sigma = \emptyset$; sia poi $\{\varphi_i\}_{i=1,\dots,s}$ una partizione dell'unità subordinata a tale ricoprimento e $\omega_i = \operatorname{supp} \varphi_i$.

Se δ è sufficientemente piccolo, per ogni $u \in H$ e per ogni $\varepsilon > 0$ vale la maggiorazione:

$$|\varphi_i u, \Omega| \leqslant C(\|L(y, D)u, \omega_i\| + \varepsilon |u, \Omega| + K(\varepsilon)\|u, \Omega\|)\ ,\ 1 \leqslant i \leqslant s\ . \tag{4.1}$$

Sia infatti $1 \leqslant i \leqslant t$ e $y_0 = (x_0', 0)$ un punto di $\Sigma \cap \omega_i$. Passando alle coordinate locali, poiché $\omega_i \subset R^{n-1} \times (-\delta, \delta)$, abbiamo

$$\begin{aligned} |\varphi_i u, \Omega| &\leqslant C\Big(\sum_{|\alpha|=m} \|\varrho^\sigma D^\alpha(\varphi_i u), R^{n-1} \times (-\delta, \delta)\| \\ &\quad + \sum_{|\alpha| \leqslant r} \|D^\alpha(\varphi_i u), R^{n-1} \times (-\delta, \delta)\|\Big) \\ &\leqslant C\Big(\int_{|\xi'| \geqslant A} \|\widetilde{\varphi_i u}(\xi', x_n), (-\delta, \delta)\|_3'^2\, d\xi' + \int_{|\xi'| < A} \|\widetilde{\varphi_i u}(\xi', x_n), (-\delta, \delta)\|_3'^2\, d\xi'\Big)^{\frac{1}{2}} . \end{aligned} \tag{4.2}$$

Osserviamo ora che, per ogni $\xi' \in R^{n-1}$: se $|\xi'| \geqslant A$, per la Proposizione 3.7 abbiamo:

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\varphi_i u}(\xi', x_n), (-\delta, \delta)\|_3' &= \|R''_{\xi'} \mathfrak{L}(x_0'; x_n, \xi', D_n)(\widetilde{\varphi_i u}), (-\delta, \delta)\|_3' \\ &\leqslant C\|\mathfrak{L}(x_0'; x_n, \xi', D_n)(\widetilde{\varphi_i u}), (-\delta, \delta)\| ; \end{aligned}$$

se $|\xi'| < A$, per la Proposizione 3.6 abbiamo:

$$\|\widetilde{\varphi_i u}(\xi', x_n), (-\delta, \delta)\|_3' = \| R_{\xi'}^{(3)} \mathfrak{L}(x_0'; x_n, \xi', D_n)(\widetilde{\varphi_i u}), (-\delta, \delta)\|_3'$$
$$\leqslant C \| \mathfrak{L}(x_0'; x_n, \xi', D_n)(\widetilde{\varphi_i u}), (-\delta, \delta)\| .$$

Dalla (4.2) segue pertanto:

$$|\varphi_i u, \Omega| \leqslant C \Big(\int_{R^{n-1}} \| \mathfrak{L}(x_0'; x_n, \xi', D_n)(\widetilde{\varphi_i u}), (-\delta, \delta)\|^2 d\xi' \Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$= C \| \mathfrak{L}(x_0'; x_n, D)(\varphi_i u), \omega_i \| \leqslant C(\| \varphi_i \mathfrak{L}(x_0'; x_n, D) u, \omega_i \| + \| [\mathfrak{L}, \varphi_i] u, \omega_i \|) ,$$

da cui, per la continuità dei coefficienti di $\mathfrak{L}(x, x_n, D)$ ed essendo il commutatore $[\mathfrak{L}, \varphi_i]$ un operatore completamente continuo in H (cfr. [11]), se δ è sufficientemente piccolo si ha

$$|\varphi_i u, \Omega| \leqslant C(\| \mathfrak{L}(x, x_n, D) u, \omega_i \| + \varepsilon |u, \Omega| + K(\varepsilon) \| u, \Omega \|)$$

e con ciò la (4.1).

È poi ben noto (cfr. [0]) che la stessa (4.1) vale se $i = t + 1, \ldots, s$.

Resta così dimostrato il Teorema I.

Il lemma 3 di [9] ci assicura allora che il nucleo di $L(y, D)$ ha dimensione finita.

Il Teorema 3.3, insieme con noti risultati concernenti gli operatori ellittici (cfr. ad es. [1]), ci consente di costruire un « quasi inverso » destro dell'operatore L e cioè un operatore R_d tale che si abbia

$$L R_d = I + T$$

dove I è l'operatore identico in $L_2(\Omega)$ e T è un operatore completamente continuo. La costruzione di R_d può essere effettuata con le tecniche descritte in [1], § 5. L'esistenza di R_d implica che il nucleo dell'operatore aggiunto di L ha dimensione finita, e ciò, unitamente a quanto detto prima, ci assicura che L è un operatore ad indice.

BIBLIOGRAFIA

[0] S. Agmon - A. Douglis - L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions.* - I, Comm. Pure appl. math., 12 (1959), 623-727.

[1] M. S. Agranovich - M. I. Vishik, *Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type*, Russian Math. Surv., 19 (1964), 53-157.

[2] M. L. Benevento, *Sul problema del tipo di Dirichlet per operatori ellittico-parabolici di ordine 2s, quasi ellittici nelle zone di degenerazione*, Ricerche di Matematica, 26 (1977), 203-253.

[3] M. L. Benevento - T. Bruno - L. Castellano, *Sul problema del tipo di Dirichlet per una classe di operatori ellittico-parabolici del IV ordine degeneri in una o più direzioni*, Ricerche di Matematica, 24 (1975), 280-340.

[4] M. L. Benevento - T. Bruno - L. Castellano, *Esistenza ed unicità di una soluzione generalizzata del problema del tipo di Dirichlet relativo ad una classe di operatori ellittico-parabolici del IV ordine degeneri in una o più direzioni*, Ricerche di Matematica, 25 (1976), 81-100.

[5] A. Canfora, *Un problema al contorno per una classe di operatori ellittico-parabolici del quarto ordine.* - I, Ricerche di Matematica, 21 (1972), 86-156.

[6] A. Canfora, *Un problema al contorno per una classe di operatori ellittico-parabolici del quarto ordine.* - II, Ricerche di Matematica, 22 (1973), 3-68.

[7] A. Canfora, *Un problema al contorno per una classe di operatori ellittico-parabolici di ordine* $2m$, Annali di Matematica Pura e Applicata (IV), 100 (1974), 45-127.

[8] A. Canfora, *Esistenza ed unicità delle soluzioni di un problema al contorno relativo ad un'equazione ellittico-parabolica di ordine* $2m$, Ricerche di Matematica, 25 (1976), 247-304.

[9] J. Peetre, *Another Approach to Elliptic Boundary Problems*, Comm. Pure Appl. Math., 14 (1961), 711-731.

[10] M. Tricarico, *Sui problemi al contorno per le equazioni ellittico-paraboliche di ordine* $2m$, Annali di Matematica Pura e Applicata (IV), 115 (1977), 225-270.

[11] M. Troisi, *Problemi ellittici con dati singolari*, Annali di Matematica, 83 (1969), 363-407.

[12] M. I. Visik - V. V. Grusin, *Boundary value problems for elliptic equations degenerate on the boundary of a domain*, Math. USSR Sbornik, 9 (1969), 423-454.