



Rendiconti

Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL

Memorie di Matematica

103^a (1985), Vol. IX, fasc. 10, pagg. 237-248

NICOLA RODINÒ (*)

Topologie lineari sopra uno spazio vettoriale di dimensione infinita (**)

Linear topologies Over an Infinite Dimensional Vector Space

SUMMARY. — Let V be a right infinite dimensional vector space over the division ring D , $R = \text{End}(V_D)$. After observing that there exists a natural bijection between the left ideals of R and the linear topologies on V , we study these topologies using the set of left ideals of R . A large class of complete linear topologies on V is so determined. As a side result we give a topological proof that the injective hull of $_R V$ is its second dual ${}_R V^{**}$.

0. - INTRODUZIONE

0.1. In tutto questo lavoro, D indica un anello con divisione, $V = V_D$ uno spazio vettoriale destro di dimensione infinita su D , $L(V)$ il reticolo dei sottospazi di V , R l'anello degli endomorfismi di V_D . R si supporrà dotato della *topologia finita*, che si ottiene assumendo come base di intorni di 0 in R gli ideali sinistri della forma:

$$O(F) = \{f \in R : f(F) = 0\}.$$

dove F è un sottoinsieme finito, od anche un sottospazio vettoriale di dimensione finita di V . Indicheremo con L_ω l'ideale bilatero di R costituito dagli endomorfismi di V aventi rango finito. Ricordiamo che L_ω è denso ed essenziale in ${}_R R$ e coincide con lo zoccolo di ${}_R R$, cosicché L_ω è l'intersezione degli ideali sinistri essenziali di ${}_R R$. Scriviamo i morfismi tra moduli dalla parte opposta a quella in cui operano gli scalari. Pertanto si avranno i bimoduli ${}_R V_D$, ${}_R V_D^*$, ${}_R V_D^{**}$, dove V^* e V^{**} indicano rispettivamente il duale ed il

(*) Istituto Matematico «Ulisse Dini», Viale Morgagni 67/A, 50134 Firenze, Italia.

(**) Memoria presentata il 15 ottobre 1984 da Jacopo Barbotti, uno dei XL.

bidual di V . Poiché V^* e V^{**} sono gruppi di omomorfismi, essi potranno considerarsi muniti delle rispettive topologie finite.

0.2. Sia \mathcal{F} un filtro di $L(V)$. Allora $I(\mathcal{F}) = \{f \in R : \text{Ker } (f) \in \mathcal{F}\}$ è un ideale sinistro di R . È noto (cfr. [B]) che l'assegnazione $\mathcal{F} \mapsto I(\mathcal{F})$ definisce una biiezione tra i filtri di $L(V)$ e l'insieme degli ideali sinistri di R , la cui inversa è data da:

$$I \mapsto \mathcal{F}(I) = \{\text{Ker } (f) : f \in I\}.$$

Partendo dall'ovvia constatazione che ogni topologia lineare su V è determinata dal filtro dei suoi sottospazi aperti, si ottiene una corrispondenza biunivoca tra gli ideali sinistri di R e le topologie lineari su V .

Nel presente lavoro si studiano le topologie lineari su V usando gli ideali sinistri di R . Questo punto di vista si è rivelato, a nostro giudizio, fruttuoso.

Il lavoro è suddiviso in quattro paragrafi.

Nel paragrafo 1 si dimostra un teorema di densità che fornisce il principale strumento per l'indagine svolta in seguito. Esso può enunciarsi nel modo seguente:

Siano τ una topologia lineare su V , I l'ideale sinistro associato a τ e $\text{Hom}_R(I, V)$ abbia la topologia finita. Esiste allora un morfismo canonico di spazi vettoriali topologici:

$$\chi_I : V_D \hookrightarrow \text{Hom}_R(I, V)$$

con le proprietà: χ_I è continuo ed aperto sulla sua immagine e $\chi_I(V)$ è denso in $\text{Hom}_R(I, V)$, cosicché quest'ultimo è il completamento di Hausdorff di (V, τ) .

