Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
103° (1985), Vol. IX, fasc. 15, pagg. 323-330

ADRIANA BROGINI BRATTI (*)

Estensione di un teorema ergodico per processi stocastici superadditivi valutati in spazi di Banach (**)

Extension of a Kingman theorem for stochastic superadditive process with range in Banach's spaces

SUMMARY. — We give an extension of a J. F. Kingman's theorem for stochastic superadditive process with range in some Banach's space.

INTRODUZIONE

In [4] J. Neveu dà un'elegante (e corta) dimostrazione di questo

TEOREMA. *Se $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ è uno spazio di probabilità; se $\theta: \Omega \to \Omega$ è P-invariante ed ergodica per P, e se la successione $f_n \in L^1(\Omega)$ è superadditiva* (***), *allora*

$$\lim_n (1/n) f_n = \sup_n \left((1/n) \int f_n \, dP \right)$$

P-quasi ovunque su X.

In questo lavoro estenderò il precedente Teorema al caso dei processi stocastici valutati in reticoli di Banach; ed otterrò il seguente

TEOREMA. *E sia un reticolo di Banach, E'_+ sia l'insieme dei funzionamenti positivi su E.*

(*) Dipartimento di Statistica, Via San Francesco, 33, I-35100 Padova.
(**) Memoria presentata il 28 gennaio 1985 da Giuseppe Scorza Dragoni, uno dei XL.
(***) Si vedano le definizioni 1 e 3.

ISSN-0392-4106

Le seguenti proposizioni, a) e b), sono equivalenti:

a) per ogni processo stocastico $n \to f_n$ in $L^1(E)$ E'_+-superadditivo (***) *tale* che $\sup_n ((1/n)\int f_n dP) < +\infty$, *esiste e in E tale che*

$$\lim_n (1/n) f_n = e$$

P-debolmente quasi ovunque su X, per ogni α in E'_+;

b) per ogni $n \to e_n$ in E, E'_+-crescente (****), *esiste una sottosuccessione $k \to e_{n_k}$ tale che $\lim_k e_{n_k} = e$, per ogni α in E'_+.*

1. $E = (E, p)$ sia uno spazio di Banach reale, di norma p; $E' = (E', p')$ sia il suo duale topologico, ed $E_\sigma = (E, \sigma)$ sia E dotato della topologia debole.

In questo paragrafo supporremo che E soddisfi la seguente proprietà:

ogni successione $n \to e_n$ in E_σ ed ivi limitata (*i.e.*: $\sup_n (p(e_n)) < +\infty$), *ha almeno una sottosuccessione convergente in E_σ,* (*debolmente convergente*).

$X = (X, d)$ sia uno spazio metrico, localmente compatto e separabile; Σ_X sia la sua σ-algebra di Borel e $P: \Sigma_X \to [0, 1]$ sia una probabilità. $\theta: X \to X$ sia P-invariante (i.e.: θ è P-misurabile, $\theta(\Sigma_X) \subset \Sigma_X$ e per ogni A in Σ_X si ha: $P(A) = P(\theta^{-1}(A)) = P(\theta(A))$).

$L^1(E)$ sia lo spazio delle funzioni $f: X \to E$ P-misurabili (su E vi è la σ-algebra boreliana Σ_E), e P-integrabili. Visto che E è uno spazio di Banach, si ha

$$L^1(E) = L^1 \hat{\otimes}_\pi E, \tag{1}$$

dove $L^1 = L^1(X, \Sigma_X, P)$; la (1) ci permette di dire subito che per ogni f in $L^1(E)$ si ha

$$\int (f \circ \theta)\, dP = \int f\, dP;$$

infatti, si ha $f = \lim_n \sum_{k \in N_n} \chi_{A_k} \otimes e_k$, dove χ_{A_k} è la funzione (reale) caratteristica dell'A_k in Σ_X ed e_k sta in E. Ne segue:

$$\int (\chi_{A_k} \otimes e_k) \circ \theta\, dP = \int (\chi_{\theta^{-1}(A_k)} \otimes e_k)\, dP = P(\theta^{-1}(A_k)) e_k = P(A_k) e_k = \int (\chi_{A_k} \otimes e_k)\, dP,$$

per l'invarianza di θ rispetto a P.

