FRANCO SELLERI (*)

Il ruolo della matematica in fisica teorica da un punto di vista realistico

I successi dell'approccio matematico nella fisica moderna sono veramente impressionanti se si pensa a predizioni numeriche con 12 cifre esatte (momento magnetico dell'elettrone) o a grandi conquiste concettuali (prima teoriche, poi sperimentali) come la trasformabilità reciproca di materia in energia ($E = mc^2$) o la predizione delle antiparticelle. Tutto questo sembra indicare con forza che la matematica funziona come strumento conoscitivo *diretto*, anche a prescindere da una comprensione fisica in termini causali e spazio-temporali dei fenomeni microscopici. Sembra quasi che lo strumento formale abbia un suo rapporto diretto e privilegiato con la realtà materiale, quasi che questa realtà cercasse davvero di seguire un disegno razionale preordinato.

La fiducia nell'approccio matematico alla conoscenza della realtà è cresciuta di molto nel nostro secolo. Il rigore della fisica teorica è stato elevato dai neopositivisti a universale garanzia di scientificità, riducendo biologia, astronomia e geologia al rango di pseudo-scienze, quasi che le loro formidabili conquiste dovessero essere dimenticate o almeno sospese fino a una raggiunta matematizzazione delle loro formulazioni. E la stessa tendenza a comprendere la realtà *anche* in termini intuitivi è stata combattuta da Heisenberg che invocava « una ritirata nello schema matematico ». Gran parte della fisica teorica contemporanea è assestata su questa linea: in fisica delle particelle, ad esempio, si ritiene che le proprietà che garantiscono l'esistenza di una particella di un certo tipo siano i suoi numeri quantici (massa, vita media, carica, spin, spin isotopico, stranezza, numero barionico e così via), e che questa individuazione sia possibile solo all'interno di una rete di relazioni teoriche formulate matematicamente, e non invece in termini intuitivi o spazio-temporali.

Un'altra considerazione che sembra favorire una visione matematizzante della scienza riguarda il fatto ben noto che la struttura matematica di una teoria sopravvive molto più facilmente della visione fisico-filosofica che la sottende e che l'ha generata: così le equazioni di Maxwell e l'equazione di Schrödinger sono tuttora parte essenziale del patrimonio scientifico, mentre sono stati abbandonati i modelli fisici dai qual partirono Maxwell e Schrödinger.

(*) F. Selleri, Dipartimento di Fisica, Università di Bari, INFN, Sezione di Bari.

Il problema della matematica fu posto da Albert Einstein al modo seguente (1) nel 1921:

Qui nasce un rompicapo che ha disturbato gli scienziati di tutti i periodi. Com'è possibile che la matematica, che è un prodotto del pensiero umano non dipendente dall'esperienza, si adatti così eccellentemente agli oggetti della realtà fisica? Può la ragione umana senza l'esperienza scoprire col puro pensiero le proprietà delle cose reali?

Abbiamo oggi un motivo addizionale per porci questo problema, cioè il successo registrato nell'unificazione delle interazioni deboli con quelle elettromagnetiche, inclusa specialmente la predizione dell'esistenza di bosoni vettoriali con tanto di massa, predetta teoricamente a priori e trovata poi sperimentalmente in accordo con le predizioni. Due teorie separate, quella delle interazioni deboli e quella delle interazioni elettromagnetiche, sono così state unificate in uno schema di coerenza teorica superiore. L'aumento di coerenza ha portato a straordinarie conseguenze e cioè alla corretta previsione della esistenza di nuovi oggetti elementari.

Non è naturalmente la prima volta che una cosa del genere si verifica. Ricordiamo che quando le due grandi teorie della fisica classica, meccanica newtoniana ed elettromagnetismo di Maxwell, furono unificate nello schema superiore della relatività speciale (che permetteva di superare il contrasto fra l'invarianza delle equazioni di Newton e la non invarianza delle equazioni di Maxwell per trasformazioni fra sistemi inerziali) una pioggia di nuove e impreviste conseguenze si abbatté sul mondo della fisica. Credo che vada ricordata, prima di tutto, la relazione $E = mc^2$ esprimente, in sostanza, la trasformabilità reciproca di materia (misurata dalla massa) e movimento (misurato dall'energia). Questa conseguenza dell'unificazione delle due teorie ha sconvolto in positivo e in negativo la nostra società, il che mostra anche quanto pratiche possano essere le conseguenze di una scoperta teorica. Un ulteriore esempio dello stesso tipo può essere l'unificazione di relatività e meccanica quantistica nell'equazione di Dirac, con la predizione delle antiparticelle.

