Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
103° (1985), Vol. IX, fasc. 8, pagg. 203-214

DOMENICO CANDELORO (*) - GIORGIO LETTA (**)

Sui teoremi di Vitali-Hahn-Saks e di Dieudonné (***) (*,*)

On the Vitali-Hahn-Saks and Dieudonné Theorems

SUMMARY. — We give a general version of the well-known Vitali-Hahn-Saks theorem, concerning convergent sequences of measures. Then we use this result to obtain an abstract form of the theorem of Dieudonné, related to convergent sequences of regular measures.

INTRODUZIONE

Sebbene sia trascorso più di mezzo secolo dalla prima formulazione (dovuta a Nikodym [10]) del cosiddetto teorema di Vitali-Hahn-Saks, questo suggestivo risultato continua ad esser oggetto di ricerca; e si può ben dire che in ognuna delle sue svariate formulazioni finora note ci sia qualcosa di sorprendente: cioè il fatto che certe proprietà continuino a valere, quasi inspiratamente, in strutture e situazioni tanto lontane da quelle originarie. Il processo di generalizzazione si è sviluppato essenzialmente in tre direzioni: estensione della struttura algebrico-topologica dell'insieme in cui le misure in giuoco prendono i loro valori; passaggio dall'additività numerabile alla finita additività; indebolimento della struttura di σ-algebra per il dominio di definizione delle misure. Una ricca rassegna dei risultati ottenuti al riguardo si può trovare in [4].

Tra i teoremi tradizionalmente legati a quello di Vitali-Hahn-Saks, figura, oltre a un classico teorema di Nikodym sull'uniforme limitatezza (si veda [9], [3], [8], [11]), un teorema, assai più profondo, dovuto a Dieudonné [5]: « Se una successione di misure di Borel regolari, su un spazio di Hausdorff compatto, converge su ogni insieme aperto, essa converge su ogni insieme bore-

(*) Dipartimento di Matematica dell'Università di Perugia.
(**) Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa.
(***) Lavoro parzialmente eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.
(*,*) Memoria presentata il 3 settembre 1984 da Giuseppe Scorza Dragoni, uno dei XL.

ISSN-0392-4106

liano. In tal caso, inoltre, le misure della successione sono uniformemente regolari. » Le estensioni di questo teorema esistenti nella letteratura sembrano alquanto artificiose: e anche le dimostrazioni appaiono spesso piuttosto complicate, e comunque poco intuitive: si veda ad es. [1], [2] (*).

Nella presente nota si dimostra dapprima una versione assai generale del teorema di Vitali-Hahn-Saks (Teorema (2.4)), valida per funzioni finitamente additive in un'algebra $\mathcal{A}$, a valori in un gruppo abeliano topologico Γ. Questo risultato permette poi di ottenere, in modo abbastanza diretto e naturale, una formulazione astratta del teorema di Dieudonné (Teorema 4.1)), la quale riguarda ancora funzioni finitamente additive nell'algebra $\mathcal{A}$, a valori nel gruppo topologico Γ. In questa formulazione, il concetto topologico di regolarità (per una misura di Borel su uno spazio di Hausdorff compatto) è sostituito con un concetto « astratto » di regolarità, definito mediante un'opportuna coppia $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ di reticoli (contenuti nell'algebra $\mathcal{A}$ e aventi rispettivamente il ruolo del reticolo degli insiemi compatti e di quello degli insiemi aperti). Inoltre il ruolo della numerabile additività è svolto da una nozione assai più debole: quella di $\mathcal{G}$-esaustività (v. Def. (1.1)).

1. - Esaustività

In tutto il séguito, Γ designa un gruppo abeliano topologico separato, il cui elemento neutro viene indicato con 0. Se (B_n) è una successione di parti di Γ, la scrittura

$$\lim_n B_n = 0$$

è un modo abbreviato per significare che, per ogni intorno U di 0, si ha definitivamente $B_n \subset U$.

Una *massa* (a valori in Γ) è una funzione finitamente additiva, a valori in Γ, definita in un'algebra d'insiemi. Una *misura* è una massa che sia definita su una tribù (o σ-algebra d'insiemi) e che sia numerabilmente additiva.

