Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
103° (1985), Vol. IX, fasc. 18, pagg. 351-358

AIME FUCHS (*) - GIORGIO LETTA (**)

Une extension d'un théorème de Koopman et von Neumann (***)

Un'estensione di un teorema di Koopman e von Neumann

SUNTO. — Si estende il classico teorema di Koopman e von Neumann sostituendo la densità asintotica con una densità di tipo assai generale (comprendente in particolare la densità analitica).

1. - INTRODUCTION

Le théorème suivant, dû à Koopman et von Neumann [2], est couramment utilisé en théorie ergodique (voir par ex.: [3], § 2.6; [4], § 1.7), dans l'étude des transformations faiblement mélangeantes:

(1.1) THÉORÈME: *Pour toute suite bornée $k \mapsto f(k)$ de nombres réels positifs, les conditions suivantes sont équivalentes:*

(*a*) *On a*

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} f(k) = 0$$

(autrement dit, f converge vers 0 au sens de Cesaro).

(*b*) *On peut trouver une partie B de $\mathbf{N}^*$, de densité asymptotique nulle, telle que $f(k)$ converge vers 0 lorsque k tend vers l'infini en restant dans le complémentaire de B.*

La « densité asymptotique » (ou « densité arithmétique ») d'une partie A de $\mathbf{N}^*$ est définie comme étant la limite (lorsqu'elle existe) de la suite $(\mu_n(A))$, où μ_n désigne la répartition uniforme sur l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$:

$$\mu_n = \frac{1}{n}(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n). \tag{1.2}$$

(*) Département de Mathématique: 7, rue René Descartes; F 67084 Strasbourg.
(**) Uno dei XL - Dipartimento di Matematica; Via Buonarroti, 2; I 56100 Pisa.
(***) Memoria presentata il 26 febbraio 1985.

ISSN-0392-4106

On remarquera d'autre part que la suite (μ_n) converge vaguement vers la mesure identiquement nulle (c'est-à-dire qu'elle converge vers 0 sur tout ensemble réduit à un point) et qu'elle permet d'exprimer la condition (a) du théorème précédent sous la forme

$$\lim_n \int f \, d\mu_n = 0 .$$

Il est donc naturel d'essayer de généraliser le théorème précédent en remplaçant la suite (1.2) par une suite quelconque de lois sur N*, qui converge vaguement vers la mesure identiquement nulle (¹). Pour obtenir une généralité encore plus grande, nous considérerons en fait, au lieu d'une suite, une famille $(\mu_s)_{s \in S}$ de lois sur N*, dont l'ensemble S des indices est muni d'un filtre, et qui converge vaguement — selon ce filtre — vers la mesure identiquement nulle. Etand donnée une telle famille filtrée $(\mu_s)_{s \in S}$, nous dirons qu'une fonction f, positive et bornée sur N*, est *négligeable* si l'on a

$$\lim_s \int f \, d\mu_s = 0 .$$

De même, nous dirons qu'une partie A de N* est négligeable si l'on a

$$\lim_s \mu_s(A) = 0$$

(c'est-à-dire si la fonction indicatrice de A est négligeable).

Avec cette terminologie, l'hypothèse que la famille (μ_s) converge vaguement vers la mesure identiquement nulle se traduit par le fait que chaque partie finie de N* est négligeable.

Etant donnée une fonction f, positive et bornée sur N*, nous nous proposons de comparer les deux conditions suivantes:

(a) *La fonction f est négligeable.*

(b) *Il existe un ensemble négligeable B, tel que $f(k)$ converge vers 0 lorsque k tend vers l'infini en restant dans le complémentaire de B.*

Nous démontrerons en fait (voir Théorème (2.2)) que ces deux conditions sont équivalentes, pourvu que la famille filtrée (μ_s) vérifie des hypothèses assez générales. Ces hypothèses sont automatiquement remplies dans le cas où la famille (μ_s) est une suite: on retrouve ainsi, comme cas particulier, le Théorème (1.1) de Koopman et von Neumann.

