Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
103° (1985), Vol. IX, fasc. 4, pagg. 43-52

GABRIELE DARBO (*)

Teoremi di esplicitazione in grande (**)

SUNTO. — Si dà un teorema di esplicitazione per una equazione della forma $y = g(x, y)$ dove x, y variano in spazi metrici convessi e completi. Si dà inoltre un secondo teorema di esplicitazione per spazi vettoriali dotati di una famiglia filtrante di seminorme. Entrambi i risultati generalizzano un precedente teorema [1].

Global Implicit Function Theorems

SUMMARY. — We give an implicit function theorem for an equation of the form $y = g(x, y)$ with variables x, y in convex, complete metric spaces. We also give another implicit function theorem for vector spaces endowed with a directed family of seminorms. Both these results extend a previous theorem given in [1].

1. - Indicheremo con $\mathbf{R}_+$ la semiretta reale $0^+ + \infty$. Useremo, in qualunque spazio metrico, indicare con $d(-,-)$ la distanza, essendo chiaro dal contesto lo spazio metrico a cui si riferisce.

PRODOTTI METRICI: Sia

$$h: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}_+$$

una norma in $\mathbf{R}^2$ soddisfacente le seguenti condizioni:

i) $h(\xi, \eta) = h(-\xi, \eta) = h(\xi, -\eta)$ (invarianza per le simmetrie rispetto agli assi);

ii) $\max(\xi, \eta) < h(\xi, \eta) < |\xi| + |\eta|$ per ogni punto $(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^2$.

Allora, se X e Y sono spazi metrici, potremo definire una metrica sul pro-

(*) Indirizzo dell'Autore: Istituto Matematico dell'Università, Genova.
(**) Memoria presentata il 23 giugno 1984 da Giuseppe Scorza Dragoni, uno dei XL.

ISSN-0392-4106

dotto cartesiano $X \times Y$ ponendo

$$(1) \qquad d((x, y), (x', y')) = h(d(x, x'), d(y, y')),$$

dove $x, x' \in X$ e $y, y' \in Y$.

Indicheremo con $X \underset{h}{\times} Y$ (h-prodotto metrico) il prodotto cartesiano dotato della metrica (1).

Nota: Il funtore $- \underset{h}{\times} -$ è definito in modo ovvio nella categoria delle applicazioni non-espansive. Valgono le seguenti proprietà: se $a \in X$, $b \in Y$ le sezioni

$$x \mapsto (x, b) : X \to X \underset{h}{\times} Y \qquad (x \in X),$$

$$y \mapsto (a, y) : Y \to X \underset{h}{\times} Y \qquad (y \in Y),$$

sono isometriche e le proiezioni canoniche sui fattori

$$X \leftarrow X \underset{h}{\times} Y \to Y$$

sono applicazioni non-espansive.

Per quanto riguarda l'« associatività » del funtore $- \underset{h}{\times} -$ si veda [2].

2. - È nota la definizione di spazio metrico « convesso » che riportiamo per comodità;

Def: Uno spazio metrico W dicesi « convesso » se per ogni due punti $a, b \in W$ con $a \neq b$, esiste un punto w distinto da a e b e tale che

$$d(a, w) + d(w, b) = d(a, b).$$

In proposito vale la seguente proprietà degli spazi convessi e completi: (cfr. [3], [4]):

Teorema di Menger: *Se W è uno spazio metrico convesso e completo e $a, b \in W$, esiste una rappresentazione isometrica*

$$s : 0 \mapsto d(a, b) \to W$$

di un arco congiungente a con b.

Per l'h-prodotto metrico vale inoltre la seguente

Proposizione: *Se X e Y sono spazi metrici convessi e completi, tale è $X \underset{h}{\times} Y$.*

Dim.: La completezza è ovvia. Siano quindi $w_1 = (x_1, y_1)$ e $w_2 = (x_2, y_2)$ punti distinti di $X \underset{h}{\times} Y$, $\delta_1 = d(x_1, x_2)$, $\delta_2 = d(y_1, y_2)$ e

$$s_1 : 0 \mapsto \delta_1 \to X, \qquad s_2 : 0 \mapsto \delta_2 \to Y$$

rappresentazioni isometriche di archi congiungenti rispettivamente i punti x_1 con x_2 in X e y_1 con y_2 in Y.