In tutto il séguito, $\mathcal{A}$ designa una fissata algebra d'insiemi, ammettente Ω come elemento massimo, mentre $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ denotano due reticoli d'insiemi, entrambi contenuti in $\mathcal{A}$, tali che il complementare (rispetto ad Ω) di ciascun elemento di $\mathcal{F}$ appartenga a $\mathcal{G}$. Un esempio tipico di questa situazione si ottiene supponendo che Ω sia uno spazio topologico, nel quale $\mathcal{A}$ sia la tribù boreliana, $\mathcal{G}$ il reticolo degli insiemi aperti, $\mathcal{F}$ un reticolo d'insiemi chiusi (per esempio, quello degli insiemi chiusi e compatti).

Se λ è una funzione definita in una classe $\mathcal{K}$ d'insiemi, si pone, per ogni elemento B di $\mathcal{K}$,

$$\lambda^*(B) = \{\lambda(A) : A \in \mathcal{K},\ A \subset B\}.$$

(*) Recentemente il Prof. Morales ci ha comunicato di aver trovato un'estensione al caso di misure a valori in un semigruppo topologico.

(1.1) Definizione: Una massa μ sull'algebra $\mathcal{A}$ si dice $\mathfrak{G}$-*esaustiva* se, per ogni successione (G_n) di elementi di $\mathfrak{G}$ a due a due disgiunti, si ha $\lim_n \mu(G_n) = 0$. (In tal caso, se si denota con λ la restrizione di μ a $\mathfrak{G}$, si ha anche $\lim_n \lambda^+(G_n) = 0$ per ogni successione (G_n) di elementi di $\mathfrak{G}$ a due a due disgiunti.)

(1.2) Definizione: Una successione (μ_i) di masse su $\mathcal{A}$ si dice *uniformemente* $\mathfrak{G}$-*esaustiva* se, per ogni successione (G_n) di elementi di $\mathfrak{G}$ a due a due disgiunti, si ha

$$\lim_n \sum_i \lambda_i^+(G_n) = 0 ,$$

dove, per ciascun i, λ_i denota la restrizione di μ_i a $\mathfrak{G}$.

Una massa su $\mathcal{A}$, che sia $\mathcal{A}$-esaustiva, si dice semplicemente *esaustiva*. Così pure una successione di masse su $\mathcal{A}$, che sia uniformemente $\mathcal{A}$-esaustiva, si dice *uniformemente esaustiva*.

(1.3) Definizione: Diremo che il reticolo $\mathfrak{G}$ gode della *proprietà* (E) (v. [11]) se, per ogni successione (G_n) di elementi di $\mathfrak{G}$ a due a due disgiunti, esiste una sottosuccessione (G_{n_k}) tale che $\mathfrak{G}$ contenga tutte le unioni d'insiemi del tipo G_{n_k}.

Il lemma elementare che segue è utile perchè permette, in certe situazioni, di ricondursi al caso in cui il gruppo Γ sia metrizzabile.

(1.4) Lemma: *Sia U un intorno dello zero in Γ. Esistono allora un gruppo abeliano metrizzabile Γ_1, un omomorfismo continuo b di Γ su Γ_1 e un intorno W dello zero in Γ_1, tali che si abbia $b^{-1}(W) \subset U$.*

Dimostrazione: Per induzione si può costruire una successione $(U_n)_{n\geq 1}$ d'intorni simmetrici dello zero in Γ, tale che si abbia:

$$U_1 + U_1 \subset U , \qquad U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n \text{ per ogni } n \geq 1 .$$

Denotiamo con Γ_0 il gruppo topologico (non necessariamente separato) ottenuto munendo il gruppo Γ dell'unica topologia, compatibile con la sua struttura di gruppo, che ammetta $(U_n)_{n\geq 1}$ come sistema fondamentale d'intorni dello zero. Poniamo poi $V = \bigcap_{n\geq 1} U_n$. Allora V è un sottogruppo chiuso di Γ_0, e il gruppo topologico quoziente $\Gamma_1 = \Gamma_0/V$ è metrizzabile. Denotiamo con b l'omomorfismo canonico di Γ_0 su Γ_1, e poniamo $W = b(U_1)$. Poiché la topologia di Γ_0 è meno fine di quella di Γ, b è a maggior ragione un omomorfismo continuo di Γ su Γ_1. Inoltre W è un intorno dello zero in Γ_1, e si ha:

$$b^{-1}(W) = U_1 + V \subset U_1 + U_1 \subset U .$$

Il lemma è così dimostrato.