Un autre cas particulier dans lequel les conditions (a), (b) sont équivalentes est le cas considéré dans (3.2): ici $(\mu_s)_{s \in S}$ coïncide avec la famille qui intervient

(¹) L'idée d'une telle généralisation nous a été suggérée par une question que C. Sempi nous a proposée au sujet du théorème de Koopman et von Neumann.

dans la définition de la « densité analytique » (ou « densité de Riemann »), c'est-à-dire avec la famille $(\mu_s)_{s>1}$, où μ_s désigne (pour tout nombre réel $s>1$) la loi obtenue en normalisant la mesure qui assigne, à tout entier $k>1$, la masse k^{-s}:

$$\mu_s = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{k\geq 1} k^{-s} \varepsilon_k . \tag{1.3}$$

(L'ensemble S est, dans ce cas, l'intervalle ouvert $]1, +\infty[$, muni du filtre induit par les voisinages de 1.)

2. - Le théorème principal

Dans ce paragraphe on suppose donnée une famille $(\mu_s)_{s\in S}$ de lois sur $\mathbf{N}^*$, dont l'ensemble S des indices est muni d'un filtre $\mathcal{F}$. Les notions de fonction négligeable et d'ensemble négligeable sont à entendre au sens défini dans l'introduction. Il est utile de remarquer que la première de ces notions peut être ramenée à la seconde, moyennant la proposition élémentaire suivante:

(2.1) Proposition: *Pour toute fonction f positive et bornée sur $\mathbf{N}^*$, les conditions suivantes sont équivalentes:*

(*a*) *La fonction f est négligeable.*

(*b*) *Chacun des ensembles de la forme $\{f>\varepsilon\}$ (avec $\varepsilon>0$) est négligeable.*

Démonstration: Les implications (*a*) $\Rightarrow$ (*b*) et (*b*) $\Rightarrow$ (*a*) résultent respectivement des deux relations suivantes (valables pour tout élément s de S et tout nombre réel $\varepsilon>0$):

$$\varepsilon\mu_s\{f>\varepsilon\} < \int f\, d\mu_s ,$$

$$\int f\, d\mu_s = \int_{\{f\leq\varepsilon\}} f\, d\mu_s + \int_{\{f>\varepsilon\}} f\, d\mu_s < \varepsilon + \|f\|\mu_s\{f>\varepsilon\} .$$

Voilà maintenant l'énoncé précis du résultat général annoncé dans l'introduction:

(2.2) Théorème: *Soit $(\mu_s)_{s\in S}$ une famille de lois sur $\mathbf{N}^*$, dont l'ensemble S des indices est muni d'un filtre $\mathcal{F}$, et qui possède les propriétés suivantes:*

(i) *La famille (μ_s) converge vaguement, selon le filtre $\mathcal{F}$, vers la mesure identiquement nulle.*

(ii) *Le filtre $\mathcal{F}$ admet une base dénombrable.*

(iii) *Pour tout élément F de $\mathcal{F}$ (distinct de S), on a*

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_s([n, \infty[) = 0 .$$

Soit en outre f une fonction positive et bornée sur $\mathbf{N}^*$. Les conditions suivantes sont alors équivalentes:

(*a*) *La fonction f est négligeable (c'est-à-dire telle que l'on ait $\lim_s \int f\, d\mu_s = 0$).*

(*b*) *On peut trouver une partie B de $\mathbf{N}^*$, négligeable (c'est-à-dire telle que l'on ait $\lim_s \mu_s(B) = 0$), de telle manière que $f(k)$ converge vers 0 lorsque k tend vers l'infini en restant dans le complémentaire de B.*

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant:

(2.3) Lemme: *Plaçons nous dans les hypothèses du Théorème (2.2) (¹). Soit $(\mathcal{A}_k)_{k\geq 1}$ une suite croissante d'ensembles négligeables. Il existe alors un ensemble négligeable B, tel que chacun des ensembles $\mathcal{A}_k$ soit contenu dans B à un ensemble fini près (autrement dit, tel que chacun des ensembles $\mathcal{A}_k \cap B^c$ soit fini).*

Démonstration du lemme: Puisque le filtre $\mathcal{F}$ possède une base dénombrable, on peut trouver une suite décroissante (F_s) d'éléments de $\mathcal{F}$, qui forment une base pour $\mathcal{F}$. Quitte à passer à une sous-suite, on pourra aussi supposer que l'on ait, pour tout k,

$$\sup_{s\in F_s} \mu_s(\mathcal{A}_k) < 1/k\,. \tag{2.4}$$

(Ceci est possible car chacun des ensembles $\mathcal{A}_k$ est négligeable).