Sia f una funzione di $L^1(E)$; porremo: $f_i = f \circ \theta^i$.

(****) Si veda la definizione 2.

LEMMA 1: *Se le f_i sono debolmente equicontinue (i.e.: se per ogni α in E' le $\alpha \circ f_i : X \to R$ sono equicontinue), esistono*

i) $N \subset X$, *tale che* $P(N) = 0$; *e*

ii) $F : X \sim N \to E$ *uniformemente continua, tali che*

$$\lim_n (1/n) \sum_{i=1}^{n} f_i = F$$

P-debolmente quasi ovunque su $X \sim N$ *(i.e.: per ogni* α *in* E' *esiste* $N_\alpha \subset X \sim N$ *tale che per ogni* x *in* $X \sim (N_\alpha \cup N)$ *si ha*

$$\lim_n (1/n) \sum_{i=1}^{n} (\alpha \circ f_i) = (\alpha \circ F)\Big) .$$

DIMOSTRAZIONE: Porremo, per brevità, $g_n = (1/n) \sum_{i=1}^{n} f_i$. Si ha:

$$\sup_n p(g_n(x)) \leq p(f(x)) < +\infty$$

in $X \sim N$, con $P(N) = 0$, poiché f è P-integrabile. Sia D un sottoinsieme di $X \sim N$, numerabile ed ivi denso (separabilità di X); per la proprietà di E (procedimento diagonale di Hilbert-Cantor), esiste una sottosuccessione $k \to g_{n_k}$ della $n \to g_n$ tale che per ogni d in D si ha

$$\lim_k g_{n_k}(d) = \overline{F}(d)$$

in E_σ (debolmente in E). Sia x in $X \sim N$ e sia $\lim_n d_n = x$ in X, con $d_n \in D$. La successione $n \to \overline{F}(d_n)$ è limitata in E ed ha una sola sottosuccessione convergente. Infatti, se così non fosse si avrebbe

$$\lim_k \overline{F}(d_{n_k}) = e_1 \qquad \text{e} \qquad \lim_h \overline{F}(d_{n_h}) = e_2 \neq e_1 ;$$

in base al teorema di Hahn-Banach esisterebbe α in E' tale che $\alpha(e_1) \neq \alpha(e_2)$. Ora, la successione $k \to \alpha \circ g_{n_k}$ è equicontinua ed equilimitata; dunque, in base al teorema di Ascoli, si ha

$$\lim_i (\alpha \circ g_{n_{k_i}}) = \delta_x$$

uniformemente in $X \sim N$. Ovvio che su D si abbia $(\alpha \circ F) = \delta_x$, il che dà

$$\lim_k \alpha(\overline{F}(d_{n_k})) = \alpha(e_1) = \lim_k \delta_x(d_{n_k}) = \delta_x(x)$$

ed anche

$$\lim_h \alpha(\overline{F}(d_{n_h})) = \alpha(e_2) = \lim_h \delta_\alpha(d_{n_h}) = \delta_\alpha(x):$$

assurdo.

Per ogni x in $X \sim N$ porremo $F(x) = \lim_h \overline{F}(d_{n_h})$, se $\lim_n d_n = x$, in X con le d_n in D. È facile controllare (il ragionamento è quello precedente), che la definizione di F è indipendente dalla $n \to d_n$; inoltre, per il fatto che $\overline{F}: D \to E_s$ è uniformemente continua, anche $F: X \sim N \to E_s$ lo è. In base a [1], pag. 464, per ogni α in E' si ha $\lim_n (\alpha \circ f_n) = \alpha_\alpha$, in $X \sim N_\alpha$, con $P(N_\alpha) = 0$; ovvio che in $X \sim (N_\alpha \cup N)$ si abbia $\alpha_\alpha = (\alpha \circ F)$.

La dimostrazione è conclusa.