2. - Il teorema di Vitali-Hahn-Saks

La seguente forma del teorema di Vitali-Hahn-Saks è ben nota, e facilmente dimostrabile con le tecniche usuali (v. [6]):

(2.1) Teorema: *Se una successione di misure (a valori in Γ), tutte assolutamente continue rispetto a una medesima misura reale positiva, converge puntualmente, essa è uniformemente esaustiva.*

Useremo questo enunciato per giungere a enunciati più generali. Premettiamo, a questo scopo, alcuni lemmi.

(2.2) Lemma: *Si supponga che il reticolo $\mathfrak{G}$ goda della proprietà (E). Sia μ una massa $\mathfrak{G}$-esaustiva su $\mathcal{A}$, e sia $(G_i)_{i\in I}$ una famiglia infinita numerabile di elementi di $\mathfrak{G}$ a due a due disgiunti. Sia infine U un intorno di 0 in Γ. Esiste allora una parte infinita I_0 di I con la proprietà seguente:*

(*) *Per ogni parte H di I_0, risulta $\mu\left(\bigcup_{i\in H} G_i\right) \in U$.*

Dimostrazione: Senza perdita di generalità, possiamo supporre che $\mathfrak{G}$ contenga tutte le unioni d'insiemi del tipo G_i.

Sia (I_k) una successione di parti infinite di I, a due a due disgiunte. Se nessuna di esse possiede la desiderata proprietà (*), si può trovare, per ogni k, una parte H_k di I_k verificante la relazione

$$\mu\left(\bigcup_{i\in H_k} G_i\right) \in U^c.$$

Ma ciò contraddice la supposta $\mathfrak{G}$-esaustività di μ. Il lemma è così dimostrato.

(2.3) Lemma: *Si supponga che il gruppo Γ sia metrizzabile e che il reticolo $\mathfrak{G}$ possieda la proprietà (E). Sia μ una massa $\mathfrak{G}$-esaustiva su $\mathcal{A}$, e sia $(G_i)_{i\in I}$ una famiglia infinita numerabile di elementi di $\mathfrak{G}$ a due a due disgiunti. Allora esiste una parte infinita J di I, tale che la restrizione di μ alla tribù generata dalla famiglia $(G_i)_{i\in J}$ sia una misura.*

Dimostrazione: Sia (U_n) una successione decrescente che costituisca un sistema fondamentale d'intorni di 0 in Γ. Sfruttando il lemma precedente, si può costruire, per induzione, una successione decrescente (I_n) di parti infinite di I, tale che, per ogni n, si abbia $I_{n+1} \subsetneq I_n$ e

$$\mu\left(\bigcup_{i\in H} G_i\right) \in U_n \text{ per ogni parte } H \text{ di } I_n.$$

Si scelga allora, per ogni n, un elemento j_n di $I_n \setminus I_{n+1}$, e si ponga $J = \{j_n : n \geq 1\}$. L'insieme J così costruito possiede la proprietà desiderata.

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente enunciato, più generale di (2.1).

(2.4) Teorema: *Si supponga che il reticolo $\mathfrak{G}$ possieda la proprietà* (*E*) (*v. Def.* (1.3)). *Sia* (μ_i) *una successione di masse* $\mathfrak{G}$*-esaustive nell'algebra* $\mathcal{A}$, *convergente su ogni elemento di* $\mathfrak{G}$. *Allora la successione* (μ_i) *è uniformemente* $\mathfrak{G}$*-esaustiva.*

Dimostrazione: Il Lemma (1.4) permette di ricondursi facilmente al caso in cui Γ sia metrizzabile. Ragionando per assurdo, neghiamo la tesi. Esistono allora: un intorno U di 0 in Γ, una successione strettamente crescente (i_n) d'interi e una successione (G_n) di elementi di $\mathfrak{G}$ a due a due disgiunti, tali che si abbia

$$\mu_{i_n}(G_n) \in U^c \text{ per ogni } n\,. \tag{2.5}$$

La tribù $\mathfrak{J}$ generata su Ω dagli insiemi G_n è contenuta nell'algebra $\mathcal{A}$ e ammette come atomi gli insiemi G_n e il complementare della loro riunione. Pertanto esiste su di essa una misura reale positiva che si annulli solo sull'insieme vuoto. Grazie al Lemma (2.3), si può supporre (pur di passare a opportune sottosuccessioni) che, per ogni n, la restrizione di μ_{i_n} a $\mathfrak{J}$ sia una misura. Grazie a (2.1), queste restrizioni formano allora una successione uniformemente esaustiva. Ma ciò contrasta con la relazione (2.5). Il teorema è così dimostrato.