Construisons par récurrence (en utilisant l'hypothèse (iii)) une suite d'entiers $(n_k)_{k\geq 1}$, strictement croissante, avec $n_1 = 1$, telle que l'on ait, pour tout $k > 1$,

$$\sup_{s\in F_{k-1}} \mu_s([n_{k+1}, \infty[) < 1/k. \tag{2.5}$$

Posons ensuite

$$B = \bigcup_{k\geq 1} (\mathcal{A}_k \cap [n_k, n_{k+1}[).$$

Puisque la suite $(\mathcal{A}_k)$ est croissante, on a, pour tout k,

$$\mathcal{A}_k \cap [n_k, \infty[\subset B \cap [n_k, \infty[,$$

ce qui prouve que l'ensemble $\mathcal{A}_k$ est contenu dans B à un ensemble fini près.

Montrons que l'ensemble B est négligeable. Remarquons, à cet effet, que l'on a, pour tout k,

$$B = (B \cap [1, n_{k+1}[) \cup (B \cap [n_{k+1}, \infty[) \subset \mathcal{A}_k \cup [n_{k+1}, \infty[$$

(¹) On remarquera toutefois que l'hypothèse (i) du théorème (2.2) ne sera pas utilisée dans la démonstration du présent lemme.

et par suite

$$\mu_s(B) \leq \mu_s(A_k) + \mu_s([\pi_{k+1}, \infty[) . \tag{2.6}$$

En utilisant cette relation, nous nous proposons de montrer que l'on a, pour tout entier $h \geq 1$,

$$\sup_{s \in F_h} \mu_s(B) \leq 2/h . \tag{2.7}$$

Fixons, à cet effet, un élément s de F_h. Si s appartient à tous les F_k, on a, d'après (2.6) et (2.4),

$$\mu_s(B) \leq 1/k + \mu_s([\pi_{k+1}, \infty[) \qquad \text{pour tout } k ,$$

d'où l'on déduit (en faisant tendre k vers l'infini) $\mu_s(B) = 0$.

Si, par contre, s n'appartient pas à tous les F_k, alors il existe un entier $k \geq h$ tel que l'on ait $s \in F_k \setminus F_{k+1}$ et par conséquent (grâce aux relations (2.6), (2.4) et (2.5))

$$\mu_s(B) \leq 2/k \leq 2/h .$$

La relation (2.7) est donc démontrée, et ceci achève la démonstration du lemme.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le Théorème (2.2).

Remarquons, à cet effet, que la condition (b) de ce théorème équivaut manifestement à la condition suivante:

(b') On peut trouver une partie négligeable B de N^*, telle que chaque ensemble de la forme $\{f > \varepsilon\}$ (avec $\varepsilon > 0$) soit contenu dans B à un ensemble fini près (autrement dit, telle que chaque ensemble de la forme $\{f > \varepsilon\} \cap B^c$ soit fini).

Il suffit donc de démontrer l'équivalence (a) $\Leftrightarrow$ (b'). Puisque, d'après l'hypothèse (i), tout ensemble fini est négligeable, la condition (b') entraine que tout ensemble de la forme $\{f > \varepsilon\}$ est négligeable, c'est-à-dire (voir (2.1)) que la fonction f est négligeable, ce qui est la condition (a). Réciproquement, si cette dernière condition est remplie, alors, en appliquant le Lemme (2.3) à la suite (A_k) définie par

$$A_k = \{f > 1/k\} ,$$

on voit qu'il existe un ensemble négligeable B tel que chacun des ensembles de la forme $\{f > 1/k\}$ soit contenu dans B à un ensemble fini près. Il en est alors de même de chaque ensemble de la forme $\{f > \varepsilon\}$, de sorte que la condition (b') est remplie.