Allora posto $\delta = d(w_1, w_2) = h(\delta_1, \delta_2)$ e definita

$$s(t) = \left(s_1\left(\frac{\delta_1}{\delta} t\right), s_2\left(\frac{\delta_2}{\delta} t\right)\right)$$

per $t \in 0^{\mapsto} \delta$, risulta che

$$s: 0^{\mapsto} \delta \to X \underset{h}{\times} Y$$

è una rappresentazione isometrica di un arco congiungente w_1 con w_2 in $X \underset{h}{\times} Y$.

3. - Siano W e Y spazi metrici e

$$g: W \to Y$$

una applicazione continua; sia a un punto di W.

Porremo per definizione

$$\omega_a(r) = \sup_{w \in B(a,r)} d(g(a), g(w)) \qquad (r \in \mathbf{R}_+),$$

dove con $B(a, r)$ si è denotata la palla di centro a e raggio r in W. Ovviamente la g è continua in a se $\omega_a(r)$ è infinitesima con r.

Se A è una parte non vuota di W porremo inoltre

$$\omega_A(r) = \sup_{a \in A} \omega_a(r).$$

Se $\omega_A(r)$ è infinitesima con r, la g è uniformemente continua in A. Dalla definizione risulta ovviamente che $\omega_A(r)$ è crescente con A (nell'ordine d'inclusione) e con r.

Vale la seguente

Proposizione: *Sia W uno spazio metrico convesso e completo e*

$$g: W \to Y$$

una applicazione non-espansiva. Allora sussiste la relazione

$$\omega_A(r + r') < \omega_A(r) + r' \tag{2}$$

per $r, r' \in \mathbf{R}_+$.

Dim: Siano $a \in W$, $w \in B(a, r + r')$; allora se $d(a, w) = r$ si ha manifestamente

$$d(g(a), g(w)) < \omega_a(r) < \omega_a(r) + r'.$$

Altrimenti sarà

$$r < d(a, x) < r + r' .$$

Per il citato teorema di Menger potremo trovare un punto x' sul « segmento metrico » congiungente a con x, tale che $d(a, x') = r$ e quindi

$$d(x', x) < r' ;$$

perciò:

$$d(g(a), g(x)) \leq d(g(a), g(x')) + d(g(x'), g(x)) \leq \omega_a(r) + r' .$$

In ogni caso vale la relazione

$$d(g(a), g(x)) \leq \omega_a(r) + r' \tag{3}$$

per ogni $x \in B(a, r + r')$. Dalla (3) passando all'estremo superiore al variare di $a \in A$ segue la (2).

Nelle ipotesi precedenti supponiamo che si abbia inoltre

$$\omega_A(r) < r \qquad \text{per ogni } r > 0 . \tag{4}$$

Allora la funzione di r

$$\theta_A(r) = r - \omega_A(r)$$

è strettamente crescente e lipschitziana di costante uno in R_+. La sua inversa θ_A^{-1} è quindi continua e infinitesima in 0.

Sempre nelle stesse ipotesi si ha pure che

$$\lim_{n \to \infty} \omega_A^n(r) = 0 \qquad (r \in R_+) , \tag{5}$$

avendo indicato con ω_A^n l'iterata n-esima di ω_A.

In seguito ci avvarremo del seguente

Lemma: *Sia $g: Y \to Y$ una applicazione non-espansiva di uno spazio metrico convesso e completo Y e A una parte non vuota e limitata di Y, stabile rispetto a g. Valga inoltre la relazione*

$$\omega_A(r) < r \qquad \text{per } r > 0 .$$

Allora g ha un unico punto fisso in Y.

Dim.: Si ha infatti

$$\operatorname{diam}(g^n(A)) < \omega_A^n(\operatorname{diam}(A))$$

e per la (5)

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{diam}(g^n(A)) = 0 .$$

Dunque la successione delle iterate $g^n(y_0)$ di un punto $y_0 \in A$ è una successione di Cauchy e converge verso un punto fisso $y = g(y) \in \bar{A}$.

Dalla non-espansività di g segue che

$$\omega_A(r) = \omega_{\bar{A}}(r)$$

per ogni $r \in \mathbf{R}_+$; pertanto se vi fosse un altro punto fisso y' di g in Y si avrebbe la contraddizione

$$d(y, y') = d(g(y), g(y')) < \omega_{\bar{A}}(d(y, y') < d(y, y')$$

dunque l'asserita unicità.