(2.6) Corollario: *Una successione di masse esaustive su una medesima tribù, che converga su ogni elemento di questa, è uniformemente esaustiva.*

3. - Regolarità e suoi rapporti con l'esaustività

(3.1) Definizione: Una massa μ sull'algebra $\mathcal{A}$ si dice *regolare* se verifica le due condizioni seguenti:

(a) per ogni elemento A di $\mathcal{A}$, esiste una coppia (F_n), (G_n) di successioni d'insiemi, verificante le relazioni

$$F_n \in \mathfrak{F}\,,\ G_n \in \mathfrak{G}\,,\ F_n \subset F_{n+1} \subset A \subset G_{n+1} \subset G_n \text{ per ogni } n\,, \tag{3.2}$$

e tale che si abbia

$$\lim_n \mu^+(G_n \setminus F_n) = 0$$

(e quindi, in particolare, $\mu(A) = \lim_n \mu(F_n)$):

(b) per ogni elemento B di $\mathfrak{F}$, esiste una coppia (G_n), (F_n) di successioni d'insiemi, verificante le relazioni

$$G_n \in \mathfrak{G}\,,\ F_n \in \mathfrak{F}\,,\ B \subset F_{n+1} \subset G_n \subset F_n \text{ per ogni } n\,, \tag{3.3}$$

è tale che si abbia

$$\lim_n \mu^+(G_n \setminus B) = 0 .$$

(3.4) Osservazione: Si supponga in particolare che l'insieme Ω sia munito di una topologia di spazio normale (risp. di spazio di Hausdorff localmente compatto), che $\mathcal{A}$ sia la tribù boreliana di Ω, $\mathcal{F}$ il reticolo degli insiemi chiusi (risp. compatti), $\mathcal{G}$ quello degli insiemi aperti, e che μ sia una misura reale nella tribù boreliana. Si vede allora che, nella definizione precedente, la condizione (b) è una conseguenza della condizione (a), e che quest'ultima si riduce semplicemente all'usuale condizione di regolarità per la misura μ (consistente nell'imporre l'approssimabilità dall'esterno con insiemi aperti, e dall'interno con insiemi chiusi (risp. compatti)).

(3.5) Osservazione: Sia (μ_i) una successione di masse regolari su $\mathcal{A}$. Assegnato un elemento A di $\mathcal{A}$, si può allora costruire (usando un classico procedimento diagonale) una coppia (F_n), (G_n) di successioni d'insiemi, verificante le relazioni (3.2) e tale che si abbia

$$\lim_n \mu_i^+(G_n \setminus F_n) = 0 \quad \textit{per ogni } i . \tag{3.6}$$

In modo analogo, assegnato un elemento B di $\mathcal{F}$, si può costruire una coppia (G_n), (F_n) di successioni d'insiemi, verificante le relazioni (3.3) e tale che si abbia

$$\lim_n \mu_i^+(G_n \setminus B) = 0 \quad \textit{per ogni } i . \tag{3.7}$$

(3.8) Definizione: Una successione (μ_i) di masse sull'algebra $\mathcal{A}$ si dice *uniformemente regolare* se verifica le due condizioni seguenti:

(a) per ogni elemento A di $\mathcal{A}$, esiste una coppia (F_n), (G_n) di successioni d'insiemi, verificante le relazioni (3.2) e tale che si abbia

$$\lim_n \bigcup_i \mu_i^+(G_n \setminus F_n) = 0 ; \tag{3.9}$$

(b) per ogni elemento B di $\mathcal{F}$, esiste una coppia (G_n), (F_n) di successioni d'insiemi, verificante le relazioni (3.3) e tale che si abbia

$$\lim_n \bigcup_i \mu_i^+(G_n \setminus B) = 0 . \tag{3.10}$$

Sussiste il seguente teorema:

(3.11) Teorema: *Si supponga che la successione (μ_i), di masse regolari su $\mathcal{A}$, sia uniformemente $\mathcal{G}$-esaustiva. Allora essa è uniformemente esaustiva e uniformemente regolare.*

Allo scopo di dimostrare il teorema sopra enunciato, premettiamo alcuni lemmi.

