Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
103° (1985), Vol. IX, fasc. 7, pagg. 87-202

ADA BOTTARO ARUFFO (*)

Su alcune estensioni del teorema di Scorza Dragoni (**) (***)

On some extensions of Scorza Dragoni's Theorem

SUMMARY. — In this work we study some properties on the spaces T, X, Z and on $E \subset T \times X$ that are sufficient to obtain the following results: «$f: E \to [-\infty, \infty]$ is a normal integrand if and only if f verifies Scorza Dragoni's property in the lower semicontinuous case», «$g: E \to Z$ is a Carathéodory function if and only if g verifies Scorza Dragoni's property in the continuous case».

INTRODUZIONE

In [SD] Scorza Dragoni prova il seguente teorema:

«Se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$ e se $f: [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ è tale che $f(\cdot, x)$ sia misurabile secondo Lebesgue per ogni $x \in [c, d]$ e $f(t, \cdot)$ sia continua per ogni $t \in [a, b]$ allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste K_n chiuso, $K_n \subset [a, b]$ tale che $m([a, b] \setminus K_n) < 1/(n+1)$ (ove m indica la misura di Lebesgue) e $f|_{K_n \times [c, d]}$ sia continua.»

Molti autori, tra cui [BL] (Cap. 1, § 1), [BO] (Teorema 0.5), [Ca 2], [G], [J], [Ro] (Teorema 2F e Corollario 2G), [RV], hanno dato estensioni di questo teorema, la cui importanza risiede anche nelle applicazioni nella teoria del calcolo delle variazioni e del controllo.

In particolare [BL] (Cap. 1, Corollario 1), [BO] (Teorema 0.5), [Ro] (Teorema 2F) si interessano di studiare il teorema di Scorza Dragoni anche nel caso in cui f sia un'integranda normale invece che una funzione di Carathéodory. Invece [G] si occupa dell'estensione del teorema nel caso in cui f sia definita su un sottoinsieme di un prodotto cartesiano: si noti che però in tal caso la ipotesi che f sia misurabile rispetto alla prima variabile e continua rispetto alla

(*) Istituto Matematico dell'Università di Genova, Via L.B. Alberti, 4 - 16132 Genova.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'Istituto per la Matematica Applicata del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Genova.

(***) Memoria presentata il 25 luglio 1984 da Giuseppe Scorza Dragoni, uno dei XL.

ISSN-0392-4106

seconda non sembra essere sufficiente da sola a provare il teorema (cfr. Osservazione 4.10 *b*)), mentre appare sufficiente a concludere l'ipotesi che f sia misurabile rispetto alla σ-algebra prodotto di quella di Lebesgue e di quella di Borel e sia continua rispetto alla seconda variabile (si dirà che f verifica la proprietà «C») (cfr. Teorema 4.6 *a*) e Teorema 3.15).

In questo lavoro ci si occupa di trovare estensioni del teorema di Scorza Dragoni, anche rispetto a topologie sequenziali, sia nel caso di funzioni verificanti la proprietà «C» che nel caso di integrande normali, ove le funzioni siano definite su sottoinsiemi del prodotto cartesiano di due spazi.

Nel § 1, dopo alcuni risultati di fattorizzazione ed altri riguardanti la topologia iniziale di una famiglia di topologie, si definiscono (v. Definizione 1.8) e si confrontano diversi concetti di interna regolarità per le misure e si forniscono alcuni risultati del tipo di [BA 1] (§ 2), che si possono ottenere facendo uso di queste definizioni e che permetterebbero di ottenere estensioni del teorema di Scorza Dragoni.

Nel § 2 si studiano i legami tra la verifica della proprietà di Scorza Dragoni (cfr. Definizione 1.18 *b'*)) per una $f: E \to Z$ e per delle $f_j: E \to Z_j$, ove $f_j = \theta_j \circ f$, $\theta_j: Z \to Z_j$ $(j \in J)$ e altrettanto si fa per la proprietà «C».

Nel § 3, con l'aiuto dei risultati del § 2 e di [BA 1] (§ 2), si provano teoremi che garantiscono la verifica della proprietà di Scorza Dragoni (e della proprietà inversa) (cfr. Definizioni 3.1 e 3.13, cfr. anche Definizioni 3.0, 3.11 e Definizioni 1.18 *a'*), *b'*)) per spazi $E \subset T \times X$, Z nell'ipotesi che altri spazi ad essi legati verifichino la stessa proprietà.

Nel § 4 infine si sfruttano i risultati del § 3 per fornire molti esempi di estensione del teorema di Scorza Dragoni. In particolare il Corollario 4.24 (tenendo conto anche del Teorema 4.8) è un'estensione del Teorema 1 di [RV] ed il Corollario 4.17 (facendo anche uso dell'Esempio 4.19 e dell'Osservazione 4.27) è una generalizzazione del Teorema 0.5 di [BO].

Si noti infine che la proprietà di Scorza Dragoni definita sugli spazi in questo lavoro verrà utilizzata in [BA 2] per provare risultati che sono legati all'uniforme continuità dell'operatore di Nemytskii, come si vedrà in [BA 3].

Desidero ringraziare il prof. J. P. Cecconi, che ha discusso con me i risultati del presente lavoro.

§ 0. - Notazioni

0.0 Notazioni: Si farà uso, oltre che delle notazioni già usate in [BA 1] (n. 0.0, tranne δ e $S_s(a, r)$), delle seguenti.

Se Z è uno spazio di Banach, allora $s(Z)$ indica lo topologia indotta su Z dalla norma. Si abbrevierà s.c.s. per indicare «semicontinua superiormente», s.s.c.s. per indicare «sequenzialmente semicontinua superiormente». Se A è un insieme, $B \subset A$, allora $\chi_B: A \to [0, 1]$ indica la funzione tale che $\chi_B(x) =$

$= \begin{cases} 1 \text{ se } x \in B \\ 0 \text{ se } x \in A \setminus B \end{cases}$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ allora $a \vee b$ indica il massimo tra a e b. Se (Z, ζ) è uno spazio topologico e se $E \subset Z$, si indica con ∂E la frontiera di E, si indica con $s\zeta$ la topologia sequenziale relativa a ζ (cfr. Definizione 1.0 a) di [BA 1]); τ_1 indica la topologia euclidea su $[-\infty, \infty]$ e $\varkappa$ la topologia discreta su $\mathbb{R}$. Se (Z, d) è uno spazio pseudo-metrico, $a \in Z$, $r \in]0, \infty[$, allora si indica $S_d(a, r) = \{z \in Z : d(a, z) < r\}$ e si indica con τ_d la topologia indotta su Z dalla pseudo-distanza d. Se I è un intervallo di $\mathbb{R}$, $\mathfrak{L}(I)$ indica la σ-algebra di Lebesgue su I; se $k \in \mathbb{Z}_+$, $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^k)$ indica la σ-algebra di Lebesgue su $\mathbb{R}^k$.

0.1 Definizione: Se (X, ϱ) e (Y, σ) sono spazi topologici, $f: (X, \varrho) \to (Y, \sigma)$ si dice sequenzialmente continua se $f: (X, s\varrho) \to (Y, s\sigma)$ è continua, $g: (X, \varrho) \to [-\infty, \infty]$ si dice s.s.c.i. [risp. s.s.c.s.] se $g: (X, s\varrho) \to [-\infty, \infty]$ è s.c.i. [risp. s.c.s.].

0.2 Definizione: Siano T insieme, $\mathfrak{C}$ σ-algebra su T, $\mu: \mathfrak{C} \to [0, \infty]$ misura, (Z, ζ) spazio topologico, $f: T \to Z$. Allora f si dice $\mathfrak{C}$-misurabile se $f^{-1}(A) \in \mathfrak{C}$ per ogni $A \in \zeta$; f si dice μ-misurabile se è $\mathfrak{C}$-misurabile e se esistono $N \in \mathfrak{C}$ con $\mu(N) = 0$ e S sottospazio separabile di Z tali che $f(T \setminus N) \subset S$.

0.3 Definizione: Uno spazio susliniano è uno spazio S topologico T_2 tale che esistano uno spazio P metrico completo e separabile e un'applicazione φ continua e surgettiva, $\varphi: P \to S$.

§ 1. - Interna regolarità delle misure

1.0 Teorema: Siano Z, Z_k insiemi, (W, θ) spazio topologico, $\varphi_k: Z_k \to Z$, $g_k: Z_k \to W$ $(k \in K)$ tali che

$$g_k(z) = g_h(t) \text{ per ogni } z \in Z_k,\ t \in Z_h \text{ per cui } \varphi_k(z) = \varphi_h(t)\ (k, h \in K).$$

Sia $Z = \bigcup_{k \in K} \varphi_k(Z_k)$. Allora esiste $g: Z \to W$ tale che $g \circ \varphi_k = g_k$ per ogni $k \in K$; inoltre

a) se ζ è una topologia su Z, ζ_k è una topologia su Z_k, φ_k è aperta, g_k è continua per ogni $k \in K$, risulta che g è continua;

b) se $\mathcal{M}$ è una σ-algebra su Z, $\mathcal{M}_k$ è una σ-algebra su Z_k $(k \in K)$, se $\varphi_k(C) \in \mathcal{M}$ per ogni $C \in \mathcal{M}_k$ e per ogni $k \in K$, g_k è $\mathcal{M}_k$-misurabile per ogni $k \in K$ e $K \subset \mathbb{N}$, risulta che g è $\mathcal{M}$-misurabile.

Dimostrazione: Basta considerare $g: Z \to W$ tale che $g(\varphi_k(z)) = g_k(z)$ per ogni $z \in Z_k$, $k \in K$. Ciò è possibile, poichè se $\varphi_k(z) = \varphi_h(t)$, $z \in Z_k$, $t \in Z_h$ $(k, h \in K)$ si ha che $g_k(z) = g_h(t)$; inoltre in tal modo g risulta definita su tutto Z visto che $Z = \bigcup_{k \in K} \varphi_k(Z_k)$.

Sia ora $A \in \theta$. Allora, tenendo conto del fatto che $Z = \bigcup_{k \in K} \varphi_k(Z_k)$, risulta che

$$(1.0.0) \quad g^{-1}(A) = \bigcup_{k \in K} (g|_{\varphi_k(Z_k)})^{-1}(A) = \bigcup_{k \in K} \varphi_k((g \circ \varphi_k)^{-1}(A)) = \bigcup_{k \in K} \varphi_k(g_k^{-1}(A)) .$$

a) Poichè g_k è continua e φ_k è aperta per ogni $k \in K$, se $A \in \theta$ si ha che $\bigcup_{k \in K} \varphi_k(g_k^{-1}(A)) \in \zeta$ e quindi da (1.0.0) segue che $g^{-1}(A) \in \zeta$. Pertanto g è continua.

b) Poichè g_k è $\mathcal{M}_k$-misurabile, $\varphi_k(C) \in \mathcal{M}$ per ogni $C \in \mathcal{M}_k$ e per ogni $k \in K$ e poichè $K \subset \mathbf{N}$, se $A \in \theta$ si ha che $\bigcup_{k \in K} \varphi_k(g_k^{-1}(A)) \in \mathcal{M}$ e quindi da (1.0.0) segue che $g^{-1}(A) \in \mathcal{M}$. Pertanto g è $\mathcal{M}$-misurabile.

1.1 Definizione: Siano X insieme, $\xi \subset 2^X$. Allora ξ si dice ultra-algebra se valgono le seguenti condizioni:

i) $X \in \xi$,

ii) se $A_j \in \xi$ $(j \in J)$ allora $\bigcup_{j \in J} A_j \in \xi$,

iii) se $A \in \xi$ allora $X \setminus A \in \xi$.

1.2 Lemma: Siano Z, W, Z_i, W_i insiemi, $\mathcal{A} \subset 2^Z$, $\mathcal{A}_i \subset 2^{Z_i}$ $(i = 1, 2)$. Inoltre, se X è un insieme, $\mathcal{C} \subset 2^X$, sia

$$\theta(\mathcal{C}) = \cap \{\xi \subset 2^X : \xi \text{ è una ultra-algebra}, \xi \supset \mathcal{C}\} .$$

Allora:

a) $\theta(\mathcal{A})$ è una ultra-algebra,

$$\theta(\mathcal{A}) \supset \sigma(\mathcal{A}) \cup \tau(\mathcal{A}) ,$$

$$\theta(\{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 : \mathcal{A}_i \in \theta(\mathcal{A}_i) \ (i = 1, 2)\}) \supset (\sigma(\mathcal{A}_1) \times \sigma(\mathcal{A}_2)) \cup (\tau(\mathcal{A}_1) \times \tau(\mathcal{A}_2))$$

e inoltre, se $E \in \theta(\{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 : \mathcal{A}_i \in \theta(\mathcal{A}_i) \ (i = 1, 2)\})$ e $z_i \in Z_i$ $(i = 1, 2)$, si ha che $E_{z_1} \in \theta(\mathcal{A}_2)$, $E^{z_2} \in \theta(\mathcal{A}_1)$.

Siano inoltre $p : Z \to W$, $p_i : Z_i \to W_i$ $(i = 1, 2)$. Allora:

b) se $p^{-1}(p(A)) = A$ per ogni $A \in \mathcal{A}$, si ha che $p^{-1}(p(A)) = A$ per ogni $A \in \theta(\mathcal{A})$;

c) se $p_i^{-1}(p_i(A)) = A$ per ogni $A \in \mathcal{A}_i$ $(i = 1, 2)$, si ha che

$$(p_1 \times p_2)^{-1}((p_1 \times p_2)(A)) = A \text{ per ogni } A \in \theta(\{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 : \mathcal{A}_i \in \theta(\mathcal{A}_i) \ (i = 1, 2)\}).$$

Dimostrazione: *a*) La prima parte della tesi è ovvia, perchè si vede subito che $\theta(\mathcal{A})$ verifica le condizioni i), ii), iii). La seconda parte della tesi segue

dalle definizioni di $\sigma(\mathcal{A})$ e di $\tau(\mathcal{A})$ e dal fatto che ogni ultra-algebra è anche una topologia ed una σ-algebra. Si ha quindi anche che

$$\{\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2:\ \mathcal{A}_i\in\theta(\mathcal{A}_i)\ (i=1,2)\}\supset$$
$$\supset\{\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2:\ \mathcal{A}_i\in\sigma(\mathcal{A}_i)\ (i=1,2)\}\cup\{\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2:\ \mathcal{A}_i\in\tau(\mathcal{A}_i)\ (i=1,2)\}$$

e pertanto

$$\theta(\{\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2:\ \mathcal{A}_i\in\theta(\mathcal{A}_i)\ (i=1,2)\})\supset\sigma(\{\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2:\ \mathcal{A}_i\in\sigma(\mathcal{A}_i)\ (i=1,2)\})\cup$$
$$\cup\,\tau(\{\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2:\ \mathcal{A}_i\in\tau(\mathcal{A}_i)\ (i=1,2)\})=(\sigma(\mathcal{A}_1)\times\sigma(\mathcal{A}_2))\cup(\tau(\mathcal{A}_1)\times\tau(\mathcal{A}_2)).$$

L'ultima parte della tesi segue dal fatto che se $z_i\in Z_i$ $(i=1,2)$ e se $j,k\in\{1,2\}$, $j\neq k$, allora $\{E\subset Z_1\times Z_2:\ E(z_j,j)\in\theta(\mathcal{A}_k)\}$ (ove $E(z_j,j)=E_{z_j}$ se $j=1$, $E(z_j,j)=E^{z_j}$ se $j=2$) è una ultra-algebra che contiene $\{\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2:\ \mathcal{A}_i\in\theta(\mathcal{A}_i)\ (i=1,2)\}$ e quindi

$$\{E\subset Z_1\times Z_2:\ E(z_j,j)\in\theta(\mathcal{A}_k)\}\supset\theta(\{\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2:\ \mathcal{A}_i\in\theta(\mathcal{A}_i)\ (i=1,2)\})\,.$$

b) Sia $\mathcal{A}'=\{A\in\theta(\mathcal{A}):\ p^{-1}(p(A))=A\}$. Allora $\mathcal{A}'$ è una ultra-algebra, poichè

$$p^{-1}\Big(p\Big(\bigcup_{j\in J}A_j\Big)\Big)=\bigcup_{j\in J}p^{-1}(p(A_j))\qquad\text{se } A_j\in 2^Z\ (j\in J)$$

e se $A\in\mathcal{A}'$ risulta che $Z\setminus A=Z\setminus p^{-1}(p(A))$ e quindi $p(Z\setminus A)=$ $=p\big(Z\setminus p^{-1}(p(A))\big)\subset W\setminus p(A)$, da cui

$$Z\setminus A\subset p^{-1}(p(Z\setminus A))\subset p^{-1}(W\setminus p(A))=Z\setminus p^{-1}(p(A))=Z\setminus A\,.$$

Inoltre $\mathcal{A}'\supset\mathcal{A}$ e quindi $\mathcal{A}'\supset\theta(\mathcal{A})$, da cui $\mathcal{A}'=\theta(\mathcal{A})$.

c) Da *b*) segue che $p_i^{-1}(p_i(A))=A$ per ogni $A\in\theta(\mathcal{A}_i)$ e quindi, utilizzando *c*) del Lemma 1.7 di [BA 1] e di nuovo *b*), si ottiene la tesi.

1.3 Teorema: *a*) Siano Z, V insiemi, (W,θ) spazio topologico tale che θ sia T_0, $\mathcal{A}\subset 2^Z$, $\gamma:\ Z\to V$, $b:\ Z\to W$ tale che $b^{-1}(E)\in\mathcal{A}$ per ogni $E\in\theta$. Allora, se vale almeno una delle due seguenti condizioni:

i) $\gamma^{-1}(\gamma(A))=A$ per ogni $A\in\mathcal{A}$,

ii) $\mathcal{A}=\mathcal{L}^\zeta$ ove ζ è una topologia su Z e $\gamma^{-1}(\gamma(A))=A$ per ogni $A\in\zeta$,

si ha che

(1.3.0) $\qquad b(z_1)=b(z_2)$ per ogni $z_1,z_2\in Z$ tali che $\gamma(z_1)=\gamma(z_2)$;

inoltre

(1.3.1) $\qquad$ esiste $g:\ \gamma(Z)\to W$ tale che $g\circ\gamma=b$.

b) Siano T, S, X, Y insiemi, (W, ω) spazio topologico tale che ω sia T_0, $\mathcal{C} \subset 2^S$, $\mathcal{A} \subset 2^Y$, $\psi: S \to T$, $\varphi: Y \to X$, $D \in \theta(\{C \times A: C \in \theta(\mathcal{C}), A \in \theta(\mathcal{A})\})$, $b: D \to W$ tali che $(b(\cdot, y))^{-1}(E) \in \{C \cap D^y: C \in \mathcal{C}\}$ [risp. $\mathcal{C} = s\tau$ con τ topologia su S e $(b(\cdot, y))^{-1}(E) \in s(\tau/_{D^y})$] per ogni $E \in \omega$ e per ogni $y \in Y$, $(b(s, \cdot))^{-1}(E) \in \{A \cap D_s: A \in \mathcal{A}\}$ [risp. $\mathcal{A} = s\varrho$ con ϱ topologia su Y e $(b(s, \cdot))^{-1}(E) \in s(\varrho/_{D_s})$] per ogni $E \in \omega$ e per ogni $s \in S$, $\psi^{-1}(\psi(C)) = C$ per ogni $C \in \mathcal{C}$ [risp. per ogni $C \in \tau$], $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = A$ per ogni $A \in \mathcal{A}$ [risp. per ogni $A \in \varrho$]. Allora esiste $g: (\psi \times \varphi)(D) \to W$ tale che $g \circ ((\psi \times \varphi)/_D) = b$.

c) Siano T, S, X insiemi, $\mathcal{M}$ σ-algebra su S, (Y, σ), (W, θ) spazi topologici, θ sia T_0, $D \in \mathcal{M} \times \mathcal{B}(\sigma)$, $\psi: S \to T$, $\varphi: Y \to X$, $b: D \to W$ e sia $\psi^{-1}(\psi(C)) = C$ per ogni $C \in \mathcal{M}$, $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = A$ per ogni $A \in \sigma$. Valga almeno una delle due seguenti condizioni:

c') b sia $(\mathcal{M} \times \mathcal{B}(\sigma))/_D$-misurabile;

c'') τ sia una topologia su S, $\tau \subset \mathcal{M}$ ed esistano $H_n \in \mathcal{M}$ $(n \in \mathbf{N})$ tali che sia $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_n = S$ e $b/_{(H_n \times Y) \cap D}$ sia continua [risp. sequenzialmente continua] per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Allora esiste $g: (\psi \times \varphi)(D) \to W$ tale che $g \circ ((\psi \times \varphi)/_D) = b$.

Dimostrazione: *a*) Siano $z_1, z_2 \in Z$ tali che $\gamma(z_1) = \gamma(z_2)$. Se vale la condizione i) e se per assurdo $b(z_1) \neq b(z_2)$, poichè θ è T_0 esistono $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$, $E \in \theta$ tali che $b(z_i) \in E$, $b(z_j) \notin E$. Allora $z_i \in b^{-1}(E) \in \mathcal{A}$. Pertanto $z_j \in \gamma^{-1}(\{\gamma(z_i)\}) \subset \gamma^{-1}(\gamma(b^{-1}(E))) = b^{-1}(E)$, da cui $b(z_j) \in E$, il che è assurdo. Se vale la condizione ii), se $A \in \zeta$, $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$, $z_i \in A$, allora $z_j \in \gamma^{-1}(\{\gamma(z_i)\}) \subset \gamma^{-1}(\gamma(A)) = A$ e quindi, tenendo conto di [BA 1] (Teorema 1.1 *f*), equivalenza di *f'*) e di *f''*)) e del fatto che $b: (Z, \zeta) \to (W, \theta)$ è continua, si ha che $b(z_1) = b(z_2)$. Pertanto vale (1.3.0).

Per (1.3.0) si può definire g attraverso la seguente relazione:

$$g(\gamma(z)) = b(z) \text{ per ogni } z \in Z$$

e quindi vale (1.3.1).

b) Basta far vedere che

$$\text{(1.3.2)} \qquad \text{se } (s_1, y_1), (s_2, y_2) \in D,\ \psi(s_1) = \psi(s_2), \varphi(y_1) = \varphi(y_2), \quad \text{allora } b(s_1, y_1) = b(s_2, y_2),$$

poichè in tal caso si può definire g attraverso la seguente relazione:

$$\text{(1.3.3)} \qquad g(\psi(s), \varphi(y)) = b(s, y) \text{ per ogni } (s, y) \in D.$$

Siano allora $(s_1, y_1), (s_2, y_2) \in D$ tali che $\psi(s_1) = \psi(s_2)$, $\varphi(y_1) = \varphi(y_2)$. Allora $(\psi(s_1), \varphi(y_2)) = (\psi(s_2), \varphi(y_1))$ e pertanto $(s_1, y_2) \in (\psi \times \varphi)^{-1}((\psi \times \varphi)(D)) = D$.

ove l'uguaglianza segue da *c*) del Lemma 1.2; quindi, visto che D_{s_1} (che è in $\theta(\mathcal{A})$ per *a*) del Lemma 1.2), X, (W, ω), $\{A \cap D_{s_1} : A \in \mathcal{A}\}$ [risp. $\iota(\varrho/_{D_{s_1}})$], $\varphi/_{D_{s_1}}$, $b(s_1, \cdot)$ verificano le ipotesi di *a*) (ove si tenga conto di *b*) del Lemma 1.2 e del fatto che $\{A \cap D_{s_1} : A \in \mathcal{A}\} \subset \theta(\mathcal{A})$ [risp. $\varrho/_{D_{s_1}} = \{A \cap D_{s_1} : A \in \varrho\} \subset \subset \theta(\varrho) = \theta(\mathcal{A})$]) e visto che $y_1, y_2 \in D_{s_1}$, $\varphi(y_1) = \varphi(y_2)$, si ha che $b(s_1, y_1) = = b(s_1, y_2)$. Applicando ora di nuovo *a*) a D^{s_1} (che è in $\theta(\mathcal{C})$ per *a*) del Lemma 1.2), T, (W, ω), $\{C \cap D^{s_1} : C \in \mathcal{C}\}$ [risp. $\iota(\tau/_{D^{s_1}})$], $\psi/_{D^{s_1}}$, $b(\cdot, y_2)$ e tenendo conto del fatto che $s_1, s_2 \in D^{s_1}$, $\psi(s_1) = \psi(s_2)$, si ha che $b(s_1, y_2) = = b(s_2, y_2)$. Pertanto vale (1.3.2).

c) Se vale *c'*) basta applicare *a*) a D, $T \times X$, (W, θ), $(\mathcal{M} \times \mathcal{B}(\sigma))/_D$, $(\psi \times \varphi)/_D$, b (si vede che vale l'ipotesi i) utilizzando *c*) e *a*) del Lemma 1.2) per ottenere (1.3.2) e quindi definire g mediante (1.3.3). Se vale *c''*) e se $n \in \mathbf{N}$, allora si può applicare *a*) a $(H_n \times Y) \cap D$ (che è contenuto in $\mathcal{M} \times \mathcal{B}(\sigma) \subset \subset \theta(\{\mathcal{C} \times \mathcal{A} : \mathcal{C} \in \theta(\mathcal{M}), \mathcal{A} \in \theta(\sigma)\})$), $T \times X$, (W, θ), $(\tau \times \sigma)/_{(H_n \times Y) \cap D}$ (che è contenuto in $\theta(\{\mathcal{C} \times \mathcal{A} : \mathcal{C} \in \theta(\mathcal{M}), \mathcal{A} \in \theta(\sigma)\})$) [risp. $\iota((\tau \times \sigma)/_{(H_n \times Y) \cap D})$], $(\psi \times \varphi)/_{(H_n \times Y) \cap D}$, $b/_{(H_n \times Y) \cap D}$ (ove si tenga conto di *a*) e di *c*) del Lemma 1.2) e si ottiene (1.3.2) relativamente a $(H_n \times Y) \cap D$. Pertanto si può definire $g_n : (\psi \times \varphi)((H_n \times Y) \cap D) \to W$ attraverso la seguente relazione:

$$g_n(\psi(t), \varphi(y)) = b(t, y) \text{ per ogni } (t, y) \in (H_n \times Y) \cap D .$$

Per ottenere la tesi basta ora utilizzare il Teorema 1.0 applicato a $(\psi \times \varphi)(D)$, $(\psi \times \varphi)((H_n \times Y) \cap D)$, (W, θ), le immersioni $i_n : (\psi \times \varphi)((H_n \times Y) \cap D) \to \to (\psi \times \varphi)(D)$, g_n $(n \in \mathbf{N})$.

1.4 Definizione: Siano (Z_j, ζ_j) spazi topologici $(j \in J)$, Z insieme, $\theta_j : Z \to Z_j$ $(j \in J)$. Allora si dice topologia iniziale delle topologie ζ_j rispetto alle θ_j $(j \in J)$ la topologia ζ su Z, una cui sottobase di aperti è

$$\{\theta_j^{-1}(A) : A \in \zeta_j, j \in J\} .$$

Si ha anche che ζ è la meno fine topologia su Z per cui per ogni $j \in J$ le θ_j siano continue e inoltre, se (X, ϱ) è uno spazio topologico e $g : (X, \varrho) \to \to (Z, \zeta)$, risulta che g è continua se e solo se $\theta_j \circ g$ è continua per ogni $j \in J$ (cfr. [B], Cap. 1, § 2, Prop. 4). Se nel contesto ciò sarà sufficiente, si dirà semplicemente che ζ è la topologia iniziale per le θ_j $(j \in J)$.

1.5 Teorema: Siano (Z, ζ), (W, θ) spazi topologici, $\varphi : Z \to W$. Allora sono fatti equivalenti:

(1.5.0) ζ è la topologia iniziale della topologia θ rispetto a φ,

(1.5.1) φ è continua, $\varphi_{Z, \varphi(Z)}$ è aperta e $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = A$ per ogni $A \in \zeta$,

(1.5.2) ζ è la più debole tra le topologie che, tramite $\varphi_{Z, \varphi(Z)}$, hanno $\theta/_{\varphi(Z)}$ come topologia quoziente.

Dimostrazione: Valga (1.5.0). Allora per la Definizione 1.4 si ha che φ è continua. Sia $A \in \zeta$. Allora esiste $B \in \theta$ tale che $A = \varphi^{-1}(B)$ e quindi $\varphi(A) = \varphi(\varphi^{-1}(B)) = B \cap \varphi(Z) \in \theta/_{\varphi(Z)}$ e inoltre $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(B))) = \varphi^{-1}(B) = A$. Pertanto vale (1.5.1).

Valga ora (1.5.1). Allora $\theta/_{\varphi(Z)}$ è la topologia quoziente di ζ rispetto a $\varphi_{Z,\varphi(Z)}$ e cioè $\theta/_{\varphi(Z)} = \{B \subset \varphi(Z) : \varphi^{-1}(B) \in \zeta\}$, visto che se $B \in \theta/_{\varphi(Z)}$ allora esiste $B' \in \theta$ tale che $B = B' \cap \varphi(Z)$ e quindi $\varphi^{-1}(B) = \varphi^{-1}(B') \in \zeta$ essendo φ continua e se $B \subset \varphi(Z)$ è tale che $\varphi^{-1}(B) \in \zeta$ allora $\varphi(\varphi^{-1}(B)) \in \theta/_{\varphi(Z)}$ poichè $\varphi_{Z,\varphi(Z)}$ è aperta e $\varphi(\varphi^{-1}(B)) = B$ poichè $B \subset \varphi(Z)$. Inoltre, se ζ' è una topologia su Z che, tramite $\varphi_{Z,\varphi(Z)}$, ha $\theta/_{\varphi(Z)}$ come topologia quoziente, allora $\theta/_{\varphi(Z)} = \{B \subset \varphi(Z) : \varphi^{-1}(B) \in \zeta'\}$ e quindi se $A \in \zeta$ si ha che $\varphi(A) \in \theta/_{\varphi(Z)}$ visto che $\varphi_{Z,\varphi(Z)}$ è aperta e pertanto $\varphi^{-1}(\varphi(A)) \in \zeta'$ e d'altra parte $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = A$ per (1.5.1). Perciò vale (1.5.2).

Valga infine (1.5.2). Allora si ha:

$$\zeta = \{\varphi^{-1}(B) : B \in \theta\} . \tag{1.5.3}$$

Infatti $\mathfrak{I} = \{\varphi^{-1}(B) : B \in \theta\}$ è una topologia poichè è la topologia iniziale della topologia θ rispetto a φ. D'altra parte $\zeta \supset \mathfrak{I}$ visto che, essendo $\theta/_{\varphi(Z)}$ la topologia quoziente di ζ rispetto a $\varphi_{Z,\varphi(Z)}$, risulta che

$$\theta/_{\varphi(Z)} = \{B \subset \varphi(Z) : \varphi^{-1}(B) \in \zeta\} . \tag{1.5.4}$$

Infine $\theta/_{\varphi(Z)}$ è la topologia quoziente di $\mathfrak{I}$ rispetto a $\varphi_{Z,\varphi(Z)}$ e cioè $\theta/_{\varphi(Z)} = \{B \subset \varphi(Z) : \varphi^{-1}(B) \in \mathfrak{I}\}$, poichè se $B \in \theta/_{\varphi(Z)}$ esiste $B' \in \theta$ tale che $B = B' \cap \varphi(Z)$ e quindi $\varphi^{-1}(B) = \varphi^{-1}(B') \in \mathfrak{I}$ per la definizione di $\mathfrak{I}$ e viceversa, se $B \subset \varphi(Z)$ è tale che $\varphi^{-1}(B) \in \mathfrak{I}$, esiste $B' \in \theta$ tale che $\varphi^{-1}(B) = \varphi^{-1}(B')$ e quindi da (1.5.4) segue che $\varphi^{-1}(B) = \varphi^{-1}(B') \in \zeta$ e di nuovo da (1.5.4) discende che $B \in \theta/_{\varphi(Z)}$. Pertanto per (1.5.2) risulta che $\mathfrak{I} \supset \zeta$ e quindi vale (1.5.3). Ma (1.5.3) significa (1.5.0).

1.6 Teorema: Siano (Z_j, ζ_j), (Z, ζ) spazi topologici $(j \in J)$, $\theta_j : Z \to Z_j$ $(j \in J)$, ζ^* topologia iniziale delle topologie $s\zeta_j$ rispetto alle θ_j $(j \in J)$. Sia $\zeta \subset \zeta^*$. Siano (X, ϱ) spazio topologico e $g : (X, s\varrho) \to (Z, s\zeta)$. Allora, se $\theta_j \circ g : (X, s\varrho) \to (Z_j, s\zeta_j)$ è continua per ogni $j \in J$, si ha che g è continua.

Dimostrazione: Per la Definizione 1.4 si ha che $g : (X, s\varrho) \to (Z, \zeta^*)$ è continua e quindi $g : (X, s\varrho) \to (Z, \zeta)$ è continua. Utilizzando ora $f)$ del Teorema 1.1 di [BA 1] si ottiene che $g : (X, s\varrho) \to (Z, s\zeta)$ è continua.