4. - Diamo ora il seguente

Teorema di esplicitazione 1: *Siano X e Y spazi metrici convessi e completi e*

$$g\colon X \underset{h}{\times} Y \to Y$$

una applicazione tale che per ogni parte limitata e non vuota $A \subset X \underset{h}{\times} Y$ si abbia

$$\omega_A(r) < r \qquad \text{per } r > 0\,; \tag{6}$$

allora, o l'equazione

$$y = g(x, y) \qquad (x \in X, y \in Y) \tag{7}$$

è priva di soluzioni, o l'insieme $E \subset X \underset{h}{\times} Y$ delle sue soluzioni è il grafico di una funzione

$$y = y(x)$$

definita per ogni $x \in X$ e uniformemente continua su ogni porzione limitata di X.

Nota: Osserviamo che se X e Y sono spazi di Banach di dimensione finita (localmente compatti), la condizione (6) è ovviamente verificata non appena si abbia:

$$d(g(x, y), g(x', y')) < d((x, y), (x', y'))$$

per ogni $(x, y) \neq (x', y')$. Dunque il presente teorema di esplicitazione generalizza quello dato in [1] e al quale esso si riduce prendendo $X = \mathbf{R}^p$, $Y = \mathbf{R}^q$ e $h(\xi, \eta) = (\xi^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}}$.

Dim: Dalle ipotesi segue immediatamente che per ogni $x \in X$ esiste al più un $y \in Y$ che soddisfa la (7). Dunque E è il grafico di una funzione il cui dominio E_0 è l'immagine di E nella proiezione canonica $X \underset{h}{\times} Y \to X$.

Se E non è vuoto, sia $w_0 = (x_0, y_0)$ un punto arbitrario di E. Poichè g è

ovviamente non espansiva, fissata $r > 0$ si avrà per qualsiasi $w = (x, y) \in X \underset{A}{\times} Y$ tale che $d(w, w_0) < r$

$$d(g(w), w_0) < \omega_{w_0}(d(w, w_0)) < \omega_{w_0}(d(y, y_0)) < \omega_{w_0}(r) + d(x, x_0) .$$

Dunque se x è tale che $d(x, x_0) < r - \omega_{w_0}(r) = \theta_{w_0}(r)$ si avrà

$$d(g(x, y), y_0) < r$$

quando $d(y, y_0) < r$. L'applicazione

$$g(x, -) : Y \to Y$$

per gli x di un intorno di x_0 soddisfa le condizioni del Lemma 1 e possiede un punto fisso $y = y(x)$; dunque E_0 è aperto in X.

Diamo ora una limitazione a priori della $y(x)$. Sia $x \in E_0$; allora si ha

$$d(y(x), y_0) = d\big(g(x, y(x)), g(x_0, y_0)\big) < \omega_{w_0}\big(d\big((x, y(x)), (x_0, y_0)\big)\big) <$$
$$< \omega_{w_0}\big(d(y(x), y_0) + d(x, x_0)\big) < \omega_{w_0}\big(d(y(x), y_0)\big) + d(x, x_0)$$

ossia

$$\theta_{w_0}\big(d(y(x), y_0)\big) < d(x, x_0) .$$

Ma, per quanto è stato osservato, θ_{w_0} è crescente e invertibile in $\mathbf{R}_+$ e si ha

$$d(y(x), y_0) < \theta_{w_0}^{-1}(d(x, x_0)), \tag{8}$$

che fornisce la limitazione per $y(x)$.

Dimostriamo che la funzione

$$y = y(x)$$

è uniformemente continua su ogni porzione limitata A_0 di E_0.

Si ha infatti per la limitazione (8) che, detta A la parte del grafico E sovrastante A_0, questa è limitata in $X \underset{A}{\times} Y$. Se $x, x' \in A_0$ si ha

$$d(y(x), y(x')) = d\big(g(x, y(x)), g(x', y(x'))\big) < \omega_A\big(d(y(x), y(x'))\big) + d(x, x')$$

ossia

$$\theta_A\big(d(y(x), y(x'))\big) < d(x, x')$$

da cui

$$d(y(x), y(x')) < \theta_A^{-1}(d(x, x'))$$

e pertanto l'uniforme continuità della $y(x)$ in A_0 essendo θ_A^{-1} infinitesima nel punto 0.

Per l'uniforme continuità della funzione $y(x)$ sulle parti limitate di E_0, esiste il prolungamento per continuità della $y(x)$ alla chiusura di E_0 e i punti del grafico di detto prolungamento soddisfano l'equazione (7), quindi appartengono a E; dunque $E_0 = E_0$.

Poichè X è connesso, E_0 aperto e chiuso in X, se non è vuoto, dovrà coincidere con X.

5. - In questo paragrafo dimostreremo un altro teorema di esplicitazione coll'intenzione di farne applicazione alla teoria dei sistemi. Introduciamo intanto alcune definizioni.