(3.12) LEMMA: *Sia μ una massa regolare su A, e si denoti con λ la sua restrizione a $\mathfrak{G}$. Allora, per ogni elemento G di $\mathfrak{G}$, l'insieme $\mu^+(G)$ è contenuto nell'aderenza dell'insieme $\lambda^+(G) - \lambda^+(G)$.*

DIMOSTRAZIONE: Infatti, per ogni elemento A di A contenuto in G, $\mu(A)$ è aderente all'insieme

$$\{\mu(F) : F \in \mathfrak{F},\ F \subset A\},$$

il quale, essendo identico all'insieme

$$\{\mu(G) - \mu(G \setminus F) : F \in \mathfrak{F},\ F \subset A\},$$

è contenuto nell'insieme $\lambda^+(G) - \lambda^+(G)$.

(3.13) LEMMA: *Si supponga che la successione (μ_i) di masse regolari su A sia uniformemente $\mathfrak{G}$-esaustiva. Assegnato un elemento B di $\mathfrak{F}$, sia (G_n), (F_n) una coppia di successioni d'insiemi, verificante le relazioni* (3.3), (3.7) (*cfr.* (3.5)). *Allora sussiste anche la relazione* (3.10).

DIMOSTRAZIONE: Cominciamo con l'osservare che, per ogni coppia i, n d'interi e per ogni elemento A di A, con $A \subset G_n \setminus B$, risulta

$$\mu_i(A) = \lim_m \mu_i(A \cap F_m^n). \tag{3.14}$$

Per convincersene basta scrivere, per ogni $m > n$, l'ovvia relazione

$$\mu_i(A) - \mu_i(A \cap F_m^n) = \mu_i(A \cap F_m) \in \mu_i^+(G_{m-1} \setminus B).$$

Osserviamo in secondo luogo che, grazie al lemma precedente, la relazione (3.10) da dimostrare è equivalente alla relazione

$$\lim_n \bigcup_i \lambda_i^+(G_n \setminus B) = 0,$$

dove, per ciascun i, λ_i denota la restrizione di μ_i a $\mathfrak{G}$. Ragionando per assurdo, supponiamo che quest'ultima relazione sia falsa. Esiste allora un intorno chiuso U di 0 in Γ con la proprietà seguente: per ogni intero p, esistono un intero $n > p$, un intero i e un elemento A di $\mathfrak{G}$, tali che si abbia

$$A \subset G_n \setminus B, \qquad \mu_i(A) \in U^c$$

e quindi anche (in virtù di (3.14))

$$\mu_i(A \cap F^c_m) \in U^c \text{ per } m \text{ abbastanza grande}.$$

Sfruttando questa proprietà di U, si possono costruire, per induzione, tre successioni d'interi (n_k), (i_k), (m_k) e una successione (A_k) di elementi di $\mathcal{G}$, in modo tale che si abbia, per ogni k,

$$A_k \subset G_{n_k} \setminus B, \qquad \mu_{i_k}(A_k \cap F^c_{m_k}) \in U^c, \qquad n_k < m_k < n_{k+1}.$$

Poichè gli insiemi $A_k \cap F^c_{m_k}$ appartengono a $\mathcal{G}$ e sono a due a due disgiunti, ciò contraddice l'ipotesi di uniforme $\mathcal{G}$-esaustività.

Se si applica il lemma ora dimostrato prendendo $\mathcal{F} = \mathcal{G} = \mathcal{A}$ e $B = \emptyset$, si ottiene il corollario seguente:

(3.15) Corollario: *Si supponga che la successione (μ_i) di masse su $\mathcal{A}$ sia uniformemente esaustiva, e sia (A_n) una successione decrescente di elementi di $\mathcal{A}$, tale che si abbia*

$$\lim_n \mu_i^+(A_n) = 0 \text{ per ogni } i.$$

Si ha allora

$$\lim_n \bigcup_i \mu_i^+(A_n) = 0.$$

Siamo ora in grado di dimostrare il Teorema (3.11) sopra enunciato. Cominciamo col provare che la successione (μ_i) è uniformemente esaustiva. Supposto vero il contrario, esisteranno: una successione (A_n) di elementi di $\mathcal{A}$ a due a due disgiunti, un intorno chiuso U di 0 in Γ e una successione d'interi (i_n), tali che si abbia