Nel paragrafo 2 si determina una vasta classe di topologie lineari complete su V ottenute usando dei filtri appropriati su una assegnata base di V .

Nel paragrafo 3 si stabilisce una biiezione tra gli ideali sinistri I di R contenuti in L_{**} ed i sottospazi vettoriali di V^* . Usando questo risultato si vede che, indicando con τ la topologia associata a I , (V, τ) è completo se e solo se è topologicamente isomorfo al duale W^* del sottospazio vettoriale W di V^* associato a I .

- Infine nel paragrafo 4 si dimostrano gli isomorfismi canonici:

$$V^{**} \cong \text{Hom}_R(L_{**}, V) \cong \text{Hom}_R(L_{**}, V^{**})$$

ottenendo da essi una dimostrazione di carattere topologico del fatto che in $R\text{-Mod}$, V^{**} è l'involucro iniettivo di V .

L'autore ringrazia, per il loro aiuto, A. Orsatti e V. Roselli. Ringrazia altresì il Referee per i suoi utili suggerimenti.

1. - IL TEOREMA DI DENSITÀ

1.1. Siano \mathcal{A} un anello fissato, $K \in \text{Mod-}\mathcal{A}$, $T = \text{End}_\mathcal{A}(K)$. K dicesi un *autogeneratore* se per ogni $n \in \mathbb{N}$, per ogni sottomodulo B di K^n e per ogni $x \in K^n \setminus B$ esiste un morfismo $t: K^n \rightarrow K$ tale che $t(B) = 0$, $t(x) \neq 0$. Evidentemente t è una n -upla (t_1, \dots, t_n) di elementi di T e per ogni

$$y = (y_1, \dots, y_n) \in K^n \text{ si ha } t(y) = \sum_{i=1}^n t_i(y_i).$$

Sia M un \mathcal{A} -modulo destro e consideriamo il gruppo di omomorfismi $H = \text{Hom}_\mathcal{A}(M, K)$. H ha una naturale struttura di T -modulo sinistro così definita: per ogni $f \in H$ e per ogni $t \in T$ l'elemento tf di H è dato da

$$(tf)(x) = t(f(x)), \quad x \in M.$$

Sia $I = {}_\tau I$ un sottomodulo di ${}_\tau H$. Si definisce su M la topologia debole π di I assumendo come sottobase di intorni di 0 in M i sotto- \mathcal{A} -moduli della forma $\text{Ker}(f)$ con $f \in I$. Chiaramente π è una topologia lineare su M_π . Consideriamo l'applicazione

$$\chi_I: M \rightarrow \text{Hom}_T(I, {}_\pi K_A)$$

così definita: per ogni $x \in M$, $\chi_I(x)$ è il morfismo ${}_\pi I \rightarrow {}_\pi K$ dato da

$$\zeta \chi_I(x) = \zeta(x) \quad (\zeta \in I).$$

Osserviamo ora che $\text{Hom}_T(I, {}_\pi K_A)$ è un \mathcal{A} -modulo destro. In effetti se $f \in \text{Hom}_T(I, K)$ e se $a \in \mathcal{A}$ l'elemento fa è dato da:

$$\zeta(fa) = (\zeta f)a,$$

dove ζf è f calcolato in ζ e quindi è un elemento di K_π . È facile verificare che χ_I è un morfismo \mathcal{A} -lineare.

Dotiamo $\text{Hom}_T(I, K)$ della topologia finita, riguardando $\text{Hom}_T(I, K)$ come sottomodulo topologico di K^I , dove K ha la topologia discreta e K^I quella prodotto. $\text{Hom}_T(I, K)$ è chiuso in K^I , quindi $\text{Hom}_T(I, K)$ è completo e di Hausdorff nella topologia finita.

Il teorema che segue è una variante del Teorema 2.4 di [MO].