Tre momenti importanti della crisi del platonismo furono i seguenti:

1) La scoperta del fatto che nessuna contraddizione logica derivava dalla negazione dell'assioma delle parallele (che era uno dei postulati di Euclide) e la nascita delle geometrie non euclidee. Si scoprì così che esistevano infinite geometrie possibili, tutte perfettamente razionali. E siccome il mondo reale è uno solo, finiva così ogni illusione di corrispondenza *biunivoca* fra matematica e realtà.

2) La scoperta delle « antinomie » all'interno della teoria degli insiemi, che mostrò come si potessero dedurre in modo assolutamente rigoroso delle vere e proprie contraddizioni a partire da affermazioni o da principi la cui evidenza

(1) Citato da P. Frank, *Philosophy of Science*, Prentice Hall, Englewood Cliffs 1962, 85.

sembrava incontestabile (si pensi all'antinomia di Russel). Da ciò nacque la tendenza a non cercare più nell'evidenza empirica la giustificazione degli assiomi matematici e pertanto si aprì una vera e propria frattura fra matematica e realtà.

3) La scoperta del teorema di Gödel che consisteva dell'affermazione che non si può corredare l'aritmetica di un sistema di assiomi che sia al tempo stesso *coerente* e *completo* (precisamente se si vuole che il sistema di assiomi sia coerente si deve necessariamente rinunciare alla sua completezza). (*Coerente* o non contraddittorio è un sistema di assiomi dai quali non è mai possibili dedurre una proposizione e la sua negazione. *Completo* è un sistema di assiomi dai quali è sempre possibile dedurre o una data proposizione (significativa) o la sua negazione.)

Sul piano generale, la verifica dell'esistenza di correnti di pensiero divergenti circa la natura della matematica fu fatta nel congresso di Königsberg (2) (1930) per la cultura tedesca e in quello di Londra (3) (1931) per quella russa. Nel primo vi furono tre relazioni: quella di Carnap (la fondazione *logicista* della matematica), quella di Heyting (la fondazione *intuizionista*) e quella di von Neumann (la fondazione *formalista*). A Londra si confrontarono invece i meccanicisti e i dialettici.

Scrive Centrone:

La decomposizione dell'unico universo oggettuale, vero campo di sperimentazione dei platonisti, conseguente alla caduta del progetto russelliano di edificazione di una «Grande Logica» apre la strada alla polverizzazione degli universi di discorso e alla loro estrema adattabilità in chiave operativa [Marino Centrone ha dedicato articoli e libri molto interessanti a questo problema del rapporto fra matematica e realta (4)].

A ben vedere, però, la crisi del platonismo comincia con Keplero e cioè con la stessa nascita della fisica teorica moderna, almeno dal punto di vista logico, se non da quello di una piena presa di coscienza dell'esistenza di questa crisi. Ancora più di Galileo e di Newton, Keplero è ispirato da una filosofia neoplatonica: per lui *tutto ciò che esiste* è stato creato secondo un piano matematico prestabilito e scopo della scienza è scoprire nella natura le armonie matematiche che ne regolano la struttura e l'evoluzione. Per Keplero, dunque, ci deve essere una risposta razionale per ogni problema ragionevole che riguardi le cose del mondo. In particolare vi devono essere leggi semplici e immutabili che regolano l'intero sistema solare.

Animato da questa incrollabile convinzione, Keplero passò la vita alla ricerca di regolarità nella struttura del sistema solare e nel movimento dei pianeti, utilizzando i precisissimi dati osservativi che Ticho Brahe gli aveva lasciato in

---

(2) Si veda l'appendice in L. Wittgenstein, *Osservazioni filosofiche*, Einaudi, Torino 1976.
(3) AA VV, *Scienza al bivio*, De Donato, Bari 1977.
(4) M. Centrone, « Il congresso di Königsberg », *Ann. Fac. Lett. Fil. Università di Bari*, 21, 1977, 267; « Logica e materialismo in URSS, 1920-1930 », *Ann. Fac. Lett. Fil. Università di Bari*, 24, 1981, 205.