$$\mu_{i_n}(A_n) \in U^c \text{ per ogni } n. \tag{3.16}$$

Grazie alla condizione (a) che figura nella definizione (3.1) di regolarità, si può supporre, senza ledere la generalità, che gli insiemi A_n appartengano a $\mathcal{F}$. Poniamo allora

$$B_n = A_1 \cup \ldots \cup A_n$$

e scegliamo in Γ un intorno U' di 0, con $U' + U' \subset U$, e due successioni (U_n), (V_n) d'intorni di 0, tali che si abbia, per ogni n,

$$U_n \subset U', \qquad U_n + V_n \subset U_{n+1}.$$

Vogliamo provare che è possibile costruire una coppia (G_n), (F_n) di successioni d'insiemi, la quale verifichi, per ogni n, le relazioni seguenti:

$$G_n \in \mathcal{G}, \quad F_n \in \mathcal{F}, \quad B_n \subset G_n \subset F_n \subset G_{n+1}, \quad \bigcup_i \mu_i^+(F_n \setminus B_n) \subset U_n. \tag{3.17}$$

Si può procedere per induzione:

(a) sfruttando il Lemma (3.13), si può anzitutto trovare una coppia d'insiemi G_1, F_1 verificante le relazioni

$$G_1 \in \mathfrak{G}, \quad F_1 \in \mathfrak{F}, \quad B_1 \subset G_1 \subset F_1, \quad \bigcup_i \mu_i^+(F_1 \setminus B_1) \subset U_1;$$

(b) supposta poi già costruita la coppia d'insiemi G_n, F_n verificante le relazioni

$$G_n \in \mathfrak{G}, \quad F_n \in \mathfrak{F}, \quad B_n \subset G_n \subset F_n, \quad \bigcup_i \mu_i^+(F_n \setminus B_n) \subset U_n,$$

si può trovare (sempre sfruttando il Lemma (3.13)) una coppia d'insiemi G_{n+1}, F_{n+1} tale che si abbia

$$G_{n+1} \in \mathfrak{G}, \; F_{n+1} \in \mathfrak{F}, \; B_{n+1} \cup F_n \subset G_{n+1} \subset F_{n+1}, \; \bigcup_i \mu_i^+(F_{n+1} \setminus (B_{n+1} \cup F_n)) \subset V_n,$$

e quindi, per ogni i,

$$\mu_i^+(F_{n+1} \setminus B_{n+1}) \subset \mu_i^+(F_{n+1} \setminus (B_{n+1} \cup F_n)) + \mu_i^+(F_n \cap B_{n+1}^c) \subset$$
$$\subset V_n + \mu_i^+(F_n \setminus B_n) \subset V_n + U_n \subset U_{n+1}.$$

Costruita così, per induzione, la coppia di successioni (G_n), (F_n) verificante le relazioni (3.17), osserviamo che si ha, per ogni coppia i, n d'interi,

$$\mu_i^+(A_{n+1}) \subset \mu_i^+(G_{n+1} \setminus F_n) + \mu_i^+(F_n \setminus B_n) \subset \mu_i^+(G_{n+1} \setminus F_n) + U^+. \tag{3.18}$$

D'altra parte, poichè gli insiemi $G_{n+1} \setminus F_n$ appartengono a $\mathfrak{G}$ e sono a due a due disgiunti, si ha

$$\lim_n \bigcup_i \lambda_i^+(G_{n+1} \setminus F_n) = 0$$

(dove λ_i denota la restrizione di μ_i a $\mathfrak{G}$), e quindi anche, in virtù di (3.12),

$$\lim_n \bigcup_i \mu_i^+(G_{n+1} \setminus F_n) = 0.$$

Dalla relazione (3.18) segue dunque, per n abbastanza grande,

$$\bigcup_i \mu_i^+(A_{n+1}) \subset U^+ + U^+ \subset U,$$

e ciò contraddice l'ipotesi (3.16).