3. - Corollaires et cas particuliers

La condition (iii) qui figure dans l'énoncé du Théorème général (2.2) est évidemment remplie dans le cas où tout élément F du filtre $\mathcal{F}$ admet, par rapport à S, un complémentaire fini : cette situation particulière se présente notamment dans le cas où la famille (μ_s) est une suite. Le Théorème (2.2) admet donc le corollaire suivant (qui contient le théorème de Koopman et von Neumann) :

(3.1) *Soit (μ_n) une suite de lois sur* $\mathbf{N}^*$, *convergeant vagnement vers la mesure identiquement nulle. Pour toute fonction f positive et bornée sur* $\mathbf{N}^*$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *La fonction f est négligeable, c'est-à-dire telle que l'on ait*

$$\lim_n \int f\, d\mu_n = 0 .$$

(*b*) *On peut trouver une partie B de* $\mathbf{N}^*$, *négligeable (c'est-à-dire telle que l'on ait* $\lim_n \mu_n(B) = 0$), *de telle manière que $f(k)$ converge vers* 0 *lorsque k tend vers l'infini en restant dans le complémentaire de B.*

Un autre cas particulier intéressant est celui où (μ_s) coïncide avec la famille qui intervient dans la définition de la densité analytique, c'est-à-dire avec la famille $(\mu_s)_{s>1}$ définie par (1.3).

Si, par rapport à cette famille, une fonction f, positive et bornée sur $\mathbf{N}^*$, vérifie la relation

$$\lim_{s \downarrow 1} \int f\, d\mu_s = 0 ,$$

nous dirons qu'elle est *négligeable au sens de la densité analytique.* (D'après (2.1), cela revient à dire que chacun des ensembles de la forme $\{f > \varepsilon\}$ admet une densité analytique nulle.) Avec cette terminologie, on peut alors énoncer le résultat suivant (qui est encore un corollaire du Théorème général (2.2)) :

(3.2) *Pour toute fonction f positive et bornée sur* $\mathbf{N}^*$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *La fonction f est négligeable au sens de la densité analytique.*

(*b*) *On peut trouver une partie B de* $\mathbf{N}^*$, *de densité analytique nulle, telle que $f(k)$ converge vers* 0 *lorsque k tend vers l'infini en restant dans le complémentaire de B.*

Une manière simple pour ramener cet énoncé au Théorème général (2.2) consiste à utiliser un résultat de Ph. Nanopoulos démontré dans [1] (Th. (2.9), p. 455). Selon ce résultat, pour qu'une partie A de $\mathbf{N}^*$ possède une densité analytique nulle, il faut et il suffit qu'elle vérifie la relation

$$\lim_{s \downarrow 0} \mu_s(A) = 0 ,$$

où μ_ε désigne, pour tout nombre réel ε strictement positif, la loi sur N^* qui, à tout entier $k \geq 1$, assigne la masse $k^{-\varepsilon} - (k+1)^{-\varepsilon}$:

$$\mu_\varepsilon = \sum_{k \geq 1} [k^{-\varepsilon} - (k+1)^{-\varepsilon}] \varepsilon_k . \tag{3.3}$$

Or la famille $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ définie par (3.3) (où l'ensemble des indices est l'intervalle $]0, +\infty[$ muni du filtre induit par les voisinages de l'origine) vérifie manifestement les hypothèses (i) et (ii) du Théorème (2.2). Tout est donc réduit à prouver qu'elle vérifie aussi l'hypothèse (iii). Pour cela, il suffit de remarquer que l'on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sup_{\varepsilon > \varepsilon} \mu_\varepsilon([n, \infty[) = \sup_{\varepsilon > \varepsilon} n^{-\varepsilon} = n^{-\varepsilon} ,$$

et par suite

$$\lim_n \sup_{\varepsilon > \varepsilon} \mu_\varepsilon([n, \infty[) = 0 .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Fuchs - G. Letta, *Sur le problème du premier chiffre décimal*, Boll. Un. Mat. It., (6) 2-B (1983), pp. 451-461.

[2] B. O. Koopman - J. von Neumann, *Dynamical systems of continuous spectra*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 18 (1932), pp. 255-263.

[3] K. Petersen, *Ergodic Theory*, Cambridge Univ. Press, 1983.

[4] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer, 1982.