1.7 Teorema: $a)$ Sia (Z, d) spazio pseudo-metrico e sia (W, δ) lo spazio metrico ottenuto come spazio quoziente di (Z, d) mediante la seguente rela-

zione di equivalenza: $(z, t) \in S$ se e solo se $d(z, t) = 0$ e con $\delta([z], [t]) = d(z, t)$ per ogni $z, t \in Z$ ($[z]$, $[t]$ classi rispettivamente di z e di t rispetto alla relazione di equivalenza S). Sia $\varphi: (Z, d) \to (W, \delta)$ proiezione canonica sul quoziente. Allora φ è surgettiva, continua, aperta e tale che sia $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = A$ per ogni $A \in \tau_d$.

b) Siano (Z, ζ), (W, θ) spazi topologici, $\varphi: Z \to W$ surgettiva, continua, aperta e tale che sia $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = A$ per ogni $A \in \zeta$. Allora:

b') se (Z, ζ) è pseudo-metrizzabile e se d è una pseudo-distanza che induce ζ, si ha che (W, θ) è pseudo-metrizzabile ed esiste δ pseudo-distanza che induce θ tale che $\delta(\varphi(z), \varphi(t)) = d(z, t)$ per ogni $z, t \in Z$ e quindi, se θ è T_0, (W, θ) è metrizzabile;

b'') se (W, θ) è pseudo-metrizzabile e δ è una pseudo-distanza che induce θ, si ha che (Z, ζ) è pseudo-metrizzabile e, se $d(z, t) = \delta(\varphi(z), \varphi(t))$ per ogni $z, t \in Z$, si ha che d è una pseudo-distanza che induce ζ.

c) Siano (Z, ζ), (W, θ) spazi topologici, $\varphi: Z \to W$ surgettiva. Allora:

c') se φ è continua, θ è T_0 e se esistono P spazio pseudo-metrico, completo e separabile e $p: P \to Z$ surgettiva e continua, si ha che esistono Q spazio metrico, completo e separabile e $q: Q \to W$ surgettiva e continua (e quindi, se θ è T_2, (W, θ) è uno spazio susliniano);

c'') se $\varphi: (Z, \zeta) \to (W, \theta)$ è aperta, $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = A$ per ogni $A \in \zeta$ e se esistono Q spazio pseudo-metrico, completo e separabile e $q: Q \to (W, \theta)$ surgettiva e continua, si ha che esistono P spazio pseudo-metrico, completo e separabile e $p: P \to Z$ surgettiva e continua.

Dimostrazione: *a*) Sia θ la topologia quoziente di τ_d rispetto alla relazione di equivalenza S. Allora $\theta = \tau_\delta$ per [*K*] (Cap. 4, Teorema 15). Pertanto $\varphi: (Z, \tau_d) \to (W, \tau_\delta)$ è surgettiva e continua, come proiezione sul quoziente. Inoltre è aperta, poichè l'immagine di ogni sfera di (Z, d) è una sfera di (W, δ). Basta ora provare che $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = A$ per ogni $A \in \tau_d$. Sia $A \in \tau_d$ e sia $a \in \varphi^{-1}(\varphi(A))$. Allora $\varphi(a) \in \varphi(A)$ e pertanto esiste $a' \in A$ tale che $\varphi(a) = \varphi(a')$ e cioè $(a, a') \in S$, da cui $d(a, a') = 0$. Ma $a' \in A \in \tau_d$ e in τ_d gli intorni di a e di a' coincidono visto che $d(a, a') = 0$, per cui $a \in A$.

b) *b'*) Sia d come nell'enunciato. Si può definire δ attraverso la seguente relazione:

$$\delta(\varphi(z), \varphi(t)) = d(z, t) \text{ per ogni } z, t \in Z.$$

Infatti, se $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$ ($z_1, z_2 \in Z$) allora $d(z_1, z_2) = 0$, poichè altrimenti esisterebbero $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$ ed $A \in \tau_d$ tali che $z_i \in A$, $z_j \notin A$ e allora $z_i \in \varphi^{-1}(\{\varphi(z_i)\}) \subset \varphi^{-1}(\varphi(A)) = A$, il che è assurdo. Quindi, se $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$, $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ ($z_1, z_2, t_1, t_2 \in Z$), si ha che $d(z_1, t_1) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, t_2) + d(t_2, t_1) =$

$= d(z_i, t_j)$ $(i, j \in \{1, 2\},\ i \neq j)$ e quindi $d(z_1, t_2) = d(z_2, t_2)$. Si verifica facilmente che δ è una pseudo-distanza e d'altra parte $\varphi: (Z, d) \to (W, \delta)$ risulta continua e aperta visto che $\varphi(S)$ è una sfera per ogni S sfera in (Z, d) e $\varphi^{-1}(R)$ è una sfera per ogni R sfera in (W, δ) e inoltre $\tau_d = \zeta$ per cui, tenendo conto che φ è surgettiva, risulta che $\tau_\delta = \theta$.

b') Siano δ, d come nell'enunciato. È facile provare che d è una pseudo-distanza. Allora, usando che $\varphi: (Z, d) \to (W, \delta)$ è continua e aperta e tale che $\varphi^{-1}(\varphi(S)) = S$ per ogni S sfera in (Z, d), $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = A$ per ogni $A \in \zeta$ e $\tau_\delta = \theta$, si prova che $\tau_d = \zeta$.

c) *c'*) Esistano (P, d) spazio pseudo-metrico, completo e separabile e $p: P \to Z$ surgettiva e continua. Siano allora (Q, δ) e $\psi: (P, d) \to (Q, \delta)$ relativi a (P, d) come in *a*). Allora (Q, δ) è uno spazio metrico; è completo poichè se $y_n \in Q$ $(n \in \mathrm{N})$, $(y_n)_{n \in \mathrm{N}}$ di Cauchy, si ha che esistono $x_n \in P$ tali che $\psi(x_n) = y_n$ $(n \in \mathrm{N})$ e risulta che $(x_n)_{n \in \mathrm{N}}$ è di Cauchy in (P, d), per cui esiste $x \in P$ tale che $d(x_n, x) \to 0$ e quindi $\delta(y_n, \psi(x)) \to 0$; inoltre (Q, δ) è separabile come immagine continua tramite ψ di uno spazio separabile. Si può ora definire $q: Q \to W$ attraverso la seguente relazione:

$$q(\psi(x)) = \varphi(p(x)) \text{ per ogni } x \in P .$$

Infatti, se $\psi(x_1) = \psi(x_2)$ $(x_1, x_2 \in P)$, allora per *a*) e per il Teorema 1.3 *a*), poichè θ è T_0 e poichè p e φ sono continue, risulta che $\varphi(p(x_1)) = \varphi(p(x_2))$. Inoltre q è continua poichè se $\delta(y_n, y_0) \to 0$, $y_n \in Q$, $y_n = \psi(x_n)$ $(n \in \mathrm{N})$, si ha che $d(x_n, x_0) \to 0$ e quindi $q(y_n) = \varphi(p(x_n)) \to \varphi(p(x_0)) = q(y_0)$. Si ha anche che q è surgettiva, visto che se $w \in W$ esiste $z \in Z$ tale che $\varphi(z) = w$ e, poichè p è surgettiva, esiste $x \in P$ tale che $p(x) = z$ e pertanto $q(\psi(x)) = \varphi(p(x)) = \varphi(z) = w$.

c'') Esistano (Q, δ) spazio pseudo-metrico, completo e separabile e $q: Q \to W$ surgettiva e continua. Sia ora $P = \{(z, y) \in Z \times Q: \varphi(z) = q(y)\}$ e se $(z_1, y_1), (z_2, y_2) \in P$ sia $d((z_1, y_1), (z_2, y_2)) = \delta(y_1, y_2)$. Si verifica facilmente che d è una pseudo-distanza su P. Si ha inoltre che (P, d) è completo, poichè se $\{(z_n, y_n)\}_{n \in \mathrm{N}}$ è una successione di Cauchy in P $(n \in \mathrm{N})$, risulta che $(y_n)_{n \in \mathrm{N}}$ è di Cauchy in Q che è completo e pertanto esiste $y \in Q$ tale che $\delta(y_n, y) \to 0$. Se ora $z \in \varphi^{-1}(\{q(y)\})$ (un tale z esiste poichè φ è surgettiva) risulta che $(z, y) \in P$ e $d((z_n, y_n), (z, y)) \to 0$. (P, d) è anche separabile poichè se $\overline{\{y_n: n \in \mathrm{N}\}} = Q$ $(y_n \in Q$ $(n \in \mathrm{N}))$ e se $z_n \in \varphi^{-1}(\{q(y_n)\})$ $(n \in \mathrm{N})$ si ha che $\overline{\{(z_n, y_n): n \in \mathrm{N}\}} = P$: infatti se $(z, y) \in P$ per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathrm{N}$ tale che $\delta(y, y_{n_\varepsilon}) < \varepsilon$ e quindi $d((z, y), (z_{n_\varepsilon}, y_{n_\varepsilon})) < \varepsilon$. Sia ora $p: P \to Z$ tale che $p((z, y)) = z$ per ogni $(z, y) \in P$. Basta ora provare che p è surgettiva e continua. Sia $z \in Z$. Poichè q è surgettiva esiste $y \in Q$ tale che $q(y) = \varphi(z)$, per cui $(z, y) \in P$ e $p((z, y)) = z$; quindi p è surgettiva. Siano ora $(z_n, y_n) \in P$

$(n \in \mathbf{N})$, $d((\tau_n, \gamma_n), (\tau_0, \gamma_0)) \to 0$. Allora $\delta(\gamma_n, \gamma_0) \to 0$ e quindi $q(\gamma_n) \to q(\gamma_0)$. Poichè $\varphi(p((\tau_n, \gamma_n))) = q(\gamma_n)$ $(n \in \mathbf{N})$ si ha pertanto che $\varphi(p((\tau_n, \gamma_n))) \to \to \varphi(p((\tau_0, \gamma_0)))$ e quindi per [BA 1] (Lemma 1.11 *d*)) risulta che $p(\tau_n, \gamma_n) \to \to p(\tau_0, \gamma_0)$.

1.8 Definizioni: Siano T insieme, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu: \mathfrak{L} \to [0, \infty]$ misura, $\mathcal{K} \subset \mathfrak{L}$. Allora, se $A \in \mathfrak{L}$, si dice che

a) μ è $\mathcal{K}$-internamente regolare ($\mathcal{K}$-i.r.) rispetto ad A se esiste $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tale che $K_n \in \mathcal{K}$, $K_n \subset A$, $\mu(A \setminus K_n) < 1/(n+1)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$; μ è $\mathcal{K}$-i.r. se è $\mathcal{K}$-i.r. rispetto ad ogni elemento di $\mathfrak{L}$;

b) μ è $c\mathcal{K}$-internamente regolare ($c\mathcal{K}$-i.r.) rispetto ad A se esiste $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tale che $K_n \in \mathcal{K}$, $K_n \subset A$, $\mu(A \setminus K_n) < 1/(n+1)$, $K_n \subset K_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$; μ è $c\mathcal{K}$-i.r. se è $c\mathcal{K}$-i.r. rispetto ad ogni elemento di $\mathfrak{L}$;

c) μ è $\sigma\mathcal{K}$-internamente regolare ($\sigma\mathcal{K}$-i.r.) rispetto ad A se esiste $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tale che $K_n \in \mathcal{K}$, $K_n \subset A$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, $\mu\left(A \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\right)\right) = 0$; μ è $\sigma\mathcal{K}$-i.r. se è $\sigma\mathcal{K}$-i.r. rispetto ad ogni elemento di $\mathfrak{L}$;

d) μ è $c\sigma\mathcal{K}$-internamente regolare ($c\sigma\mathcal{K}$-i.r.) rispetto ad A se esiste $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tale che $K_n \in \mathcal{K}$, $K_n \subset A$, $K_n \subset K_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, $\mu\left(A \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\right)\right) = 0$; μ è $c\sigma\mathcal{K}$-i.r. se è $c\sigma\mathcal{K}$-i.r. rispetto ad ogni elemento di $\mathfrak{L}$.

1.9 Osservazioni: Sia μ come nel n. 1.8 e sia $\mathcal{G} \subset \mathfrak{L}$.

a) Si possono definire per μ dei concetti di $\mathcal{G}$-esterna regolarità, $d\mathcal{G}$-esterna regolarità, $\sigma\mathcal{G}$-esterna regolarità, $d\sigma\mathcal{G}$-esterna regolarità scambiando, rispettivamente nelle definizioni 1.8 *a*), *b*), *c*), *d*), $\mathcal{K}$ con $\mathcal{G}$, « $\subset$ » con « $\supset$ », le differenze del tipo $A \setminus B$ con $B \setminus A$, « $\cup$ » con « $\cap$ ».

b) Tenendo conto del fatto che $A \setminus B = (T \setminus B) \setminus (T \setminus A)$ per ogni A, $B \in 2^T$, si può notare che se $(\mathcal{M}, \mathcal{I}) \in \{(\mathcal{G}, \mathcal{K}), (d\mathcal{G}, c\mathcal{K}), (\sigma\mathcal{G}, \sigma\mathcal{K}), (d\sigma\mathcal{G}, c\sigma\mathcal{K})\}$, ove $\mathcal{K} = \{T \setminus G : G \in \mathcal{G}\}$, allora μ è $\mathcal{I}$-internamente regolare se e solo se μ è $\mathcal{M}$-esternamente regolare.

c) Si noti che, se $\nu: 2^{\mathbf{N}} \to [0, \infty]$ è la misura che conta, allora $2^{\mathbf{N}} = \mathcal{B}(\mathcal{X})$, ove $\mathcal{X} = \{\mathbf{N} \setminus F : F \subset \mathbf{N},\ F \text{ finito}\} \cup \{\emptyset\}$ e si ha che ν è $d\sigma\mathcal{X}$-esternamente regolare (poichè ogni sottoinsieme di $\mathbf{N}$ è intersezione numerabile di una successione decrescente di elementi di $\mathcal{X}$), ma ν non è $\mathcal{X}$-esternamente regolare (poichè $\nu(G \setminus F) = \infty$ per ogni $F \subset \mathbf{N}$, F finito, $F \neq \emptyset$, $G \in \mathcal{X}$, $G \supset F$).

1.10 Definizione: Siano μ, $\mathcal{K}$ come nelle Definizioni 1.8 e sia $\mathcal{K} \subset \mathfrak{L}$. Siano $\mathcal{I} \in \{\mathcal{K}, c\mathcal{K}, \sigma\mathcal{K}, c\sigma\mathcal{K}\}$, $\mathcal{J} \in \{\mathcal{K}, c\mathcal{K}, \sigma\mathcal{K}, c\sigma\mathcal{K}\}$. Allora, se A, $B \in \mathfrak{L}$, si dice che μ è $\mathcal{J}$-i.r. rispetto a B subordinatamente a $(\mathcal{I}, A)$ se per ogni $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ che verifica la condizione di $\mathcal{I}$-interna regolarità di μ rispetto ad A esiste $(H_n)_{n \in \mathbf{N}}$ che verifica la condizione di $\mathcal{J}$-interna regolarità di μ rispetto a B ed esiste $(k_n)_{n \in \mathbf{N}}$ successione di naturali per cui $H_n \subset K_{k_n}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

1.11 Teorema: Siano μ, $\mathcal{K}$ come nelle Definizioni 1.8 e sia $A \in \mathcal{L}$. Allora:

a) μ è $\mathcal{K}$-i.r. rispetto ad A subordinatamente a $(\iota\mathcal{K}, A)$;

b) μ è $\sigma\mathcal{K}$-i.r. rispetto ad A subordinatamente a $(\mathcal{K}, A)$;

c) μ è $\iota\sigma\mathcal{K}$-i.r. rispetto ad A subordinatamente a $(\iota\mathcal{K}, A)$;

d) μ è $\sigma\mathcal{K}$-i.r. rispetto ad A subordinatamente a $(\iota\sigma\mathcal{K}, A)$;

e) se vale almeno una tra le due seguenti condizioni:

e') $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} K_n \in \mathcal{K}$ per ogni $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tale che $K_n \in \mathcal{K}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$;

e'') $\bigcup_{i\in I} K_i \in \mathcal{K}$ per ogni I finito, $K_i \in \mathcal{K}$ $(i \in I)$

e se μ è $\mathcal{K}$-i.r. rispetto ad A risulta che μ è $\iota\mathcal{K}$-i.r. rispetto ad A; anzi se vale *e'*) risulta che μ è $\iota\mathcal{K}$-i.r. rispetto ad A subordinatamente a $(\mathcal{K}, A)$;

f) se vale la condizione *e'*) e se μ è $\sigma\mathcal{K}$-i.r. rispetto ad A risulta che μ è $\iota\sigma\mathcal{K}$-i.r. rispetto ad A;

g) se μ è finita risulta che μ è $\iota\mathcal{K}$-i.r. rispetto ad A subordinatamente a $(\iota\sigma\mathcal{K}, A)$.

Dimostrazione: *a*) e *d*) sono ovvie.

b) e *c*) si ottengono tenendo conto che, se $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ è tale che $K_n \in \mathcal{K}$, $K_n \subset A$, $\mu(A \setminus K_n) < 1/(n+1)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, allora per ogni $m \in \mathbf{N}$ risulta che

$$\mu\Big(A \setminus \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} K_n\Big)\Big) = \mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} (A \setminus K_n)\Big) < \mu(A \setminus K_m) < 1/(m+1)\,.$$

e) Sia $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tale che $K_n \in \mathcal{K}$, $K_n \subset A$, $\mu(A \setminus K_n) < 1/(n+1)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, sia $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ successione di naturali tale che $1/(b_n+1) < 2^{-n}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e sia $(k_n)_{n\in\mathbf{N}}$ successione crescente di naturali tale che $\sum_{m>k_n} 2^{-m} < 1/(n+1)$. Allora se vale *e'*) basta considerare $H_n = \bigcap_{m>k_n} K_{b_m}$ $(n \in \mathbf{N})$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha che $H_n \subset K_{b_{k_n}}$, $H_n \subset H_{n+1}$, $\mu(A \setminus H_n) < \sum_{m>k_n} \mu(A \setminus K_{b_m}) < \sum_{m>k_n} 2^{-m} < 1/(n+1)$. Se vale *e''*) basta considerare $L_n = \bigcup_{m\leq n} K_m$ $(n \in \mathbf{N})$ e allora per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha che $L_n \subset L_{n+1}$, $\mu(A \setminus L_n) < \mu(A \setminus K_n) < 1/(n+1)$.

f) Sia $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tale che $K_n \in \mathcal{K}$, $K_n \subset A$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, $\mu\Big(A \setminus \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} K_n\Big)\Big) = 0$. Siano $H_n = \bigcup_{m\leq n} K_m$ $(n \in \mathbf{N})$. Allora per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha che

$$H_n \subset H_{n+1}\,, \qquad \mu\Big(A \setminus \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} H_n\Big)\Big) = \mu\Big(A \setminus \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \Big(\bigcup_{m\leq n} K_m\Big)\Big)\Big) = \mu\Big(A \setminus \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} K_n\Big)\Big) = 0\,.$$

g) Sia $(K_n)_{n\in N}$ tale che $K_n \in \mathcal{K}$, $K_n \subset A$, $K_n \subset K_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, $\mu\left(A \setminus \left(\bigcup_{n\in N} K_n\right)\right) = 0$. Se μ è finita risulta che $\mu(A \setminus K_n) \to \mu\left(\bigcap_{n\in N} (A \setminus K_n)\right) = 0$ e pertanto basta considerare $(k_n)_{n\in N}$ successione crescente di naturali tale che $\mu(A \setminus K_{k_n}) < 1/(n+1)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e definire $H_n = K_{k_n}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

1.12 Esempi: Siano μ, $\mathcal{K}$ come nelle Definizioni 1.8. Si ha che:

a) se non vale la condizione *e'*) del n. 1.11, μ può essere $\sigma\mathcal{K}$-i.r. e non essere nè $\varepsilon\sigma\mathcal{K}$-i.r. nè $\mathcal{K}$-i.r.;

b) se μ non è finita, μ può essere $\varepsilon\sigma\mathcal{K}$-i.r. e non essere $\mathcal{K}$-i.r.;

c) se non vale nessuna delle due condizioni *e'*) ed *e''*) del n. 1.11, può esistere $A \in \mathfrak{L}$ tale che μ sia $\mathcal{K}$-i.r. rispetto ad A e non sia $\varepsilon\sigma\mathcal{K}$-i.r. rispetto ad A.

a) Basta considerare $T = [0, 2]$, $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}([0, 2])$, μ la misura di Lebesgue su $[0, 2]$ e $\mathcal{K} = \{$compatti euclidei di $[0, 1]\} \cup \{$compatti euclidei di $[1, 2]\}$.

b) Basta considerare $T = \mathbf{R}$, $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\mathbf{R})$, μ la misura di Lebesgue su $\mathbf{R}$ e $\mathcal{K} = \{$compatti euclidei di $\mathbf{R}\}$.

c) Basta considerare $T = \mathbf{N}$, $\mathfrak{L} = 2^{\mathbf{N}}$, $\mu(\{n\}) = 2^{-n}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{K} = \{\mathbf{N} \setminus \{n\} : n \in \mathbf{N}\}$, $A = T$.

1.13 Teorema: Siano μ, $\mathcal{K}$ come nelle Definizioni 1.8, sia $\mathcal{K}' = \left\{\bigcup_{n\in N} K_n : K_n \in \mathcal{K},\ n \in \mathbf{N}\right\}$ e sia $A \in \mathfrak{L}$. Allora:

a) se μ è $\sigma\mathcal{K}$-i.r. rispetto ad A, risulta che μ è $\varepsilon\mathcal{K}'$-i.r. rispetto ad A;

b) se $\mathcal{K}$ verifica la condizione *e'*) del n. 1.11 e se μ è $\mathcal{K}'$-i.r. rispetto ad A, risulta che μ è $\varepsilon\sigma\mathcal{K}$-i.r. rispetto ad A;

c) μ è $\sigma\mathcal{K}$-i.r. rispetto ad A subordinatamente a $(\mathcal{K}', A)$;

d) se $\mathcal{K}$ verifica la condizione *e'*) del n. 1.11, si ha che μ è $\varepsilon\sigma\mathcal{K}$-i.r. rispetto ad A subordinatamente a $(\varepsilon\mathcal{K}', A)$.

Dimostrazione: *a*) Se $(K_n)_{n\in N}$ è tale che $K_n \in \mathcal{K}$, $K_n \subset A$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, $\mu\left(A \setminus \left(\bigcup_{n\in N} K_n\right)\right) = 0$, basta considerare $H_n = \bigcup_{m\in N} K_m$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

b) Se $(K_n)_{n\in N}$ è tale che $K_n \in \mathcal{K}'$, $K_n \subset A$, $\mu(A \setminus K_n) < 1/(n+1)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, allora esistono $K_n^m \in \mathcal{K}$ $(n, m \in \mathbf{N})$ tali che $K_n = \bigcup_{m\in N} K_n^m$ per ogni $n \in \mathbf{N}$; considerando ora $H_n = \bigcup_{l\leq n, m\leq n} K_l^m$ si ha che $H_n \in \mathcal{K}$, $H_n \subset H_{n+1}$, $H_n \subset A$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e $\bigcup_{n\in N} H_n = \bigcup_{n\in N} \bigcup_{l\leq n, m\leq n} K_l^m = \bigcup_{l,m\in N} K_l^m = \bigcup_{l\in N} K_l$ e pertanto per ogni $k \in \mathbf{N}$ risulta che $\mu\left(A \setminus \left(\bigcup_{n\in N} H_n\right)\right) < \mu(A \setminus K_k) < 1/(k+1)$.

c) Se $(K_n)_{n\in N}$ è tale che $K_n \in \mathcal{K}'$, $K_n \subset A$, $\mu(A \setminus K_n) < 1/(n+1)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, allora esistono $K_n^m \in \mathcal{K}$ $(n, m \in \mathbf{N})$ tali che $K_n = \bigcup_{m\in N} K_n^m$ per ogni $n \in \mathbf{N}$

e risulta che $\mu\left(A \setminus \left(\bigcup_{n,m \in N} K_n^m\right)\right) = 0$, per cui basta considerare $\{H_n : n \in \mathbf{N}\} = \{K_n^m : n, m \in \mathbf{N}\}$.

d) Se si ripete la dimostrazione di *b*), basta verificare ancora che, se $K_n \subset K_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, si ha che $H_n \subset K_n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Ma per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta che $H_n \subset \bigcup_{k \leq n} K_k \subset K_n$.

1.14 Corollario: Siano μ, $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$, A come nel Teorema 1.13. Allora:

a) sono equivalenti i seguenti fatti:

a') μ è $\sigma\mathcal{K}$-i.r. rispetto ad A,

a'') μ è $\sigma\mathcal{K}'$-i.r. rispetto ad A,

a''') μ è $\mathcal{K}'$-i.r. rispetto ad A;

b) se $\mathcal{K}$ verifica la condizione *e''*) del n. 1.11, si ha che μ è $\sigma\sigma\mathcal{K}$-i.r. rispetto ad A se e solo se μ è $\mathcal{K}'$-i.r. rispetto ad A.

Dimostrazione: *a*) Basta utilizzare *a*) del Teorema 1.13, *a*) del Teorema 1.11, *c*) del Teorema 1.13.

b) Basta utilizzare *d*) del Teorema 1.11 e *a*) e *b*) del Teorema 1.13.

1.15 Esempio: Si noti che l'esempio *a*) del n. 1.12 mostra anche che, se μ, $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$ sono come nel Teorema 1.13, se $\mathcal{K}$ non verifica la condizione *e''*) del n. 1.11 e anche se $\mathcal{K}$ verifica la condizione *e'*) del n. 1.11, μ può essere $\mathcal{K}'$-i.r. e non essere $\sigma\sigma\mathcal{K}$-i.r.

1.16 Teorema: Siano μ, $\mathcal{K}$ come nelle Definizioni 1.8 e sia $\mathcal{K} \subset \mathfrak{L}$. Allora:

a) se vale

(1.16.0) esistono $B_n \in \mathfrak{L}$ $(n \in \mathbf{N})$, $F \in \mathfrak{L}$ tali che $B_n \subset B_{n+1}$, $H \cap B_n \in \mathcal{K}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $H \in \mathcal{K}$, $\mu(F) = 0$, $T = \left(\bigcup_{n \in N} B_n\right) \cup F$

e se $A \in \mathfrak{L}$ si ha che μ è $\sigma\sigma\mathcal{K}$-i.r. rispetto ad A subordinatamente a $(\sigma\mathcal{K}, A)$;

b) se vale almeno una delle due seguenti condizioni:

b') vale (1.16.0) e $\bigcap_{n \in N} H_n \in \mathcal{K}$ per ogni $(H_n)_{n \in N}$ tale che $H_n \in \mathcal{K}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$,

b'') $\mathcal{K} \subset \left\{\bigcup_{n \in N} K_n : K_n \in \mathcal{K} \text{ per ogni } n \in \mathbf{N}\right\}$, $\bigcap_{n \in N} H_n \in \mathcal{K}$ per ogni $(H_n)_{n \in N}$ tale che $H_n \in \mathcal{K}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e $\bigcup_{i \in I} K_i \in \mathcal{K}$ per ogni I finito, $K_i \in \mathcal{K}$ $(i \in I)$

e se $A \in \mathfrak{L}$ si ha che μ è $\sigma\sigma\mathcal{K}$-i.r. rispetto ad A subordinatamente a $(\mathcal{K}, A)$;

c) se

(1.16.1) $A_n \in \mathfrak{L}$ $(n \in \mathbf{N})$, $G \in \mathfrak{L}$ sono tali che $\mu(A_n) < \infty$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, $\mu(G) = 0$, $T = \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n\right) \cup G$ e tali che si abbia $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n \in \mathcal{K}$ se $K_n \in \mathcal{K}$, $K_n \subset A_n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$,

se $B \in \mathfrak{L}$ e se μ è $\varepsilon\sigma\mathcal{K}$-i.r. rispetto a $B \cap A_n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha che μ è $\delta\left\{H \in \mathcal{K} : H \subset \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n\right\}$-i.r. rispetto a B. Inoltre, se $A_h \cap A_k = \emptyset$ per ogni $k, h \in \mathbf{N}$, $k \neq h$, e se $(K_n^m)_{n \in \mathbf{N}}$ verifica la condizione di $\varepsilon\sigma\mathcal{K}$-interna regolarità di μ rispetto a $B \cap A_m$ $(m \in \mathbf{N})$, esiste $(H_n)_{n \in \mathbf{N}}$ che verifica la condizione di $\delta\left\{H \in \mathcal{K} : H \subset \bigcup_{m \in \mathbf{N}} A_m\right\}$-interna regolarità di μ rispetto a B ed esiste $(k_{n,m})_{n,m \in \mathbf{N}}$, con $k_{n,m} \in \mathbf{N}$ per ogni $n, m \in \mathbf{N}$, per cui $H_n \cap A_m \subset K_{k_{n,m}}^m$ per ogni $n, m \in \mathbf{N}$.

Dimostrazione: *a*) Se $(H_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è tale che $H_n \in \mathcal{K}$, $H_n \subset A$, $H_n \subset H_{n+1}$, $\mu(A \setminus H_n) < 1/(n+1)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e se $K_n = H_n \cap B_n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, risulta per (1.16.0) che $K_n \in \mathcal{K}$, $K_n \subset A$, $K_n \subset K_{n+1}$, $K_n \subset H_n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Inoltre

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\right) \cup F = \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_n\right) \cup F. \tag{1.16.2}$$

Infatti è ovvia l'inclusione del primo membro nel secondo e viceversa se $t \in \bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_n$, $t \notin F$, allora $t \in \bigcup_{n \in \mathbf{N}} B_n$ e pertanto esistono $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$ tali che $t \in H_{n_1} \cap B_{n_2} \subset H_{n_1 \vee n_2} \cap B_{n_1 \vee n_2} = K_{n_1 \vee n_2}$. Risulta ora che $\mu\left(A \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_n\right)\right) = 0$ e quindi da (1.16.2) e da (1.16.0) segue che

$$\mu\left(A \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\right)\right) < \mu\left(A \setminus \left(\left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\right) \cup F\right)\right) + \mu(F) < \mu\left(A \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_n\right)\right) + \mu(F) = 0.$$

b) Se vale *b'*) la tesi segue da *e*) del Teorema 1.11 e da *a*).

Se vale *b''*) la tesi segue da *e*) del Teorema 1.11, dal fatto che se $A \in \mathfrak{L}$, poichè $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}'$, si ha che μ è $\varepsilon\mathcal{K}'$-i.r. rispetto ad A subordinatamente a $(\varepsilon\mathcal{K}, A)$ (ove $\mathcal{K}'$ è come nel Teorema 1.13) e da *d*) del Teorema 1.13.

c) Sia $B \in \mathfrak{L}$ e per ogni $m \in \mathbf{N}$ sia $(K_n^m)_{n \in \mathbf{N}}$ tale che $K_n^m \in \mathcal{K}$, $K_n^m \subset B \cap A_m$, $K_n^m \subset K_{n+1}^m$, $\mu((B \cap A_m) \setminus K_n^m) < 1/(n+1)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ (tali successioni $(K_n^m)_{n \in \mathbf{N}}$ $(m \in \mathbf{N})$ esistono per *g*) del Teorema 1.11 e poichè $\mu(A_m) < \infty$ per ogni $m \in \mathbf{N}$). Sia ora $H_n = \bigcup_{m \in \mathbf{N}} K_{(n+1)2^{m+1}}^m$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Allora per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha che

$$H_n \in \mathcal{K}, \qquad H_n \subset B \cap \left(\bigcup_{m \in \mathbf{N}} A_m\right), \qquad H_n \subset H_{n+1},$$

$$B \setminus H_n = \left(\bigcup_{m \in \mathbf{N}} ((B \cap A_m) \setminus H_n)\right) \cup ((B \cap G) \setminus H_n) \subset \left(\bigcup_{m \in \mathbf{N}} ((B \cap A_m) \setminus K_{(n+1)2^{m+1}}^m)\right) \cup G,$$

da cui

$$\mu(B \setminus H_n) < \sum_{m \in \mathbf{N}} \frac{1}{(n+1)2^{m+1}+1} < (1/(n+1)) \sum_{m \in \mathbf{N}} 2^{-m-1} = 1/(n+1).$$

Se ora $A_h \cap A_k = 0$ per ogni $h, k \in \mathbf{N}$, $h \neq k$, tenendo conto che $K_n^m \subset A_m$ per ogni $n, m \in \mathbf{N}$, risulta che $H_n \cap A_m = K^m_{(n+1)2^{m+1}}$ e quindi basta considerare $k_{n,m} = (n+1)2^{m+1}$ $(n, m \in \mathbf{N})$.

1.17 Lemma: Siano $\mu, \mathcal{K}$ come nelle Definizioni 1.8 e siano $A, B \in \mathfrak{C}$, $B \subset A$, $\mathfrak{J} \in \{\iota\mathcal{K}, \iota\sigma\mathcal{K}\}$. Inoltre $\bigcap_{i \in I} K_i \in \mathcal{K}$ per ogni I finito, $K_i \in \mathcal{K}$ $(i \in I)$ e μ sia $\mathfrak{J}$-i.r. rispetto a B. Allora μ è $\mathfrak{J}$-i.r. rispetto a B subordinatamente a $(\mathfrak{J}, A)$.

Dimostrazione: Sia $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tale che $K_n \in \mathcal{K}$, $K_n \subset A$, $K_n \subset K_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e con $\mu(A \setminus K_n) < 1/(n+1)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ $\left[\text{risp. con } \mu\left(A \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\right)\right) = 0\right]$ e sia $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tale che $L_n \in \mathcal{K}$, $L_n \subset B$, $L_n \subset L_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e con $\mu(B \setminus L_n) < 1/(n+1)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ $\left[\text{risp. con } \mu\left(B \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} L_n\right)\right) = 0\right]$. Sia ora $H_n = K_{2n+1} \cap L_{2n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Allora per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha che $H_n \in \mathcal{K}$, $H_n \subset B$, $H_n \subset H_{n+1}$, $H_n \subset K_{2n+1}$ e

$$\mu(B \setminus H_n) < \mu(A \setminus K_{2n+1}) + \mu(B \setminus L_{2n+1}) < (1/(2n+2)) + (1/(2n+2)) = 1/(n+1)$$

$\left[\text{risp. } \mu\left(B \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_n\right)\right) < \mu\left(A \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\right)\right) + \mu\left(B \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} L_n\right)\right) = 0\right.$, in quanto $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_n = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} (K_{2n+1} \cap L_{2n+1}) = \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\right) \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} L_n\right)$, ove l'ultima eguaglianza segue dalla crescenza di $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ e di $\left.(L_n)_{n \in \mathbf{N}}\right]$.