Sia $(\mathfrak{T}, \prec)$ un insieme ordinato filtrante; tale cioè che per ogni due elementi vi sia un maggiorante comune.

Def.: Diremo $\mathfrak{T}$-spazio un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathfrak{X}$ in cui è assegnata una famiglia di seminorme indiciata in $\mathfrak{T}$, crescente rispetto all'indice e tale che $\mathfrak{X}$ risulti completo rispetto alla topologia caratterizzata da detta famiglia.

Esempio: Sia $\mathfrak{T} = \mathbb{R}$ con l'ordinamento naturale e $\mathfrak{X}$ lo spazio delle funzioni reali definite in $\mathbb{R}$ e di quadrato sommabile sulle semirette del tipo $-\infty^{-1} T$.

Se poniamo

$$\|x\|_T = \left(\int_{-\infty}^{T} |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \qquad T \in \mathfrak{T},$$

abbiamo una famiglia di seminorme che fornisce ad $\mathfrak{X}$ la struttura di $\mathfrak{T}$-spazio.

Nelle applicazioni l'insieme $\mathfrak{T}$ avrà il significato di tempo: i suoi elementi li chiameremo talvolta « istanti » e il $\mathfrak{T}$-spazio sarà uno spazio di « segnali ».

Def.: Sia $\mathfrak{T}$ un insieme ordinato filtrante e siano $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{Y}$ due $\mathfrak{T}$-spazi. Diremo morfismo tra $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{Y}$ un'applicazione

$$g : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$$

anche non lineare, che trasformi l'origine di $\mathfrak{X}$ in quella di $\mathfrak{Y}$ e risulti non espansiva rispetto a tutte le seminorme della famiglia: sia cioè

$$\|g(x) - g(x')\|_T \leq \|x - x'\|_T$$

per ogni $T \in \mathfrak{T}$ e $x, x' \in \mathfrak{X}$.

Dall'esempio precedente si nota subito il carattere causale di un morfismo. In generale i morfismi tra $\mathfrak{T}$-spazi formano una categoria in cui si trova come sottocategoria la categoria Ban_1 degli spazi di Banach e morfismi lineari non-espansivi.

Nella categoria dei $\mathfrak{T}$-spazi possiamo definire un prodotto (b-join) per mezzo di una norma b in $\mathbb{R}^2$ soddisfacente le solite proprietà del paragrafo 1.

Siano $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{Y}$ dei $\mathfrak{T}$-spazi; definiamo la famiglia di seminorme su $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ ponendo

$$|(x, y)|_T = h(|x|_T, |y|_T) \qquad \text{per } T \in \mathfrak{T}.$$

Questa famiglia è crescente e lo spazio risulta completo, quindi un $\mathfrak{T}$-spazio che indicheremo con $\mathfrak{X} \underset{h}{\oplus} \mathfrak{Y}$. Le sezioni sono isometriche e le proiezioni canoniche non-espansive; appartengono dunque alla categoria dei $\mathfrak{T}$-spazi.

Consideriamo un $\mathfrak{T}$-spazio $\mathfrak{X}$ e un istante $T \in \mathfrak{T}$; l'insieme degli elementi $x \in \mathfrak{X}$ per cui è $|x|_T = 0$ forma un sottospazio vettoriale V_T di $\mathfrak{X}$. Il quoziente $\mathfrak{X}/V_T$ si presenta come spazio normato se prendiamo come norma quella indotta da $|-|_T$. In generale questo spazio non è completo. Il suo completamento lo indicheremo con $\mathfrak{X}_T$ e conserveremo la notazione $|-|_T$ per la sua norma.

Se T_1 e T_2 sono istanti e $T_1 < T_2$, allora per la monotonia della famiglia di seminorme si ha il diagramma commutativo di morfismi

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X} \arrow[r, "\alpha_{T_1}"] \arrow[dr, "\alpha_{T_2}"'] & \mathfrak{X}_{T_1} \arrow[d, "\alpha_{T_1,T_2}"] \\ & \mathfrak{X}_{T_2} \end{tikzcd}$$

e $\mathfrak{X}$ si presenta come limite inverso del sistema associato

$$(\mathfrak{X}_T, \alpha_{T_1,T_2}). \tag{9}$$

Una famiglia coerente del sistema (9) è una famiglia di punti $(x_T)_{T \in \mathfrak{T}}$ con $x_T \in \mathfrak{X}_T$ compatibile con i morfismi del sistema; vale a dire per ogni due istanti T_1 e T_2 con $T_1 < T_2$ si abbia