1.2. TEOREMA DI DENSITÀ: *Nella situazione 1.1 si supponga che M abbia la topologia π e $\text{Hom}_T(I, K)$ abbia la topologia finita. Allora:*

- a) $\text{Ker}(\chi_I) = \bigcap_{\zeta \in I} \text{Ker}(\zeta),$

b) χ_I è continuo ed aperto sulla propria immagine.

c) se K_A è un autocogeneratore, allora $\chi_I(M)$ è denso in $\text{Hom}_T(I, K)$ e quindi $\text{Hom}_T(I, K)$ è il completamento di Hausdorff di (M, ν) .

DIM.: a) È evidente.

b) Sia F un sottoinsieme finito di I . Un tipico intorno di 0 in (M, ν) è della forma $N = \bigcap_{i \in I} \text{Ker}(\zeta_i)$, mentre in $\text{Hom}_T(I, K)$ un tipico intorno di 0 è della forma

$$O(F) = \{f \in \text{Hom}_T(I, K) : f|_F = 0\}.$$

Risultando $\chi_I(N) = \chi_I(M) \cap O(F)$ si conclude.

c) Siano $f \in \text{Hom}_T(I, K)$, $\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$ un sottoinsieme finito di I . Poniamo

$$B = \{(\zeta_1(x), \dots, \zeta_n(x)) : x \in M\} \subset K_A^n,$$

$$y = (\zeta_1 f, \dots, \zeta_n f).$$

Dobbiamo dimostrare che $y \in B$. Supponiamo $y \notin B$. Poiché K_A è un autocogeneratore esiste $t: K_A^n \rightarrow K$ tale che $t(B) = 0$ e $t(y) \neq 0$. Si ha $t = (t_1, \dots, t_n)$ con t_i elementi di T . Per ogni $x \in M$ si ha:

$$\sum_{i=1}^n t_i \zeta_i(x) = \left(\sum_{i=1}^n t_i \zeta_i \right)(x) = 0 \quad \text{quindi} \quad \sum_{i=1}^n t_i \zeta_i = 0.$$

D'altra parte, poiché f è T -lineare, si ha:

$$t(y) = \sum_{i=1}^n t_i (\zeta_i f) = \left(\sum_{i=1}^n t_i \zeta_i \right) f \neq 0.$$

Assurdo.

D'ora in poi tutte le topologie di anello o di modulo si intendono lineari. Specializzeremo la situazione 1.2 al caso in cui $A = D$, $K = V_\nu$ e quindi $T = R$, tenendo conto del fatto che V_ν è un autocogeneratore al pari di D_ν .

2. - N -FILTRI E TOPOLOGIE LINEARI COMPLETE SU V

2.1. Sia τ una topologia su V . Esiste allora un unico ideale sinistro I di R che determina τ .

Il morfismo canonico

$$\chi_I: V \rightarrow \text{Hom}_R(I, V)$$

fornisce, a norma del teorema di densità, il completamento di Hausdorff di

(V, τ) . χ_I è suriettivo se e solo se $V/\text{Ker}(I)$, munito della topologia quoziente, è completo. Ciò vuol dire che ogni R -morfismo $t: I \rightarrow V$ è della forma $\chi_I(x)$ per $x \in V$, cioè si estende ad un R -morfismo $\tilde{t}: R \rightarrow V$.

Determiniamo ora una importante classe di ideali sinistri I tali che χ_I sia un isomorfismo.

DEFINIZIONE: Siano X un insieme, \mathcal{F} un filtro libero su X . Diremo che \mathcal{F} è un N -filtro se \mathcal{F} ha la seguente proprietà:

- (*) Se Y è un sottoinsieme di X tale che per ogni $F \in \mathcal{F}$, $Y \cap (X \setminus F)$ è finito, allora Y è finito.

È noto che \mathcal{F} è un N -filtro se e solo se \mathcal{F} non è contenuto in nessun filtro a base numerabile (cf. [DMO], Th. 1.6). In particolare ogni ultrafiltro libero su X è un N -filtro.

OSSERVAZIONE: Gli N -filteri sono stati considerati da Nienhuys in [N] e, indipendentemente, da De Marco e Orsatti in [DMO].