1.18 Definizioni: Siano (T, τ), (X, ϱ), (Z, ζ) spazi topologici, $\mathfrak{C}$ σ-algebra su T, $\mu: \mathfrak{C} \to [0, \infty]$ misura, $\mathcal{K} \subset \mathfrak{C}$, $E \in \mathfrak{C} \times \mathcal{B}(\varrho)$, $A \in \mathfrak{C}$, $f: E \to [-\infty, \infty]$, $g: E \to Z$. Allora si dice che:

a') $(f, A, \mu, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[\iota\mathcal{K}]$] se esiste $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tale che $K_n \in \mathcal{K}$, $K_n \subset A$, $\mu(A \setminus K_n) < 1/(n+1)$, $f|(K_n \times X) \cap E$ è s.c.i. [risp. s.s.c.i.] per ogni $n \in \mathbf{N}$,

a'') $(f, A, \mu, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $SD[\iota\mathcal{K}]$ [risp. $SD[\iota\sigma\mathcal{K}]$] se esiste $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tale che $K_n \in \mathcal{K}$, $K_n \subset A$, $\mu(A \setminus K_n) < 1/(n+1)$, $K_n \subset K_{n+1}$, $f|(K_n \times X) \cap E$ è s.c.i. [risp. s.s.c.i.] per ogni $n \in \mathbf{N}$,

a''') $(f, A, \mu, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $SD[\sigma\mathcal{K}]$ [risp. $SD[\iota\sigma\mathcal{K}]$] se esiste $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tale che $K_n \in \mathcal{K}$, $K_n \subset A$, $f|(K_n \times X) \cap E$ è s.c.i. [risp. s.s.c.i.] per ogni $n \in \mathbf{N}$, $\mu\left(A \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\right)\right) = 0$,

a'''') $(f, A, \mu, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $SD[\iota\sigma\mathcal{K}]$ [risp. $SD[\iota\sigma\mathcal{K}]$] se esiste $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tale che $K_n \in \mathcal{K}$, $K_n \subset A$, $K_n \subset K_{n+1}$, $f|(K_n \times X) \cap E$ è s.c.i. [risp. s.s.c.i.] per ogni $n \in \mathbf{N}$, $\mu\left(A \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\right)\right) = 0$;

b') $(g, A, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K})$ [risp. $SD(s\mathcal{K})$] se esiste $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tale che $K_n \in \mathcal{K}$, $K_n \subset A$, $\mu(A \setminus K_n) < 1/(n+1)$, $g/(K_n \times X) \cap E$ è continua [risp. sequenzialmente continua] per ogni $n \in \mathbf{N}$.

b'') $(g, A, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\iota\mathcal{K})$ [risp. $SD(s\iota\mathcal{K})$] se esiste $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tale che $K_n \in \mathcal{K}$, $K_n \subset A$, $\mu(A \setminus K_n) < 1/(n+1)$, $K_n \subset K_{n+1}$, $g/(K_n \times X) \cap E$ è continua [risp. sequenzialmente continua] per ogni $n \in \mathbf{N}$.

b''') $(g, A, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\sigma\mathcal{K})$ [risp. $SD(s\sigma\mathcal{K})$] se esiste $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tale che $K_n \in \mathcal{K}$, $K_n \subset A$, $g/(K_n \times X) \cap E$ è continua [risp. sequenzialmente continua] per ogni $n \in \mathbf{N}$, $\mu\left(A \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} K_n\right)\right) = 0$.

b^{iv}) $(g, A, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\iota\sigma\mathcal{K})$ [risp. $SD(s\iota\sigma\mathcal{K})$] se esiste $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tale che $K_n \in \mathcal{K}$, $K_n \subset A$, $K_n \subset K_{n+1}$, $g/(K_n \times X) \cap E$ è continua [risp. sequenzialmente continua] per ogni $n \in \mathbf{N}$, $\mu\left(A \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} K_n\right)\right) = 0$.

1.19 Lemma: Siano (T, τ), (X, ϱ), (Z, ζ), μ, $\mathcal{K}$, E, A, f, g come nelle Definizioni 1.18, $B \in \mathfrak{L}$, $\mathcal{K} \subset \mathfrak{L}$ e siano $\mathfrak{J} \in \{\mathcal{K}, \iota\mathcal{K}, \sigma\mathcal{K}, \iota\sigma\mathcal{K}\}$, $\mathfrak{J} \in \{\mathcal{K}, \iota\mathcal{K}, \sigma\mathcal{K}, \iota\sigma\mathcal{K}\}$. Allora, se μ è $\mathfrak{J}$-i.r. rispetto a B subordinatamente a $(\mathfrak{J}, A)$, si ha che:

a) se $(f, A, \mu, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $SD[\mathfrak{J}]$ [risp. $SD[s\mathfrak{J}]$], risulta che $(f, B, \mu, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $SD[\mathfrak{J}]$ [risp. $SD[s\mathfrak{J}]$];

b) se $(g, A, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\mathfrak{J})$ [risp. $SD(s\mathfrak{J})$], risulta che $(g, B, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\mathfrak{J})$ [risp. $SD(s\mathfrak{J})$].

La dimostrazione è ovvia conseguenza delle definizioni.

1.20 Teorema: Siano (T, τ), (X, ϱ), (Z, ζ), μ, $\mathcal{K}$, E, f, g come nelle Definizioni 1.18, $\mathcal{K} \subset \mathfrak{L}$, $B \in \mathfrak{L}$. Esistano A_n $(n \in \mathbf{N})$, G come in (1.16.1) ed inoltre tali che $A_n \cap A_m = \emptyset$ se $n, m \in \mathbf{N}$, $n \neq m$ e tali che

(1.20.0) se $(I, \succ)$ è un insieme diretto e $t_i, t \in B \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right)$ $(i \in I)$, $\lim_{i\in I} t_i = t$ allora esistono $i^0 \in I$ ed $m \in \mathbf{N}$ tali che se $i \succ i^0$ si abbia $t_i, t \in A_m$ [risp. se $t_k, t \in B \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right)$ $(k \in \mathbf{N})$, $\lim_{k\to\infty} t_k = t$ allora esistono $k^0 \in \mathbf{N}$ ed $m \in \mathbf{N}$ tali che se $k > k^0$ si abbia $t_k, t \in A_m$].

Allora:

a) se $(g, B \cap A_m, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\iota\sigma\mathcal{K})$ [risp. $SD(s\iota\sigma\mathcal{K})$] per ogni $m \in \mathbf{N}$, si ha che $(g, B, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\iota\mathcal{K})$ [risp. $SD(s\iota\mathcal{K})$];

b) se $(f, B \cap A_m, \mu, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $SD[\iota\sigma\mathcal{K}]$ [risp. $SD[s\iota\sigma\mathcal{K}]$] per ogni $m \in \mathbf{N}$, si ha che $(f, B, \mu, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $SD[\iota\mathcal{K}]$ [risp. $SD[s\iota\mathcal{K}]$].

Dimostrazione: *a*) Sia $(K_n^m)_{n\in N}$ tale che $K_n^m \in \mathcal{K}$, $K_n^m \subset B \cap A_m$, $K_n^m \subset K_{n+1}^m$, $g|(K_n^m \times X) \cap E$ è continua [risp. sequenzialmente continua] per ogni $n \in \mathbf{N}$, $\mu\left((B \cap A_m) \setminus \left(\bigcup_{n\in N} K_n^m\right)\right) = 0$ $(m \in \mathbf{N})$. Allora per *c*) del Teorema 1.16 esistono $(H_n)_{n\in N}$ e $(k_{n,m})_{n,m\in N}$ tali che $H_n \in \mathcal{K}$, $H_n \subset B \cap \left(\bigcup_{m\in N} A_m\right)$, $H_n \subset H_{n+1}$, $\mu(B \setminus H_n) < 1/(n+1)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, $k_{n,m} \in \mathbf{N}$ e $H_n \cap A_m \subset K_{k_{n,m}}^m$ per ogni $n, m \in \mathbf{N}$. Pertanto

(1.20.1) $g|((H_n \cap A_m) \times X) \cap E$ è continua [risp. sequenzialmente continua] per ogni $n, m \in \mathbf{N}$.

Siano ora $n \in \mathbf{N}$, $(I, \succ)$ insieme diretto, (t_i, x_i), $(t, x) \in (H_n \times X) \cap E$ $(i \in I)$ [risp. $n \in \mathbf{N}$, (t_k, x_k), $(t, x) \in (H_n \times X) \cap E$ $(k \in \mathbf{N})$] tali che $\lim_{i\in I} (t_i, x_i) = (t, x)$ [risp. $\lim_{k\to\infty} (t_k, x_k) = (t, x)$]. Tenendo ora conto di (1.20.0) e di (1.20.1) si ottiene che $g(t, x) = \lim_{i\in I} g(t_i, x_i)$ $\left[\text{risp. } g(t, x) = \lim_{k\to\infty} g(t_k, x_k)\right]$ e quindi $g|(H_n \times X) \cap E$ è continua [risp. sequenzialmente continua] per ogni $n \in \mathbf{N}$.

b) Sia σ_s la topologia della semicontinuità inferiore su $[-\infty, \infty]$ e cioè $\sigma_s = \{]\alpha, \infty] : \alpha \in [-\infty, \infty]\} \cup \{\emptyset, [-\infty, \infty]\}$. Allora se (Y, σ) è uno spazio topologico e $b: Y \to [-\infty, \infty]$, si ha che b è s.c.i. [risp. s.s.c.i.] se e solo se $b: (Y, \sigma) \to ([-\infty, \infty], \sigma_s)$ è continua [risp. sequenzialmente continua] (infatti b è s.c.i. [risp. s.s.c.i.] se e solo se $\{y \in Y : b(y) < b\}$ è chiuso [risp. sequenzialmente chiuso] in (Y, σ) per ogni $b \in [-\infty, \infty]$ e basta quindi utilizzare l'equivalenza tra f') ed f'') del Teorema 1.1 di [BA 1]). Applicando ora *a*) a $(Z, \zeta) = ([-\infty, \infty], \sigma_s)$ ed a $g = f$, si conclude.

1.21 Osservazione: Si noti che la condizione (1.20.0) è verificata ad esempio se $A_n \in \tau$ [risp. $A_n \in \pi$ (cfr. [BA 1], Definizione 1.0 *a*))] per ogni $n \in \mathbf{N}$.

1.22 Corollario: Siano (T, τ), (X, ϱ), (Z, ζ), μ, $\mathcal{K}$, E, f, g come nelle Definizioni 1.18, $\mathcal{K} \subset \mathfrak{L}$, $B \in \mathfrak{L}$. Allora:

a) se $\bigcap_{i\in I} K_i \in \mathcal{K}$ per ogni I finito, $K_i \in \mathcal{K}$ $(i \in I)$, se μ è $c\sigma\mathcal{K}$-i.r. e se esistono A_n $(n \in \mathbf{N})$, G come in (1.16.1) ed inoltre tali che $A_n \cap A_m = \emptyset$ se n, $m \in \mathbf{N}$, $n \neq m$ e tali che valga (1.20.0), si ha che:

a') se $(f, B, \mu, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $SD[c\sigma\mathcal{K}]$ [risp. $SD[\pi\sigma\mathcal{K}]$], si ha che $(f, B, \mu, \tau, \varrho)$ verifica anche la proprietà $SD[c\mathcal{K}]$ [risp. $SD[\pi\mathcal{K}]$],

a'') se $(g, B, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(c\sigma\mathcal{K})$ [risp. $SD(\pi\sigma\mathcal{K})$], si ha che $(g, B, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica anche la proprietà $SD(c\mathcal{K})$ [risp. $SD(\pi\mathcal{K})$];

b) se vale (1.16.0) e se valgono le ipotesi di *a*), si ha che:

b') $(f, B, \mu, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $SD[c\sigma\mathcal{K}]$ [risp. $SD[\pi\sigma\mathcal{K}]$] se e solo se verifica la proprietà $SD[c\mathcal{K}]$ [risp. $SD[\pi\mathcal{K}]$],

b'') $(g, B, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\iota\sigma\mathcal{K})$ [risp. $SD(\kappa\sigma\mathcal{K})$] se e solo se verifica la proprietà $SD(\iota\mathcal{K})$ [risp. $SD(\kappa\mathcal{K})$];

c) se vale almeno una delle due condizioni b') e b'') del Teorema 1.16 e se valgono le ipotesi di a), si ha che:

c') $(f, B, \mu, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $SD[\iota\sigma\mathcal{K}]$ [risp. $SD[\kappa\sigma\mathcal{K}]$] se e solo se verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[\iota\mathcal{K}]$],

c'') $(g, B, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\iota\sigma\mathcal{K})$ [risp. $SD(\kappa\sigma\mathcal{K})$] se e solo se verifica la proprietà $SD(\mathcal{K})$ [risp. $SD(\iota\mathcal{K})$].

Dimostrazione: a), a') Dal Lemma 1.17 e da a) del Lemma 1.19 segue che $(f, B \cap A_m, \mu, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $SD[\iota\sigma\mathcal{K}]$ [risp. $SD[\kappa\sigma\mathcal{K}]$] per ogni $m \in \mathbf{N}$ e quindi si conclude per b) del Teorema 1.20.

a'') La dimostrazione è del tutto analoga a quella vista in a').

b) Segue da a), da a) del Teorema 1.16 e dal Lemma 1.19.

c) Segue da a), da b) del Teorema 1.16 e dal Lemma 1.19.

1.23 Esempio: Si consideri $k \in \mathbf{N}$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{R}^k)$, μ la σ-algebra di Lebesgue su $\mathbf{R}^k$, $\mathcal{K} = \{$compatti euclidei di $\mathbf{R}^k\}$, $\mathcal{K} = \{$chiusi euclidei di $\mathbf{R}^k\}$. Allora valgono b') e b'') del Teorema 1.16 ed esistono A_n $(n \in \mathbf{N})$, G come in (1.16.1) ed inoltre tali che $A_n \cap A_m = \emptyset$ se $n, m \in \mathbf{N}$, $n \neq m$ e tali che valga (1.20.0).

Infatti, se d_k è la distanza euclidea su $\mathbf{R}^k$, (1.16.0) si ottiene considerando $B_n = \overline{S_{d_k}(0, n)}$, $F = \emptyset$; b'') si ottiene notando che, se $H \in \mathcal{K}$, allora $H = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} (H \cap \overline{S_{d_k}(0, n)})$; inoltre basta considerare $A_n = S_{d_k}(0, n+1) \setminus \overline{S_{d_k}(0, n)}$ $(n \in \mathbf{N})$, $G = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \partial S_{d_k}(0, n+1)$ e con tale scelta è verificata ovviamente (1.20.0) e vale anche (1.16.1) in quanto se $K_n \in \mathcal{K}$, $K_n \subset A_n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e se $t \in \mathbf{R}^k \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\right)$ allora esiste $n_t \in \mathbf{N}$ tale che $t \in \overline{S_{d_k}(0, n_t + 1)}$ e si ha che $d_k\left(t, \bigcup_{n > n_t + 1} K_n\right) > 1$, $d_k(t, K_n) > 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e pertanto $d_k\left(t, \bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\right) > 0$.

1.24 Osservazioni: a) Si noti che i Teoremi 1.11, 1.13, 1.16 ed il Corollario 1.14 possono essere utili per sostituire nell'ipotesi oppure nella tesi di teoremi già noti il tipo di interna regolarità. Un esempio di applicazione si vedrà nell'Osservazione 1.30.

b) Analogo discorso si può fare per i tipi di proprietà SD del n. 1.18 a), utilizzando il Lemma 1.19 a) insieme ad alcune parti dei Teoremi 1.11, 1.13, 1.16 oppure utilizzando il Teorema 1.20 b) o le parti a'), b'), c') del Corollario 1.22.

Ad esempio si può estendere il Teorema 2.4 di [BA 1] anche ai casi « $\iota\mathcal{K}$ », « $\sigma\mathcal{K}$ », « $\iota\sigma\mathcal{K}$ » (modificando cioè le condizioni (2.4.3) e (2.4.4) di [BA 1]).

Un'altra modifica, indipendente dai teoremi precedenti, del Teorema 2.4 di [BA 1] nel caso «$\tau \sigma \mathcal{K}$» verrà data nel Teorema 1.31.

1.25 Lemma: Siano T insieme, $\mathfrak{C}$ σ-algebra su T, $\mu: \mathfrak{C} \to [0, \infty]$ misura, $T_i \subset T$ $(i \in I \subset \mathbf{N})$. Allora se

(1.25.0) esistono $E_i \in \mathfrak{C}$ $(i \in I)$ ed $i' \in I$ tali che $T_i \setminus \Big(\bigcup_{k \in \{0, \dots, i-1\} \cap I} T_k \Big) \subset E_i$ $(i \in I)$, $\sum_{i \in I, i > i'} \mu(E_i) < \infty$

si ha che

(1.25.1) esistono $F_h \in \mathfrak{C}$ $(h \in \mathbf{N})$ tali che $\bigcup_{i \in I, i > h} \Big(T_i \setminus \Big(\bigcup_{k \in \{0, \dots, i-1\} \cap I} T_k \Big) \Big) \subset F_h$ per ogni $h \in \mathbf{N}$, $\mu(F_h) \to 0$.

Dimostrazione: Se $h > i'$ si ha che $\bigcup_{i \in I, i > h} \Big(T_i \setminus \Big(\bigcup_{k \in \{0, \dots, i-1\} \cap I} T_k \Big) \Big) \subset$ $\subset \bigcup_{i \in I, i > h} E_i$ e $\mu\Big(\bigcup_{i \in I, i > h} E_i \Big) \leq \sum_{i \in I, i > h} \mu(E_i) \xrightarrow[h \to \infty]{} 0$ e si conclude considerando $F_h = \bigcup_{i \in I, i > h} E_i$ per ogni $h \in \mathbf{N}$.

1.26 Osservazioni: *a*) Si noti che, nel Teorema 1.29 di [BA 1], la condizione (1.29.2) può essere sostituita dalla seguente condizione più debole (cfr. Lemma 1.25):

(1.26.0) $\bigcup_{i \in J} \psi_i(K_i) \in \mathcal{K}$ per ogni J finito, $J \subset I$, $K_i \in \mathcal{K}_i$ $(i \in J)$; esistono $F_l \in \mathfrak{C}$ $(l \in \mathbf{N})$ tali che $\bigcup_{i \in I, i > l} \Big(\psi_i(T_i) \setminus \Big(\bigcup_{k \in \{0, \dots, i-1\} \cap I} \psi_k(T_k) \Big) \Big) \subset F_l$ per ogni $l \in \mathbf{N}$, $\mu(F_l) \to 0$.

La dimostrazione è del tutto analoga a quella fatta nel Teorema 1.29 di [BA 1] (ove per ogni $n \in \mathbf{Z}_+$ si consideri $i_n \in I$ tale che $\mu(F_{i_n}) < 1/(2n)$).

b) Si noti ancora che se $l \in \mathbf{N}$, se

$$x \in \Big(\bigcup_{i \in I, i > l} \psi_i(T_i) \Big) \setminus \Big(\bigcup_{i \in \{0, \dots, l\} \cap I} \psi_i(T_i) \Big)$$

e se $i_x = \min \{ i \in I : x \in \psi_i(T_i) \}$ allora

$$x \in \psi_{i_x}(T_{i_x}) \setminus \Big(\bigcup_{k \in \{0, \dots, i_x - 1\} \cap I} \psi_k(T_k) \Big) ;$$

pertanto vale

(1.26.1) $\bigcup_{i \in I, i > l} \Big(\psi_i(T_i) \setminus \Big(\bigcup_{k \in \{0, \dots, i-1\} \cap I} \psi_k(T_k) \Big) \Big) = \Big(\bigcup_{i \in I, i > l} \psi_i(T_i) \Big) \setminus \Big(\bigcup_{i \in \{0, \dots, l\} \cap I} \psi_i(T_i) \Big)$ per ogni $l \in \mathbf{N}$

e quindi la condizione (1.26.0) può essere riscritta utilizzando gli insiemi a secondo membro di (1.26.1) in luogo di quelli a primo membro.

c) Si può infine osservare che, se $\psi_i(T_i) \in \mathfrak{C}$ per ogni $i \in I$, allora la condizione (1.26.0) è equivalente anche alla seguente condizione:

(1.26.2) $\bigcup_{i \in J} \psi_i(K_i) \in \mathcal{K}$ per ogni J finito, $J \subset I$, $K_i \in \mathcal{K}_i$ $(i \in J)$; esiste $l \in \mathbf{N}$ tale che sia $\mu\Big(\Big(\bigcup_{i \in I,\, i > l} \psi_i(T_i)\Big) \setminus \Big(\bigcup_{i \in \{0,\dots,l\} \cap I} \psi_i(T_i)\Big)\Big) < \infty$.

Infatti è ovvio che da (1.26.0) segue (1.26.2) e viceversa, poichè

$$\Big(\bigcup_{i \in I,\, i > l} \psi_i(T_i)\Big) \setminus \Big(\bigcup_{i \in \{0,\dots,l\} \cap I} \psi_i(T_i)\Big) \supset \Big(\bigcup_{i \in I,\, i > l+1} \psi_i(T_i)\Big) \setminus \Big(\bigcup_{i \in \{0,\dots,l+1\} \cap I} \psi_i(T_i)\Big)$$

per ogni $l \in \mathbf{N}$ e visto che

$$\bigcap_{l \in \mathbf{N}} \Big(\Big(\bigcup_{i \in I,\, i > l} \psi_i(T_i)\Big) \setminus \Big(\bigcup_{i \in \{0,\dots,l\} \cap I} \psi_i(T_i)\Big)\Big) = 0,$$

si ha che (1.26.2) implica (1.26.0).

1.27 Si noti che il Teorema 1.29 di [BA 1] poteva essere spezzato in due teoremi nel seguente modo:

Teorema *A*: Siano $I \subset \mathbf{N}$, T, T_i $(i \in I)$ insiemi, $\mathfrak{C}_i$ σ-algebra su T_i $(i \in I)$, $\mathfrak{C}$ σ-algebra su T, $\mu_i \colon \mathfrak{C}_i \to [0, \infty]$ $(i \in I)$, $\mu \colon \mathfrak{C} \to [0, \infty]$ misure, $\psi_i \colon T_i \to T$, $\mathcal{K}_i \subset \mathfrak{C}_i$ $(i \in I)$. Allora:

a) se vale

(1.27.0) per ogni $i \in I$ si ha che $\psi_i(E_n) \in \mathfrak{C}$ $(n \in \mathbf{N})$ e $\mu(\psi_i(E_n)) \to 0$ qualunque sia $(E_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tale che $E_n \in \{T_i \setminus F \colon F \in \mathcal{K}_i\}$ $(n \in \mathbf{N})$, $\mu_i(E_n) \to 0$

e se

(1.27.1) $(H_{n,i} \colon n \in \mathbf{N}, i \in I)$ è tale che $H_{n,i} \in \mathcal{K}_i$ $(n \in \mathbf{N}, i \in I)$, $\mu_i(T_i \setminus H_{n,i}) \to$ $\to 0$ $(i \in I)$

allora vale

(1.27.2) esiste $(b_{n,i} \colon n \in \mathbf{N}, i \in I)$ con $b_{n,i} \in \mathbf{N}$ $(n \in \mathbf{N}, i \in I)$ tale che $\mu\Big(\bigcup_{i \in I} \psi_i(T_i \setminus H_{b_{n,i},i})\Big) < 1/(n+1)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$;

b) se vale

(1.27.3) $\psi_i(H) \in \mathfrak{C}$ e $\psi_i(T_i) \in \mathfrak{C}$ per ogni $H \in \mathcal{K}_i$ e $i \in I$; $\psi_i^{-1}(D) \in \mathfrak{C}_i$ per ogni $D \in \mathfrak{C}$, $D \subset \psi_i(T_i)$ $(i \in I)$; inoltre per ogni $i \in I$ si ha che $\mu(D_n) \to 0$ qualunque sia $(D_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tale che $D_n \in \mathfrak{C}$, $D_n \subset \psi_i(T_i)$ $(n \in \mathbf{N})$, $\mu_i(\psi_i^{-1}(D_n)) \to 0$

e se

(1.27.4) $(H_{n,i}: n \in \mathbf{N}, i \in I)$ è tale che $H_{n,i} \in \mathcal{K}_i$, $\mu_i(T_i \setminus H_{n,i}) < 1/(n+1)$ $(n \in \mathbf{N}, i \in I)$

allora vale

(1.27.5) esiste $(h_{n,i}: n \in \mathbf{N}, i \in I)$ con $h_{n,i} \in \mathbf{N}$ $(n \in \mathbf{N}, i \in I)$ tale che $\mu\Big(\bigcup_{i \in I} (\psi_i(T_i) \setminus \psi_i(H_{h_{n,i},i}))\Big) < 1/(n+1)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$

e se inoltre vale anche

(1.27.6) $$\mu\Big(\Big(T \setminus \bigcup_{i \in I} \psi_i(T_i)\Big)\Big) = 0$$

allora vale

(1.27.7) esiste $(h_{n,i}: n \in \mathbf{N}, i \in I)$ con $h_{n,i} \in \mathbf{N}$ $(n \in \mathbf{N}, i \in I)$ tale che $\mu\Big(\bigcap_{i \in I} (T \setminus \psi_i(H_{h_{n,i},i}))\Big) < 1/(n+1)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Teorema B: Siano I, T, T_i, $\mathfrak{L}$, μ, ψ_i $(i \in I)$ come nel Teorema A, $I \neq \emptyset$, siano inoltre $\mathcal{K}_i \subset 2^{T_i}$ $(i \in I)$, $\mathcal{K} \subset \mathfrak{L}$. Allora:

a) se μ è $\mathcal{K}$-i.r., se vale

(1.27.8) $\psi_i(E) \in \mathfrak{L}$ per ogni $E \in \{T_i \setminus F: F \in \mathcal{K}_i\}$ e per ogni $i \in I$

e se $(H_{n,i}: n \in \mathbf{N}, i \in I)$ è tale che valga

(1.27.9) $H_{n,i} \in \mathcal{K}_i$ $(n \in \mathbf{N}, i \in I)$ ed esistono $(h_{n,i}: n \in \mathbf{N}, i \in I)$ e $(E_n: n \in \mathbf{N})$ con $h_{n,i} \in \mathbf{N}$, $E_n \in \mathfrak{L}$ $(n \in \mathbf{N}, i \in I)$ tali che $\bigcup_{i \in I} \psi_i(T_i \setminus H_{h_{n,i},i}) \subset E_n$, $\mu(E_n) < 1/(n+1)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$

risulta che

(1.27.10) esistono $(H_n: n \in \mathbf{N})$ e $(k_{n,i}: n \in \mathbf{N}, i \in I)$ con $H_n \in \mathcal{K}$ e $k_{n,i} \in \mathbf{N}$ tali che $\psi_i^{-1}(H_n) \subset H_{k_{n,i},i}$ e $\mu(T \setminus H_n) < 1/(n+1)$ $(n \in \mathbf{N}, i \in I)$;

inoltre se $H_{n,i} \subset H_{n+1,i}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, $i \in I$ e se $\bigcup_{i \in L} K_i \in \mathcal{K}$ per ogni L finito e $\{K_i: i \in L\} \subset \mathcal{K}$, in (1.27.10) si può ottenere anche che $H_n \subset H_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$;

la condizione (1.27.10) si ottiene anche se valgono

(1.27.11) esiste $D^0 \in \mathfrak{L}$ con $\mu(D^0) = 0$ tale che $T \setminus \Big(\bigcup_{i \in I} \psi_i(T_i)\Big) \subset D^0$

(1.27.12) $\bigcup_{i \in J} \psi_i(K_i) \in \mathcal{K}$ per ogni J finito, $J \subset I$, $K_i \in \mathcal{K}_i$ $(i \in J)$; esistono $F_l \in \mathfrak{L}$ $(l \in \mathbf{N})$ tali che $\Big(\bigcup_{i \in I, i > l} \psi_i(T_i)\Big) \setminus \Big(\bigcup_{i \in \{0, \ldots, l\} \cap I} \psi_i(T_i)\Big) \subset F_l$ per ogni $l \in \mathbf{N}$, $\mu(F_l) \to 0$

(1.27.13) $K \setminus \left(\bigcup_{i \in J} \psi_i(T_i \setminus K_i) \right) \in \mathcal{K}$ per ogni $K_i \in \mathcal{K}_i$ $(i \in I)$ e $K \in \mathcal{K}$

e se $(H_{n,i}: n \in \mathbf{N}, i \in I)$ è tale che valga (1.27.9);

inoltre se $H_{n,i} \subset H_{n+1,i}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, $i \in I$, in (1.27.10) si può ottenere anche che $H_n \subset H_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$;

b) se μ è $\mathcal{K}$-i.r., se vale

(1.27.14) $\psi_i(H) \in \mathfrak{C}$ per ogni $H \in \mathcal{K}_i$ e $i \in I$

e se $(H_{n,i}: n \in \mathbf{N}, i \in I)$ è tale che valga

(1.27.15) $H_{n,i} \in \mathcal{K}_i$ $(n \in \mathbf{N}, i \in I)$ ed esiste $(h_{n,i}: n \in \mathbf{N}, i \in I)$ con $h_{n,i} \in \mathbf{N}$ $(n \in \mathbf{N}, i \in I)$ tale che $\mu\left(\bigcap_{i \in I} (T \setminus \psi_i(H_{h_{n,i},i})) \right) < 1/(n+1)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$

risulta che

(1.27.16) esistono $(N_n: n \in \mathbf{N})$, con $N_n \subset I$ $(n \in \mathbf{N})$, $(H_n: n \in \mathbf{N})$ e $(k_{n,i}: i \in N_n, n \in \mathbf{N})$ con $H_n \in \mathcal{K}$ e $k_{n,i} \in \mathbf{N}$ $(i \in N_n)$ tali che $\mu(T \setminus H_n) < 1/(n+1)$, $H_n = \bigcup_{i \in N_n} \psi_i(H_{k_{n,i},i} \cap \psi_i^{-1}(H_n))$ $(n \in \mathbf{N})$;

inoltre se $H_{n,i} \subset H_{n+1,i}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, $i \in I$ e se $\bigcup_{i \in L} K_i \in \mathcal{K}$ per ogni L finito e $\{K_i: i \in L\} \subset \mathcal{K}_i$, in (1.27.16) si può ottenere anche che $H_n \subset H_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$;

la condizione (1.27.16) si ottiene anche se valgono (1.27.11),

(1.27.17) $\bigcup_{i \in J} \psi_i(K_i) \in \mathcal{K}$ per ogni J finito, $J \subset I$, $K_i \in \mathcal{K}_i$ $(i \in J)$

e se $(H_{n,i}: n \in \mathbf{N}, i \in I)$ è tale che valga

(1.27.18) $H_{n,i} \in \mathcal{K}_i$ $(n \in \mathbf{N}, i \in I)$ ed esistono $(h_{n,i}: n \in \mathbf{N}, i \in I)$, $(i_n: n \in \mathbf{N})$, $(C_n: n \in \mathbf{N})$ con $h_{n,i} \in \mathbf{N}$, $i_n \in \mathbf{N}$, $C_n \in \mathfrak{C}$ $(n \in \mathbf{N}, i \in I)$ tali che $\left(\bigcup_{i \in I} \psi_i(T_i) \right) \setminus \left(\bigcup_{i \in \{0,\dots,i_n\} \cap I} \psi_i(H_{h_{n,i},i}) \right) \subset C_n$, $\mu(C_n) < 1/(n+1)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$;

inoltre se $H_{n,i} \subset H_{n+1,i}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, $i \in I$, in (1.27.16) si può ottenere anche che $H_n \subset H_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$;

la condizione (1.27.16) si ottiene ancora se valgono (1.27.11), (1.27.12) e se $(H_{n,i}: n \in \mathbf{N}, i \in I)$ è tale che valga

(1.27.19) $H_{n,i} \in \mathcal{K}_i$ $(n \in \mathbf{N}, i \in I)$ ed esistono $(h_{n,i}: n \in \mathbf{N}, i \in I)$, $(D_n: n \in \mathbf{N})$ con $h_{n,i} \in \mathbf{N}$, $D_n \in \mathfrak{C}$ $(n \in \mathbf{N}, i \in I)$ tali che $\bigcup_{i \in I} (\psi_i(T_i) \setminus \psi_i(H_{h_{n,i},i})) \subset D_n$, $\mu(D_n) < 1/(n+1)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$;

inoltre se $H_{n,i} \subset H_{n+1,i}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, $i \in I$, in (1.27.16) si può ottenere anche che $H_n \subset H_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Siano inoltre τ topologia su T, τ_i topologia su T_i $(i \in I)$, (X, ϱ), (X_0, ϱ_0) spazi topologici, $\varphi: X_0 \to X$, $E \subset T \times X$, $E_i = (\psi_i \times \varphi)^{-1}(E)$ $(i \in I)$. Allora:

i) se valgono (1.27.11), (1.27.17), se φ è aperta [risp. se valgono (1.27.11), (1.27.17)], se vale (1.29.6) di [BA 1] e se $(H_{n,i}: n \in \mathbf{N}, i \in I)$ è tale che valga (1.27.18) risulta che

(1.27.20) esistono $(N_n: n \in \mathbf{N})$, con $N_n \subset I$ $(n \in \mathbf{N})$, $(H_n: n \in \mathbf{N})$ e $(k_{n,i}: i \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N})$ con $H_n \in \mathcal{K}$ e $k_{n,i} \in \mathbf{N}$ $(i \in N_n)$ tali che $\mu(T \setminus H_n) < 1/(n+1)$, $H_n = \bigcup_{i \in N_n} \psi_i(H_{k_{n,i},i} \cap \psi_i^{-1}(H_n))$ $(n \in \mathbf{N})$ e

$$(\psi_i \times \varphi)_{E_i \cap ((H_{k_{n,i},i} \cap \psi_i^{-1}(H_n)) \times X_0), E \cap (H_n \times X)}$$

sia aperta [risp. $(\psi_i \times \varphi)_{E_i \cap ((H_{k_{n,i},i} \cap \psi_i^{-1}(L)) \times X_0), E \cap (L \times X)}$ sia sequenzialmente aperta per ogni $L \in \mathcal{K}$, $L \subset H_n$] per ogni $i \in N_n$, $n \in \mathbf{N}$.