$$\alpha_{T_1,T_2}(x_{T_1}) = x_{T_2}.$$

Data una famiglia coerente, esiste uno ed un solo punto $x \in \mathfrak{X}$ tale che

$$\alpha_T(x) = x_T$$

per ogni istante T. Infatti se consideriamo le immagini inverse nelle proiezioni

$$\mathfrak{X} \xrightarrow{\alpha_T} \mathfrak{X}_T$$

delle palle di centro x_T al variare del raggio e dell'istante T, si ottiene su $\mathfrak{X}$ una base di filtro di Cauchy e per la completezza di $\mathfrak{X}$ ci sarà un unico punto aderente al filtro. Tale punto avrà come immagine nelle proiezioni α_T proprio i punti x_T della famiglia coerente assegnata.

Possiamo ora dimostrare il seguente

Teorema di esplicitazione 2: *Siano $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{Y}$ due $\mathfrak{T}$-spazi, h una norma in $\mathbf{R}^1$ del tipo considerato nel paragrafo* 1. *Sia inoltre*

$$g\colon \mathfrak{X} \underset{h}{\oplus} \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Y}$$

un'applicazione tale che per ogni $T \in \mathfrak{T}$ risulti, con ovvio significato dei simboli,

$$\omega_{A,T}(r) < r$$

per $r > 0$ e per ogni parte A limitata e non vuota di $\mathfrak{X} \underset{h}{\oplus} \mathfrak{Y}$. Allora l'equazione

$$y = g(x, y)\,, \qquad x \in \mathfrak{X}\,,\, y \in \mathfrak{Y} \tag{10}$$

o è priva di soluzioni o l'insieme delle soluzioni è grafico di una funzione $y = y(x)$ definita in $\mathfrak{X}$ e uniformemente continua sulle parti limitate di $\mathfrak{X}$.

Per la dimostrazione si osservi che per ogni $T \in \mathfrak{T}$ si ha un'applicazione indotta tra gli spazi di Banach

$$g_T\colon \mathfrak{X}_T \underset{h}{\oplus} \mathfrak{Y}_T \to \mathfrak{Y}_T$$

che soddisfa le condizioni del Teorema di esplicitazione 1 (per spazi metrici convessi). Se l'insieme delle soluzioni della (10) non è vuoto, tale sarà quello delle souzioni dell'equazione

$$y = g_T(x, y) \qquad x \in \mathfrak{X}_T\,,\, y \in \mathfrak{Y}_T\,.$$

Le soluzioni di quest'ultima formano il grafico di una funzione definita in $\mathfrak{X}_T$ e uniformemente continua sulle parti limitate di $\mathfrak{X}_T$.

Infatti sia $x \in \mathfrak{X}$ e $(x_T)_{T \in \mathfrak{T}}$ la famiglia coerente delle proiezioni di x. Allora anche la famiglia $(y_T(x_T))$ sarà coerente e in base alle considerazioni fatte precedentemente si potrà rilevare su $\mathfrak{Y}$ un punto $y = y(x)$ per ogni $x \in \mathfrak{X}$.

La funzione $y(-)$ sarà tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X} \arrow[r, "y(-)"] \arrow[d] & \mathfrak{Y} \arrow[d] \\ \mathfrak{X}_T \arrow[r, "y_T(-)"'] & \mathfrak{Y}_T \end{tikzcd}$$

in cui le frecce verticali indicano le proiezioni, risulterà commutativo per ogni istante T. L'uniforme continuità delle funzioni $y_T(-)$ sulle parti limitate di $\mathfrak{X}_T$ per ogni T comporta l'analoga proprietà per la $y(-)$. Ciò è quanto volevasi dimostrare.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] G. Darbo, *Un teorema di esplicitazione in grande*, Rend. Acc. Naz. dei XL, (1981-82), vol. V, fasc. 4, pagg. 49-52.

[2] G. Darbo, *Semigruppi continui ed omogenei su R^+*, Rend. Acc. Naz. dei XL, (1983), vol. VII, fasc. 9, pagg. 143-154.

[3] W. A. Kirk, *Caristi's fixed point theorem and metric convexity*, Colloquium Mathematicum, (1976), fasc. 1, vol. XXXVI, pagg. 81-86.

[4] K. Menger, *Untersuchungen über allgemeine Metrik*, Math. Ann., 100 (1928), pagg. 75-163.

Direttore responsabile: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
« Monograf » - Via Collamarini, 5 - Bologna