Siano B una base di V , \mathcal{F} un filtro su B . Per ogni $F \in \mathcal{F}$ denotiamo con $\langle F \rangle$ il sottospazio di V generato da F . Chiaramente

$$\tilde{\mathcal{F}} = \text{filtro generato da } \{\langle F \rangle : F \in \mathcal{F}\}$$

è un filtro su $L(V)$.

2.2. TEOREMA: Siano B una base di V e \mathcal{F} un N -filtro su B . Allora V , con la topologia avente $\tilde{\mathcal{F}}$ come base di intorni di 0, è completo e di Hausdorff.

DIM.: Posto $I = I(\tilde{\mathcal{F}})$, bisogna dimostrare, in base a 1.2, che l'applicazione D -lineare:

$$\chi_I: V \rightarrow \text{Hom}_R(I, V)$$

è un isomorfismo. Poiché \mathcal{F} è libero, χ_I è iniettiva. Dimostriamo che χ_I è suriettiva.

Per ogni $\varepsilon \in B$ definiamo il morfismo $p_\varepsilon \in R$ ponendo

$$p_\varepsilon(\varepsilon) = \varepsilon; \quad p_\varepsilon(b) = 0 \quad \text{per } b \in B, b \neq \varepsilon.$$

Poiché \mathcal{F} è libero, i sottoinsiemi cofiniti di B appartengono a \mathcal{F} e pertanto $p_\varepsilon \in I$ per ogni $\varepsilon \in B$. Sia $t \in \text{Hom}_R(I, V)$. Poniamo:

$$Y = \{\varepsilon \in B : p_\varepsilon t \neq 0\}$$

e dimostriamo che Y è finito. Poiché \mathcal{F} è un N -filtro è sufficiente provare che, fissato ad arbitrio $F \in \mathcal{F}$, $Y \cap (B \setminus F)$ è finito.

Osserviamo che, per ogni $x \in V$, si ha $p_e(x) = 0$ solo per un sottoinsieme finito $S(e)$ di B e che è $x = (\sum_{e \in S(e)} p_e)(x)$. Allora l'applicazione $f = \sum_{e \in F} p_e$ è ben definita e D -lineare.

Poiché $\text{Ker}(f) = \langle F \rangle$, $f \in I$ ed è quindi definito l'elemento $ft \in V$. Sia $A = S(ft)$. È $ft = (\sum_{e \in A} p_e)(ft) = (\sum_{e \in A} p_e f)t = (\sum_{e \in A} p_e)t$.

Per quanto osservato in precedenza, A è finito. Se $e \in F$ si ha $p_e f = 0$ poiché $\text{Im}(f) \subset (B \setminus F)$, quindi $p_e(f) = (p_e f)t = 0$.

Ciò prova che $A \cap F = \emptyset$. Se $e \notin F$ si ha $p_e f = p_e$ e pertanto $p_e(f) = p_e t \neq 0$ se e solo se $e \in Y$. È così provato che $A = Y \cap (B \setminus F)$. Quindi $Y \cap (B \setminus F)$ è finito per ogni $F \in \mathcal{F}$, così che Y è finito. Poniamo:

$$x = \sum_{e \in Y} p_e e = (\sum_{e \in Y} p_e)t \in V.$$

Per concludere è sufficiente provare che $\chi_I(x) = t$. Sia $g \in I$. Posto $F = \{e \in B : g(e) = 0\}$, per ogni sottoinsieme E' di F si ha:

$$g = g \sum_{e \in E'} p_e.$$

Sia infatti $\bar{e} \in B$. Se $\bar{e} \in E'$ allora $g(\bar{e}) = 0$ e $\sum_{e \in E'} p_e(\bar{e}) = 0$. Se invece $\bar{e} \notin E'$,

$$g(\bar{e}) = g \left(\sum_{e \in E'} p_e(\bar{e}) \right).$$

Sia $H = F \setminus Y$, $E \in \mathcal{F}$ poiché $F \in \mathcal{F}$ e Y è finito. Di conseguenza l'applicazione $b = \sum_{e \in H} p_e$ appartiene a I poiché $\text{Ker}(b) = \langle E \rangle$. Si ha:

$$gf = \left(g \sum_{e \in E} p_e \right) t = g \left(\left(\sum_{e \in E} p_e \right) t \right) = g \left(\sum_{e \in Y} p_e t \right) = g(x) = g\chi_I(x).$$