La dimostrazione di questi due teoremi è del tutto analoga a quella del Teorema 1.29 di [BA 1]; si noti che per quanto riguarda il Teorema A conviene in *a*) scegliere $h_{n,i}$ tali che $\mu(\psi_i(T_i \setminus H_{h_{n,i},i})) < 2^{-i-1}(n+1)^{-1}$ e in *b*) scegliere $h_{n,i}$ tali che $\mu(\psi_i(T_i) \setminus \psi_i(H_{h_{n,i},i})) < 2^{-i-1}(n+1)^{-1}$ $(n \in \mathbf{N}, i \in I)$ e che nel Teorema B conviene scegliere in ognuno dei casi $k_{n,i} = h_{2n+1,i}$ $(n \in \mathbf{N}, i \in I)$; inoltre si può osservare che se vale (1.27.12) e se $(H_{n,i}: n \in \mathbf{N}, i \in I)$ verifica (1.27.19), allora verifica anche (1.27.18); si osservi anche che per ottenere $H_n \subset H_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ in (1.27.10) e in (1.27.16) conviene scegliere $(k_{n,i})_{n \in \mathbf{N}}$ crescente $(i \in I)$ tale che $k_{n,i} > h_{2n+1,i}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, $i \in I$.

Si noti ancora che il Teorema 1.29 di [BA 1] è ovvia conseguenza dei due teoremi A e B.

1.28 Lemma: Siano A_n, B_n insiemi $(n \in \mathbf{N})$ tali che $A_n \supset A_{n+1}$, $B_n \supset B_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Allora

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} (A_n \cup B_n) = \left(\bigcap_{n \in \mathbf{N}} A_n\right) \cup \left(\bigcap_{n \in \mathbf{N}} B_n\right).$$

Dimostrazione: È ovvia l'inclusione del secondo membro nel primo (inclusione che vale nella sola ipotesi che A_n, B_n siano insiemi $(n \in \mathbf{N})$). Viceversa se $x \notin \left(\bigcap_{n \in \mathbf{N}} A_n\right) \cup \left(\bigcap_{n \in \mathbf{N}} B_n\right)$ esistono $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$ tali che $x \notin A_{n_1} \cup B_{n_2}$ e pertanto $x \notin A_{n_1 \vee n_2} \cup B_{n_1 \vee n_2}$.

1.29 Teorema: Siano $\emptyset \neq I \subset \mathbf{N}$, T, T_i $(i \in I)$ insiemi, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu: \mathfrak{L} \to [0, \infty]$ misura, $\psi_i: T_i \to T$, $\mathcal{K}_i \subset 2^{T_i}$, $\mathcal{K} \subset \mathfrak{L}$ $(i \in I)$. Allora:

a) se μ è $\sigma\mathcal{K}$-i.r., se vale

(1.29.0) $\psi_i(A) \in \mathfrak{L}$ per ogni $A \in \{T_i \setminus F: F \in \mathcal{K}_i\}$ e per ogni $i \in I$, $\bigcup_{i \in L} K_i \in \mathcal{K}$ per ogni L finito e $\{K_i: i \in L\} \subset \mathcal{K}$

e se $(H_{n,i}: n \in \mathbf{N}, i \in I)$ è tale che valga

(1.29.1) $H_{n,i} \in \mathcal{K}_i$, $H_{n,i} \subset H_{n+1,i}$ $(n \in \mathbf{N}, i \in I)$, esiste $(b_{n,i}: n \in \mathbf{N}, i \in I)$ con $b_{n,i} \in \mathbf{N}$ $(n \in \mathbf{N}, i \in I)$ ed esiste $E \in \mathfrak{L}$ con $\mu(E) = 0$ per cui $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left(\bigcup_{i \in I} \psi_i(T_i \setminus H_{b_{n,i},i}) \right) \subset E$

risulta che

(1.29.2) esistono $(H_n: n \in \mathbf{N})$ e $(k_{n,i}: n \in \mathbf{N}, i \in I)$ con $H_n \in \mathcal{K}$, $H_n \subset H_{n+1}$ e $k_{n,i} \in \mathbf{N}$ tali che $\psi_i^{-1}(H_n) \subset H_{k_{n,i},i}$ $(n \in \mathbf{N}, i \in I)$ e $\mu\left(T \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_n\right)\right) = 0$;

la stessa condizione (1.29.2) si ottiene se valgono

(1.29.3) esiste $D^0 \in \mathfrak{L}$ con $\mu(D^0) = 0$ tale che $T \setminus \left(\bigcup_{i \in I} \psi_i(T_i)\right) \subset D^0$

(1.29.4) $\bigcup_{i \in J} \psi_i(K_i) \in \mathcal{K}$ per ogni J finito, $J \subset I$, $K_i \in \mathcal{K}_i$ $(i \in J)$

(1.29.5) $K \setminus \left(\bigcup_{i \in J} \psi_i(T_i \setminus K_i)\right) \in \mathcal{K}$ per ogni $K_i \in \mathcal{K}_i$ $(i \in I)$ e $K \in \mathcal{K}$

e se $(H_{n,i}: n \in \mathbf{N}, i \in I)$ è tale che valga (1.29.1);

b) se μ è $\sigma\mathcal{K}$-i.r., se vale

(1.29.6) $\psi_i(H) \in \mathfrak{L}$ per ogni $H \in \mathcal{K}_i$ e $i \in I$; $\bigcup_{i \in L} K_i \in \mathcal{K}$ per ogni L finito e $\{K_i: i \in L\} \subset \mathcal{K}$

e se $(H_{n,i}: n \in \mathbf{N}, i \in I)$ è tale che valga

(1.29.7) $H_{n,i} \in \mathcal{K}_i$, $H_{n,i} \subset H_{n+1,i}$ $(n \in \mathbf{N}, i \in I)$ ed esiste $(b_{n,i}: n \in \mathbf{N}, i \in I)$, con $b_{n,i} \in \mathbf{N}$ $(n \in \mathbf{N}, i \in I)$ per cui $\mu\left[\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left(\bigcap_{i \in I} (T \setminus \psi_i(H_{b_{n,i},i}))\right)\right] = 0$

risulta che

(1.29.8) esistono $(N_n: n \in \mathbf{N})$, con $N_n \subset I$ $(n \in \mathbf{N})$, $(H_n: n \in \mathbf{N})$ e $(k_{n,i}: i \in N_n, n \in \mathbf{N})$ con $H_n \in \mathcal{K}$, $H_n \subset H_{n+1}$ e $k_{n,i} \in \mathbf{N}$ $(i \in N_n)$ tali che $\mu\left(T \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_n\right)\right) = 0$, $H_n = \bigcup_{i \in N_n} \psi_i(H_{k_{n,i},i} \cap \psi_i^{-1}(H_n))$ $(n \in \mathbf{N})$;

la stessa condizione (1.29.8) si ottiene se valgono (1.29.3), (1.29.4) e se $(H_{n,i}: n \in \mathbf{N}, i \in I)$ è tale che valga

(1.29.9) $H_{n,i} \in \mathcal{K}_i$, $H_{n,i} \subset H_{n+1,i}$ $(n \in \mathbf{N}, i \in I)$ ed esistono $(b_{n,i}: n \in \mathbf{N}, i \in I)$, $C \in \mathfrak{L}$ con $\mu(C) = 0$ per cui $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left(\left(\bigcup_{i \in I} \psi_i(T_i)\right) \setminus \left(\bigcup_{i \in \{0,\dots,n\} \cap I} H_{b_{n,i},i}\right)\right) \subset C$;

la stessa condizione (1.29.8) si ottiene anche se valgono (1.29.3), (1.29.4) e se $(H_{n,i}: n \in \mathbf{N}, i \in I)$ è tale che valga

(1.29.10) $H_{n,i} \in \mathcal{H}_i$, $H_{n,i} \subset H_{n+1,i}$ $(n \in \mathbf{N}, i \in I)$, esiste $(h_{n,i}: n \in \mathbf{N}, i \in I)$ con $h_{n,i} \in \mathbf{N}$ $(n \in \mathbf{N}, i \in I)$ ed esiste $D \in \mathfrak{L}$ con $\mu(D) = 0$ per cui $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \Big(\bigcup_{i \in I} (\psi_i(T_i) \setminus \psi_i(H_{h_{n,i},i})) \Big) \subset D$.

Siano inoltre τ topologia su T, τ_i topologia su T_i $(i \in I)$, (X, ϱ), (X_0, ϱ_0) spazi topologici, $\varphi: X_0 \to X$, $E \subset T \times X$, $E_i = (\psi_i \times \varphi)^{-1}(E)$ $(i \in I)$. Allora:

c) se valgono (1.29.3), (1.29.4), se φ è aperta [risp. se valgono (1.29.3), (1.29.4)], se vale

(1.29.11) per ogni $i \in I$, per ogni $H \in \mathcal{H}_i$ e per ogni $K \in \mathcal{K}$, $K \supset \psi_i(H)$ esistono $K_n^{(i,H,K)} \subset K$, $K_n^{(i,H,K)} \in \mathcal{K}$, $K_n^{(i,H,K)} \subset K_{n+1}^{(i,H,K)}$ $(n \in \mathbf{N})$ tali che sia

$$\mu\Big(K \setminus \Big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n^{(i,H,K)}\Big)\Big) = 0, \quad \forall_{i \in I} \forall_{H \in \mathcal{H}_i} \forall_{K \in \mathcal{K}, K \supset \psi_i(H)} \forall_{n \in \mathbf{N}}$$

sia aperta [risp. $(\psi_i \times \varphi)_{E \cap ((H \cap \psi_i^{-1}(L)) \times X_0), E \cap (L \times X)}$ sia sequenzialmente aperta per ogni $L \in \mathcal{K}$, $L \subset K_n^{(i,H,K)}$] $(n \in \mathbf{N})$ e inoltre $K_n^{(i,H,K)} \subset K_n^{(i,H',K')}$ se $H' \supset H$, $K' \supset K$ $(n \in \mathbf{N})$, $K_n^{(i,H,K)} \cap K' \in \mathcal{K}$ se $K' \in \mathcal{K}$, $K' \subset K$, $K' \not\supset \psi_i(H)$ $(n \in \mathbf{N})$ e $\Big(\bigcap_{i \in I_{(H_i, K_i, n_i)}, n} K_{n_i}^{(i,H_i,K_i)} \Big) \cap \cap \Big(\bigcap_{i \in I' \setminus I_{(H_i, K_i, n_i)}, n} (K \cap K_{n_i}^{(i,H_i,K_i)}) \Big) \in \mathcal{K}$ per ogni I' tale che $I \supset I' \supset \supset I_{(H_i, K_i, n_i), K} = \{i \in I: K \supset \psi_i(H_i)\}$, $(H_i: i \in I)$ con $H_i \in \mathcal{H}_i$ $(i \in I)$, $(n_i: i \in I')$ con $n_i \in \mathbf{N}$ $(i \in I')$, $K \in \mathcal{K}$, $K_i \in \mathcal{K}$, $K \subset K_i$, $K_i \supset \psi_i(H_i)$ $(i \in I' \setminus I_{(H_i, K_i, n_i), K})$,

se vale almeno una delle due seguenti ipotesi:

(1.29.12) se $K \in \mathcal{K}$ e se $(L_{n,i}: n \in \mathbf{N}, i \in I)$, con $L_{n,i} \in \mathcal{K}$, $L_{n,i} \subset K$, $L_{n,i} \subset \subset L_{n+1,i}$ $(n \in \mathbf{N}, i \in I)$, è tale che $\mu\Big(K \setminus \Big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} L_{n,i}\Big)\Big) = 0$ per ogni $i \in I$, si ha che esiste $(l_{n,i}: n \in \mathbf{N}, i \in I)$, con $l_{n,i} \in \mathbf{N}$ $(n \in \mathbf{N}, i \in I)$ tale che $\mu\Big(K \setminus \Big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \Big(\bigcap_{i \in I} L_{l_{n,i},i} \Big)\Big)\Big) = 0$

(1.29.13) vale (1.29.11) con $K_n^{(i,H,K)} = K$ $(i \in I, H \in \mathcal{H}_i, K \in \mathcal{K}, K \supset \psi_i(H), n \in \mathbf{N})$

e se $(H_{n,i}: n \in \mathbf{N}, i \in I)$ è tale che valga (1.29.9), risulta che

(1.29.14) esistono $(N_n: n \in \mathbf{N})$, con $N_n \subset I$ $(n \in \mathbf{N})$, $(H_n: n \in \mathbf{N})$ e $(k_{n,i}: i \in N_n, n \in \mathbf{N})$ con $H_n \in \mathcal{K}$, $H_n \subset H_{n+1}$ e $k_{n,i} \in \mathbf{N}$ $(i \in N_n, n \in \mathbf{N})$ tali che $\mu\Big(T \setminus \Big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_n\Big)\Big) = 0$, $H_n = \bigcup_{i \in N_n} \psi_i(H_{k_{n,i},i} \cap \psi_i^{-1}(H_n))$ $(n \in \mathbf{N})$ e

$$(\psi_i \times \varphi)_{E \cap ((H_{k_{n,i},i} \cap \psi_i^{-1}(H_n)) \times X_0), E \cap (H_n \times X)}$$

sia aperta [risp. $(\psi_i \times \varphi)_{E \cap ((H_{k_{n,i},i} \cap \psi_i^{-1}(L)) \times X_0), E \cap (L \times X)}$ sia sequenzialmente aperta per ogni $L \in \mathcal{K}$, $L \subset H_n$] per ogni $i \in N_n$, $n \in \mathbf{N}$.

Dimostrazione: Si può supporre senza restrizioni che $0 \in I$.

a) Sia $(H_{n,i}: n \in \mathbf{N},\ i \in I)$ tale che valga (1.29.1). Sia μ misura $\sigma\mathcal{K}$-i.r. e valga (1.29.0); sia $(k_{n,i})_{n \in \mathbf{N}}$ crescente $(i \in I)$ tale che $k_{n,i} \in \mathbf{N}$, $k_{n,i} > h_{n,i}$, ove $h_{n,i}$ sono come in (1.29.1) $(n \in \mathbf{N},\ i \in I)$ e siano $K_n = T \setminus \left(\bigcup_{i \in I} \psi_i(T_i \setminus H_{k_{n,i},i})\right)$ $(n \in \mathbf{N})$, $H_n^k \in \mathcal{K}$, $H_n^k \subset K_n$ $(k \in \mathbf{N})$ tali che $\mu\left(K_n \setminus \left(\bigcup_{k \in \mathbf{N}} H_n^k\right)\right) = 0$ $(n \in \mathbf{N})$. Allora

$$T \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\right) = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left(\bigcup_{i \in I} \psi_i(T_i \setminus H_{k_{n,i},i})\right) \subset \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left(\bigcup_{i \in I} \psi_i(T_i \setminus H_{k_{n,i},i})\right)$$

e quindi $\mu\left(T \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\right)\right) = 0$ per (1.29.1). Basta ora considerare $H_n = \bigcup_{m+k \leq n} H_m^k$ e risulta che $H_n \in \mathcal{K}$ per (1.29.0), $H_n \subset H_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$ e

$$T \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_n\right) = T \setminus \left(\bigcup_{m,k \in \mathbf{N}} H_m^k\right) = \left(T \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\right)\right) \cup \left(\left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\right) \setminus \left(\bigcup_{m,k \in \mathbf{N}} H_m^k\right)\right) \subset$$
$$\subset \left(T \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\right)\right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \left(K_n \setminus \left(\bigcup_{k \in \mathbf{N}} H_n^k\right)\right)\right),$$

per cui $\mu\left(T \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_n\right)\right) = 0$. Inoltre, poichè $K_m \subset K_{m+1}$ $(m \in \mathbf{N})$, per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha che $H_n \subset \bigcup_{m \leq n} K_m = K_n$ e quindi $\psi_i^{-1}(H_n) \subset \psi_i^{-1}(K_n) \subset H_{k_{n,i},i}$ $(i \in I)$. Valgano ora (1.29.3), (1.29.4), (1.29.5); sia $(k_{n,i})_{n \in \mathbf{N}}$ crescente $(i \in I)$ tale che $k_{n,i} \in \mathbf{N}$, $k_{n,i} > h_{n,i}$, ove $h_{n,i}$ sono come in (1.29.1) $(n \in \mathbf{N},\ i \in I)$, sia $n \in \mathbf{N}$ e sia $H_n = \left(\bigcup_{i \in \{0,\dots,n\} \cap I} \psi_i(H_{k_{n,i},i})\right) \setminus \left(\bigcup_{i \in I} \psi_i(T_i \setminus H_{k_{n,i},i})\right)$. Allora $H_n \in \mathcal{K}$ per (1.29.5) e poichè $\bigcup_{i \in \{0,\dots,n\} \cap I} \psi_i(H_{k_{n,i},i}) \in \mathcal{K}$ per (1.29.4) e visto che $0 \in I$; inoltre risulta che $\psi_i^{-1}(H_n) \subset H_{k_{n,i},i}$ $(i \in I)$ e $H_n \subset H_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Si ha anche che

$$T \setminus H_n = \left(T \setminus \left(\bigcup_{i \in \{0,\dots,n\} \cap I} \psi_i(H_{k_{n,i},i})\right)\right) \cup \left(\bigcup_{i \in I} \psi_i(T_i \setminus H_{k_{n,i},i})\right) \subset \left(T \setminus \left(\bigcup_{i \in I} \psi_i(T_i)\right)\right) \cup$$
$$\cup \left(\left(\bigcup_{i \in I,\, i > n} \psi_i(T_i)\right) \setminus \left(\bigcup_{i \in \{0,\dots,n\} \cap I} \psi_i(T_i)\right)\right) \cup \left(\bigcup_{i \in I} \psi_i(T_i \setminus H_{k_{n,i},i})\right),$$

per cui, utilizzando il Lemma 1.28 risulta che

$$T \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_n\right) = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} (T \setminus H_n) \subset \left(T \setminus \left(\bigcup_{i \in I} \psi_i(T_i)\right)\right) \cup$$
$$\cup \left(\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left[\left(\bigcup_{i \in I,\, i > n} \psi_i(T_i)\right) \setminus \left(\bigcup_{i \in \{0,\dots,n\} \cap I} \psi_i(T_i)\right)\right]\right) \cup \left(\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left(\bigcup_{i \in I} \psi_i(T_i \setminus H_{k_{n,i},i})\right)\right) \subset D^\theta \cup E,$$

ove D^θ ed E sono come in (1.29.3) e (1.29.1) (si è tenuto conto del fatto che $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left(\left(\bigcup_{i \in I,\, i > n} \psi_i(T_i)\right) \setminus \left(\bigcup_{i \in \{0,\dots,n\} \cap I} \psi_i(T_i)\right)\right) = 0$). Allora da (1.29.3) e da (1.29.1) segue che $\mu\left(T \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_n\right)\right) = 0$.

b) Sia $(H_{n,i}: n \in \mathbf{N},\ i \in I)$ tale che valga (1.29.7), sia μ misura $\sigma\mathcal{K}$-i.r. e valga (1.29.6); sia $(k_{n,i})_{n\in\mathbf{N}}$ crescente $(i \in I)$ tale che $k_{n,i} \in \mathbf{N}$, $k_{n,i} > b_{n,i}$, ove $b_{n,i}$ sono come in (1.29.7) $(n \in \mathbf{N},\ i \in I)$ e siano $K_n = \bigcup_{i\in I} \psi_i(H_{k_{n,i},i})$ $(n \in \mathbf{N})$, $H_n^k \in \mathcal{K}$, $H_n^k \subset K_n$ $(k \in \mathbf{N})$ tali che $\mu\Big(K_n \setminus \Big(\bigcup_{k\in\mathbf{N}} H_n^k\Big)\Big) = 0$. Allora

$$T \setminus \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} K_n\Big) = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \Big(T \setminus \Big(\bigcup_{i\in I} \psi_i(H_{k_{n,i},i})\Big)\Big) = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \Big(\bigcap_{i\in I} (T \setminus \psi_i(H_{k_{n,i},i}))\Big)$$

e quindi $\mu\Big(T \setminus \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} K_n\Big)\Big) = 0$ per (1.29.7). Basta ora considerare $H_n = \bigcup_{m+k\leq n} H_m^k$ e risulta che $H_n \in \mathcal{K}$ per (1.29.6), $H_n \subset H_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$ e

$$T \setminus \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} H_n\Big) = T \setminus \Big(\bigcup_{m,k\in\mathbf{N}} H_m^k\Big) = \Big(T \setminus \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} K_n\Big)\Big) \cup \Big(\Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} K_n\Big) \setminus \Big(\bigcup_{m,k\in\mathbf{N}} H_m^k\Big)\Big) \subset$$
$$\subset \Big(T \setminus \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} K_n\Big)\Big) \cup \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \Big(K_n \setminus \Big(\bigcup_{k\in\mathbf{N}} H_n^k\Big)\Big)\Big),$$

per cui $\mu\Big(T \setminus \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} H_n\Big)\Big) = 0$. Inoltre, poichè $K_m \subset K_{m+1}$ $(m \in \mathbf{N})$, per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha che $H_n \subset \bigcup_{m\leq n} K_m = K_n$ e quindi $H_n = \bigcup_{i\in I} \psi_i(H_{k_{n,i},i} \cap \psi_i^{-1}(H_n))$: infatti la inclusione del secondo membro nel primo è ovvia e se $x \in H_n$ allora $x \in K_n$ e pertanto esistono $i_n \in I$ e $y_n \in H_{k_{n,i_n},i_n}$ tali che $\psi_{i_n}(y_n) = x$, per cui $y_n \in (\psi_{i_n})^{-1}(\{x\}) \subset \subset (\psi_{i_n})^{-1}(H_n)$. Sia ora $(H_{n,i}: n \in \mathbf{N},\ i \in I)$ tale che valga (1.29.9) e valgano (1.29.3) e (1.29.4). Sia $(k_{n,i})_{n\in\mathbf{N}}$ crescente $(i \in I)$ tale che $k_{n,i} \in \mathbf{N}$, $k_{n,i} > b_{n,i}$, ove $b_{n,i}$ sono come in (1.29.9) $(n \in \mathbf{N},\ i \in I)$, sia $n \in \mathbf{N}$ e sia

$$H_n = \bigcup_{i\in\{0,\dots,n\}\cap I} \psi_i(H_{k_{n,i},i}).$$

Allora $H_n \in \mathcal{K}$ per (1.29.4) e poichè $0 \in I$; inoltre

$$H_n = \bigcup_{i\in\{0,\dots,n\}\cap I} \psi_i(H_{k_{n,i},i} \cap \psi_i^{-1}(H_n)) \quad \text{e} \quad H_n \subset H_{n+1}$$

per ogni $n \in \mathbf{N}$. Si ha anche che

$$T \setminus H_n \subset \Big(T \setminus \Big(\bigcup_{i\in I} \psi_i(T_i)\Big)\Big) \cup \Big(\Big(\bigcup_{i\in I} \psi_i(T_i)\Big) \setminus \Big(\bigcup_{i\in\{0,\dots,n\}\cap I} \psi_i(H_{k_{n,i},i})\Big)\Big)$$

e quindi, tenendo conto del Lemma 1.28, segue che

$$T \setminus \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} H_n\Big) = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} (T \setminus H_n) \subset D^0 \cup C,$$

ove D^0 e C sono come in (1.29.3) e (1.29.9); pertanto da (1.29.3) e (1.29.9) discende che $\mu\Big(T \setminus \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} H_n\Big)\Big) = 0$. Sia ora $(H_{n,i}: n \in \mathbf{N},\ i \in I)$ tale che valga (1.29.10) e valgano (1.29.3) e (1.29.4). Allora valgono le ipotesi fatte nel caso precedente e cioè $(H_{n,i}: n \in \mathbf{N},\ i \in I)$ verifica anche (1.29.9). Infatti, se per

ogni $i \in I$ si considera $(k_{n,i})_{n \in \mathbf{N}}$ crescente tale che $k_{n,i} \in \mathbf{N}$, $k_{n,i} > b_{n,i}$, ove $b_{n,i}$ sono come in (1.29.10) ($n \in \mathbf{N}$, $i \in I$), risulta che

$$\Big(\bigcup_{i \in I} \psi_i(T_i)\Big) \setminus \Big(\bigcup_{i \in \{0,\dots,n\} \cap I} H_{k_{n,i},i}\Big) \subset \Big(\Big(\bigcup_{i \in I,\, i > n} \psi_i(T_i)\Big) \setminus \Big(\bigcup_{i \in \{0,\dots,n\} \cap I} \psi_i(T_i)\Big)\Big) \cup$$
$$\cup \Big(\bigcup_{i \in \{0,\dots,n\} \cap I} (\psi_i(T_i) \setminus \psi_i(H_{k_{n,i},i}))\Big) \subset \Big(\Big(\bigcup_{i \in I,\, i > n} \psi_i(T_i)\Big) \setminus \Big(\bigcup_{i \in \{0,\dots,n\} \cap I} \psi_i(T_i)\Big)\Big) \cup$$
$$\cup \Big(\bigcup_{i \in I} (\psi_i(T_i) \setminus \psi_i(H_{k_{n,i},i}))\Big)$$

e quindi, tenendo conto del Lemma 1.28 e del fatto che

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \Big(\Big(\bigcup_{i \in I,\, i > n} \psi_i(T_i)\Big) \setminus \Big(\bigcup_{i \in \{0,\dots,n\} \cap I} \psi_i(T_i)\Big)\Big) = \emptyset,$$

si ottiene che

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \Big(\Big(\bigcup_{i \in I} \psi_i(T_i)\Big) \setminus \Big(\bigcup_{i \in \{0,\dots,n\} \cap I} H_{k_{n,i},i}\Big)\Big) \subset \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \Big(\bigcup_{i \in I} (\psi_i(T_i) \setminus \psi_i(H_{k_{n,i},i}))\Big) \subset D,$$

ove D è come in (1.29.10); pertanto per (1.29.10) si conclude.

e) Sia $(H_{n,i} : n \in \mathbf{N}, i \in I)$ tale che valga (1.29.9). Poschè valgono (1.29.3), (1.29.4) e (1.29.9), se $k_{n,i}$ ($n \in \mathbf{N}$, $i \in I$) sono come nella seconda parte della dimostrazione di *b*),

$$K_n = \bigcup_{i \in \{0,\dots,n\} \cap I} \psi_i(H_{k_{n,i},i}) \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

si ha che $(k_{n,i})_{n \in \mathbf{N}}$ è crescente ($i \in I$), $\mu\Big(T \setminus \Big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\Big)\Big) = 0$ e, se $I_n = \{i \in I : K_n \supset \psi_i(H_{k_{n,i},i})\}$, risulta che $I_n \supset \{0, \dots, n\} \cap I \supset \{0\}$ e

$$(1.29.15) \quad K_n = \bigcup_{i \in \{0,\dots,n\} \cap I} \psi_i(H_{k_{n,i},i} \cap \psi_i^{-1}(K_n)) = \bigcup_{i \in I_n} \psi_i(H_{k_{n,i},i} \cap \psi_i^{-1}(K_n)) \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Siano ora $K_k^{n,i} \in \mathcal{K}$ relativi ad i, $H_{k_{n,i},i}$, K_n ($i \in I_n$, $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}$) come in (1.29.11) e siano $K_k^{n,i} = K_n$ per ogni $i \in I \setminus \bigcup_{m \in \mathbf{N},\, m > n} I_m$, $K_k^{n,i} = K_n \cap K_k^{m_{n,i},i}$ per ogni $i \in \Big(\bigcup_{m \in \mathbf{N},\, m > n} I_m\Big) \setminus I_n$, ove $m_{n,i} = \min\{m \in \mathbf{N} : m > n,\ i \in I_m\}$ ($n, k \in \mathbf{N}$). Allora da (1.29.11), dalla crescenza di $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$, di $(k_{n,i})_{n \in \mathbf{N}}$ e di $(H_{n,i})_{n \in \mathbf{N}}$ segue che $K_k^{n,i} \in \mathcal{K}$, $K_k^{n,i} \subset K_{k+1}^{n,i}$, $K_k^{n,i} \subset K_k^{n+1,i}$ ($i \in I$, $n, k \in \mathbf{N}$) e $\mu\Big(K_n \setminus \Big(\bigcup_{k \in \mathbf{N}} K_k^{n,i}\Big)\Big) = 0$ per ogni $i \in I$, $n \in \mathbf{N}$. Quindi, sia se vale (1.29.12) e sia ovviamente se vale (1.29.13), per ogni $n \in \mathbf{N}$ esiste $(m_{k,i,n} : k \in \mathbf{N}, i \in I)$, con $m_{k,i,n} \in \mathbf{N}$ ($k \in \mathbf{N}$, $i \in I$), tale che $\mu\Big(K_n \setminus \Big(\bigcup_{k \in \mathbf{N}} \Big(\bigcap_{i \in I} K_{m_{k,i,n}}^{n,i}\Big)\Big)\Big) = 0$. Sia ora $l_{k,i} = \max\{m_{h,i,n} : h, n \in \mathbf{N}, h < k, n < k\}$ ($i \in I$, $k \in \mathbf{N}$) e sia $H_n = \bigcap_{i \in I} K_{l_{n,i}}^{n,i}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Allora per ogni

$n \in \mathbf{N}$ si ha che $H_n \subset H_{n+1}$ e, poichè risulta che

$$H_n = \cap \left(K^{n,i}_{k_n,i} : i \in \bigcup_{m \in \mathbf{N},\, m > n} I_m \right) = \left(\bigcap_{i \in I_n} K^{n,i}_{k_n,i} \right) \cap \left(\cap \left(K_n \cap K^{n,i}_{k_n,i} : i \in \left(\bigcup_{m \in \mathbf{N},\, m > n} I_m \right) \setminus I_n \right) \right),$$

per (1.29.11) si ha che $H_n \in \mathcal{K}$; inoltre per ogni $h, n, k \in \mathbf{N}$, $k > h$, $k > n$ si ha che $\bigcup_{m \in \mathbf{N}} H_m \supset H_h \supset \bigcap_{i \in I} K^{n,i}_{m_{h,i},i,n}$, per cui $\bigcup_{m \in \mathbf{N}} H_m \supset \bigcup_{h \in \mathbf{N}} \left(\bigcap_{i \in I} K^{n,i}_{m_{h,i},i,n} \right)$; pertanto $\mu\left(K_n \setminus \left(\bigcup_{m \in \mathbf{N}} H_m\right)\right) = 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e quindi

$$\mu\left(T \setminus \left(\bigcup_{m \in \mathbf{N}} H_m\right)\right) \leq \mu\left(T \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\right)\right) + \sum_{n \in \mathbf{N}} \mu\left(K_n \setminus \left(\bigcup_{m \in \mathbf{N}} H_m\right)\right) = 0 .$$

Sia ora $n \in \mathbf{N}$ e sia $N_n \subset I$ tale che $\{0, \ldots, n\} \cap I \subset N_n \subset I_n$. Allora, poichè $H_n \subset K_n$, da (1.29.15) segue che $H_n = \bigcup_{i \in N_n} \psi_i(H_{h_{n,i},i} \cap \psi_i^{-1}(H_n))$. Infine da (1.29.11) segue che $\psi_{i_{H_{h_{n,i},i} \cap \psi_i^{-1}(K^{n,i}_k),\, K^{n,i}_k}}$ è aperta ($i \in N_n$, $k \in \mathbf{N}$) e quindi, poichè $H_n \subset K^{n,i}_{k_n,i}$ per ogni $i \in I_n$, tenendo conto di [BA 1] (Teorema 1.25 con l'ipotesi b)) risulta che $\psi_{i_{H_{h_{n,i},i} \cap \psi_i^{-1}(H_n),\, H_n}}$ è aperta ($i \in N_n$) e, visto che φ è aperta per ipotesi, per il Lemma 1.4 di [BA 1] tale è anche

$$(\psi_i \times \varphi)_{(H_{h_{n,i},i} \cap \psi_i^{-1}(H_n)) \times X_i,\, H_n \times X} \quad (i \in N_n);$$

perciò, tenendo di nuovo conto di [BA 1] (Teorema 1.25 con l'ipotesi b)) si ottiene (1.29.14) [risp. da (1.29.11) segue che $(\psi_i \times \varphi)_{E \cap ((H_{h_{n,i},i} \cap \psi_i^{-1}(L)) \times X_i),\, E \cap (L \times X)}$ è sequenzialmente aperta ($i \in N_n$) per ogni $L \in \mathcal{K}$, $L \subset K^{n,i}_k$ e per ogni $k \in \mathbf{N}$ e quindi si ottiene (1.29.14)].

1.30 Osservazione: Si noti che, facendo qualche ipotesi in più, le parti a) e b) del Teorema 1.29 sono conseguenza del Teorema B del n. 1.27. Più precisamente:

per ottenere la prima parte di a) basta sostituire (1.29.1) con

(1.30.0) valga (1.29.1) ed esistano $E_n \in \mathfrak{L}$ tali che $\bigcup_{i \in I} \psi_i(T_i \setminus H_{h_{n,i},i}) \subset E_n$ ($n \in \mathbf{N}$), $\mu(E_n) \to 0$;

per ottenere la seconda parte di a) basta supporre che valga (1.30.0) in luogo di (1.29.1), che in luogo di (1.29.4) valga:

(1.30.1) valga (1.29.4) ed esistano $F_n \in \mathfrak{L}$ tali che

$$\left(\bigcup_{i \in I,\, i > n} \psi_i(T_i) \right) \setminus \left(\bigcup_{i \in \{0, \ldots, n\} \cap I} \psi_i(T_i) \right) \subset F_n \quad (n \in \mathbf{N}),\ \mu(F_n) \to 0$$

e che valga

(1.30.2) $\bigcup_{i \in L} K_i \in \mathcal{K}$ per ogni L finito e $\{K_i : i \in L\} \subset \mathcal{K}_i$;

per ottenere la prima parte di *b*) basta sostituire (1.29.7) con

(1.30.3) valga (1.29.7) e $\mu\Big(\bigcap_{i\in I}(T\setminus\psi_i(H_{h_{n,i},i}))\Big)\to 0$;

per ottenere la seconda parte di *b*) basta sostituire (1.29.9) con

(1.30.4) valga (1.29.9) ed esistano $i_n\in\mathbf{N}$, $C_n\in\mathfrak{C}$ tali che

$$\Big(\bigcup_{i\in I}\psi_i(T_i)\Big)\setminus\Big(\bigcup_{i\in\{0,\dots,i_n\}\cap I}H_{h_{n,i},i}\Big)\subset C_n\ (n\in\mathbf{N}),\ \mu(C_n)\to 0;$$

per ottenere la terza parte di *b*) basta sostituire (1.29.4) con (1.30.1), (1.29.10) con

(1.30.5) valga (1.29.10) ed esistano $D_n\in\mathfrak{C}$ tali che

$$\bigcup_{i\in I}(\psi_i(T_i)\setminus\psi_i(H_{h_{n,i},i}))\subset D_n\ (n\in\mathbf{N}),\ \mu(D_n)\to 0$$

e supporre che valga (1.30.2).