eredità. Diciamo subito che se da un lato egli registrò clamorosi successi, le tre leggi che lo hanno reso famoso, dall'altro egli portò la scienza a sconfitte che sono molto significative proprio perché inevitabili. I successi di Keplero riguardano la regolarità dei moti dei pianeti e valgono, entro i limiti noti, con grande precisione sia per i pianeti che orbitano attorno al nostro sole che per le comete, per le stelle doppie, e così via. Le tre leggi di Keplero rappresentano un passo fondamentale nella nostra conoscenza della natura: sfruttandole a fondo Newton riuscì a unificare la fisica celeste e quella terrestre e ottenne la legge di gravitazione universale. Il successo delle leggi di Keplero è in un certo senso impressionante: le orbite dei pianeti sono con ottima precisione delle ellissi e ciò che colpisce è che una delle curve ottenute da Apollonio intersecando una superficie conica con piani di diversa inclinazione possa riprodurre così bene la traiettoria dei pianeti. Nessun'altra curva chiusa semplice, nota all'uomo, gode di questa proprietà, solo l'ellisse. Similmente è vero che entro errori piccolissimi la velocità areolare è costante e che il quadrato del periodo di rivoluzione diviso per il cubo del semiasse maggiore dell'orbita è una costante (la stessa per tutti i pianeti).

Keplero dovette pensare che queste leggi confermavano pienamente la sua filosofia neoplatonica e che l'evidenza di queste armonie nella natura non poteva derivare che da un piano razionale attorno al quale il mondo materiale era stato costruito. Era quindi naturale e quasi scontato, per lui, che regolarità altrettanto semplici dovessero nascondersi in altri aspetti del sistema solare, per esempio nella sua *struttura*. Pertanto egli si dedicò tenacemente a ricercare una legge geometrica o matematica che potesse riprodurre le distanze osservate dei pianeti dal sole. Dopo molti tentativi falliti credette di avere risolto il problema proponendo una scatola cinese di solidi regolari come regola delle distanze.

La sua idea era la seguente. Un'intercapedine sferica contiene l'orbita di Mercurio. Attorno a essa è circoscritto un *ottaedro* attorno al quale è circoscritta una nuova intercapedine sferica contenente l'orbita di Venere. Attorno a essa è circoscritto un *icosaedro* all'esterno del quale è una intercapedine sferica contenente l'orbita della Terra. Attorno a quest'ultima è circoscritto un *dodecaedro*. Successivamente si trovano:

- un'intercapedine sferica contenente l'orbita di Marte.
- un *tetraedro*.
- un'intercapedine sferica contenente l'orbita di Giove.
- un *cubo*.
- un'intercapedine sferica contenente l'orbita di Saturno.

Nulla di più semplice sapeva riprodurre le distanze dei pianeti dal sole. Oggi naturalmente sappiamo che neppure questo modello funziona sia perché abbiamo scoperto altri pianeti, mentre i solidi regolari restano cinque (più la sfera), sia perché le misure più accurate a nostra disposizione mostrano che il modello di Keplero fallisce già per i pianeti interni.

L'esigenza di Keplero di spiegare matematicamente sia i movimenti dei pianeti che le loro distanze dal sole era un'esigenza perfettamente simmetrica. Se l'universo è costruito secondo un piano razionale si dovrebbe trovare una risposta razionale semplice sia al problema del moto che a quello della struttura. Invece, oggi sappiamo che esiste una risposta razionale al problema del moto (le leggi di Keplero) e che non esiste invece una risposta razionale a quello della struttura. Liquidiamo la struttura del sistema solare come governata da eventi accidentali (distribuzione della materia nella nebulosa primordiale, interazione con altre stelle passate casualmente vicino al nostro sistema nel corso della sua evoluzione, e così via). Ci siamo convinti che là dove la storia di un sistema gioca un ruolo importante la descrizione matematica semplice è impossibile. Anche se questa concezione solleva più problemi di quanti ne risolva resta acquisita la conclusione che vi sono aspetti della realtà materiale che non sono descrivibili matematicamente in termini semplici. È questa la doppia natura del messaggio che l'opera di Keplero ci ha lasciato: la matematica talora coglie l'essenza del reale in maniera sbalorditiva, talaltra non riesce nemmeno ad approssimarlo.

Altri pensatori si sono resi conto dei limiti della razionalità della stessa matematica. Bastino qui gli esempi di Lagrange e di Frege. Lagrange alla fine del Settecento scrisse, a proposito della matematica (5):

> Tale scienza formicola invero di contraddizioni, e se, malgrado ciò, ha condotto a grandi risultati, questo dipende solo dall'infinita clemenza di Dio, il quale dispose che i suoi errori si compensassero l'un l'altro.