2.3. COROLARIO: Siano U un ultrafiltro libero su $B \times I = I(\widetilde{\Omega})$. Allora χ_I è un isomorfismo.

3. - TOPOLOGIE SU V DETERMINATE DAGLI IDEALI SINISTRI CONTENUTI IN L_+

3.1. Studieremo ora le topologie lineari su V per le quali i sottospazi vettoriali aperti hanno codimensione finita. È evidente che siffatte topologie sono in corrispondenza biunivoca con gli ideali sinistri di R contenuti in L_+ . Quanto segue stabilisce una corrispondenza biunivoca fra tali topologie ed i sottospazi vettoriali del duale V^* di V .

Sia $I <_s L_+$. Poniamo:

$$V^*(I) = \{\zeta \in V^* : \text{Ker } (\zeta) \in \mathcal{F}(I)\}.$$

È chiaro che $V^*(I)$ è un sottospazio vettoriale di V^* . Sia $W \subset V^*$. Poniamo:
 $I^*(W) = \{f \in R : \text{esistono } v_1, v_2, \dots, v_n \in V \text{ e } \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n \in W$

$$\text{tali che } f(x) = \sum_{i=1}^n v_i \zeta_i(x) \text{ per ogni } x \in V\}.$$

È facile verificare che $I^*(W)$ è un ideale sinistro di R contenuto in L_m .

3.2. LEMMA: *Dato il diagramma di A -moduli destri, con M iniettivo,*

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ f \swarrow & & \uparrow h \\ L & & N \\ \searrow & & \end{array}$$

esiste $h: N \rightarrow M$ tale che $f = h \circ g$ se e solo se $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f)$.

DIM.: Se esiste $h: N \rightarrow M$ tale che $f = h \circ g$, è chiaro che $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f)$. Viceversa supponiamo $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f)$. Esiste allora un unico morfismo $b: g(x) \rightarrow f(x)$ di $\text{Im}(g)$ in M . Infatti, se $g(x) = g(y)$, $x, y \in L$, allora

$$x - y \in \text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f)$$

e di conseguenza $f(x) = f(y)$. Poiché M è iniettivo, b si estende ad un morfismo b di N in M tale che $f = b \circ g$.

3.3. Sia I un ideale sinistro di R . Indichiamo con τ_I la topologia ad esso associata. È facile verificare che I è denso in R se e solo se $\bigcap \mathcal{F}(I) = 0$. Di conseguenza χ_I è iniettivo se e solo se I è denso in R .

3.4. PROPOSIZIONE: *Le applicazioni*

$$I \mapsto V^*(I) \quad \text{e} \quad W \mapsto I^*(W)$$

sono una l' inversa dell'altra.

DIM.: Dimostriamo che $I^*(V^*(I)) = I$ per ogni $I \subset L_m$. Sia $f \in I^*(V^*(I))$. Esistono $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ appartenenti a $V^*(I)$ e $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ tali che

$$f = \sum_{i=1}^n v_i \zeta_i.$$

Siano $g_i \in I$, $1 < i < n$, tali che

$$\text{Ker}(\zeta_i) = \text{Ker}(g_i) \quad \text{per ogni } 1 < i < n.$$

Poiché

$$\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(g_i) = \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(\zeta_i) \subset \text{Ker}(f),$$

per il Lemma 3.2 esistono $\alpha_i \in R$, $1 < i < n$, tali che

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i.$$

Pertanto $I^*(V^*(I)) \subset I$. D'altra parte, se $f \in I$, $\text{Ker}(f)$ è di codimensione finita, quindi $\text{Ker}(f)$ è intersezione di un numero finito di sottospazi di codimENSIONE 1. Siano pertanto $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ forme lineari tali che $\text{Ker}(f) = \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(\zeta_i)$.