Per provarlo basta applicare il n. 1.27 alla classe $\mathcal{K}'$ definita nel Teorema 1.13 e ad $\mathcal{K}_i$ $(i\in I)$ ed usare i seguenti fatti:

per *a*) del Corollario 1.14, se μ è $\sigma\mathcal{K}$-i.r., si ha che μ è $\mathcal{K}'$-i.r.; (1.29.0) implica (1.27.8); (1.30.1) implica (1.27.12) (e quindi anche (1.27.17)) relativamente a $\mathcal{K}'$; (1.29.5) implica (1.27.13) relativamente a $\mathcal{K}'$; (1.29.6) implica (1.27.14); considerando $l_{n,i}=h_{m_n,i}$, con $m_n\in\mathbf{N}$ rispettivamente tali che

$$\mu(E_{m_n})<1/(n+1),\ \mu(C_{m_n})<1/(n+1),\ \mu(D_{m_n})<1/(n+1)\qquad(n\in\mathbf{N},\ i\in I)$$

ove $h_{n,i}$, E_n, $h_{n,i}$, C_n e $h_{n,i}$, D_n sono rispettivamente come in (1.30.0), (1.30.4) e (1.30.5) $(n\in\mathbf{N},\ i\in I)$, risulta che (1.30.0) implica (1.27.9), che (1.30.4) implica (1.27.18) e che (1.30.5) implica (1.27.19); considerando $l_{n,i}=$ $=h_{m_n,i}$, con $m_n\in\mathbf{N}$ tali che $\mu\Big(\bigcap_{i\in I}(T\setminus\psi_i(H_{h_{n,i},i}))\Big)<1/(n+1)$ ove $h_{n,i}$ sono come in (1.30.3) $(n\in\mathbf{N},\ i\in I)$, si può provare che (1.30.3) implica (1.27.15); in ciascuna delle due parti di *a*) e delle tre parti di *b*), per come è definito $\mathcal{K}'$ e per il Teorema *B* del n. 1.27, si può fare in modo che rispettivamente in (1.27.10) e in (1.27.16) sia $H_n\subset H_{n+1}$ per ogni $n\in\mathbf{N}$; da (1.27.10) e da (1.27.16) ove sia $H_n\subset H_{n+1}$ per ogni $n\in\mathbf{N}$, utilizzando *d*) del Teorema 1.13, seguono rispettivamente (1.29.2) e (1.29.8).

1.31 Teorema: Siano (T,τ), (T_i,τ_i) $(i\in I)$ spazi topologici, $\mathfrak{C}_i$ σ-algebra su T_i $(i\in I)$, $\mathfrak{C}$ σ-algebra su T, $\mu_i\colon\mathfrak{C}_i\to[0,\infty]$ $(i\in I)$, $\mu\colon\mathfrak{C}\to[0,\infty]$ misure, (X,ϱ), (X_j,ϱ_j) spazi topologici $(j\in J)$, $\psi_i\colon T_i\to T$, $\varphi_j\colon X_j\to X$, $E\subset T\times X$, $E_{i,j}=(\psi_i\times\varphi_j)^{-1}(E)$ $(i\in I,\ j\in J)$, $f\colon E\to[-\infty,\infty]$, $f_{i,j}\colon E_{i,j}\to$

$\to [-\infty, \infty]$ tali che $f_{i,j} = f \circ ((\psi_i \times \varphi_j)/_{E_{i,j}})$ $(i \in I,\ j \in J)$, $\mathcal{K} \subset \mathfrak{L}$, $\mathcal{K}_{i,j} \subset \mathfrak{L}_i$ $(i \in I,\ j \in J)$. Allora:

a) se valgono le seguenti condizioni

(1.31.0) $(\psi_i \times \varphi_j)_{E_{i,j}, E}$ sono continue [risp. sequenzialmente continue] $(i \in I,\ j \in J)$

(1.31.1) $\psi_i^{-1}(K) \in \mathcal{K}_{i,j}$ per ogni $i \in I$, $j \in J$ e per ogni $K \in \mathcal{K}$

(1.31.2) per ogni $i \in I$ e per ogni $A \in \mathfrak{L}$ tale che $\psi_i^{-1}(A) \in \mathfrak{L}_i$ e $\mu(A) = 0$ risulta che $\mu_i(\psi_i^{-1}(A)) = 0$

e se

$(f, T, \mu, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $SD[\sigma\mathcal{K}]$ [risp. $SD[\kappa\sigma\mathcal{K}]$]

si ha che

$(f_{i,j}, T_i, \mu_i, \tau_i, \varrho_j)$ verifica la proprietà $SD[\sigma\mathcal{K}_{i,j}]$ [risp. $SD[\kappa\sigma\mathcal{K}_{i,j}]$] per ogni $i \in I$, $j \in J$;

b) se $\emptyset \neq J \subset \mathbf{N}$, se $F \in \mathfrak{L}$, $F \supset \bigcup_{i \in J} \psi_i(T_i)$, $E \subset F \times X$, se μ è $\sigma\mathcal{K}$-i.r. rispetto a $T \setminus F$, se $K \cup H \in \mathcal{K}$ per ogni K, $H \in \mathcal{K}$, $K \subset F$, $H \subset T \setminus F$ e se vale almeno uno dei due seguenti gruppi di condizioni:

i)

(1.31.3) per ogni $j \in J$, per ogni $(H_{n,i} : n \in \mathbf{N},\ i \in I)$, con $H_{n,i} \in \mathcal{K}_{i,j}$, $H_{n,i} \subset H_{n+1,i}$ $(n \in \mathbf{N},\ i \in I)$, tale che $\mu_i\left(T_i \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_{n,i}\right)\right) = 0$ per ogni $i \in I$, esistono $(H_n : n \in \mathbf{N})$ e $(k_{n,i} : n \in \mathbf{N},\ i \in I)$ con $H_n \in \mathcal{K}$, $H_n \subset F$, $H_n \subset H_{n+1}$ e $k_{n,i} \in \mathbf{N}$ tali che $\psi_i^{-1}(H_n) \subset H_{k_{n,i},i}$ $(n \in \mathbf{N},\ i \in I)$ e $\mu\left(F \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_n\right)\right) = 0$,

(1.31.4) se $K = \bigcap_{j \in J} \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_{j,n}\right)$, ove per ogni $j \in J$ gli insiemi $A_{j,n}$ $(n \in \mathbf{N})$ sono elementi dell'unione delle famiglie $(H_m : m \in \mathbf{N})$ corrispondenti a $j \in J$ ed alle famiglie $(H_{m,i} : m \in \mathbf{N},\ i \in I)$, con $H_{m,i} \in \mathcal{K}_{i,j}$ $(m \in \mathbf{N},\ i \in I)$, secondo la (1.31.3) e per cui $A_{j,n} \subset A_{j,n+1}$ $(n \in \mathbf{N},\ j \in J)$ e $\mu(F \setminus K) = 0$, esistano $K^n \in \mathcal{K}$ e $h_{j,n} \in \mathbf{N}$ $(n \in \mathbf{N},\ j \in J)$, $K^n \subset \bigcap_{j \in J} A_{j,h_{j,n}}$ $(n \in \mathbf{N})$ e per cui $K^n \subset K^{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$, $\mu\left(F \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K^n\right)\right) = 0$ e $(\tau \times \varrho)/_{E \cap (K^n \times X)}$ [risp. $s((\tau \times \varrho)/_{E \cap (K^n \times X)})$] sia più fine della topologia finale delle topologie $(\tau_i \times \varrho_j)/_{E_{i,j} \cap (\psi_i^{-1}(K^n) \times X_j)}$ $\left[\text{risp. } s\left((\tau_i \times \varrho_j)/_{E_{i,j} \cap (\psi_i^{-1}(K^n) \times X_j)}\right)\right]$ rispetto alle

$$(\psi_i \times \varphi_j)_{E_{i,j} \cap (\psi_i^{-1}(K^n) \times X_j),\ K^n \times X} \quad (i \in I,\ j \in J)$$

per ogni $n \in \mathbf{N}$

ii) $X = \bigcup_{i \in I} \psi_i(X_i)$.

(1.31.5) per ogni $j \in J$, per ogni $(H_{n,i}: n \in \mathbf{N}, i \in I)$, con $H_{n,i} \in \mathcal{K}_{i,j}$, $H_{n,i} \subset H_{n+1,i}$ $(n \in \mathbf{N}, i \in I)$, tale che $\mu_i\Big(T_i \setminus \big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_{n,i}\big)\Big) = 0$ per ogni $i \in I$, esistono $(L_n: n \in \mathbf{N})$, con $L_n \subset I$ $(n \in \mathbf{N})$, $(H_n: n \in \mathbf{N})$ e $(k_{n,i}: i \in L_n, n \in \mathbf{N})$ con $H_n \in \mathcal{K}$, $H_n \subset H_{n+1}$ e $k_{n,i} \in \mathbf{N}$ $(i \in L_n)$ tali che $\mu\Big(F \setminus \big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_n\big)\Big) = 0$, $H_n = \bigcup_{i \in L_n} \psi_i(H_{k_{n,i},i} \cap \psi_i^{-1}(H_n))$ $(n \in \mathbf{N})$ e tali che valga almeno una delle quattro condizioni A), B), C), D) della (2.4.7) di [BA 1] (ove si sostituisca $\mathbf{N}$ a $\mathbf{Z}_+$)

(1.31.6) se $K = \bigcap_{j \in J} \Big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_{j,n}\Big)$, ove per ogni $j \in J$ gli insiemi $A_{j,n}$ $(n \in \mathbf{N})$ sono elementi dell'unione delle famiglie $(H_m: m \in \mathbf{N})$ corrispondenti a $j \in J$ ed alle famiglie $(H_{m,i}: m \in \mathbf{N}, i \in I)$, con $H_{m,i} \in \mathcal{K}_{i,j}$ $(m \in \mathbf{N}, i \in I)$, secondo la (1.31.5) e per cui $A_{j,n} \subset A_{j,n+1}$ $(n \in \mathbf{N}, j \in J)$ e $\mu(F \setminus K) = 0$, esistano $K^n \in \mathcal{K}$ e $h_{j,n} \in \mathbf{N}$ $(n \in \mathbf{N}, j \in J)$, $K^n \subset \bigcap_{j \in J} A_{j,h_{j,n}}$, $K^n \subset K^{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$ e per cui $\mu\Big(F \setminus \big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K^n\big)\Big) = 0$

e se

$(f_{i,j}, T_i, \mu_i, \tau_i, \varrho_i)$ verifica la proprietà $SD[\varepsilon\sigma\mathcal{K}_{i,j}]$ [risp. $SD[\varepsilon\sigma\mathcal{K}_{i,j}]$]

per ogni $i \in I$, $j \in J$

si ha che

$(f, T, \mu, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $SD[\varepsilon\sigma\mathcal{K}]$ [risp. $SD[\varepsilon\sigma\mathcal{K}]$].

Dimostrazione: a) Siano $K_n \in \mathcal{K}$ tali che $K_n \subset K_{n+1}$, $f/_{E \cap (K_n \times X)}$ sia s.c.i. [risp. s.s.c.i.] $(n \in \mathbf{N})$, $\mu\Big(T \setminus \big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\big)\Big) = 0$.

Siano $i \in I$, $j \in J$, $K_{n,i,j} = \psi_i^{-1}(K_n)$ $(n \in \mathbf{N})$. Allora risulta che $K_{n,h,i} \in \mathcal{K}_{i,j}$ $(n \in \mathbf{N})$ per (1.31.1),

$$T_i \setminus \Big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_{n,i,j}\Big) = T_i \setminus \Big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \psi_i^{-1}(K_n)\Big) = \psi_i^{-1}\Big(T \setminus \Big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\Big)\Big)$$

e quindi da (1.31.2) segue che

$$\mu\Big(T_i \setminus \Big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_{n,i,j}\Big)\Big) = 0 .$$

Inoltre

$$f_{i,j}/_{E_{i,j} \cap (K_{n,i,j} \times X_j)} = (f \circ (\psi_i \times \psi_j)/_{E_{i,j}})/_{E_{i,j} \cap (K_{n,i,j} \times X_j)} =$$
$$= (f/_{E \cap (K_n \times X)}) \circ ((\psi_i \times \psi_j)/_{E_{i,j}} \cap (K_{n,i,j} \times X_j))$$

è s.c.i. [risp. s.s.c.i.] per (1.31.0) [risp. tenendo conto del fatto che, utilizzando f) del Teorema 1.1 di [BA 1], si prova facilmente che da (1.31.0) segue che $(\psi_i \times \varphi_j)_{E_{i,j} \cap (K_{n,i,j} \times X_j), E \cap (K_n \times X)}$ sono sequenzialmente continue $(i \in I,\ j \in J)$].

b) Viceversa siano

(1.31.7) $\quad K_{n,i,j} \in \mathcal{K}_{i,j}$ tali che $K_{n,i,j} \subset K_{n+1,i,j}$, $f_{i,j}/_{E_{i,j} \cap (K_{n,i,j} \times X_j)}$ sia s.c.i. [risp. s.s.c.i.] $(n \in \mathbf{N})$, $\mu_i\Big(T_i \setminus \big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_{n,i,j}\big)\Big) = 0$ $(i \in I,\ j \in J)$.

Si proverà dapprima che

(1.31.8) $\quad$ esistono $K'_n \in \mathcal{K}$, $K'_n \subset F$, $K'_n \subset K'_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$ tali che $\mu\Big(F \setminus \big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K'_n\big)\Big) = 0$ e $f/_{E \cap (K'_n \times X)}$ sia s.c.i. [risp. s.s.c.i.] per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Valga dapprima i) e sia $j \in J$. Siano $H^{(j)}_n \in \mathcal{K}$, $H^{(j)}_n \subset F$ e $k_{n,i,j} \in \mathbf{N}$ relativi ai $K_{n,i,j}$ $(n \in \mathbf{N},\ i \in I)$ come in (1.31.3) e pertanto tali che

(1.31.9) $\quad H^{(j)}_n \subset H^{(j)}_{n+1}$, $\psi_i^{-1}(H^{(j)}_n) \subset K_{k_{n,i,j},i,j}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, $i \in I$ e

$$\mu\Big(F \setminus \big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} H^{(j)}_n\big)\Big) = 0\,;$$

poichè risulta che $H^{(j)}_n \subset H^{(j)}_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$, $\mu\Big(F \setminus \Big(\bigcap_{j \in J} \big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} H^{(j)}_n\big)\Big)\Big) \leq \sum_{j \in J} \mu\Big(F \setminus \big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} H^{(j)}_n\big)\Big) = 0$, si possono considerare $K'_n \in \mathcal{K}$, $h_{j,n} \in \mathbf{N}$ $(n \in \mathbf{N},\ j \in J)$ relativi come in (1.31.4) agli insiemi $H^{(j)}_n$ $(n \in \mathbf{N},\ j \in J)$ e a $K = \bigcap_{j \in J} \big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} H^{(j)}_n\big)$. Allora

(1.31.10) $\quad K'_n \subset \bigcap_{j \in J} H^{(j)}_{h_{j,n}}$, $K'_n \subset K'_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$, $\mu\Big(F \setminus \big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K'_n\big)\Big) = 0$ e $(\tau \times \varrho)/_{E \cap (K'_n \times X)}$ [risp. $s((\tau \times \varrho)/_{E \cap (K'_n \times X)})$] è più fine della topologia finale delle topologie $(\tau_i \times \varrho_j)/_{E_{i,j} \cap (\psi_i^{-1}(K'_n) \times X_j)}$ [risp. $s\big((\tau_i \times \varrho_j)/_{E_{i,j} \cap (\psi_i^{-1}(K'_n) \times X_j)}\big)$] rispetto alle

$$(\psi_i \times \varphi_j)_{E_{i,j} \cap (\psi_i^{-1}(K'_n) \times X_j),\, E \cap (K'_n \times X)} \quad (n \in \mathbf{N},\ i \in I,\ j \in J)\,.$$

Sia ora $\alpha \in [-\infty, \infty]$; allora per (1.31.10) si ha che

$$\big(f/_{E \cap (K'_n \times X)}\big)^{-1}(]\alpha, \infty]) \text{ è in } (\tau \times \varrho)/_{E \cap (K'_n \times X)}$$

[risp. in $s((\tau \times \varrho)/_{E \cap (K'_n \times X)})$] se per ogni $i \in I$, $j \in J$ l'insieme

$$(\psi_i \times \varphi_j)^{-1}\Big(\big(f/_{E \cap (K'_n \times X)}\big)^{-1}(]\alpha, \infty])\Big) = \big(f_{i,j}/_{E_{i,j} \cap (\psi_i^{-1}(K'_n) \times X_j)}\big)^{-1}(]\alpha, \infty])$$

è in $(\tau_i \times \varrho_j)/_{E_{i,j} \cap (\psi_i^{-1}(K'_n) \times X_j)}$ [risp. in $s\big((\tau_i \times \varrho_j)/_{E_{i,j} \cap (\psi_i^{-1}(K'_n) \times X_j)}\big)$]

($n \in \mathbf{N}$), il che è vero per (1.31.7) e poichè da (1.31.10) e da (1.31.9) segue che $\psi_i^{-1}(K_n') \subset \psi_i^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} H_{b_{i,n}}^{(j)}\right) \subset K_{b_{i,n+1},i}$ per ogni $i \in I$, $j \in J$ e $n \in \mathbf{N}$. Pertanto vale (1.31.8).

Valga ora ii) e sia $j \in J$. Siano $L_{n,j} \subset I$, $H_n^{(j)} \in K$ e $k_{n,i,j} \in \mathbf{N}$ ($i \in L_{n,j}$, $n \in \mathbf{N}$) relativi ai $K_{n,i,j}$ ($n \in \mathbf{N}$, $i \in I$) come in (1.31.5) e pertanto tali che

(1.31.11) $H_n^{(j)} \subset H_{n+1}^{(j)}$, $H_n^{(j)} = \bigcup_{i \in L_{n,j}} \psi_i(K_{k_{n,i,j},i,j} \cap \psi_i^{-1}(H_n^{(j)}))$ ($n \in \mathbf{N}$), $\mu\left(F \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_n^{(j)}\right)\right) = 0$ e tali che valga almeno una delle quattro condizioni *A*), *B*), *C*), *D*) della (2.4.7) di [BA 1] (ove si sostituisca $\mathbf{N}$ a $\mathbf{Z}_+$, $K_{n,i,j}$ a $H_{n,i}$, $H_n^{(j)}$ a H_n, $L_{n,j}$ a L_n ($i \in I$), $k_{n,i,j}$ a $k_{n,i}$ ($i \in L_{n,j}$, $n \in \mathbf{N}$)).

Poichè da (1.31.11) segue che $\mu\left(F \setminus \left(\bigcap_{j \in J} \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_n^{(j)}\right)\right)\right) = 0$ e che $H_n^{(j)} \subset H_{n+1}^{(j)}$ ($n \in \mathbf{N}$, $j \in J$), si possono considerare $K_n' \in K$, $b_{j,n} \in \mathbf{N}$ ($n \in \mathbf{N}$, $j \in J$) relativi come in (1.31.6) agli insiemi $H_n^{(j)}$ ($n \in \mathbf{N}$, $j \in J$) e a $K = \bigcap_{j \in J} \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_n^{(j)}\right)$. Allora

(1.31.12) $K_n' \subset \bigcap_{j \in J} H_{b_{j,n}}^{(j)}$, $K_n' \subset K_{n+1}'$ ($n \in \mathbf{N}$) e $\mu\left(F \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n'\right)\right) = 0$.

Sia ora $n \in \mathbf{N}$; da (1.31.12) e da (1.31.11) per ogni $j \in J$ segue che

$$K_n' \subset H_{b_{j,n}}^{(j)} = \bigcup_{i \in L_{b_{j,n},j}} \psi_i(K_{k_{b_{j,n},i,j},i,j} \cap \psi_i^{-1}(H_{b_{j,n}}^{(j)})),$$

da cui

(1.31.13) $$K_n' = \bigcup_{i \in L_{b_{j,n},j}} \psi_i(K_{k_{b_{j,n},i,j},i,j} \cap \psi_i^{-1}(K_n'))$$

e quindi se $\alpha \in [-\infty, \infty]$ risulta che

(1.31.14) $$\left(f|_{E \cap (K_n' \times X)}\right)^{-1}(]\alpha, \infty]) =$$
$$= \bigcup_{j \in J} \left(\bigcup_{i \in L_{b_{j,n},j}} \left(f|_{E \cap (\psi_i(K_{k_{b_{j,n},i,j},i,j} \cap \psi_i^{-1}(K_n')) \times \varphi_j(X_j))}\right)^{-1}(]\alpha, \infty])\right) =$$
$$= \bigcup_{j \in J} \left(\bigcup_{i \in L_{b_{j,n},j}} (\psi_i \times \varphi_j)\left(\left(f_{i,j}|_{E_{i,j} \cap ((K_{k_{b_{j,n},i,j},i,j} \cap \psi_i^{-1}(K_n')) \times X_j)}\right)^{-1}(]\alpha, \infty])\right)\right).$$

Ora, tenendo conto di (1.31.11), (1.31.13) e (1.31.14), esattamente come in quella parte della dimostrazione del Teorema 2.4 di [BA 1] la quale segue (2.4.11) (ove si sostituisca (1.31.8) a (2.4.9), (1.31.13) a (2.4.10), (1.31.14) a (2.4.11), $L_{b_{j,n},j}$ a $L_{n2^{j+1},j}$ e $k_{b_{j,n},i,j}$ ($i \in L_{b_{j,n},j}$) a $k_{n2^{j+1},i,j}$ ($i \in L_{n2^{j+1},j}$) ($n \in \mathbf{N}$, $j \in J$)), si prova che l'insieme in (1.31.14) è in $(\tau \times \varrho)|_{E \cap (K_n' \times X)}$ [risp. in $s((\tau \times \varrho)|_{E \cap (K_n' \times X)})$]. Pertanto, tenendo conto anche di (1.31.12), si ha che vale (1.31.8).

Ora basta considerare $K_n^{\prime} \in \mathcal{K}$, $K_n^{\prime} \subset T \setminus F$ $(n \in \mathbf{N})$ tali che $K_n^{\prime} \subset K_{n+1}^{\prime}$ $(n \in \mathbf{N})$ e $\mu\Big((T \setminus F) \setminus \Big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n^{\prime}\Big)\Big) = 0$ (l'esistenza di tali insiemi $K_n^{\prime}$ $(n \in \mathbf{N})$ è assicurata dal fatto che μ è $\iota\sigma\mathcal{K}$-i.r. rispetto a $T \setminus F$) e $K_n = K_n^{\prime} \cup K_n^{\prime\prime}$ $(n \in \mathbf{N})$, visto che con tale scelta risulta che $K_n \in \mathcal{K}$, $K_n \subset K_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$,

$$\mu\Big(T \setminus \Big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\Big)\Big) = \mu\Big((T \setminus F) \setminus \Big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n^{\prime}\Big)\Big) + \mu\Big(F \setminus \Big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n^{\prime}\Big)\Big) = 0$$

ed $E \cap (K_n \times X) = E \cap (K_n^{\prime} \times X)$, per cui $f/_{E \cap (K_n \times X)}$ è s.c.i. [risp. s.s.c.i.] $(n \in \mathbf{N})$.

1.32 Osservazione: Si noti che *a*), *b*), *c*) del Teorema 1.29 relativi a F suggeriscono condizioni per verificare rispettivamente (1.31.3), la prima parte di (1.31.5), (1.31.5) con la condizione A).

1.33 Osservazioni: *a*) Si noti che, nel Teorema 2.4 di [BA 1] si possono indebolire le seguenti ipotesi: (2.4.2), « $\mu/_{(\mathfrak{C}/_{(T \setminus F)})}$ è $\{K \in \mathcal{K}: K \subset T \setminus F\}$-i.r. », (2.4.6) rispettivamente con le seguenti altre ipotesi:

(1.33.0) per ogni $i \in I$ e per ogni $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tale che $A_n \in \mathfrak{C}$, $\psi_i^{-1}(A_n) \in \mathfrak{C}_i$ $(n \in \mathbf{N})$, $\mu(A_n) \to 0$ si ha che $\mu_i(\psi_i^{-1}(A_n)) \to 0$;

(1.33.1) μ è $\mathcal{K}$-i.r. rispetto a $T \setminus F$;

(1.33.2) esiste $\delta^* > 0$ tale che, se $0 < \delta < \delta^*$ e se $K \in \mathfrak{C}$ è un'intersezione al più numerabile di elementi dell'unione delle famiglie $(H_n: n \in \mathbf{Z}_+)$ corrispondenti alle famiglie $(H_{n,i}: n \in \mathbf{Z}_+, i \in I)$ secondo la (2.4.5) (di [BA 1]) e per cui $\mu(F \setminus K) < \delta$, esista $K^{\delta} \in \mathcal{K}$, $K^{\delta} \subset K$ per cui $\mu(F \setminus K^{\delta}) < \delta$ e $(\tau \times \varrho)/_{E \cap (K^{\delta} \times X)}$

$$[\text{risp. } s((\tau \times \varrho)/_{E \cap (K^{\delta} \times X)})]$$

sia più fine della topologia finale delle topologie

$$(\tau_i \times \varrho_j)/_{E_{i,j} \cap (\psi_i^{-1}(K^{\delta}) \times X_j)}$$

$$[\text{risp. } s((\tau_i \times \varrho_j)/_{E_{i,j} \cap (\psi_i^{-1}(K^{\delta}) \times X_j)})]$$

rispetto alle $(\psi_i \times \varphi_j)_{K_{i,j} \cap (\psi_i^{-1}(K^{\delta}) \times X_j), E \cap (K^{\delta} \times X)}$ $(i \in I, j \in J)$.

La dimostrazione rimane la stessa, tranne per quanto riguarda la sostituzione di (2.4.2) con (1.33.0). In tal caso basta cambiare la dimostrazione solo nella scelta di $(m_{n,i}: n \in \mathbf{Z}_+, i \in I)$ e cioè basta scegliere $m_{n,i} \in \mathbf{Z}_+$ tali che $\mu_i(\psi_i^{-1}(T \setminus K_{m_{n,i}})) < 1/n$ $(n \in \mathbf{Z}_+, i \in I)$.

b) Si noti che, secondo la Definizione III.4.12 di [DS], la condizione (1.33.0) si può esprimere equivalentemente nel seguente modo:

« $\mu\circ\psi_i^{-1}$ è $\mu/_{\mathcal{A}_i}$-continua per ogni $i\in I$ », ove $\mathcal{A}_i=\{A\in\mathfrak{C}:\ \psi_i^{-1}(A)\in\mathfrak{C}_i\}$, $\mu\circ\psi_i^{-1}:\mathcal{A}_i\to[0,\infty]$ è la misura tale che $(\mu\circ\psi_i^{-1})(A)=\mu(\psi_i^{-1}(A))$ per ogni $A\in\mathcal{A}_i$ $(i\in I)$.

c) Si noti che, per [DS] (Lemma III.4.13), se le misure $\mu\circ\psi_i^{-1}$ $(i\in I)$ considerate in *b*) sono finite, la condizione (1.33.0) è equivalente alla condizione (1.31.2).

1.34 Teorema: Siano T, S_i insiemi, $S_i\subset T$, $L_{n,i}\in 2^{S_i}$, $L_{n,i}\subset L_{n+1,i}$ $(n\in\mathbf{N},\ i\in I)$ tali che $S_i=\bigcup_{n\in\mathbf{N}}L_{n,i}$ per ogni $i\in I$. Allora, se vale almeno una delle due seguenti condizioni:

a) I è finito;

b) esiste $(\varphi_i:\ i\in I)$, con $\varphi_i:\mathbf{N}\to S_i$ $(i\in I)$ tali che per ogni $t\in T$ per cui $I_t=\{i\in I:\ t\in S_i\}\neq\emptyset$ esista $n_t\in\mathbf{N}$ tale che $\varphi_i(n_t)=t$ per ogni $i\in I_t$

si ha che esistono $k_{n,i}\in\mathbf{N}$ $(n\in\mathbf{N},\ i\in I)$, con $(k_{n,i})_{n\in\mathbf{N}}$ crescente $(i\in I)$, tali che

$$\bigcap_{n\in\mathbf{N}}\Big(\bigcup_{i\in I}(S_i\setminus L_{k_{n,i},i})\Big)=\emptyset\,.$$

Dimostrazione: Basta provare che esistono $k_{n,i}\in\mathbf{N}$ $(n\in\mathbf{N},\ i\in I)$, con $(k_{n,i})_{n\in\mathbf{N}}$ crescente $(i\in I)$, tali che

(1.34.0) per ogni $t\in T$ esiste $n_t\in\mathbf{N}$ tale che per ogni $i\in I$ si abbia $t\in(T\setminus S_i)\cup L_{k_{n_t,i},i}$.

Per ogni $t\in T$ sia $I_t=\{i\in I:\ t\in S_i\}$. Allora è ovvio che, se $I_t=\emptyset$, risulta che $t\in(T\setminus S_i)\cup L_{n,i}$ per ogni $n\in\mathbf{N}$, $i\in I$.

Valga dapprima *a*) e sia $k_{n,i}=n$ per ogni $n\in\mathbf{N}$, $i\in I$. Siano $t\in T$ tale che $I_t\neq\emptyset$ e

$$n_{t,i}=\min\{m\in\mathbf{N}:\ t\in L_{m,i}\}\ \text{ per ogni } i\in I_t\,.$$

Considerando ora

$$n_t=\max\{n_{t,i}:\ i\in I_t\}$$

risulta che $t\in L_{n_{t,i},i}\subset L_{n_t,i}$ per ogni $i\in I_t$ e pertanto vale (1.34.0).

Valga ora *b*). Siano $\varphi_i:\mathbf{N}\to S_i$ $(i\in I)$ come nell'ipotesi. Sia $i\in I$ e sia $k_{0,i}\in\mathbf{N}$ tale che $L_{k_{0,i},i}\supset\{\varphi_i(0)\}$; per induzione sia $k_{n,i}>k_{n-1,i}$ $(n\in\mathbf{N})$ tale che $L_{k_{n,i},i}\supset\{\varphi_i(0),\dots,\varphi_i(n)\}$ (un tale $k_{n,i}$ esiste in quanto $L_{m,i}\subset L_{m+1,i}$ per ogni $m\in\mathbf{N}$). Allora, se $t\in T$ è tale che sia $I_t\neq\emptyset$ e se $n_t\in\mathbf{N}$ è come nell'ipotesi, risulta che $t=\varphi_i(n_t)\in L_{k_{n_t},i,i}$ per ogni $i\in I_t$ e pertanto vale (1.34.0).

1.35 Corollario: Siano T insieme, $K_{n,i} \in 2^T$, $K_{n,i} \subset K_{n+1,i}$ $(n \in \mathbf{N},\ i \in I)$ tali che $T = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_{n,i}$ per ogni $i \in I$. Allora, se vale almeno una delle due seguenti condizioni:

a) I è finito

b) T è al più numerabile

si ha che esistono $k_{n,i} \in \mathbf{N}$ $(n \in \mathbf{N},\ i \in I)$, con $(k_{n,i})_{n \in \mathbf{N}}$ crescente $(i \in I)$, tali che $T = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \left(\bigcap_{i \in I} K_{k_{n,i},i} \right)$.

Dimostrazione: Basta applicare il Teorema 1.34 con $S_i = T$, $L_{n,i} = K_{n,i}$ $(n \in \mathbf{N},\ i \in I)$ e notare che se T è al più numerabile esiste $\varphi\colon \mathbf{N} \to T$ surgettiva e quindi è verificata l'ipotesi di *b*) del n. 1.34.

1.36 Lemma: Siano $\mathfrak{C}$ σ-algebra su T, $\mu\colon \mathfrak{C} \to [0, \infty]$ misura, $I \subset \mathbf{N}$, $S_i, L_{n,i} \in \mathfrak{C}$, $L_{n,i} \subset S_i$, $L_{n,i} \subset L_{n+1,i}$ $(n \in \mathbf{N},\ i \in I)$ tali che $\mu\left(S_i \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} L_{n,i} \right)\right) = 0$ per ogni $i \in I$. Allora, se $S'_i = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} L_{n,i}$ per ogni $i \in I$ e se

(1.36.0) esistono $b_{n,i} \in \mathbf{N}$ $(n \in \mathbf{N},\ i \in I)$ tali che $\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left(\bigcup_{i \in I} (S'_i \setminus L_{b_{n,i},i}) \right)\right) = 0$

si ha che

(1.36.1) esistono $k_{n,i} \in \mathbf{N}$ $(n \in \mathbf{N},\ i \in I)$, con $(k_{n,i})_{n \in \mathbf{N}}$ crescente per ogni $i \in I$, tali che $\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left(\bigcup_{i \in I} (S_i \setminus L_{k_{n,i},i}) \right)\right) = 0$.