È così provato che la successione (μ_i) è uniformemente esaustiva. Rimane da provare che essa è anche uniformemente regolare, ossia che sono soddisfatte le due condizioni (a), (b) della Definizione (3.8). Per quel che riguarda la condizione (b), basta applicare il Lemma (3.13). Occupiamoci dunque della condi-

zione (a). A questo scopo, assegnato l'elemento A di $\mathcal{A}$, scegliamo (cfr. (3.5)) una coppia (F_n), (G_n) di successioni d'insiemi, verificante le relazioni (3.2), (3.6). Per provare che ha luogo anche la relazione (3.9), basta applicare il Corollario (3.15) alla successione (A_n) definita da: $A_n = G_n \setminus F_n$. Il teorema è così dimostrato.

4. - Il teorema di Dieudonné

Il teorema che segue si può considerare come un'estensione del classico teorema di Dieudonné (cfr. [5]).

(4.1) Teorema: *Si supponga che il gruppo Γ sia completo e che il reticolo $\mathfrak{G}$ (contenuto nell'algebra $\mathcal{A}$) sia stabile rispetto all'unione numerabile d'insiemi disgiunti. Sia poi (μ_i) una successione di masse regolari e $\mathfrak{G}$-esaustive su $\mathcal{A}$, la quale converga su ogni elemento di $\mathfrak{G}$. Allora essa converge su ogni elemento di $\mathcal{A}$, ed è uniformemente esaustiva (e quindi anche (cfr. (3.11)) uniformemente regolare). Pertanto la massa limite è a sua volta esaustiva e regolare.*

Dimostrazione: Grazie alla versione (2.4) del teorema di Vitali-Hahn-Saks, la successione (μ_i) è uniformemente $\mathfrak{G}$-esaustiva. Dal Teorema (3.11) segue allora che essa è anche uniformemente esaustiva e uniformemente regolare. Rimane soltanto da provare che, per ogni elemento A di $\mathcal{A}$, la successione $(\mu_i(A))$ è di Cauchy in Γ. A questo scopo, assegnato in Γ un intorno V di 0, si determini un intorno simmetrico U di 0, verificante la relazione

$$U + U + U \subset V .$$

Sia poi (F_n), (G_n) una coppia di successioni d'insiemi, verificante le relazioni (3.2), (3.9), e sia n un intero tale che si abbia

$$\bigcup_i \mu_i^+(G_n \setminus F_n) \subset U .$$

Poichè la successione $(\mu_i(G_n))_{i>1}$ è di Cauchy, esiste un intero k, tale che risulti

$$\mu_i(G_n) - \mu_j(G_n) \in U$$

per ogni coppia i, j d'interi maggiori di k. Si ha allora, per una tal coppia d'interi,

$$\mu_i(A) - \mu_j(A) = \mu_i(G_n) - \mu_j(G_n) + \mu_i(G_n \setminus A) - \mu_j(G_n \setminus A) \in U + U + U \subset V .$$

Ciò prova che la successione $(\mu_i(A))$ è di Cauchy.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. K. Brooks, *On a theorem of Dieudonné*, Advances in Math., 36 (1980), 165-168.

[2] J. K. Brooks - R. V. Chacon, *Continuity and compactness of measures*, Advances in Math., 37 (1980), 16-26.

[3] N. Constantinescu, *On Nikodym's boundedness theorem*, Libertas Mathematica, 1 (1981), 51-73.

[4] J. Diestel - J. J. Uhl, *Vector measures*, A.M.S., Providence (1977).

[5] J. Dieudonné, *Sur la convergence des suites de mesures de Radon*, Anais. Acad. Brasil. Ci., 23 (1951), 21-38, 277-282.

[6] N. Dunford - J. Schwartz, *Linear Operators*, Part 1, Wiley (1951).

[7] B. T. Faires, *On Vitali-Hahn-Saks-Nikodym type theorems*, Ann. Inst. Fourier, 26 (1976), 99-114.

[8] D. Landers - L. Rogge, *The Hahn-Vitali-Saks and the uniform boundedness theorem in topological groups*, Manuscripta Math., 4 (1971), 351-359.

[9] O. Nikodym, *Sur les familles bornées de fonctions parfaitement additives d'ensemble abstrait*, Monatsch. Math. Phys., 40 (1933), 418-426.

[10] O. Nikodym, *Sur les suites convergentes de fonctions parfaitement additives d'ensemble abstrait*, Monatsch. Math. Phys., 40 (1933), 427-432.

[11] W. Schachermayer, *On some classical measure-theoretic theorems for non-sigma-complete Boolean algebras*, Dissertationes Math., 214 (1982), 1-33.