Sia $\zeta = \zeta_1 \times \zeta_2 \times \dots \times \zeta_n$ il morfismo diagonale delle ζ_i e si consideri il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ \nearrow r & & \downarrow \zeta \\ V & & \searrow \zeta \\ & D^n & \end{array}$$

Per il Lemma 3.2 esiste b tale che $f = b \circ \zeta$, ovvero esistono $r_1, \dots, r_n \in V$ tali che

$$f = \sum_{i=1}^n r_i \zeta_i.$$

È chiaro che $\text{Ker}(\zeta_i) \in \mathcal{F}(I)$ per ogni i , $1 < i < n$.

Dimostriamo adesso che $V^*(I^*(W)) = W$ per ogni $W \subset V^*$. Sia $\zeta \in V^*$, $\zeta \in I^*(W)$. Esiste $f \in I^*(W)$ tale che $\text{Ker}(\zeta) = \text{Ker}(f)$. Allora

$$f = \sum_{i=1}^n r_i \zeta_i, \quad \text{con } r_i \in V \text{ e } \zeta_i \in W \text{ per ogni } i.$$

Per il Lemma 3.2 esiste $\eta \in V^*$ tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & D & \\ \zeta \nearrow r & & \downarrow \eta \\ V & & \searrow r \\ & V & \end{array}$$

sia commutativo.

Pertanto $\zeta = \eta \circ \sum_{i=1}^n r_i \zeta_i = \sum_{i=1}^n \eta(r_i) \zeta_i$ appartiene a W . Sia $\xi \in W$. Se $x \in V$, $r \neq 0$, $f = r\xi$ appartiene a $I^*(W)$ e, poiché $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(\zeta)$, $\zeta \in V^*(I^*(W))$.

Per la Prop. 3.4 ogni topologia su V avente una base di intorni di 0 costituita da sottospazi vettoriali di codimensione finita è la topologia debole relativa ad un unico sottospazio vettoriale del suo duale V^* . Per ogni $W \subset V^*$ sia

$$\varrho_W: V \rightarrow \text{Hom}(W, D) = W^*$$

l'applicazione D -lineare tale che

$$\zeta \varrho_W(x) = \zeta(x) \quad \text{per ogni } \zeta \in W.$$

Essendo D_0 un autocogeneratore e $\text{End}(D_0) \cong D$, per il teorema di densità 1.2, per ogni $W' \subset V^*$, $\varrho_W: V \rightarrow W'^*$ è il completamento di Hausdorff di V munito della topologia $\tau_{\varrho(W')}$.

3.5. TEOREMA: Sia $I \subset L_n$ un ideale sinistro denso. La topologia τ_I in V è completa se e solo se (V, τ_I) è isomorfo algebricamente e topologicamente al duale W^* , rispetto alla topologia finita, di uno spazio vettoriale sinistro ${}_nW$.

DIM.: Posto ${}_nW = V^*(I)$, se la topologia τ_I è completa, per il teorema di densità 1.2, l'applicazione $\varrho_W: V \rightarrow W^*$ è un isomorfismo topologico.

D'altra parte W^* è completo di Hausdorff per la topologia finita.

3.6. COROLLARIO (Teorema di struttura di Lefschetz [1, pag. 66]): V ammette una topologia linearmente compatta se e solo se V è isomorfo al duale W^* di uno spazio vettoriale sinistro ${}_nW$.

DIM.: Sia \mathcal{F}_+ il filtro dei sottospazi vettoriali aperti, dove τ è una topologia linearmente compatta su V . Se $U \in \mathcal{F}_+$, $V|U$ è linearmente compatto e discreto. Pertanto $\dim V|U$ è finita e U è di codimensione finita. Quindi $I_+ \subset L_n$. Poiché è noto che ogni topologia linearmente compatta è completa, si può applicare 3.5.