Dimostrazione: Valga (1.36.0) e siano $(k_{n,i})_{n \in \mathbf{N}}$ crescenti $(i \in I)$ tali che $k_{n,i} > b_{n,i}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, $i \in I$. Allora

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left(\bigcup_{i \in I} (S_i \setminus L_{k_{n,i},i}) \right) \subset \left(\bigcup_{i \in I} (S_i \setminus S'_i) \right) \cup \left(\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left(\bigcup_{i \in I} (S'_i \setminus L_{b_{n,i},i}) \right)\right),$$

ove si sono utilizzati il Lemma 1.28 ed il fatto che $S_i \setminus L_{k_{n,i},i} = (S_i \setminus S'_i) \cup \cup (S'_i \setminus L_{k_{n,i},i})$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, $i \in I$. Pertanto

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left(\bigcup_{i \in I} (S_i \setminus L_{k_{n,i},i}) \right)\right) \leq \mu\left(\bigcup_{i \in I} (S_i \setminus S'_i) \right) + \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left(\bigcup_{i \in I} (S'_i \setminus L_{b_{n,i},i}) \right)\right) = 0.$$

1.37 Teorema: Siano $I \subset \mathbf{N}$, $\mathfrak{C}_i$ σ-algebra su T_i $(i \in I)$, $\mathfrak{C}$ σ-algebra su T, $\mu_i\colon \mathfrak{C}_i \to [0, \infty]$ $(i \in I)$, $\mu\colon \mathfrak{C} \to [0, \infty]$ misure, $\psi_i\colon T_i \to T$ $(i \in I)$, $H_{n,i} \in \mathfrak{C}_i$, $H_{n,i} \subset H_{n+1,i}$ $(n \in \mathbf{N},\ i \in I)$ tali che $\mu_i\left(T_i \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_{n,i} \right)\right) = 0$ per ogni $i \in I$. Allora:

a) se $\psi_i(E) \in \mathfrak{C}$ per ogni $E \in \mathfrak{C}_i$ e $i \in I$, se $\psi_i^{-1}(D) \in \mathfrak{C}_i$ per ogni $D \in \mathfrak{C}$, $D \subset \psi_i(T_i)$ $(i \in I)$ e se vale almeno una delle seguenti quattro condizioni:

a') valgono

(1.37.0) per ogni $i \in I$ si ha che $\mu(D) = 0$ per ogni $D \in \mathfrak{C}$, $D \subset \psi_i(T_i)$ tale che $\mu_i(\psi_i^{-1}(D)) = 0$

e

(1.37.1) $\lim_{n\to\infty} \mu\Big(\Big(\bigcup_{k>n} \psi_i(H_{k,i})\Big) \setminus \psi_i(H_{n,i})\Big) = 0$ per ogni $i \in I$

a'') valgono

(1.37.2) per ogni $i \in I$ si ha che $\mu(D_n) \to 0$ qualunque sia $(D_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tale che $D_n \in \mathfrak{C}_i$, $D_n \subset \psi_i(T_i)$ $(n \in \mathbf{N})$, $\mu_i(\psi_i^{-1}(D_n)) \to 0$

e

(1.37.3) esistono $A_{k,i} \in \mathfrak{L}_i$, con $A_{k,i} \subset A_{k+1,i}$ $(k \in \mathbf{N},\ i \in I)$ tali che $\mu_i\Big(T_i \setminus \Big(\bigcup_{k\in\mathbf{N}} A_{k,i}\Big)\Big) = 0$ $(i \in I)$ e per cui sia $\lim_{n\to\infty} \mu_i\Big(\psi_i^{-1}(\psi_i(A_{n,i}) \setminus \psi_i(H_{n,i}))\Big) = 0$ per ogni $k \in \mathbf{N}$, $i \in I$ e $\psi_i(A_{k,i}) = \psi_j(A_{k,j})$ per ogni i, $j \in I$, $k \in \mathbf{N}$

a''') I è finito e vale (1.37.0)

a'''') esistono $T_i^0 \in \mathfrak{C}_i$, T_i^0 al più numerabili tali che $\mu_i(T_i \setminus T_i^0) = 0$ $(i \in I)$ e vale (1.37.0),

si ha che esistono $k_{n,i} \in \mathbf{N}$ $(n \in \mathbf{N},\ i \in I)$ tali che $(k_{n,i})_{n\in\mathbf{N}}$ sia crescente per ogni $i \in I$,

$$\mu\Big[\bigcap_{n\in\mathbf{N}} \Big(\bigcup_{i\in I} (\psi_i(T_i) \setminus \psi_i(H_{k_{n,i},i}))\Big)\Big] = 0\,;$$

b) se valgono

(1.37.4) per ogni $i \in I$ si ha che $\psi_i(E) \in \mathfrak{C}$ per ogni $E \in \mathfrak{C}_i$ e $\mu(\psi_i(E_n)) \to 0$ qualunque sia $(E_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tale che $E_n \in \mathfrak{C}_i$ $(n \in \mathbf{N})$, $\mu_i(E_n) \to 0$

e

(1.37.5) $\lim_{n\to\infty} \mu_i\Big(\Big(\bigcup_{k>n} H_{k,i}\Big) \setminus H_{n,i}\Big) = 0$ per ogni $i \in I$

si ha che esistono $k_{n,i} \in \mathbf{N}$ $(n \in \mathbf{N},\ i \in I)$ tali che $(k_{n,i})_{n\in\mathbf{N}}$ sia crescente per ogni $i \in I$,

$$\mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} \Big(\bigcup_{i\in I} \psi_i(T_i \setminus H_{k_{n,i},i})\Big)\Big) = 0\,.$$

Dimostrazione: a) Valga a') e sia $i \in I$. Per (1.37.1), utilizzando un procedimento di induzione, esistono $k_{n,i} \in \mathbf{N}$ $(n \in \mathbf{N})$, con $(k_{n,i})_{n\in\mathbf{N}}$ crescente, tali che

(1.37.6) $\mu\Big(\Big(\bigcup_{k>k_{n,i}} \psi_i(H_{k,i})\Big) \setminus \psi_i(H_{k_{n,i},i})\Big) < 2^{-n-3}(n+1)^{-1}\,;$

inoltre $\psi_i^{-1}\Big(\psi_i(T_i) \setminus \Big(\bigcup_{k\in\mathbf{N}} \psi_i(H_{k,i})\Big)\Big) \subset T_i \setminus \Big(\bigcup_{k\in\mathbf{N}} H_{k,i}\Big)$ e quindi da (1.37.0) segue che

(1.37.7) $\mu\Big(\psi_i(T_i) \setminus \Big(\bigcup_{k\in\mathbf{N}} \psi_i(H_{k,i})\Big)\Big) = 0\,.$

D'altra parte risulta che

$$\bigcup_{i\in I}(\psi_i(T_i)\setminus\psi_i(H_{k_{n,i},i}))\subset\Big[\bigcup_{i\in I}\Big(\psi_i(T_i)\setminus\Big(\bigcup_{k\in\mathbf{N}}\psi_i(H_{k,i})\Big)\Big)\Big]\cup\Big(\bigcup_{i\in I}\Big(\Big(\bigcup_{k\in\mathbf{N}}\psi_i(H_{k,i})\setminus$$

$$\setminus\psi_i(H_{k_{n,i},i})\Big)\Big)=\Big[\bigcup_{i\in I}\Big(\psi_i(T_i)\setminus\Big(\bigcup_{k\in\mathbf{N}}\psi_i(H_{k,i})\Big)\Big)\Big]\cup\Big(\bigcup_{i\in I}\Big(\Big(\bigcup_{k>k_{n,i}}\psi_i(H_{k,i})\setminus\psi_i(H_{k_{n,i},i})\Big)\Big),$$

ove l'eguaglianza segue dal fatto che $H_{n,i}\subset H_{n+1,i}$ per ogni $n\in\mathbf{N}$, $i\in I$. Pertanto, utilizzando (1.37.6) e (1.37.7), si ottiene che:

$$\mu\Big(\bigcup_{i\in I}(\psi_i(T_i)\setminus\psi_i(H_{k_{n,i},i}))\Big)<\sum_{i\in I}2^{-i-1}(n+1)^{-1}\leq(n+1)^{-1},$$

da cui segue la tesi.

Valga ora a') e sia $i\in I$. Poichè da (1.37.2) segue (1.37.0), come sopra si ha che vale (1.37.7). Inoltre, da (1.37.3) e (1.37.2), segue che

$$\lim_{m\to\infty}(\psi_i(A_{n,i})\setminus\psi_i(H_{m,i}))=0$$

per ogni $n\in\mathbf{N}$ e pertanto con un procedimento di induzione si prova che esistono $k_{n,i}\in\mathbf{N}$ $(n\in\mathbf{N})$ tali che $(k_{n,i})_{n\in\mathbf{N}}$ sia crescente e per cui si abbia

$$\mu(\psi_i(A_{n,i})\setminus\psi_i(H_{k_{n,i},i}))<2^{-i-1}(n+1)^{-1}\ \text{per ogni}\ n\in\mathbf{N}. \tag{1.37.8}$$

Inoltre dalle ipotesi segue che esistono $B_n\in\mathfrak{C}$ $(n\in\mathbf{N})$ tali che

$$B_n=\psi_i(A_{n,i})\ \text{per ogni}\ n\in\mathbf{N},\ i\in I. \tag{1.37.9}$$

Allora

$$\bigcup_{i\in I}(\psi_i(T_i)\setminus\psi_i(H_{k_{n,i},i}))\subset$$
$$\subset\Big[\bigcup_{i\in I}\Big(\psi_i(T_i)\setminus\Big(\bigcup_{m\in\mathbf{N}}\psi_i(A_{m,i})\Big)\Big)\Big]\cup\Big(\bigcup_{i\in I}\Big(\Big(\bigcup_{m\in\mathbf{N}}\psi_i(A_{m,i})\setminus\psi_i(H_{k_{n,i},i})\Big)\Big)=$$
$$=\Big[\bigcup_{i\in I}\Big(\psi_i(T_i)\setminus\Big(\bigcup_{m\in\mathbf{N}}\psi_i(A_{m,i})\Big)\Big)\Big]\cup\Big(\Big(\bigcup_{m\in\mathbf{N}}B_m\Big)\setminus\Big(\bigcap_{i\in I}\psi_i(H_{k_{n,i},i})\Big)\Big),$$

per cui, tenendo conto del Lemma 1.28, segue che

$$\bigcap_{n\in\mathbf{N}}\Big(\bigcup_{i\in I}(\psi_i(T_i)\setminus\psi_i(H_{k_{n,i},i}))\Big)\subset\Big[\bigcup_{i\in I}\Big(\psi_i(T_i)\setminus\Big(\bigcup_{m\in\mathbf{N}}\psi_i(A_{m,i})\Big)\Big)\Big]\cup$$
$$\cup\Big[\Big(\bigcup_{m\in\mathbf{N}}B_m\Big)\setminus\Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\Big(\bigcap_{i\in I}\psi_i(H_{k_{n,i},i})\Big)\Big)\Big];$$

e quindi, utilizzando (1.37.7) ed il fatto che

$$B_m\setminus\Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\Big(\bigcap_{i\in I}\psi_i(H_{k_{n,i},i})\Big)\Big)\subset B_{m+1}\setminus\Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\Big(\bigcap_{i\in I}\psi_i(H_{k_{n,i},i})\Big)\Big)$$

per ogni $m \in \mathbf{N}$, risulta che

$$\mu\Big[\bigcap_{n\in\mathbf{N}}\Big(\bigcup_{i\in I}(\psi_i(T_i)\setminus\psi_i(H_{k_{n,i},i}))\Big)\Big] = \Big(\bigcup_{m\in\mathbf{N}}\Big[B_m\setminus\Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\Big(\bigcap_{i\in I}\psi_i(H_{k_{n,i},i})\Big)\Big)\Big]\Big) =$$
$$= \lim_{m\to+\infty}\mu\Big[B_m\setminus\Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\Big(\bigcap_{i\in I}\psi_i(H_{k_{n,i},i})\Big)\Big)\Big],$$

ma da (1.37.8) e da (1.37.9) segue che

$$\mu\Big[B_m\setminus\Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\Big(\bigcap_{i\in I}\psi_i(H_{k_{n,i},i})\Big)\Big)\Big] < \mu\Big(B_m\setminus\Big(\bigcap_{i\in I}\psi_i(H_{k_{m,i},i})\Big)\Big) <$$
$$< \sum_{i\in I}\mu(B_m\setminus\psi_i(H_{k_{m,i},i})) < (m+1)^{-1}$$

e pertanto si conclude.

Se vale a''), da (1.37.0) e dal fatto che

$$\psi_i^{-1}\Big(\psi_i(T_i)\setminus\Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\psi_i(H_{n,i})\Big)\Big) \subset T_i\setminus\Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}}H_{n,i}\Big)$$

per ogni $i \in I$ segue che

(1.37.10) $$\mu\Big(\psi_i(T_i)\setminus\Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\psi_i(H_{n,i})\Big)\Big) = 0 \text{ per ogni } i \in I.$$

Se si considerano $T_i' = \bigcup_{n\in\mathbf{N}}\psi_i(H_{n,i}) \subset T$ $(i \in I)$, allora per il Teorema 1.34 (di cui vale l'ipotesi a)) applicato a $S_i = T_i'$ e a $L_{n,i} = \psi_i(H_{n,i})$ $(n \in \mathbf{N},\ i \in I)$ si ha che vale (1.36.0) relativamente a $S_i' = T_i'$, $L_{n,i} = \psi_i(H_{n,i})$ $(n \in \mathbf{N},\ i \in I)$ e quindi per il Lemma 1.36 applicato a $S_i = \psi_i(T_i)$, $L_{n,i} = \psi_i(H_{n,i})$ $(n \in \mathbf{N},\ i \in I)$ si ottiene (1.36.1) e quindi la tesi.

Valga infine a'''). Se si considerano $T_i'' = \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\psi_i(H_{n,i})\Big) \cap \psi_i(T_i^0)$ $(i \in I)$, allora per il Teorema 1.34 (di cui si vede che vale l'ipotesi b) considerando $\psi\colon \mathbf{N} \to \bigcup_{i\in I} T_i''$ surgettiva) applicato a $S_i = T_i''$, $L_{n,i} = \psi_i(H_{n,i}) \cap \psi_i(T_i^0)$ $(n \in \mathbf{N},\ i \in I)$ si ha che vale (1.36.0) relativamente a $S_i' = T_i''$, $L_{n,i} = \psi_i(H_{n,i}) \cap \psi_i(T_i^0)$ $(n \in \mathbf{N},\ i \in I)$ e quindi per il Lemma 1.36 applicato a $S_i = \psi_i(T_i^0)$, $L_{n,i} = \psi_i(H_{n,i}) \cap \psi_i(T_i^0)$ $(n \in \mathbf{N},\ i \in I)$ (è lecito applicarlo poichè dall'ipotesi (1.37.0) segue (1.37.10) e quindi

$$\mu\Big[\psi_i(T_i^0)\setminus\Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}}(\psi_i(H_{n,i}) \cap \psi_i(T_i^0))\Big)\Big] =$$
$$= \mu\Big(\psi_i(T_i^0)\setminus\Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\psi_i(H_{n,i})\Big)\Big) < \mu\Big(\psi_i(T_i)\setminus\Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\psi_i(H_{n,i})\Big)\Big) = 0$$

per ogni $i \in I$) si ottiene che

(1.37.11) esistono $k_{n,i} \in \mathbf{N}$ $(n \in \mathbf{N},\ i \in I)$, con $(k_{n,i})_{n\in\mathbf{N}}$ crescente per ogni $i \in I$, tali che

$$\mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbf{N}}\Big[\bigcup_{i\in I}(\psi_i(T_i^0)\setminus(\psi_i(H_{k_{n,i},i}) \cap \psi_i(T_i^0)))\Big]\Big) =$$
$$= \mu\Big[\bigcap_{n\in\mathbf{N}}\Big(\bigcup_{i\in I}(\psi_i(T_i^0)\setminus\psi_i(H_{k_{n,i},i}))\Big)\Big] = 0.$$

D'altra parte da (1.37.0), dal fatto che $\mu_i(T_i \setminus T_i^0) = 0$ e che $\psi_i^{-1}(\psi_i(T_i) \setminus \psi_i(T_i^0)) \subset T_i \setminus T_i^0$ per ogni $i \in I$ segue che

$$(1.37.12) \qquad \mu(\psi_i(T_i) \setminus \psi_i(T_i^0)) = 0 \text{ per ogni } i \in I .$$

Ora per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha che

$$\bigcup_{i \in I} (\psi_i(T_i) \setminus \psi_i(H_{k_{n,i},i})) \subset \Big(\bigcup_{i \in I} (\psi_i(T_i) \setminus \psi_i(T_i^0))\Big) \cup \Big(\bigcup_{i \in I} (\psi_i(T_i^0) \setminus \psi_i(H_{k_{n,i},i}))\Big)$$

e pertanto, utilizzando il Lemma 1.28, (1.37.11) e (1.37.12), si ottiene che:

$$\mu\Big[\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \Big(\bigcup_{i \in I} (\psi_i(T_i) \setminus \psi_i(H_{k_{n,i},i}))\Big)\Big] < \mu\Big(\bigcup_{i \in I} (\psi_i(T_i) \setminus \psi_i(T_i^0))\Big) + \\ + \mu\Big[\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \Big(\bigcup_{i \in I} (\psi_i(T_i^0) \setminus \psi_i(H_{k_{n,i},i}))\Big)\Big] = 0 .$$

b) Sia $i \in I$. Per (1.37.5) e per (1.37.4), utilizzando un procedimento di induzione, esistono $k_{n,i} \in \mathbf{N}$ ($n \in \mathbf{N}$), con $(k_{n,i})_{n \in \mathbf{N}}$ crescente, tali che

$$(1.37.13) \qquad \mu\Big(\psi_i\Big(\Big(\bigcup_{k > k_{n,i}} H_{k,i}\Big) \setminus H_{k_{n,i},i}\Big)\Big) < 2^{-i-1}(n+1)^{-1} ;$$

inoltre da (1.37.4) segue anche che

$$(1.37.14) \qquad \mu\Big(\psi_i\Big(T_i \setminus \Big(\bigcup_{k \in \mathbf{N}} H_{k,i}\Big)\Big)\Big) = 0 .$$

D'altra parte risulta che

$$T_i \setminus H_{k_{n,i},i} \subset \Big(T_i \setminus \Big(\bigcup_{k \in \mathbf{N}} H_{k,i}\Big)\Big) \cup \Big(\Big(\bigcup_{k \in \mathbf{N}} H_{k,i}\Big) \setminus H_{k_{n,i},i}\Big) = \\ = \Big(T_i \setminus \Big(\bigcup_{k \in \mathbf{N}} H_{k,i}\Big)\Big) \cup \Big(\Big(\bigcup_{k > k_{n,i}} H_{k,i}\Big) \setminus H_{k_{n,i},i}\Big) ,$$

ove l'uguaglianza segue dal fatto che $H_{n,i} \subset H_{n+1,i}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Pertanto, utilizzando (1.37.13) e (1.37.14), si ottiene che:

$$\mu\Big(\bigcup_{i \in I} \psi_i(T_i \setminus H_{k_{n,i},i})\Big) < \sum_{i \in I} 2^{-i-1}(n+1)^{-1} < (n+1)^{-1}$$

da cui segue la tesi.

1.38 Corollario: Siano T insieme, $\mathfrak{C}$ σ-algebra su T, $\mu : \mathfrak{C} \to [0, \infty]$ misura, $I \subset \mathbf{N}$, $K_{n,i} \in \mathfrak{C}$, $K_{n,i} \subset K_{n+1,i}$ ($n \in \mathbf{N}$, $i \in I$) tali che $\mu\Big(T \setminus \Big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_{n,i}\Big)\Big) = 0$ per ogni $i \in I$. Allora, se vale almeno una delle seguenti quattro condizioni:

a) μ è σ-finita

b) esistono $A_k \in \mathfrak{C}$, con $A_k \subset A_{k+1}$ ($k \in \mathbf{N}$) tali che $\mu\Big(T \setminus \Big(\bigcup_{k \in \mathbf{N}} A_k\Big)\Big) = 0$ e per cui $\lim_{n \to \infty} \mu(A_k \setminus K_{n,i}) = 0$ per ogni $k \in \mathbf{N}$, $i \in I$

c) I è finito

d) esiste $T^0 \in \mathfrak{C}$, T^0 al più numerabile tale che $\mu(T \setminus T^0) = 0$

si ha che esistono $k_{n,i} \in \mathbf{N}$ $(n \in \mathbf{N},\ i \in I)$ tali che $(k_{n,i})_{n \in \mathbf{N}}$ sia crescente per ogni $i \in I$ e

$$\mu\Big(T \setminus \Big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \Big(\bigcap_{i \in I} K_{k_{n,i},i}\Big)\Big)\Big) = 0 .$$

Dimostrazione: Se vale *a*) esistono $A_k \in \mathfrak{C}$, $A_k \subset A_{k+1}$, con $\mu(A_k) < \infty$ $(k \in \mathbf{N})$ tali che $T = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} A_k$. Allora per ogni $k \in \mathbf{N}$, $i \in I$, poichè $\mu(A_k) < \infty$, risulta che

$$0 = \mu\Big(A_k \setminus \Big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_{n,i}\Big)\Big) = \mu\Big(\bigcap_{n \in \mathbf{N}} (A_k \setminus K_{n,i})\Big) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_k \setminus K_{n,i}).$$

Pertanto vale l'ipotesi *b*).

Se vale rispettivamente *b*), *c*), *d*) allora basta applicare il Teorema 1.37, di cui vale rispettivamente l'ipotesi *a*'), *a*''), *a*'''), ove si considerino $T_i = T$, $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{C}$, $\mu_i = \mu$, $\psi_i = id_T$, $H_{n,i} = K_{n,i}$ $(n \in \mathbf{N},\ i \in I)$ (se vale *b*) la condizione *a*') del n. 1.37 è verificata considerando $A_{k,i} = A_k$ per ogni $i \in I$ $(k \in \mathbf{N})$).

1.39 Corollario: Siano I, T_i, T, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}$, μ_i, μ, ψ_i, $H_{n,i}$ $(n \in \mathbf{N},\ i \in I)$ come nel Teorema 1.37. Se vale l'ipotesi di *a*) del Teorema 1.37 e se inoltre

$$\mu\Big(T \setminus \Big(\bigcup_{i \in I} \psi_i(T_i)\Big)\Big) = 0 ,$$

allora esistono $k_{n,i} \in \mathbf{N}$ $(n \in \mathbf{N},\ i \in I)$ tali che $(k_{n,i})_{n \in \mathbf{N}}$ sia crescente per ogni $i \in I$,

$$\mu\Big[\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \Big(\bigcap_{i \in I} (T \setminus \psi_i(H_{k_{n,i},i}))\Big)\Big] = 0 .$$

Dimostrazione: Per *a*) del Teorema 1.37 esistono $k_{n,i} \in \mathbf{N}$ $(n \in \mathbf{N},\ i \in I)$ tali che $(k_{n,i})_{n \in \mathbf{N}}$ sia crescente per ogni $i \in I$, $\mu\Big[\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \Big(\bigcup_{i \in I} (\psi_i(T_i) \setminus \psi_i(H_{k_{n,i},i}))\Big)\Big] = 0$. Allora, poichè si ha che

$$\bigcap_{i \in I} (T \setminus \psi_i(H_{k_{n,i},i})) = T \setminus \Big(\bigcup_{i \in I} \psi_i(H_{k_{n,i},i})\Big) \subset \Big(T \setminus \Big(\bigcup_{i \in I} \psi_i(T_i)\Big)\Big) \cup$$
$$\cup \Big(\bigcup_{i \in I} (\psi_i(T) \setminus \psi_i(H_{k_{n,i},i}))\Big),$$

per il Lemma 1.28 risulta che

$$\mu\Big[\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \Big(\bigcap_{i \in I} (T \setminus \psi_i(H_{k_{n,i},i}))\Big)\Big] \leq \mu\Big[\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \Big(\bigcup_{i \in I} (\psi_i(T_i) \setminus \psi_i(H_{k_{n,i},i}))\Big)\Big] = 0 .$$

1.40 Osservazione: Si noti che il Teorema 1.37 ed il Corollario 1.39 danno delle condizioni sufficienti affinchè una famiglia $(H_{n,i}:\ n \in \mathbf{N},\ i \in I)$ verifichi una delle condizioni (1.29.1), (1.29.7), (1.29.10) e quindi suggeriscono,

insieme alle ipotesi del n. 1.29, condizioni sotto cui valgono alcune delle ipotesi del n. 1.31 (cfr. Osservazione 1.32); il Corollario 1.38 fornisce condizioni sotto cui è verificata (1.29.12) e suggerisce condizioni sotto le quali è verificata la prima parte di (1.31.4).

§ 2. - Sulle funzioni $(\mathfrak{L}\times\mathfrak{B}(\varrho))$-misurabili e continue

2.0 Teorema: Valga la seguente condizione:

A) siano T insieme, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu\colon \mathfrak{L}\to[0,\infty]$ misura, (X,ϱ), (Z,ζ), (Z_j,ζ_j) spazi topologici, $\theta_j\colon Z\to Z_j$ $(j\in J)$, $E\subset T\times X$, $f\colon E\to Z$, $f_j\colon E\to Z_j$ tali che $f_j=\theta_j\circ f$ per ogni $j\in J$, $T^0=\{t\in T\colon x\in E_t\mapsto f(t,x)\in Z$ è continua [risp. sequenzialmente continua]$\}$, $T_j^0=\{t\in T\colon x\in E_t\mapsto f_j(t,x)\in Z_j$ è continua [risp. sequenzialmente continua]$\}$ $(j\in J)$.

Allora valgono i seguenti fatti:

a) se

(2.0.0) μ è completa e $\theta_j\colon(Z,\zeta)\to(Z_j,\zeta_j)$ sono continue [risp. sequenzialmente continue] $(j\in J)$,

da

(2.0.1) $$T^0\in\mathfrak{L},\qquad \mu(T\setminus T^0)=0$$

segue

(2.0.2) $$T_j^0\in\mathfrak{L},\qquad \mu(T\setminus T_j^0)=0 \text{ per ogni } j\in J;$$

b) se $J\subset\mathbf{N}$, se

(2.0.3) ζ è meno fine della topologia iniziale delle topologie ζ_j [risp. $s\zeta_j$] rispetto alle θ_j $(j\in J)$

e se vale almeno una delle due seguenti condizioni:

(2.0.4) μ è completa

(2.0.5) $\theta_j\colon(Z,\zeta)\to(Z_j,\zeta_j)$ sono continue [risp. sequenzialmente continue] $(j\in J)$,

da (2.0.2) segue (2.0.1).

Dimostrazione: *a*) Sia $t\in T^0$. Allora $f(t,\cdot)$ è continua [risp. sequenzialmente continua] e pertanto, visto che per ipotesi θ_j è continua [risp. sequenzialmente continua] per ogni $j\in J$, anche $f_j=\theta_j\circ f$ è continua [risp. sequenzialmente continua] per ogni $j\in J$ e pertanto $T^0\subset\bigcap_{j\in J}T_j^0$. Quindi se vale (2.0.1),

utilizzando la completezza di μ, si ottiene che $T_j^0 \in \mathfrak{L}$, $\mu(T \setminus T_j^0) = 0$ per ogni $j \in J$, per cui vale (2.0.2).

b) Sia $t \in \bigcap_{j \in J} T_j^0$. Allora $f_j(t, \cdot)$ è continua [risp. sequenzialmente continua] per ogni $j \in J$ e pertanto $f(t, \cdot)$ è continua, visto che vale (2.0.3) e per la Definizione 1.4 [risp. $f(t, \cdot)$ è sequenzialmente continua, poichè vale (2.0.3) e per il Teorema 1.6]. Quindi $\bigcap_{j \in J} T_j^0 \subset T^0$ e, se $J \subset \mathbf{N}$ e se vale (2.0.2), risulta che $\bigcap_{j \in J} T_j^0 \in \mathfrak{L}$, $\mu\left(T \setminus \bigcap_{j \in J} T_j^0\right) = 0$. Ora se vale (2.0.4) si ottiene subito (2.0.1) e se vale (2.0.5) si ha come in *a*) che $T^0 \subset \bigcap_{j \in J} T_j^0$ e pertanto in tal caso $T^0 = \bigcap_{j \in J} T_j^0$ e si conclude.

2.1 Corollario: Siano T, $\mathfrak{L}$, μ, (X, ϱ), (Z, ζ), (Z_j, ζ_j), θ_j, E, f, f_j, T^0, T_j^0 $(j \in J)$ come in *A*) del Teorema 2.0. Allora, se $J = \{0\}$, se valgono (2.0.3) e (2.0.5), si ha che (2.0.1) implica (2.0.2).

Dimostrazione: Utilizzando (2.0.5), come in *a*) del Teorema 2.0 si ottiene che $T^0 \subset T_0^0$ e, per (2.0.3), come in *b*) del Teorema 2.0 si ricava che $T_0^0 \subset T^0$. Pertanto $T^0 = T_0^0$ e si conclude.

2.2 Teorema: Siano T, $\mathfrak{L}$, μ, (X, ϱ), (Z, ζ), (Z_j, ζ_j), θ_j, E, f, f_j $(j \in J)$ come in *A*) del Teorema 2.0 e inoltre sia $E \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho)$. Allora valgono i seguenti fatti:

a) se

(2.2.0) $\qquad \theta_j$ è $\mathfrak{B}(\zeta)$-misurabile per ogni $j \in J$,

da

(2.2.1) $\qquad f$ è $(\mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho))|_E$-misurabile

segue

(2.2.2) $\qquad f_j$ è $(\mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho))|_E$-misurabile per ogni $j \in J$;

a') se

(2.2.3) $\qquad \theta_j$ è continua per ogni $j \in J$

da

(2.2.4) $\qquad t \in E^x \mapsto f(t, x) \in Z$ è $\mu|_{(\mathfrak{L}|_{E^x})}$-misurabile per ogni $x \in X$

segue

(2.2.5) $\qquad t \in E^x \mapsto f_j(t, x) \in Z_j$ è $\mu|_{(\mathfrak{L}|_{E^x})}$-misurabile per ogni $j \in J$ e per ogni $x \in X$;

b) se valgono le due condizioni

(2.2.6) la topologia iniziale delle topologie ζ_j rispetto alle θ_j $(j \in J)$ è a base numerabile di aperti

(2.2.7) ζ è meno fine della topologia iniziale delle topologie ζ_j rispetto alle θ_j $(j \in J)$,

da (2.2.2) seguono (2.2.1) e (2.2.4).

Dimostrazione: *a*) Sia f applicazione $(\mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho))/_E$-misurabile. Sia $j \in J$ e sia $A \in \zeta_j$. Allora per (2.2.0) risulta che $f_j^{-1}(A) = f^{-1}(\theta_j^{-1}(A)) \in (\mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho))/_E$ e quindi vale (2.2.2).

a') Valga (2.2.4) e siano $j \in J$, $A \in \zeta_j$, $x \in X$. Allora per (2.2.3) risulta che

$$(f_j(\cdot, x))^{-1}(A) = \{t \in E^n : f_j(t, x) \in A\} =$$
$$= \{t \in E^n : \theta_j(f(t, x)) \in A\} = (f(\cdot, x))^{-1}(\theta_j^{-1}(A)) \in \mathfrak{L}\,;$$

d'altra parte per (2.2.4) esiste S sottoinsieme separabile di (Z, ζ) tale che sia $f(\cdot, x)(E^n) \subset S$ e pertanto $f_j(\cdot, x)(E^n) \subset \theta_j(S)$ che è separabile in (Z_j, ζ_j) per (2.2.3); quindi vale (2.2.5).

b) Se vale (2.2.2) e se $j \in J$, $A \in \zeta_j$ si ha che

$$f^{-1}(\theta_j^{-1}(A)) = f_j^{-1}(A) \in (\mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho))/_E\,.$$

Utilizzando ora (2.2.7), (2.2.6) ed il teorema di Lindelöf, si ricava (2.2.1). D'altra parte per (2.2.6) si ha che la topologia iniziale delle topologie ζ_j rispetto alle θ_j $(j \in J)$ è separabile e pertanto tale è anche ζ, che è meno fine per (2.2.7) (in quanto ogni sottoinsieme denso in Z rispetto ad una topologia più fine di ζ è denso anche in (Z, ζ)); allora per ogni $x \in X$ si ha che $t \in E^n \mapsto f(t, x) \in (Z, \zeta)$, che è $\mathfrak{L}/_{E^n}$-misurabile per (2.2.1), verifica (2.2.4).

2.3 Corollario: Siano T, $\mathfrak{L}$, μ, (X, ϱ), (Z, ζ), (Z_j, ζ_j), θ_j, E, f, f_j $(j \in J)$ come in *A*) del Teorema 2.0 e inoltre sia $E \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho)$. Allora, se $J = \{0\}$ e se vale (2.2.7), si ha che (2.2.2) implica (2.2.1); se inoltre θ_0 è surgettiva si ha anche che (2.2.5) implica (2.2.4).

Dimostrazione: Poichè $J = \{0\}$ e per (2.2.7) si ha che se $A \in \zeta$ allora esiste $A_0 \in \zeta_0$ tale che $A = \theta_0^{-1}(A_0)$ e quindi

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(\theta_0^{-1}(A_0)) = f_0^{-1}(A_0) \in (\mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho))/_E\,.$$

Allora si ha anche che $t \in E^n \mapsto f(t, x) \in (Z, \zeta)$ è $\mathfrak{L}/_{E^n}$-misurabile per ogni $x \in X$ e pertanto, con l'ipotesi in più che θ_0 è surgettiva, basta ancora provare

che se $B \subset Z$ è tale che $\theta_0(B) \subset S_0$, con S_0 separabile in (Z_0, ζ_0), allora $B \subset S$, con S separabile in (Z, ζ). Ciò segue dal fatto che

(2.3.0) se S_0 è separabile in (Z_0, ζ_0) allora $\theta_0^{-1}(S_0)$ è separabile in (Z, ζ).