θ sia ergodica per P (i.e.: se $f: X \to E$ è P-misurabile e se $f \circ \theta = f$ P-quasi ovunque, allora f è P-quasi ovunque costante). Questa ipotesi su θ ci permette di togliere l'ipotesi di debole equicontinuità delle f_n nel Lemma 1, e di raffinarne il risultato come segue:

Lemma 2: *Se θ è ergodica per P, si ha*

$$\lim_n (1/n) \sum_{i=1}^{n} f \circ \theta^i = e \in E,$$

P-debolmente quasi ovunque in X.

Dimostrazione: In base a [4], poichè il processo stocastico $n \to b_n = (1/n) \sum_{i=1}^{n} (\alpha \circ f) \circ \theta$ è additivo (*i.e.*: $b_m + b_n \circ \theta^m = b_{n+m}$, (n, m) in $\mathbf{N}^2$), si ha

$$\lim_n (1/n) b_n = c_\alpha = \sup_n \left((1/n) \int b_n \, dP \right) = \int (\alpha \circ f) \, dP$$

P-quasi ovunque in X, per l'invarianza di θ rispetto a P. Ora, definite le g_n come nel lemma precedente, si ha:

$$\sup_n p\left(\int g \, dP\right) < \sup_n \int p(g_n) \, dP < \sup_n (1/n) \sum_{i=1}^{n} \int (p(f)) \circ \theta_i \, dP < \int p(f) \, dP + \infty,$$

sempre per l'invarianza di θ rispetto a P, e per l'integrabilità di f. Ne segue che si ha

$$\lim_n \int g_n \, dP = e,$$

in E_s, ed è ovvio che $\alpha(e) = c_\alpha$, e quindi $e = \int f \, dP$.

La dimostrazione è conclusa.

Il Lemma 2 dà il risultato di [4] nel caso « ergodico additivo »; la sua

dimostrazione è tutto sommato facile, poichè nel caso additivo si ha

$$(1/n)\int g_n\,dP = \int f\,dP\,.$$

È possibile un'estensione del Lemma 2 anche nel caso superadditivo. Eccola. Seguendo [4] porremo

Definizione 1. *Sia A un sottoinsieme di E'. Il processo stocastico $n \to f_n$ in $L^1(E)$ si dice A-debolmente superadditivo se e solo se:*

i) $\sup\left((1/n)\int f_n\,dP\right) < k < +\infty$

ii) *per ogni α in A si ha* $(\alpha\circ f_n) + (\alpha\circ f_m)\circ\theta^n < (\alpha\circ f_{n+m})$.

Lemma 3. *θ sia P-invariante ed ergodica per P. Il processo stocastico $n \to f_n$ in $L^1(E)$ sia A-debolmente superadditivo.*

Allora, esiste e in E tale che $p(e) < k$ e $\lim_n (1/n) f_n = e$ P-debolmente quasi ovunque in X per A (i.e.: $\lim_n (1/n)(\alpha\circ f_n) = \alpha(e)$, per ogni α in A).

Dimostrazione: È facile controllare che si ha

$$a_{2^n} = (1/2^n)\int(\alpha\circ f_{2^n})\,dP < (1/2^{n+1})\int(\alpha\circ f_{2^{n+1}})\,dP = a_{2^{n+1}}$$

e dunque $\lim_n (a_{2^n}) = \sup(a_{2^n})$. Per [4] si ha

$$\lim_k (1/n)\int(\alpha\circ f_n) = c_\alpha = \sup_n\left((1/n)\int(\alpha\circ f_n)\right)dP$$

P-quasi ovunque in X; in base ad a), dalla successione $n \to (1/2^n)\int f_{2^n}dP$ si può estrarre una sottosuccessione $k \to (1/2^{n_k})\int f_{2^{n_k}}\,dP$ convergente in E verso e. Si può supporre, direttamente, che il processo stocastico precedente sia ancora debolmente superadditivo; si tratta di estrarre dalla successione $K = (n_j,$ k in $N)$ una sottosuccessione $j \to n_{k_j}$ tale che $n_{k_j} + n_{k_s} < n_{k_{j+s}}$: si faccia così: sia n_2 in K tale che $n_1 + n_1 < n_2$; siano n_3 e n_4 in K tali che: $n_2 + n_2 < n_3 < n_4$; e così di seguito.