4. - ALCUNI ISOMORFISMI NATURALI E INVILUPPO INIETTIVO DI ${}_nV$

Nel seguito indicheremo con $\delta: V \rightarrow V^{**}$ l'applicazione canonica di V nel bidual e identifieremo, per semplificare le notazioni, V con $\delta(V)$. V e V^{**} sono R -moduli sinistri e δ è R -lineare.

4.1. LEMMA: Per ogni $x \in V^{**}$, $x \neq 0$, $L_{nN}x = V$.

DIM.: Sia $f \in L_n$ e sia $'f$ la trasposta di f . È ben noto che $'f$ è di rango finito. Sia $x \in V^{**}$, $x \neq 0$. Per il Teorema 1.2), V è denso in V^{**} . Pertanto esiste $v \in V$ tale che $x = v$ su $\text{Im}('f)$. Per ogni $\zeta \in V^*$ si ha:

$$\zeta(fx) = (\zeta \circ f)x = (\zeta \circ f)(v) = \zeta(f(v)).$$

Di conseguenza $fx = f(v)$.

Siano $\xi \in V^*$ e $p \in R$ di rango 1 tali che $\xi x \neq 0$ e $\xi \circ p = \xi$. Si ha:

$$\xi(px) = (\xi \circ p)x = \xi x \neq 0$$

e quindi $px \neq 0$.

Poiché L_{nN} è un R -modulo non nullo contenuto nel modulo semplice V , si ha $L_{nN} = V$. //

In base al Lemma 4.1 è possibile definire l'applicazione

$$\varphi: V^{**} \rightarrow \text{Hom}_R(L_n, V)$$

ponendo:

$$\varphi(x): f \mapsto fx \quad (f \in L_n).$$

4.2. PROPOSIZIONE: *L'applicazione φ è un isomorfismo topologico, se V^{**} e $\text{Hom}_R(L_n, V)$ sono muniti delle rispettive topologie finite.*

DIM.: Dimostriamo dapprima che φ è continua, se V^{**} e $\text{Hom}_R(L_n, V)$ sono muniti delle rispettive topologie finite.

Un tipico intorno U dello zero in $\text{Hom}_R(L_n, V)$ è costituito dagli R -morfismi $t: L_n \rightarrow V$ tali che $f_i t = 0$ per $1 < i < n$, dove $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ è un sottoinsieme finito di L_n .

Per la Proposizione 3.4, $L_n = I^*(V^*)$ e pertanto, per ogni i , $1 < i < n$, esistono $v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,m_i} \in V$ e $\zeta_{i,1}, \zeta_{i,2}, \dots, \zeta_{i,m_i} \in V^*$ tali che

$$f_i = \sum_{j=1}^{m_i} v_{i,j} \zeta_{i,j}.$$

L'insieme $W = \{x \in V^{**}; \zeta_{i,j} x = 0, \forall (i,j), 1 < i < n, 1 < j < m_i\}$ è un intorno dello zero in V^{**} .

Per ogni $v \in V$ e per ogni $\eta, \zeta \in V^*$, si ha:

$$\eta(v\zeta x) = (\eta \circ v\zeta)x = (\eta(v)\zeta)x = \eta(v)(\zeta x).$$

Pertanto, se $x \in W$, si ha $f_i \varphi(x) = f_i x = 0$ per ogni i , $1 < i < n$. Ciò dimostra che $\varphi(W) \subset U$ e quindi φ è continua.

Il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & V^{**} & \\ \delta \nearrow & \downarrow \varphi & \\ V & \xrightarrow{\chi_{L_n}} & \text{Hom}_R(L_n, V) \end{array}$$

è commutativo. Infatti, per ogni $x \in V$, si ha:

$$\varphi(\delta(x)) = fx = f(x) = f\chi_{L_n}(x).$$

Per il Teorema 1.2, sia V^{**} che $\text{Hom}_R(L_n, V)$ sono completamenti di V , munite della topologia τ_{L_n} . Per un noto teorema di topologia φ è allora un isomorfismo topologico.