Sia N_0 sottoinsieme al più numerabile e denso in $(S_0, \zeta_0/_{S_0})$. Allora se $N = \{x_m : m \in N_0\}$, ove $x_m \in \theta_0^{-1}(\{m\})$ per ogni $m \in N_0$ (tali x_m $(m \in N_0)$ esistono poichè $\theta_0^{-1}(\{m\}) \neq 0$ $(m \in N_0)$ visto che θ_0 è surgettiva), risulta che N è sottoinsieme al più numerabile e denso in $(\theta_0^{-1}(S_0), \zeta/_{\theta_0^{-1}(S_0)})$, poichè se $A \in \zeta$ per (2.2.7) esiste $A_0 \in \zeta_0$ tale che $A = \theta_0^{-1}(A_0)$ e quindi esiste $m \in N_0$ tale che $m \in A_0 \cap S_0$ e pertanto $x_m \in \theta_0^{-1}(A_0 \cap S_0) = A \cap \theta_0^{-1}(S_0)$. Pertanto è provata (2.3.0).

2.4 Esempio: Se, in *b*) del Teorema 2.2, si sostituisce l'ipotesi (2.2.6) con la condizione che ζ sia a base numerabile di aperti, la tesi può non valere.

Basta considerare

$$T = \{0\},\ \mathfrak{L} = \{\{0\}, 0\},\ (X, \varrho) = (\mathbf{R}, \eta),\ Z = \mathbf{R},\ V \notin \mathfrak{B}(\eta)$$

(ad esempio V l'insieme di Vitali su $[0, 1]$),

$$\zeta = \{V, \mathbf{R}, 0\}, \qquad J = \mathbf{R}, \qquad Z_j = \{0, 1\}, \qquad \zeta_j = \{\{1\}, \{0, 1\}, 0\},$$

$$\theta_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = j \\ 0 & \text{se } x \neq j \end{cases}, \qquad E = \{0\} \times \mathbf{R}, \qquad f(0, x) = x \qquad \text{per ogni } x \in \mathbf{R},$$

$$f_j(0, x) = \theta_j(f(0, x)) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = j \\ 0 & \text{se } x \neq j \end{cases} \quad (j \in \mathbf{R}).$$

Allora $f_j^{-1}(\{1\}) = \{(0, j)\} \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\eta)$ per ogni $j \in \mathbf{R}$ e quindi f_j è $(\mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\eta))$-misurabile per ogni $j \in \mathbf{R}$. Inoltre la topologia iniziale delle topologie ζ_j rispetto alle θ_j $(j \in \mathbf{R})$ è la topologia discreta su $\mathbf{R}$ visto che $\{x\} = \theta_x^{-1}(\{1\})$ deve essere aperto in tale topologia per ogni $x \in \mathbf{R}$. Pertanto ζ è meno fine di essa e vale (2.2.7). Essendo ζ finita si ha anche che ζ è a base numerabile di aperti. D'altra parte f non è $(\mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\eta))$-misurabile visto che $f^{-1}(V) = \{0\} \times V \notin \mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\eta)$.

2.5 Teorema: Siano (T, τ) spazio topologico, $\mathfrak{L}$, μ, (X, ϱ), (Z, ζ), (Z_j, ζ_j), θ_j, E, f, f_j $(j \in J)$ come in *A*) del Teorema 2.0, $\mathcal{K} \subset \mathfrak{L}$, $\mathcal{K}_j \subset \mathfrak{L}$ $(j \in J)$. Allora valgono i seguenti fatti:

a) se vale (2.0.5), se $\mathcal{K} \subset \bigcap_{j \in J} \mathcal{K}_j$ e se $(f, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K})$ [risp. $SD(s\mathcal{K})$], segue che $(f_j, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K}_j)$ [risp. $SD(s\mathcal{K}_j)$] per ogni $j \in J$;

b) se $J \subset \mathbf{N}$, se vale (2.0.3), se

(2.5.0) $\qquad \bigcap_{j \in J} K_j \in \mathcal{K}$ per ogni famiglia $(K_j \in \mathcal{K}_j : j \in J)$

e se $(f_j, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K})$ [risp. $SD(\iota\mathcal{K})$] per ogni $j \in J$, segue che $(f, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K})$ [risp. $SD(\iota\mathcal{K})$].

Dimostrazione: *a*) Siano $K_n \in \mathcal{K}$ $(n \in \mathbf{N})$ tali che $\mu(T \setminus K_n) < 1/(n+1)$ e $f/_{(K_n \times X) \cap E}$ sia continua [risp. sequenzialmente continua] $(n \in \mathbf{N})$; basta allora per ogni $j \in J$ considerare $K_{n,j} = K_n$ $(n \in \mathbf{N})$ relativamente ad f_j.

b) Siano $K_{n,j} \in \mathcal{K}_j$ $(n \in \mathbf{N},\ j \in J)$ tali che $\mu(T \setminus K_{n,j}) < 1/(n+1)$ e $f_j/_{(K_{n,j} \times X) \cap E}$ sia continua [risp. sequenzialmente continua] $(n \in \mathbf{N},\ j \in J)$. Siano $n \in \mathbf{N}$ e $K_n = \bigcap_{j \in J} K_{n2^{j+1},j}$. Allora per (2.5.0) e poichè $J \subset \mathbf{N}$ si ha che $K_n \in \mathcal{K}$ e

$$\mu(T \setminus K_n) < \sum_{j \in J} \mu(T \setminus K_{n2^{j+1},j}) < \sum_{j \in J} \frac{1}{(n+1)2^{j+1}} < 1/(n+1)\,.$$

D'altra parte $f/_{(K_n \times X) \cap E}$ è continua per (2.0.3) e per la Definizione 1.4 [risp. $f/_{(K_n \times X) \cap E}$ è sequenzialmente continua per (2.0.3) e per il Teorema 1.6].

2.6 Osservazione: Si noti che, in analogia a quanto visto nell'Osservazione 1.24 *b*), utilizzando il Lemma 1.19 *b*) insieme ad alcune parti dei Teoremi 1.11, 1.13, 1.16 oppure utilizzando il Teorema 1.20 *a*) o le parti *a*''), *b*''), *c*'') del Corollario 1.22 si possono ricavare risultati analoghi al Teorema 2.5, in cui le proprietà del tipo $SD(\mathcal{K})$ [risp. $SD(\iota\mathcal{K})$] siano sostituite dalle proprietà del tipo $SD(\iota\mathcal{K})$, $SD(\sigma\mathcal{K})$, $SD(\iota\sigma\mathcal{K})$ [risp. $SD(\kappa\mathcal{K})$, $SD(\iota\sigma\mathcal{K})$, $SD(\kappa\sigma\mathcal{K})$].

Un'altra modifica (indipendente dai lemmi e teoremi precedenti) del Teorema 2.5 nel caso di proprietà di tipo $SD(\iota\sigma\mathcal{K})$ [risp. $SD(\kappa\sigma\mathcal{K})$] è data nel Teorema 2.7.

Si può notare quindi che, tenendo conto di questa osservazione e dell'osservazione 1.24 *b*), oppure tenendo conto dei Teoremi 1.29, 1.31 e 2.7 nel caso « $\iota\sigma\mathcal{K}$ », anche la teoria svolta nel successivo § 3 potrebbe essere svolta analogamente nei casi « $\iota\mathcal{K}$ », « $\sigma\mathcal{K}$ », « $\iota\sigma\mathcal{K}$ ».

2.7 Teorema: Siano (T, τ), $\mathfrak{C}$, μ, (X, ϱ), (Z, ζ), (Z_j, ζ_j), θ_j, E, f, f_j, $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_j$ $(j \in J)$ come nel Teorema 2.5. Allora valgono i seguenti fatti:

a) se vale (2.0.5), se $\mathcal{K} \subset \bigcap_{j \in J} \mathcal{K}_j$ e se $(f, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\iota\sigma\mathcal{K})$ [risp. $SD(\kappa\sigma\mathcal{K})$], segue che $(f_j, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà $SD(\iota\sigma\mathcal{K}_j)$ [risp. $SD(\kappa\sigma\mathcal{K}_j)$] per ogni $j \in J$;

b) se $J \subset \mathbf{N}$, se valgono (2.0.3), (2.5.0),

(2.7.0) per ogni $(H_{n,j} : n \in \mathbf{N},\ j \in J)$ tale che $H_{n,j} \in \mathcal{K}_j$, $H_{n,j} \subset H_{n+1,j}$ $(n \in \mathbf{N},\ j \in J)$, $\mu\Big(T \setminus \Big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_{n,j}\Big)\Big) = 0$ $(j \in J)$ esiste $(k_{n,j} : n \in \mathbf{N},\ j \in J)$ tale che $k_{n,j} \in \mathbf{N}$ $(n \in \mathbf{N},\ j \in J)$, $(k_{n,j})_{n \in \mathbf{N}}$ crescente $(j \in J)$, $\mu\Big(T \setminus \Big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \bigcap_{j \in J} H_{k_{n,j},j}\Big)\Big) = 0$

e se $(f_j, T, \mu, \tau, \varrho, \mathfrak{C}_j)$ verifica la proprietà $SD(\varepsilon\sigma\mathcal{K}_j)$ [risp. $SD(\mu\sigma\mathcal{K}_j)$] per ogni $j \in J$, segue che $(f, T, \mu, \tau, \varrho, \mathfrak{C})$ verifica la proprietà $SD(\varepsilon\sigma\mathcal{K})$ [risp. $SD(\mu\sigma\mathcal{K})$].

Dimostrazione: *a*) Siano $K_n \in \mathcal{K}$ $(n \in \mathbf{N})$ tali che

$$K_n \subset K_{n+1},\ f/_{(K_n \times X)} \cap E$$

sia continua [risp. sequenzialmente continua] $(n \in \mathbf{N})$, $\mu\Big(T \setminus \big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\big)\Big) = 0$; basta allora per ogni $j \in J$ considerare $K_{n,j} = K_n$ $(n \in \mathbf{N})$ relativamente ad f_j.

b) Siano $K_{n,j} \in \mathcal{K}_j$ $(n \in \mathbf{N}, j \in J)$ tali che $K_{n,j} \subset K_{n+1,j}$, $f_j/_{(K_{n,j} \times X)} \cap E$ sia continua [risp. sequenzialmente continua] $(n \in \mathbf{N}, j \in J)$, $\mu\Big(T \setminus \big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_{n,j}\big)\Big) = 0$ per ogni $j \in J$. Allora, se $(k_{n,j}: n \in \mathbf{N}, j \in J)$ è relativo a $(K_{n,j}: n \in \mathbf{N}, j \in J)$ come in (2.7.0) e se $K_n = \bigcap_{j \in J} K_{k_{n,j},j}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, segue che $\mu\Big(T \setminus \big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\big)\Big) = 0$; inoltre per (2.5.0) risulta che $K_n \in \mathcal{K}$ e, poichè $(k_{n,j})_{n \in \mathbf{N}}$ è crescente per ogni $j \in J$, si ha che $K_n \subset K_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. D'altra parte $f/_{(K_n \times X)} \cap E$ è continua per (2.0.3) e per la Definizione 1.4 [risp. $f/_{(K_n \times X)} \cap E$ è sequenzialmente continua per (2.0.3) e per il Teorema 1.6] $(n \in \mathbf{N})$.

2.8 Osservazione: Si noti che nel Corollario 1.38 sono date condizioni sufficienti per la verifica della condizione (2.7.0).

§ 3. - Proprietà di Scorza-Dragoni sugli spazi

3.0 Definizione: Siano T insieme, (X, ϱ) spazio topologico, $\mathfrak{C}$ σ-algebra su T, $\mu: \mathfrak{C} \to [0, \infty]$ misura, $E \in \mathfrak{C} \times \mathcal{B}(\varrho)$, $b: E \to [-\infty, \infty]$, $I(b, \varrho) = \{t \in T: x \in E_t \mapsto b(t, x) \in [-\infty, \infty]$ è s.c.i.$\}$, $I(t, b, \varrho) = \{t \in T: x \in E_t \mapsto b(t, x) \in [-\infty, \infty]$ è s.s.c.i.$\}$. Allora si dice che:

a) (b, μ, ϱ) verifica la proprietà (INf) se $I(b, \varrho) \in \mathfrak{C}$, $\mu(T \setminus I(b, \varrho)) = 0$ e $b/_{(I(b, \varrho) \times X)} \cap E$ è $(\mathfrak{C} \times \mathcal{B}(\varrho))/_{(I(b, \varrho) \times X)} \cap E$-misurabile;

b) (b, μ, ϱ) verifica la proprietà $(tINf)$ se $I(t, b, \varrho) \in \mathfrak{C}$, $\mu(T \setminus I(t, b, \varrho)) = 0$ e $b/_{(I(t, b, \varrho) \times X)} \cap E$ è $(\mathfrak{C} \times \mathcal{B}(\varrho))/_{(I(t, b, \varrho) \times X)} \cap E$-misurabile;

c) (b, μ, ϱ) verifica la proprietà (INd) [risp. $(tINd)$] se esiste $D \in \mathfrak{C}$, $D \subset I(b, \varrho)$ [risp. $D \subset I(t, b, \varrho)$] tale che sia $\mu(T \setminus D) = 0$ e $b/_{(D \times X)} \cap E$ sia $(\mathfrak{C} \times \mathcal{B}(\varrho))/_{(D \times X)} \cap E$-misurabile.

3.1 Definizione: Siano (T, τ), (X, ϱ) spazi topologici, $\mathfrak{C}$ σ-algebra su T, $\mu: \mathfrak{C} \to [0, \infty]$ misura, $\mathcal{K} \subset \mathfrak{C}$, $E \in \mathfrak{C} \times \mathcal{B}(\varrho)$. Allora si dice che:

a) $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà (SDa) [risp. $(sSDa)$, (SDa'), $(sSDa')$] se per ogni $f: E \to [-\infty, \infty]$ tale che (f, μ, ϱ) verifichi la proprietà (INf) [risp. $(sINf)$, (INd), $(sINd)$] risulta che $(f, T, \mu, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}]$, $SD[\mathcal{K}]$, $SD[s\mathcal{K}]$];

b) $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà (SDb) [risp. $(sSDb)$, (SDb'), $(sSDb')$] se per ogni $f: E \to [-\infty, \infty]$ tale che $(f, T, \mu, \tau, \varrho)$ verifichi la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}]$, $SD[\mathcal{K}]$, $SD[s\mathcal{K}]$] si ha che (f, μ, ϱ) verifica la proprietà (INf) [risp. $(sINf)$, (INd), $(sINd)$].

3.2 Teorema: Siano (T, τ), (X, ϱ), $\mathfrak{C}$, μ, $\mathcal{K}$, E come nella Definizione 3.1. Allora:

a) se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà (SDa') [risp. $(sSDa')$] allora $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà (SDa) [risp. $(sSDa)$];

b) se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà (SDb) [risp. $(sSDb)$] allora $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà (SDb') [risp. $(sSDb')$];

c) se vale

(3.2.0) ϱ è separabile e pseudo-metrizzabile e μ è completa

e se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà (SDa) [risp. $(sSDa)$] allora $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà (SDa') [risp. $(sSDa')$];

d) se vale (3.2.0) e se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà (SDb') [risp. $(sSDb')$] allora $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà (SDb) [risp. $(sSDb)$];

e) se $f: E \to [-\infty, \infty]$, allora $(f, T, \mu, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}]$] se e solo se

(3.2.1) esiste $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tale che $K_n \in \mathcal{K}$, $K_n \subset I(f, \varrho)$ [risp. $K_n \subset I(s, f, \varrho)$], $\mu(T \setminus K_n) < 1/(n+1)$, $f|(K_n \times X) \cap E$ è s.c.i. [risp. s.s.c.i.] per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Dimostrazione: *a*), *b*), *c*), *d*) Sia $f: E \to [-\infty, \infty]$. Allora, se (f, μ, ϱ) verifica la proprietà (INf) [risp. $(sINf)$], si ha che (f, μ, ϱ) verifica ovviamente anche la proprietà (INd) [risp. $(sINd)$] con $D = I(f, \varrho)$ [risp. $D = I(s, f, \varrho)$]. Pertanto sono ovvie le parti *a*) e *b*). Per provare *c*) e *d*) basta ora dimostrare che, se vale (3.2.0) e se (f, μ, ϱ) verifica la proprietà (INd) [risp. $(sINd)$], si ha che (f, μ, ϱ) verifica la proprietà (INf) [risp. $(sINf)$]. Valga pertanto (3.2.0), (f, μ, ϱ) verifichi la proprietà (INd) [risp. $(sINd)$] e D sia relativo a (f, μ, ϱ) ed a tale proprietà. Allora, poichè $D \in \mathfrak{C}$, $D \subset I(f, \varrho)$ [risp. $D \subset I(s, f, \varrho)$], $\mu(T \setminus D) = 0$ e poichè μ è completa per (3.2.0), risulta

che $I(f, \varrho) \in \mathfrak{L}$, $\mu(T \setminus I(f, \varrho)) = 0$ [risp. $I(t, f, \varrho) \in \mathfrak{L}$, $\mu(T \setminus I(t, f, \varrho)) = 0$]. Sia $a \in [-\infty, \infty]$. Allora

$$\left(f|_{(I(f,\varrho)\times X)\cap E}\right)^{-1}([-\infty, a]) =$$
$$= \left(f|_{(D\times X)\cap E}\right)^{-1}([-\infty, a]) \cup \left(f|_{((I(f,\varrho)\setminus D)\times X)\cap E}\right)^{-1}([-\infty, a])$$

$$\left[\text{risp. } \left(f|_{(I(t,f,\varrho)\times X)\cap E}\right)^{-1}([-\infty, a]) =\right.$$
$$\left. = \left(f|_{(D\times X)\cap E}\right)^{-1}([-\infty, a]) \cup \left(f|_{((I(t,f,\varrho)\setminus D)\times X)\cap E}\right)^{-1}([-\infty, a])\right]$$

e quindi basta provare che

$$A = \left(f|_{((I(f,\varrho)\setminus D)\times X)\cap E}\right)^{-1}([-\infty, a]) \in \mathfrak{L}\times\mathfrak{B}(\varrho)$$

$$\left[\text{risp. } A = \left(f|_{((I(t,f,\varrho)\setminus D)\times X)\cap E}\right)^{-1}([-\infty, a]) \in \mathfrak{L}\times\mathfrak{B}(\varrho)\right].$$

Ora $A \subset \left((I(f, \varrho)\setminus D)\times X\right) \cap E$ [risp. $A \subset \left((I(t, f, \varrho)\setminus D)\times X\right) \cap E$] e $A_t = \{x \in E_t : f(t, x) \in [-\infty, a]\}$ è chiuso in $\varrho|_{E_t}$ per ogni $t \in I(f, \varrho)\setminus D$ [risp. per ogni $t \in I(t, f, \varrho)\setminus D$] per come è stato definito $I(f, \varrho)$ [risp. per come è stato definito $I(t, f, \varrho)$] e poichè per ogni $t \in T$ si ha che $\varrho|_{E_t} = s(\varrho|_{E_t})$ in quanto da (3.2.0) segue che ϱ è a base numerabile di aperti, per cui tale è anche $\varrho|_{E_t}$ e basta quindi usare *b*) del Teorema 1.1 di [BA 1]]. D'altra parte per (3.2.0) esiste d pseudo-distanza che induce ϱ ed esistono $x_m \in X$ ($m \in \mathbf{N}$) tali che sia $\overline{\{x_m : m \in \mathbf{N}\}}^{\varrho} = X$ e pertanto risulta che

$$(3.2.2) \qquad A = \left(\bigcap_{k\in\mathbf{Z}_+} \bigcup_{m\in\mathbf{N}} \left(pr_T[A \cap (T\times S_d(x_m, 1/k))] \times S_d(x_m, 1/k)\right)\right) \cap E.$$

Infatti è ovvia l'inclusione del primo membro nel secondo e viceversa se $(t, x) \in E\setminus A$ allora $d(x, A_t) > 0$, poichè essendo A_t chiuso in $\varrho|_{E_t}$ esiste $B(t)$ chiuso in ϱ tale che sia $A_t = B(t) \cap E_t$ e, visto che $x \in E_t\setminus A_t$, risulta che $x \notin B(t)$ da cui segue che $d(x, A_t) \geq d(x, B(t)) > 0$; quindi esiste $k_t \in \mathbf{Z}_+$ tale che sia $1/k_t < d(x, A_t)$, per cui per ogni $m \in \mathbf{N}$ si ha che

$$(t, x) \notin pr_T\left[A \cap \left(T\times S_d(x_m, 1/(2k_t))\right)\right] \times S_d(x_m, 1/(2k_t)).$$

Ora da (3.2.2), tenendo conto del fatto che $E \in \mathfrak{L}\times\mathfrak{B}(\varrho)$ e che per ogni $k \in \mathbf{Z}_+$, $m \in \mathbf{N}$ si ha che $pr_T[A \cap (T\times S_d(x_m, 1/k))] \in \mathfrak{L}$ (visto che è contenuto in $I(f, \varrho)\setminus D$ [risp. in $I(t, f, \varrho)\setminus D$] e visto che μ è completa), $S_d(x_m, 1/k) \in \varrho \subset \mathfrak{B}(\varrho)$, si conclude.

e) È ovvio che da (3.2.1) segue che $(f, T, \mu, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}]$]. Viceversa, se $(f, T, \mu, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}]$

[risp. $SD[\mathcal{K}]$] e se $K_n \in \mathcal{K}$, $K_n \subset T$ ($n \in \mathbf{N}$) sono tali che $\mu(T \setminus K_n) < 1/(n+1)$, $f|_{(K_n \times X) \cap E}$ è s.c.i. [risp. s.s.c.i.], allora per ogni $n \in \mathbf{N}$ e $t \in K_n$ risulta che $f(t, \cdot)$ è s.c.i. [risp. s.s.c.i.] su E_t e pertanto $K_n \subset I(f, \varrho)$ [risp. $K_n \subset \subset I(s, f, \varrho)$]; quindi vale (3.2.1).

3.3 Lemma: Siano T, T_i insiemi, ψ_i: $T_i \to T$, $A_i \subset T_i$ ($i \in I$). Allora, se valgono le seguenti condizioni:

(3.3.0) $\qquad \psi_i^{-1}(\psi_i(A_i)) = A_i$ per ogni $i \in I$

(3.3.1) $\qquad \psi_i(T_i) \cap \psi_l(T_l) = 0$ se $i, l \in I$, $i \neq l$,

esiste $A \subset T$ tale che sia

$$\psi_i^{-1}(A) = A_i \text{ per ogni } i \in I .$$

Dimostrazione: Basta considerare $A = \bigcup_{i \in I} \psi_i(A_i)$, poichè allora se $i \in I$ risulta che:

$$\psi_i^{-1}(A) = \psi_i^{-1}\Big(\bigcup_{l \in I} \psi_l(A_l)\Big) = \psi_i^{-1}(\psi_i(A_i)) = A_i ,$$

ove per la penultima e per l'ultima eguaglianza si sono usate rispettivamente (3.3.1) e (3.3.0).

Per il seguito ci è utile riformulare il Teorema 2.4 di [BA 1] in un altro modo, attraverso il seguente lemma.

3.4 Lemma: Se:

A) (T, τ), (T_i, τ_i), (X, ϱ), (X_j, ϱ_j) sono spazi topologici, $\mathfrak{C}$ σ-algebra su T, $\mathfrak{C}_i$ σ-algebra su T_i, μ: $\mathfrak{C} \to [0, \infty]$, μ_i: $\mathfrak{C}_i \to [0, \infty]$ misure, $\mathcal{K} \subset \mathfrak{C}$, $\mathcal{K}_{i,j} \subset \mathfrak{C}_i$, ψ_i: $T_i \to T$, φ_j: $X_j \to X$, $E \subset T \times X$, $E_{i,j} = (\psi_i \times \varphi_j)^{-1}(E)$ ($i \in I$, $j \in J$).

B) f: $E \to [-\infty, \infty]$, $f_{i,j}$: $E_{i,j} \to [-\infty, \infty]$ sono tali che $f_{i,j} = f \circ ((\psi_i \times \varphi_j)|_{E_{i,j}})$ per ogni $i \in I$, $j \in J$,

allora:

a) se $E \in \mathfrak{C} \times \mathcal{B}(\varrho)$, se valgono le condizioni (2.1.0), (2.3.0), (2.3.1) di [BA 1] e se (f, μ, ϱ) verifica la proprietà (INd) [risp. $(sINd)$] si ha che

(3.4.0) $\qquad E_{i,j} \in \mathfrak{C}_i \times \mathcal{B}(\varrho_j)$, $\psi_i^{-1}(D) \in \mathfrak{C}_i$, $\psi_i^{-1}(D) \subset I(f_{i,j}, \varrho_j)$ [risp. $\psi_i^{-1}(D) \subset \subset I(s, f_{i,j}, \varrho_j)$] e $f_{i,j}|_{(\psi_i^{-1}(D) \times X_j) \cap E_{i,j}}$ è

$(\mathfrak{C}_i \times \mathcal{B}(\varrho_j))|_{(\psi_i^{-1}(D) \times X_j) \cap E_{i,j}}$-misurabile per ogni $i \in I$, $j \in J$

(ove D è relativo a (f, μ, ϱ) ed alla proprietà (INd) [risp. $(sINd)$]);

b) se valgono le condizioni (2.4.0), (2.4.1) di [BA 1], se vale (1.33.0) e se $(f, T, \mu, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}]$] si ha che $(f_{i,j}, T_i, \mu_i, \tau_i, \varrho_j)$ verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}_{i,j}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}_{i,j}]$] per ogni $i \in I$, $j \in J$;

c) se $J \subset \mathbf{N}$, se $E_{i,j} \in \mathfrak{L}_i \times \mathcal{B}(\varrho_j)$ per ogni $i \in I$, $j \in J$, se valgono le condizioni (2.1.0), (2.1.4), (2.1.5), (2.3.4) di [BA 1], se vale

$$(3.4.1) \qquad A \in \mathfrak{L},\ \mu(A) = 0 \text{ implica } \psi_i^{-1}(A) \in \mathfrak{L}_i \text{ per ogni } i \in I$$

e se $(f_{i,j}, \mu_i, \varrho_j)$ verifica la proprietà (INf) [risp. $(sINf)$] per ogni $i \in I$, $j \in J$ si ha che $E \in \mathfrak{L} \times \mathcal{B}(\varrho)$ e (f, μ, ϱ) verifica la proprietà (INf) [risp. $(sINf)$];

d) se $J \subset \mathbf{N}$, se $F \in \mathfrak{L}$ verifica la seguente condizione

$$(3.4.2) \qquad F \supset \bigcup_{i \in I} \psi_i(T_i),\ E \subset F \times X,\ \mu/_{(\mathfrak{L}/_{(T \setminus F)})} \text{ è } \mathcal{K}\text{-i.r. rispetto a } T \setminus F,$$
$$K \cup H \in \mathcal{K} \text{ per ogni } K, H \in \mathcal{K},\ K \subset F,\ H \subset T \setminus F,$$

se vale almeno uno dei due gruppi di condizioni i) e ii) del Teorema 2.4 di [BA 1] (ove in i) si sostituisca a (2.4.6) di [BA 1] la condizione (1.33.2)) e se $(f_{i,j}, T_i, \mu_i, \tau_i, \varrho_j)$ verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}_{i,j}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}_{i,j}]$] per ogni $i \in I$, $j \in J$, si ha che $(f, T, \mu, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}]$];

e) se $J \subset \mathbf{N}$, se $E_{i,j} \in \mathfrak{L}_i \times \mathcal{B}(\varrho_j)$ per ogni $i \in I$, $j \in J$, se valgono le condizioni (2.1.0), (2.1.4), (2.1.5), (2.3.4) di [BA 1], se valgono (3.3.1),

$$(3.4.3) \qquad \psi_i^{-1}(\psi_i(A)) = A \text{ per ogni } A \in \mathfrak{L}_i \text{ e per ogni } i \in I$$

e se $(f_{i,j}, \mu_i, \varrho_j)$ verifica la proprietà (INd) [risp. $(sINd)$] per ogni $i \in I$, $j \in J$ si ha che $E \in \mathfrak{L} \times \mathcal{B}(\varrho)$ e (f, μ, ϱ) verifica la proprietà (INd) [risp. $(sINd)$].

Dimostrazione: *a*) Da *a*) del Teorema 2.3 di [BA 1], ove si supponga $f = f_{i,j} = 0$ $(i \in I, j \in J)$, e dall'ipotesi che $E \in \mathfrak{L} \times \mathcal{B}(\varrho)$ si ricava che $E_{i,j} \in \mathfrak{L}_i \times \mathcal{B}(\varrho_j)$ per ogni $i \in I$, $j \in J$. Sia D relativo a (f, μ, ϱ) ed alla proprietà (INd) [risp. $(sINd)$]. Da (2.3.0) di [BA 1] segue che $\psi_i^{-1}(D) \in \mathfrak{L}_i$ e da (2.1.0) di [BA 1] e dal Lemma 2.0 di [BA 1] segue che

$$\psi_i^{-1}(D) \subset \psi_i^{-1}(I(f, \varrho)) \subset \bigcap_{j \in J} I(f_{i,j}, \varrho_j) \text{ per ogni } i \in I$$

$$[\text{risp. } \psi_i^{-1}(D) \subset \psi_i^{-1}(I(s, f, \varrho)) \subset \bigcap_{j \in J} I(s, f_{i,j}, \varrho_j) \text{ per ogni } i \in I].$$

Inoltre da (2.3.0), (2.3.1) di [BA 1] e da *a*) del Teorema 2.3 di [BA 1] applicato a D, $\psi_i^{-1}(D)$, $(D \times X) \cap E$, $(\psi_i^{-1}(D) \times X_j) \cap E_{i,j}$ $(i \in I, j \in J)$, discende che $f_{i,j}/_{(\psi_i^{-1}(D) \times X_j) \cap E_{i,j}}$ è $(\mathfrak{L}_i \times \mathcal{B}(\varrho_j))/_{(\psi_i^{-1}(D) \times X_j) \cap E_{i,j}}$-misurabile per ogni $i \in I$, $j \in J$.

b) Basta applicare *a*) del Teorema 2.4 di [BA 1] e tenere conto della Osservazione 1.33 *a*).

c) Da (2.3.4) di [BA 1] si deduce che $E \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho)$. Siano ora $I(f) = I(f, \varrho)$ [risp. $I(f) = I(s, f, \varrho)$] e $I(f_{i,j}) = I(f_{i,j}, \varrho_j)$ [risp. $I(f_{i,j}) = I(s, f_{i,j}, \varrho_j)$] per ogni $i \in I$, $j \in J$. Dal fatto che $J \subset \mathbf{N}$, da (2.1.0), (2.1.4), (2.1.5) di [BA 1] e da *b*) del Teorema 2.1 di [BA 1] si deduce che $I(f) \in \mathfrak{L}$, $\mu(T \setminus I(f)) = 0$. Allora da (3.4.1) segue che $\psi_i^{-1}(I(f)) \in \mathfrak{L}_i$; da (2.1.0) di [BA 1] e dal Lemma 2.0 di [BA 1] si ricava che $\psi_i^{-1}(I(f)) \subset \bigcap_{j \in J} I(f_{i,j})$ per ogni $i \in I$ e pertanto $f_{i,j}/(\psi_i^{-1}(I(f)) \times X_j) \cap E_{i,j}$ è $(\mathfrak{L}_i \times \mathfrak{B}(\varrho_j))/(\psi_i^{-1}(I(f)) \times X_j) \cap E_{i,j}$-misurabile per ogni $i \in I$, $j \in J$. Allora per *b*) del Teorema 2.3 di [BA 1] applicato a $I(f)$, $\psi_i^{-1}(I(f))$, $(I(f) \times X) \cap E$, $(\psi_i^{-1}(I(f)) \times X_j) \cap E_{i,j}$ $(i \in I,\ j \in J)$, segue che $f/(I(f) \times X) \cap E$ è $(\mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho))/(I(f) \times X) \cap E$-misurabile.

d) Basta applicare *b*) del Teorema 2.4 di [BA 1] e tenere conto della Osservazione 1.33 *a*).

e) Da (2.3.4) di [BA 1] si deduce che $E \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho)$. Sia $D_{i,j}$ relativo a $(f_{i,j}, \mu_j, \varrho_j)$ ed alla proprietà (INd) [risp. $(sINd)$] $(i \in I,\ j \in J)$. Allora, da (3.3.1), (3.4.3) e dal Lemma 3.3 applicato ad $A_i = \bigcap_{j \in J} D_{i,j}$, segue che esiste $A \subset T$ tale che sia $\psi_i^{-1}(A) = \bigcap_{j \in J} D_{i,j}$ per ogni $i \in I$. Pertanto, se $D = I(f, \varrho) \cap A$ [risp. $D = I(s, f, \varrho) \cap A$], si ha che $D \subset I(f, \varrho)$ [risp. $D \subset I(s, f, \varrho)$] e

$$\psi_i^{-1}(T \setminus D) = \psi_i^{-1}(T \setminus I(f, \varrho)) \cup \psi_i^{-1}(T \setminus A) = \\ = \Big(T_i \setminus \bigcap_{j \in J} I(f_{i,j}, \varrho_j)\Big) \cup M_i \cup \Big(T_i \setminus \bigcap_{j \in J} D_{i,j}\Big) \quad (i \in I)$$

$$\Big[\text{risp. } \psi_i^{-1}(T \setminus D) = \psi_i^{-1}(T \setminus I(s, f, \varrho)) \cup \psi_i^{-1}(T \setminus A) = \\ = \Big(T_i \setminus \bigcap_{j \in J} I(s, f_{i,j}, \varrho_j)\Big) \cup M_i \cup \Big(T_i \setminus \bigcap_{j \in J} D_{i,j}\Big) \quad (i \in I)\Big],$$

ove M_i $(i \in I)$ sono come in (2.1.6) di [BA 1] e ove si è tenuto conto di (2.1.0), (2.1.5) di [BA 1] e si è applicato il Lemma 2.0 di [BA 1]. Tenendo conto ora del fatto che $D_{i,j} \subset I(f_{i,j}, \varrho_j)$ [risp. $D_{i,j} \subset I(s, f_{i,j}, \varrho_j)$] $(i \in I,\ j \in J)$ si ha quindi che

$$\psi_i^{-1}(T \setminus D) = \Big(T_i \setminus \bigcap_{j \in J} D_{i,j}\Big) \cup M_i, \quad \psi_i^{-1}(T \setminus A) = T_i \setminus \bigcap_{j \in J} D_{i,j} \text{ per ogni } i \in I.$$

D'altra parte $M_i \in \mathfrak{L}_i$ e $\mu_i(M_i) = 0$ per ogni $i \in I$ e, visto che $J \subset \mathbf{N}$, risulta che $T_i \setminus \bigcap_{j \in J} D_{i,j} \in \mathfrak{L}_i$ e $\mu_i\Big(T_i \setminus \bigcap_{j \in J} D_{i,j}\Big) = 0$ per ogni $i \in I$, pertanto usando (2.1.4) di [BA 1] si ottiene che $D, A \in \mathfrak{L}$, $\mu(T \setminus D) = 0$. Applicando *b*) del Teorema 2.3 di [BA 1] ad A, $\psi_i^{-1}(A)$, $(A \times X) \cap E$, $(\psi_i^{-1}(A) \times X_j) \cap E_{i,j}$ $(i \in I,\ j \in J)$, segue infine che $f/(A \times X) \cap E$ è $(\mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho))/(A \times X) \cap E$-misurabile e, poichè $D \subset A$, $D \in \mathfrak{L}$, si conclude.