Non meno duro è stato Frege (6) che all'inizio del nostro secolo ha scritto:

> È veramente uno scandalo che la scienza sia tuttora all'oscuro circa l'essenza del numero. Sarebbe forse ammissibile il non possedere ancora nessuna definizione universalmente accettata di esso, se almeno ci si trovasse d'accordo sulla sostanza. Invece anche su ciò — se il numero sia un gruppo effettivo di enti, oppure sia soltanto un segno che la mano dell'uomo traccia alla lavagna, se esso formi qualcosa di mentale, sicché la psicologia debba studiarne l'origine, oppure sia invece una costruzione puramente logica; se costituisca una nostra creazione e possa quindi scomparire, o al contrario sia qualcosa di eterno — anche su tutto ciò la scienza non ha finora deciso nulla. L'aritmetica non sa se i suoi termini riguardino dei puri segni tracciati col gesso, o riguardino invece degli oggetti astratti [...]. Non costituisce tutto ciò un vero scandalo?

È un fatto acquisito nella cultura scientifica contemporanea che grandi conquiste conoscitive possono essere fatte anche senza usare lo strumento matematico. Il caso più clamoroso è quello di Darwin e della evoluzione delle specie. A partire da sole osservazioni macroscopiche Darwin riuscì a costruire l'albero della vita sulla terra, cioè un'ipotesi molto accurata di come l'evoluzione sia avvenuta. Basta sfogliare *L'origine delle specie* per rendersi conto che la matematica non ebbe alcun ruolo nella sua scoperta. Eppure le sue considerazioni

(5) Citato da F. Waismann, *Introduzione al pensiero matematico*, Baringhieri, Torino 1971, 12.
(6) Citato da F. Waismann, *Introduzione...*, *cit.*, 126.

di anatomia comparata sono state pienamente confermate da ricerche recenti svolte a livello molecolare. Com'è noto gli amino-acidi (ne esistono 20 diversi) possono formare catene lineari composte ciascuna da circa 150 amino-acidi: queste sono le proteine. Se ci si chiede quante sono le proteine possibili si finisce sul numero più grande della scienza: $N \approx 20^{150} \approx 10^{195}$, che è enormemente maggiore del numero di atomi nell'universo. Perciò solo una cifra infinitamente minore di quella delle proteine possibili a priori può esprimere il numero di proteine realmente esistenti sulla terra, il che è come dire che le proteine esistenti riflettono fortemente il particolare processo storico che le ha generate a partire dagli amino-acidi concretamente esistenti al momento della loro formazione. Ad esempio il *citocromo c* è una delle proteine che consentono agli esseri viventi l'utilizzazione dell'ossigeno atmosferico. Vi sono zone di questa molecola che possono subire cambiamenti talvolta vantaggiosi (mutazioni) in concomitanza con altri cambiamenti anatomici, fisiologici o comportamentali; alcune di queste mutazioni sono state quindi conservate dalla selezione naturale. Quando si esaminano tutte le sequenze disponibili del *citocromo c* estratto da esseri viventi anche molto diversi si possono studiare le affinità molecolari e si può ricavare in ultima analisi un albero evolutivo. Ciò che mi preme sottolineare è che questo albero evolutivo ricalca qualitativamente ciò che Darwin e altri scienziati avevano già ottenuto da paleontologia e anatomia comparata. Questa impressionante concordanza non può essere una coincidenza! Inoltre, vi sono numerose altre proteine (come le emoglobine) che danno informazioni dello stesso tipo e che permettono di trarre conclusioni analoghe. Si conclude così che Darwin ha ricostruito a grandi linee *il vero* processo evolutivo sulla terra e (quindi) che una profonda conoscenza della realtà è possibile, almeno in certi casi, anche prescindendo dall'uso dello strumento matematico. Questa conclusione sarebbe rafforzata se si considerassero altre scienze come geofisica e astrofisica che ancora oggi usano talvolta la matematica in modo molto limitato e parziale anche nei momenti in cui registrano importanti conquiste conoscitive.