4.3. TEOREMA: *Nella categoria degli R -moduli sinistri, l'enveloppe iniettiva di ${}_R V$ è ${}_R V^{**}$.*

DIM.: La dimostrazione si articola nei seguenti passi.

1) *L'applicazione di*

$$\text{Hom}_R(L_m, V) \quad \text{in} \quad \text{Hom}_R(L_m, V^{**}),$$

che a $f \in \text{Hom}_R(L_m, V)$ fa corrispondere δf , è un isomorfismo.

L'iniettività è evidente. Sia $t \in \text{Hom}_R(L_m, V^{**})$. Se $f \in L_m$, esiste un idempotente $p \in L_m$ tale che $f = fp$. Si ha:

$$ft = (fp)t = f(pt).$$

Per il Lemma 4.1, $f(pt)$ appartiene a δV e di conseguenza anche $ft \in \delta V$.

2) Sia $L_m < J$. Allora l'applicazione di restrizione di $\text{Hom}_R(J, V^{**})$ in $\text{Hom}_R(L_m, V^{**})$ è iniettiva.

Sia $t \in \text{Hom}_R(J, V^{**})$ e supponiamo che $ft = 0$ per ogni $f \in L_m$. Sia $g \in J$. Poiché L_m è un ideale bilatero, per ogni $f \in L_m$, $fg \in L_m$: Si ha:

$$f(gf) = (fg)f = 0 \quad \text{per ogni } f \in L_m.$$

Pertanto $L_m(gf) = 0$. Per il Lemma 4.1, $gf = 0$.

Componendo l'isomorfismo del punto 1) con φ (Proposizione 4.2) si ha l'isomorfismo $\varphi': V^{**} \rightarrow \text{Hom}_R(L_m, V^{**})$ che a $x \in V^{**}$ associa $\varphi'(x): f \mapsto fx$, per ogni $f \in L_m$.

Pertanto ogni morfismo di L_m in V^{**} si estende ad un morfismo di R in V^{**} .

3) *Possiamo adesso dimostrare il teorema.*

Poiché, per il Lemma 4.1, ${}_R V$ è essenziale in ${}_R V^{**}$, basterà dimostrare che ${}_R V^{**}$ è un R -modulo iniettivo.

Per il criterio di Baer, bisogna provare che, dato ad arbitrio un ideale sinistro I di R , ogni morfismo $t: I \rightarrow V^{**}$ si estende ad un morfismo $\tilde{t}: R \rightarrow V^{**}$.

Sia J un ideale sinistro di R massimale con la proprietà che $I \cap J = 0$. Sia $r: I \oplus J \rightarrow V^{**}$ il morfismo codiagonale di t e dell'applicazione banale, ovvero tale che $r|_I = t$ e $r|_J = 0$. $I + J$ è essenziale in R ([AF], 5.21 Proposition) e pertanto $L_m < I + J$. La restrizione $r|_{L_m}$ di r a L_m si estende ad un morfismo $\tilde{r}: R \rightarrow V^{**}$. Per il punto 2) $\tilde{r}|_{I+J} = r$ e di conseguenza \tilde{r} è una estensione di t .

BIBLIOGRAFIA

- [A.P] F. W. ANDERSON - K. R. FULLER, *Rings and Categories of Modules*, New York, Heidelberg, Berlin, 1974.
- [B] N. BOURBAKI, *Modules et anneaux semi-simples*, Livre II, Algèbre, Paris, 1958.
- [DM O] G. DE MARCO - A. ORSIATTI, *Complete linear topologies on Abelian groups*, Symposia Mathematica, 13 (1974), 153-161.
- [L] S. Lefschetz, *Algebraic Topology*, Am. Math. Soc. Coll. Publications, Vol. XXVII, New York, 1942.
- [M O] C. MENINI - A. ORSIATTI, *Good dualities and strongly quasi-injective modules*, Ann. Mat. Pura Appl., 127 (1981), 187-230.
- [N] J. W. NEEMHUIS, *Not locally compact monothetic groups - I-II*, Indagationes Math., 23 (1970), 295-310, 311-325.