Dunque,

$$\lim_k (1/2^{n_k})\int(\alpha\circ f_{2^{n_k}})\,dP = c = \sup_k\left((1/2^{n_k})\int(\alpha\circ f_{2^{n_k}})\,dP\right) = \lim_k (1/2^{n_k})\int(\alpha\circ f_{2^{n_k}}) = \alpha(e)\,,$$

ovvero

$$\lim_n (1/n) f_n = e$$

P-debolmente quasi ovunque in X.

La dimostrazione è conclusa.

2. Sia E un reticolo di Banach, [2], pag. 236, di norma p; indicheremo con E'_+ il sottoinsieme dei funzionali positivi su E (i.e.: se C è il cono degli elementi positivi di E, α sta in E'_+ se e solo se $\alpha(C) \geq 0$).

Definizione 2. *Una successione $n \to e_n$ in E si dice E'_+-crescente se e solo se per ogni α in E'_+ si ha $\alpha(e_n) \leq \alpha(e_{n+1})$, e $\sup_n p(e_n) < +\infty$.*

Definizione 3. *Indicheremo con P l'insieme dei processi stocastici $n \to f_n$ in $L^1(E)$ tali che $\sup_n ((1/n)\int f_n\, dP) < +\infty$, che sono debolmente superadditivi per le α in E'_+.*

Teorema 1: *Le seguenti proposizioni, a) e b), sono equivalenti:*

a) per ogni $n \to f_n$ in P si ha $\lim_n (1/n) f_n = e$, P-debolmente quasi ovunque in X, per ogni α in E'_+;

b) per ogni $n \to e_n$ in E, E'_+-crescente, esiste una sottosuccessione $k \to e_{n_k}$ tale che $\lim_k e_{n_k} = e$, per ogni α in E'_+.

Dimostrazione: *a)* implica *b)*.

$n \to e_n$ in E sia E'_+-crescente. Poichè P è una misura di probabilità su X, e dunque le funzioni costanti sono integrabili, si ponga $f_n = n \otimes e_n$; il processo stocastico $n \to f_n$ sta in P, poichè $p((1/n)\int f_n\, dP) = p(e_n) < +\infty$; ed è ovvio che sia debolmente superadditivo per i funzionali positivi di E. Dunque, $\lim_n (1/n) f_n = e$, sempre per quei funzionali; poichè $(1/n)(\alpha \circ f_n) = \alpha(e_n)$, si ha $\lim_n \alpha(e) = \alpha(e)$.

b) implica *a)*.

Se α sta in E'_+, il processo stocastico $n \to (\alpha \circ f_n)$ è superadditivo, e dunque $\lim_n (1/n)(\alpha \circ f_n) = c_\alpha$ in $X \sim N_\alpha$, con $P(N_\alpha) = 0$.

Si osservi che la successione $n \to (1/2^n)\int f_{2^n}\, dP$ è E'_+-crescente; dunque, per la *b)*, esiste e in E per cui

$$\lim_k (1/2^{n_k})\int f_{2^{n_k}}\, dP = e$$

per ogni α positivo, in E. Ragionando come nel Lemma 3, poichè si può supporre che $f_{2^{n_k}}$ sia ancora in P, risulta: $\alpha(e) = c_\alpha$ e quindi

$$\lim_n (1/n) f_n = e$$

per ogni α in E'_+.

La dimostrazione è conclusa.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. L. Doob, *Stochastic process*, J. Wiley and Sons Inc., 1953.

[2] J. L. Kelley - I. Namioka and co-authors, *Linear topological spaces*, D. Van Nostrand Company, 1963.

[3] J. F. Kingman, *The ergodic theory of subadditive stochastic process*, J. Royal Stat. Soc., B 30, 1968, pagg. 499-510.

[4] J. Neveu, *Courte démonstration de théorème ergodique sur-additif*, Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. B, Calc. des Prob. et Stat., Vol. XIX, n. 1, 1983, pabb. 87-90.