Diderot, l'ideatore dell'*Enciclopedia*, aveva un atteggiamento ostile nei confronti dell'analisi matematica che accusava addirittura di falsificare la realtà. Egli era favorevole a una scienza empirista che tenesse conto della reciproca trasformazione delle scienze naturali. In ciò anticipava veramente la *Naturphilosophie* dell'Ottocento che ha in Schelling il campione della lotta per un ritotno a categorie qualitative in sostituzione della descrizione matematica che dall'epoca di Galileo e di Newton dominava la fisica. È interessante ricordare che alla *Naturphilosophie* si rifaceva explicitamente Oersted, lo scopritore delle azioni esercitate dalla corrente elettrica su di una calamita, e che la scienza qualitativa ebbe comunque nella prima metà dell'Ottocento validi esponenti in Peltier, Poggendorf, Ohm, Young e soprattutto Faraday oltre ai nostri fisici Volta e Nobili. Ancora più solido fu però il gruppo degli scienziati che usavano lo strumento matematico come forza razionalizzatrice essenziale nello studio dei fenomeni fisici: si pensi al nostro Lagrange, a Gauss e ai francesi Fourier, Ampère, Arago, Laplace, Poisson e Cauchy, per restare alla sola prima metà dell'Ottocento.

Lo scontro tra le due tendenze si concluderà più tardi con la vittoria della seconda grazie alla grande sintesi, operata da Maxwell, di tutti i fenomeni elettromagnetici. Tuttavia, l'ineliminabilità logica della corrente qualitativa appare del tutto evidente anche per il fatto che Maxwell presentò le sue equazioni come una semplice formulazione matematica delle idee di Faraday (nel *Trattato sull'elettricità e il magnetismo*). Nella prefazione alla prima edizione Maxwell scrive (7):

Man mano che procedevo nello studio di Faraday mi rendevo conto che il suo metodo di concepire i fenomeni era anche di tipo matematico, sebbene non si esprimesse nella forma convenzionale dei simboli matematici. [...] Per esempio, Faraday aveva visto cogli occhi della mente linee di forza che attraversavano tutto lo spazio, dove i matematici vedevano centri di forza che attraggono a distanza; Faraday vedeva un mezzo, dove quelli non vedevano altro che distanze. [...] Quando ebbi tradotto quelle che consideravo le idee di Faraday in forma matematica, trovai che in generale i risultati dei due metodi coincidevano, così che con entrambi si potevano spiegare gli stessi fenomeni e dedurre le stesse leggi d'azione [...].

Trovai anche che molti dei più fecondi metodi di ricerca scoperti dai matematici potevano essere espressi in termini di idee derivate da Faraday, molto meglio che non nella loro forma originaria.

Un'analisi non superficiale dei meccanismi di scoperta della fisica teorica mostra spesso che elementi « estranei », cioè non riducibili a pura razionalità deduttiva, entrano in maniera essenziale. La predizione di Dirac delle antiparticelle mi sembra emblematica. Intanto il processo di costruzione dell'equazione di Dirac è lungi dall'essere deduttivo e lineare e si sviluppa invece per mezzo di argomenti di semplicità e di ragionevolezza. Tanto che recentemente lo stesso Dirac proponeva delle alternative alla sua famosa equazione. Inoltre, ed è più importante, la deduzione rigorosa di conseguenze dall'equazione porta letteralmente... alla fine del mondo (sparizione della materia in un tempo brevissimo negli stati di energia negativa con l'emissione di un flusso enorme di raggi gamma). Per porre riparo a questa inaccettabile conclusione Dirac fece l'ipotesi (chiaramente *ad hoc*) che tutti gli stati a energia negativa fossero già occupati. Ebbene a questo punto l'equazione di Dirac riaggiustata con il mare delle energie negative è in grado di predire l'esistenza delle antiparticelle. Ricordando che questa predizione fu fatta prima che vi fosse qualsiasi evidenza empirica o anche qualsiasi previsione filosofica del tipo di quella degli atomi fatta dai filosofi antichi, non si può non restare sbalorditi. Eppure le antiparticelle sono state tutte trovate, nonostante nessuno creda seriamente all'esistenza del mare di Dirac (8).

---

(7) J. C. Maxwell, *Trattato di elettricità e magnetismo*, a cura di Evandro Agazzi, UTET, Torino 1973, 132.

(8) Sono di utilissima consultazione per il problema matematica / realtà anche le seguenti opere: E. Agazzi, *Epistemologia*, 1, 1981, 5; E. Bellone, *Il mondo di carta*, Mondadori, Milano 1976; L. Boltzmann, *Theoretical Physics and Philosophical Problems*, Reidel, Dordrecht 1974; M. Paty, *Concepts et modèles en physique des particules*, CRN/HE 77-16; J. Piaget, *Il pensiero matematico*, Emme, Milano 1982.