3.5 Osservazioni: Si noti che, se vale A) del Lemma 3.4 e se è data una famiglia di funzioni $\{f_{i,j}: E_{i,j} \to [-\infty, \infty]: i \in I, j \in J\}$, allora il Teorema 1.0 dà delle condizioni affinchè esista $f: E \to [-\infty, \infty]$ tale che $f_{i,j} = f \circ ((\psi_i \times \varphi_j)/_{E_{i,j}})$ per ogni $i \in I$, $j \in J$.

3.6 Teorema: Valga A) del Lemma 3.4. Allora:

a) se $E \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho)$, se $J \subset \mathbf{N}$, se $F \in \mathfrak{L}$ verifica (3.4.2), se valgono le condizioni (2.1.0), (2.1.1), (2.3.0), (2.3.1) di [BA 1], almeno uno dei due gruppi di condizioni i) e ii) del Teorema 2.4 di [BA 1] (ove in i) si sostituisca a (2.4.6) di [BA 1] la condizione (1.33.2)) e se vale almeno uno dei due seguenti gruppi di condizioni:

a') vale

(3.6.0) per ogni $i \in I$, $j \in J$ per cui esiste $t \in T_i$ tale che $\varrho_j/_{(E_{i,j})_t}$ [risp. $s(\varrho_j/_{(E_{i,j})_t})$] sia la topologia discreta e $\varrho/_{E_{\psi(t)}}$ [risp. $s(\varrho/_{E_{\psi(t)}})$] non sia la topologia discreta e per ogni $K \in \mathcal{K}_{i,j}$, la misura $\mu_j/_{(\mathfrak{L}_j/_K)}$ sia $\{H \in \mathcal{K}_{i,j}: H \subset K\}$-i.r.

ed $(E_{i,j}, \mu_j, \mathcal{K}_{i,j}, \tau_i, \varrho_j)$ verifica la proprietà (SDa) [risp. $(sSDa)$] per ogni $i \in I$, $j \in J$,

a'') $((S \times X_i) \cap E_{i,j}, \mu_j/_{(\mathfrak{L}_j/_S)}, \{H \in \mathcal{K}_{i,j}: H \subset S\}, \tau_i/_S, \varrho_j)$ verifica la proprietà (SDa) [risp. $(sSDa)$] per ogni $S \in \mathfrak{L}_i$ con $\mu_i(T_i \setminus S) = 0$ e per ogni $i \in I$, $j \in J$,

risulta che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà (SDa) [risp. $(sSDa)$];

b) se $E_{i,j} \in \mathfrak{L}_i \times \mathfrak{B}(\varrho_j)$ per ogni $i \in I$, $j \in J$, se $J \subset \mathbf{N}$, se vale (3.4.1), se valgono le condizioni (2.1.0), (2.1.4), (2.1.5), (2.3.4), (2.4.0), (2.4.1) di [BA 1] e se vale (1.33.0) si ha che, se $(E_{i,j}, \mu_j, \mathcal{K}_{i,j}, \tau_i, \varrho_j)$ verifica la proprietà (SDb) [risp. $(sSDb)$] per ogni $i \in I$, $j \in J$, risulta che anche $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà (SDb) [risp. $(sSDb)$];

c) se $E \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho)$, se $J \subset \mathbf{N}$, se $F \in \mathfrak{L}$ verifica (3.4.2), se valgono le condizioni (2.1.0), (2.1.1), (2.3.0), (2.3.1) di [BA 1] e almeno uno dei due gruppi di condizioni i) e ii) del Teorema 2.4 di [BA 1] (ove in i) si sostituisca a (2.4.6) di [BA 1] la condizione (1.33.2)), si ha che, se $(E_{i,j}, \mu_j, \mathcal{K}_{i,j}, \tau_i, \varrho_j)$ verifica la proprietà (SDa') [risp. $(sSDa')$] per ogni $i \in I$, $j \in J$, risulta che anche $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà (SDa') [risp. $(sSDa')$];

d) se $E_{i,j} \in \mathfrak{L}_i \times \mathfrak{B}(\varrho_j)$ per ogni $i \in I$, $j \in J$, se $J \subset \mathbf{N}$, se valgono (3.3.1), (3.4.3), se valgono le condizioni (2.1.0), (2.1.4), (2.1.5), (2.3.4), (2.4.0), (2.4.1) di [BA 1] e se vale (1.33.0), si ha che, se $(E_{i,j}, \mu_j, \mathcal{K}_{i,j}, \tau_i, \varrho_j)$ verifica la proprietà (SDb') [risp. $(sSDb')$] per ogni $i \in I$, $j \in J$, risulta che anche $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà (SDb') [risp. $(sSDb')$].

Dimostrazione: a) Sia $f: E \to [-\infty, \infty]$ tale che (f, μ, ϱ) verifichi la proprietà (INf) [risp. $(sINf)$]. Allora, se $f_{i,j} = f \circ ((\psi_i \times \varphi_j)/_{E_{i,j}})$ per ogni $i \in I$, $j \in J$, per a) del Lemma 3.4 si ha che vale (3.4.0) con $D = I(f, \varrho)$ [risp. $D = I(s, f, \varrho)$]. Siano ora $I(f) = I(f, \varrho)$ [risp. $I(f) = I(s, f, \varrho)$] e $I(f_{i,j}) = I(f_{i,j}, \varrho_j)$ [risp. $I(f_{i,j}) = I(s, f_{i,j}, \varrho_j)$] per ogni $i \in I$, $j \in J$. Valga dapprima a'). Se ora $j \in J$, $i \in I$ e $t \in T_i$ sono tali che $\varrho_j/_{(E_{i,j})_t}$ [risp. $s(\varrho_j/_{(E_{i,j})_t})$] non sia la topologia discreta allora esiste $x^0 \in (E_{i,j})_t$ tale che $\{x^0\} \notin \varrho_j/_{(E_{i,j})_t}$ [risp. $\{x^0\} \notin s(\varrho_j/_{(E_{i,j})_t})$], per cui la funzione $g_t: (E_{i,j})_t \to [-\infty, \infty]$ tale che $g_t(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = x^0, \\ 0 & \text{se } x \in (E_{i,j})_t \setminus \{x^0\} \end{cases}$ non è s.c.i. [risp. non è s.s.c.i.]; pertanto, se

$$\mathfrak{J} = \{(i, j) \in I \times J : \varrho_j/_{(E_{i,j})_t} \text{ [risp. } s(\varrho_j/_{(E_{i,j})_t})] \text{ non è la topologia discreta per alcun } t \in T_i \setminus \psi_i^{-1}(I(f))\}$$

e se si definisce per ogni $(i, j) \in \mathfrak{J}$ la funzione $g_{i,j}: E_{i,j} \to [-\infty, \infty]$ nel seguente modo:

$$g_{i,j}(t, x) = \begin{cases} f_{i,j}(t, x) & \text{se } (t, x) \in (\psi_i^{-1}(I(f)) \times X_j) \cap E_{i,j} \\ g_t(x) & \text{se } (t, x) \in ((T_i \setminus \psi_i^{-1}(I(f))) \times X_j) \cap E_{i,j} \end{cases}$$

risulta che

$$\{t \in T_i : x \in (E_{i,j})_t \mapsto g_{i,j}(t, x) \in [-\infty, \infty] \text{ è s.c.i. [risp. s.s.c.i.]}\} = \psi_i^{-1}(I(f)) ;$$

inoltre da (2.1.1) di [BA 1] segue che $\mu_i(T_i \setminus \psi_i^{-1}(I(f))) = 0$.

Se invece $(i, j) \notin \mathfrak{J}$ sia $g_{i,j}: E_{i,j} \to [-\infty, \infty]$ tale che:

$$g_{i,j}(t, x) = \begin{cases} f_{i,j}(t, x) & \text{se } (t, x) \in (\psi_i^{-1}(I(f)) \times X_j) \cap E_{i,j} \\ 0 & \text{se } (t, x) \in ((T_i \setminus \psi_i^{-1}(I(f))) \times X_j) \cap E_{i,j} \end{cases} ;$$

allora

$$\{t \in T_i : x \in (E_{i,j})_t \mapsto g_{i,j}(t, x) \in [-\infty, \infty] \text{ è s.c.i. [risp. s.s.c.i.]}\} = T_i$$

e, poichè $(\psi_i^{-1}(I(f)) \times X_j) \cap E_{i,j} \in \mathfrak{L}_i \times \mathfrak{B}(\varrho_j)$, risulta che $g_{i,j}$ è $(\mathfrak{L}_i \times \mathfrak{B}(\varrho_j))/_{E_{i,j}}$-misurabile. Pertanto per ogni $i \in I$, $j \in J$ si ha che $(g_{i,j}, \mu_i, \varrho_j)$ verifica la proprietà (INf) [risp. $(sINf)$] e quindi, poichè $(E_{i,j}, \mu_i, \mathcal{K}_{i,j}, \tau_i, \varrho_j)$ verifica la proprietà (SDa) [risp. $(sSDa)$], risulta che $(g_{i,j}, T_i, \mu_i, \tau_i, \varrho_j)$ verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}_{i,j}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}_{i,j}]$]. Quindi, se $(i, j) \in \mathfrak{J}$, tenendo conto del fatto che $\psi_i^{-1}(I(f)) \subset I(f_{i,j})$ e di come è definita $g_{i,j}$, si ha che $(f_{i,j}, T_i, \mu_i, \tau_i, \varrho_j)$ verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}_{i,j}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}_{i,j}]$]; se invece $(i, j) \notin \mathfrak{J}$ e se $H_{n,i,j} \in \mathcal{K}_{i,j}$ sono tali che $\mu_i(T_i \setminus H_{n,i,j}) < 1/(n+1)$ e $g_{i,j}/_{(H_{n,i,j} \times X_j) \cap E_{i,j}}$ è s.c.i.

[risp. s.s.c.i.] ($n \in \mathbf{N}$) basta considerare $K_{n,i,j} \in \mathcal{K}_{i,j}$, $K_{n,i,j} \subset \psi_i^{-1}(I(f)) \cap H_{n,i,j}$ tali che

$$\mu_i\big((\psi_i^{-1}(I(f)) \cap H_{n,i,j}) \setminus K_{n,i,j}\big) < 1/(n+1) - \mu_i(T_i \setminus H_{n,i,j}) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

(tali insiemi esistono per (3.6.0), visto che se $(i, j) \notin 3$ esiste $t \in T_i \setminus \psi_i^{-1}(I(f))$ tale che $\varrho_j/_{(E_{i,j})_t}$ [risp. $s(\varrho_j/_{(E_{i,j})_t})$] sia la topologia discreta e d'altra parte, essendo $\psi_i(t) \notin I(f)$, per come è definito $I(f)$ risulta anche che $\varrho/_{E_{\psi_i(t)}}$ [risp. $s(\varrho/_{E_{\psi_i(t)}})$] non è la topologia discreta). Infatti con tale scelta risulta che $K_{n,i,j} \subset I(f_{i,j})$.

$$\begin{aligned}\mu_i(T_i \setminus K_{n,i,j}) &< \mu_i\big(T_i \setminus (\psi_i^{-1}(I(f)) \cap H_{n,i,j})\big) + \\ &+ \mu_i\big((\psi_i^{-1}(I(f)) \cap H_{n,i,j}) \setminus K_{n,i,j}\big) < \mu_i(T_i \setminus \psi_i^{-1}(I(f))) + \\ &+ \mu_i(T_i \setminus H_{n,i,j}) + 1/(n+1) - \mu_i(T_i \setminus H_{n,i,j}) = 1/(n+1),\end{aligned}$$

ove per l'ultima eguaglianza si è tenuto conto di (2.1.1) di [BA 1], e inoltre si ha che

$$f_{i,j}/(K_{n,i,j} \times X_j) \cap E_{i,j} = g_{i,j}/(K_{n,i,j} \times X_j) \cap E_{i,j} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

per cui anche in questo caso $(f_{i,j}, T_i, \mu_i, \tau_i, \varrho_j)$ verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}_{i,j}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}_{i,j}]$]. Allora per *d*) del Lemma 3.4 si ottiene che $(f, T, \mu, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}]$]. Valga ora *a''*). Siano $i \in I$, $j \in J$. Allora, visto che vale (3.4.0) con $D = I(f)$, tenendo conto che da (2.1.1) di [BA 1] segue che $\mu_i(T_i \setminus \psi_i^{-1}(I(f))) = 0$, risulta che $\big(f_{i,j}/_{E_{i,j}} \cap (\psi_i^{-1}(I(f)) \times X_j)$, $\mu_i/(\varrho_j/_{\psi_i^{-1}(I(f))})$, $\varrho_j\big)$ verifica la proprietà (INf) [risp. $(sINf)$] e pertanto, per l'ipotesi *a''*) relativa a $S = \psi_i^{-1}(I(f))$, si ricava che $\big(f_{i,j}/_{E_{i,j}} \cap (\psi_i^{-1}(I(f)) \times X_j)$, $\psi_i^{-1}(I(f))$, $\mu_i/(\varrho_j/_{\psi_i^{-1}(I(f))})$, $\tau_i/_{\psi_i^{-1}(I(f))}$, $\varrho_j\big)$ verifica la proprietà $SD[\{H \in \mathcal{K}_{i,j}: H \subset \psi_i^{-1}(I(f))\}]$ $\big[$risp. $SD\big[s\{H \in \mathcal{K}_{i,j}: H \subset \psi_i^{-1}(I(f))\}\big]\big]$; perciò, tenendo conto del fatto che $\mu_i(T_i \setminus \psi_i^{-1}(I(f))) = 0$, si ottiene che $(f_{i,j}, T_i, \mu_i, \tau_i, \varrho_j)$ verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}_{i,j}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}_{i,j}]$]. Utilizzando ora *d*) del Lemma 3.4 si ricava che $(f, T, \mu, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}]$].

b) Sia $f: E \to [-\infty, \infty]$ tale che $(f, T, \mu, \tau, \varrho)$ verifichi la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}]$]. Siano $f_{i,j} = f \circ ((\psi_i \times \psi_j)/_{E_{i,j}})$ $(i \in I, j \in J)$. Allora da *b*) del Lemma 3.4 segue che $(f_{i,j}, T_i, \mu_i, \tau_i, \varrho_j)$ verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}_{i,j}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}_{i,j}]$] per ogni $i \in I$, $j \in J$ e quindi, visto che $(E_{i,j}, \mu_i, \mathcal{K}_{i,j}, \tau_i, \varrho_j)$ verifica la proprietà (SDb) [risp. $(sSDb)$] per ogni $i \in I$, $j \in J$, risulta che $(f_{i,j}, \mu_i, \varrho_j)$ verifica la proprietà (INf) [risp. $(sINf)$] per ogni $i \in I$, $j \in J$. Utilizzando ora *c*) del Lemma 3.4 si ricava che $E \in \mathfrak{C} \times \mathcal{B}(\varrho)$ e che (f, μ, ϱ) verifica la proprietà (INf) [risp. $(sINf)$].

c) Sia $f\colon E \to [-\infty, \infty]$ tale che (f, μ, ϱ) verifichi la proprietà (INd) [risp. $(sINd)$]. Allora, se $f_{i,j} = f\circ((\psi_i \times \varphi_j)|_{E_{i,j}})$ per ogni $i \in I$, $j \in J$, per *a*) del Lemma 3.4 si ha che vale (3.4.0) (ove D è relativo a (f, μ, ϱ) ed alla proprietà (INd) [risp. $(sINd)$]). D'altra parte da (2.1.1) di [BA 1] segue che $\mu_i(T_i \setminus \psi_i^{-1}(D)) = 0$ per ogni $i \in I$ e quindi $(f_{i,j}, \mu_i, \varrho_j)$ verifica la proprietà (INd) [risp. $(sINd)$] per ogni $i \in I$, $j \in J$. Pertanto per ogni $i \in I$, $j \in J$, visto che $(E_{i,j}, \mu_i, \mathcal{K}_{i,j}, \tau_i, \varrho_j)$ verifica la proprietà (SDa') [risp. $(sSDa')$], risulta che $(f_{i,j}, T_i, \mu_i, \tau_i, \varrho_j)$ verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}_{i,j}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}_{i,j}]$]. Da *d*) del Lemma 3.4 si ottiene quindi che $(f, T, \mu, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}]$].

d) Sia $f\colon E \to [-\infty, \infty]$ tale che $(f, T, \mu, \tau, \varrho)$ verifichi la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}]$]. Siano $f_{i,j} = f\circ((\psi_i \times \varphi_j)|_{E_{i,j}})$ $(i \in I, j \in J)$. Allora da *b*) del Lemma 3.4 segue che $(f_{i,j}, T_i, \mu_i, \tau_i, \varrho_j)$ verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}_{i,j}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}_{i,j}]$] per ogni $i \in I$, $j \in J$ e quindi, visto che $(E_{i,j}, \mu_i, \mathcal{K}_{i,j}, \tau_i, \varrho_j)$ verifica la proprietà (SDb') [risp. $(sSDb')$] per ogni $i \in I$, $j \in J$, risulta che $(f_{i,j}, \mu_i, \varrho_j)$ verifica la proprietà (INd) [risp. $(sINd)$] per ogni $i \in I$, $j \in J$. Utilizzando ora *c*) del Lemma 3.4 si ricava che $E \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho)$ e che (f, μ, ϱ) verifica la proprietà (INd) [risp. $(sINd)$].

3.7 Lemma: Valga *A*) del Lemma 3.4 con $I = J = \{0\}$ e ove si indicherà più brevemente $E_{0,0}$ con E_0, ψ_0 con ψ, φ_0 con φ, siano $f\colon E \to [-\infty, \infty]$, $g\colon E_0 \to [-\infty, \infty]$ tali che $g = f\circ((\psi \times \varphi)|_{E_0})$. Allora, se valgono le condizioni (2.1.0), (2.1.1), (2.2.0), (2.3.0), (2.3.1) di [BA 1] e se $E \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho)$ e (f, μ, ϱ) verifica la proprietà (INf) [risp. $(sINf)$] risulta che $E_0 \in \mathfrak{L}_0 \times \mathfrak{B}(\varrho_0)$ e (g, μ_0, ϱ_0) verifica la proprietà (INf) [risp. $(sINf)$].

Dimostrazione: Siano $I(f) = I(f, \varrho)$ [risp. $I(f) = I(s, f, \varrho)$] e $I(g) = I(g, \varrho_0)$ [risp. $I(g) = I(s, g, \varrho_0)$]. Allora da (2.1.0), (2.2.0) di [BA 1] e dal Lemma 2.0 di [BA 1] segue che $\psi^{-1}(T \setminus I(f)) = T_0 \setminus I(g)$ e quindi per (2.1.1) di [BA 1] si ha che $I(g) \in \mathfrak{L}_0$, $\mu_0(T_0 \setminus I(g)) = 0$. Inoltre da (2.3.0), (2.3.1) di [BA 1], applicando *a*) del Teorema 2.3 di [BA 1], ove si supponga $f = f_{0,0} = 0$, e dall'ipotesi che $E \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho)$ si deduce che $E_0 \in \mathfrak{L}_0 \times \mathfrak{B}(\varrho_0)$; sempre per (2.3.0), (2.3.1) di [BA 1] applicando nuovamente *a*) del Teorema 2.3 di [BA 1] a

$$I(f), \quad \psi^{-1}(I(f)) = I(g), \quad (I(f) \times X) \cap E, \quad (I(g) \times X_0) \cap E_0,$$

$$f|(I(f) \times X) \cap E, \quad g|(I(g) \times X_0) \cap E_0$$

discende che $g|(I(g) \times X_0) \cap E_0$ è $(\mathfrak{L}_0 \times \mathfrak{B}(\varrho_0))|(I(g) \times X_0) \cap E_0$-misurabile. Pertanto (g, μ_0, ϱ_0) verifica la proprietà (INf) [risp. $(sINf)$].

3.8 Lemma: Siano S, T, Y, X insiemi, $\psi: S \to T$, $\varphi: Y \to X$, $A \subset S$ tale che $\psi^{-1}(\psi(A)) = A$ ed $E \subset T \times X$. Allora:

(3.8.0) $\quad (\psi\times\varphi)((A\times Y)\cap(\psi\times\varphi)^{-1}(E)) = (\psi(A)\times X)\cap E\cap((\psi\times\varphi)(S\times Y))$

(3.8.1) $\quad (A\times Y)\cap(\psi\times\varphi)^{-1}(E) = (\psi\times\varphi)^{-1}\big((\psi(A)\times X)\cap E\big)$.

Dimostrazione: Si ha che $(t, x) \in (\psi\times\varphi)((A\times Y)\cap(\psi\times\varphi)^{-1}(E))$ se e solo se esiste $(s, y) \in (\psi\times\varphi)^{-1}(E)$, con $s \in A$, tale che $\psi(s) = t$, $\varphi(y) = x$, il che accade se e solo se $(t, x) \in (\psi\times\varphi)(\psi\times\varphi)^{-1}(E)$ e $t \in \psi(A)$ (infatti se $(s, y) \in (\psi\times\varphi)^{-1}(E)$, $\psi(s) = t$, $\varphi(y) = x$, $t \in \psi(A)$, risulta che $s \in \psi^{-1}(\psi(A)) = A$) e d'altra parte $(\psi\times\varphi)(\psi\times\varphi)^{-1}(E) = E\cap((\psi\times\varphi)(S\times Y))$. Pertanto vale (3.8.0).

La (3.8.1) segue dal fatto che

$$(\psi\times\varphi)^{-1}\big((\psi(A)\times X)\cap E\big) = (\psi\times\varphi)^{-1}\big((\psi(A)\times X)\cap E\cap((\psi\times\varphi)(S\times Y))\big),$$

da (3.8.0) e da *a*) e da *c*) del Lemma 1.2 (tenendo conto che $\psi^{-1}(\psi(A)) = A$ e $(\psi\times\varphi)^{-1}(\psi\times\varphi)(\psi\times\varphi)^{-1}(E) = (\psi\times\varphi)^{-1}(E)$).

3.9 Teorema: Valga *A*) del Lemma 3.4 con $I = J = \{0\}$ e ove si indicherà più brevemente $\mathcal{K}_{0,0}$ con $\mathcal{K}$, $E_{0,0}$ con E_0, ψ_0 con ψ, φ_0 con φ. Allora:

a) se $E_0 \in \mathfrak{L}_0\times\mathcal{B}(\varrho_0)$, se (relativamente a $I = \{0\}$, $J = \{0\}$) vale (3.4.1), valgono le condizioni (2.1.0), (2.1.4), (2.1.5), (2.3.4), (2.4.0), (2.4.1) di [BA 1] e vale (1.33.0), se vale inoltre almeno uno dei due seguenti gruppi di condizioni:

a') $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà (SDa) [risp. $(sSDa)$] e

(3.9.0) per ogni $g: E_0 \to [-\infty, \infty]$ tale che (g, μ_0, ϱ_0) verifichi la proprietà (INf) [risp. $(sINf)$] esiste $f: E \to [-\infty, \infty]$ tale che sia $g = f\circ((\psi\times\varphi)/_{E_0})$,

a'') $((S\times X)\cap E, \mu/_{(\mathfrak{L}/_S)}, \{K\in\mathcal{K}: K\subset S\}, \tau/_S, \varrho)$ verifica la proprietà (SDa) [risp. $(sSDa)$] per ogni $S \in \mathfrak{L}$ con $\mu(T\setminus S) = 0$ e

(3.9.1) $\quad \psi^{-1}(\psi(A)) = A$ per ogni $A \in \mathfrak{L}_0$, $\varphi^{-1}(\varphi(B)) = B$ per ogni $B \in \varrho_0$,

risulta che $(E_0, \mu_0, \mathcal{K}, \tau_0, \varrho_0)$ verifica la proprietà (SDa) [risp. $(sSDa)$];

b) se $E \in \mathfrak{L}\times\mathcal{B}(\varrho)$, se $F \in \mathfrak{L}$ verifica (3.4.2), se (relativamente a $I = \{0\}$, $J = \{0\}$) valgono le condizioni (2.1.0), (2.2.0), (2.3.0), (2.3.1) di [BA 1], almeno uno dei due gruppi di condizioni i) e ii) del Teorema 2.4 di [BA 1] (ove in i) si sostituisca a (2.4.6) di [BA 1] la condizione (1.33.2)), se vale inoltre almeno uno dei due seguenti gruppi di condizioni:

b') $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà (SDb) [risp. $(sSDb)$] e

(3.9.2) per ogni $g\colon E_0 \to [-\infty, \infty]$ tale che $(g, T_0, \mu_0, \tau_0, \varrho_0)$ verifichi la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}]$] esiste $f\colon E \to [-\infty, \infty]$ tale che sia $g = f \circ ((\psi \times \varphi)/_{E_0})$.

b'') μ_0 è completa, $\mathfrak{L}_0 \supset \tau_0$ [risp. $\mathfrak{L}_0 \supset r(\tau_0/_{H \cap (E_0)^y})$ per ogni $y \in X_0$ e per ogni $H \in \mathcal{K}$], $\psi(A) \in \mathfrak{L}$ e $\mu(T \setminus \psi(A)) = 0$ per ogni $A \in \mathfrak{L}_0$ tale che $\mu_0(T_0 \setminus A) = 0$, $F = \psi(T_0)$ se non vale il gruppo di condizioni ii) del Teorema 2.4 di [BA 1], vale (3.9.1) e $((S \times X) \cap E, \mu/_{(\mathfrak{L}/_S)}, \{K \in \mathcal{K}\colon K \subset S\}, \tau/_S, \varrho)$ verifica la proprietà (SDb) [risp. $(sSDb)$] per ogni $S \in \mathfrak{L}$ con $\mu(T \setminus S) = 0$,

risulta che $(E_0, \mu_0, \mathcal{K}, \tau_0, \varrho_0)$ verifica la proprietà (SDb) [risp. $(sSDb)$];

c) se $E_0 \in \mathfrak{L}_0 \times \mathcal{B}(\varrho_0)$, se (relativamente a $I = \{0\}$, $J = \{0\}$) valgono le condizioni (2.1.0), (2.1.4), (2.1.5), (2.3.4), (2.4.0), (2.4.1) di [BA 1], vale (1.33.0), se vale inoltre almeno uno dei due seguenti gruppi di condizioni:

c') $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà (SDa') [risp. $(sSDa')$] e

(3.9.3) per ogni $g\colon E_0 \to [-\infty, \infty]$ tale che (g, μ_0, ϱ_0) verifichi la proprietà (INd) [risp. $(sINd)$] esiste $f\colon E \to [-\infty, \infty]$ tale che sia $g = f \circ ((\psi \times \varphi)/_{E_0})$.

c'') vale (3.9.1) e $((S \times X) \cap E, \mu/_{(\mathfrak{L}/_S)}, \{K \in \mathcal{K}\colon K \subset S\}, \tau/_S, \varrho)$ verifica la proprietà (SDa') [risp. $(sSDa')$] per ogni $S \in \mathfrak{L}$ con $\mu(T \setminus S) = 0$,

risulta che $(E_0, \mu_0, \mathcal{K}, \tau_0, \varrho_0)$ verifica la proprietà (SDa') [risp. $(sSDa')$];

d) se $E \in \mathfrak{L} \times \mathcal{B}(\varrho)$, se $F \in \mathfrak{L}$ verifica (3.4.2), se (relativamente a $I = \{0\}$, $J = \{0\}$) valgono le condizioni (2.1.0), (2.1.1), (2.3.0), (2.3.1) di [BA 1], almeno uno dei due gruppi di condizioni i) e ii) del Teorema 2.4 di [BA 1] (ove in i) si sostituisca a (2.4.6) di [BA 1] la condizione (1.33.2)), se vale inoltre almeno uno dei due seguenti gruppi di condizioni:

d') $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà (SDb') [risp. $(sSDb')$] e vale (3.9.2),

d'') $\mathfrak{L}_0 \supset \tau_0$, vale (3.9.1), $\psi(A) \in \mathfrak{L}$ e $\mu(T \setminus \psi(A)) = 0$ per ogni $A \in \mathfrak{L}_0$ tale che $\mu_0(T_0 \setminus A) = 0$, $F = \psi(T_0)$ se non vale il gruppo di condizioni ii) del Teorema 2.4 di [BA 1] e $((S \times X) \cap E, \mu/_{(\mathfrak{L}/_S)}, \{K \in \mathcal{K}\colon K \subset S\}, \tau/_S, \varrho)$ verifica la proprietà (SDb') [risp. $(sSDb')$] per ogni $S \in \mathfrak{L}$ con $\mu(T \setminus S) = 0$,

risulta che $(E_0, \mu_0, \mathcal{K}, \tau_0, \varrho_0)$ verifica la proprietà (SDb') [risp. $(sSDb')$];

e) se $E \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho)$, se $F \in \mathfrak{L}$ verifica (3.4.2), se (relativamente a $I = \{0\}$, $J = \{0\}$) valgono le condizioni (2.1.0), (2.1.1), (2.2.0), (2.3.0), (2.3.1) di [BA 1] e almeno uno dei due gruppi di condizioni i) e ii) del Teorema 2.4 di [BA 1] (ove in i) si sostituisca a (2.4.6) di [BA 1] la condizione (1.33.2)), si ha che, se $(E_0, \mu_0, \mathcal{K}, \tau_0, \varrho_0)$ verifica la proprietà (SDa) [risp. $(sSDa)$], risulta che anche $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà (SDa) [risp. $(sSDa)$].

Dimostrazione: *a*) Sia $g: E_0 \to [-\infty, \infty]$ tale che (g, μ_0, ϱ_0) verifichi la proprietà (INf) [risp. $(sINf)$]. Allora se vale *a'*) per (3.9.0) esiste $f: E \to [-\infty, \infty]$ tale che sia $g = f \circ ((\psi \times \varphi)/_{E_0})$ e da *c*) del Lemma 3.4 segue che $E \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho)$ e (f, μ, ϱ) verifica la proprietà (INf) [risp. $(sINf)$]. Poichè $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà (SDa) [risp. $(sSDa)$], si ha ora che $(f, T, \mu, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}]$] e da *b*) del Lemma 3.4 si deduce quindi che $(g, T_0, \mu_0, \tau_0, \varrho_0)$ verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}]$].

Se ora vale *a''*) e se $I(g) = I(g, \varrho_0)$ [risp. $I(g) = I(s, g, \varrho_0)$] allora, poichè (g, μ_0, ϱ_0) verifica la proprietà (INf) [risp. $(sINf)$], per il Teorema 1.3 *c*) esiste $h: (\psi \times \varphi)((I(g) \times X_0) \cap E_0) \to [-\infty, \infty]$ tale che

$$h \circ ((\psi \times \varphi)/_{(I(g) \times X_0) \cap E_0}) = g/_{(I(g) \times X_0) \cap E_0}.$$

Se quindi si considera

$$(3.9.4) \qquad f: (\psi(I(g)) \times X) \cap E \to [-\infty, \infty],$$

$$f(t, x) = \begin{cases} h(t, x) & \text{se } (t, x) \in (\psi \times \varphi)((I(g) \times X_0) \cap E_0) \\ 0 & \text{se } (t, x) \in ((\psi(I(g)) \times X) \cap E) \setminus \\ & \qquad \setminus (\psi \times \varphi)((I(g) \times X_0) \cap E_0) \end{cases},$$

risulta che

$$(3.9.5) \qquad f \circ ((\psi \times \varphi)/_{(I(g) \times X_0) \cap E_0}) = g/_{(I(g) \times X_0) \cap E_0} \text{ e}$$
$$(I(g) \times X_0) \cap E_0 = (\psi \times \varphi)^{-1}((\psi(I(g)) \times X) \cap E),$$

ove l'ultima eguaglianza segue dal Lemma 3.8 e da (3.9.1). Applicando ora la parte *c*) del Lemma 3.4 a

$$(3.9.6) \qquad (\psi(I(g)), \tau/_{\psi(I(g))}), \ (I(g), \tau_0/_{I(g)}), \ (X, \varrho), \ (X_0, \varrho_0),$$
$$\mathfrak{L}/_{\psi(I(g))}, \ \mathfrak{L}_0/_{I(g)}, \ \mu/_{(\mathfrak{L}/_{\psi(I(g))})}, \ \mu_0/_{(\mathfrak{L}_0/_{I(g)})}, \ \psi/_{I(g)},$$
$$\varphi, \ (\psi(I(g)) \times X) \cap E, \ (I(g) \times X_0) \cap E_0, \ f, \ g/_{(I(g) \times X_0) \cap E_0}$$

(il che è lecito poichè per (2.1.4) di [BA 1] e per (3.9.1) risulta che $\psi(I(g)) \in \mathfrak{L}$ e poichè è facile verificare che continuano a valere le condizioni (2.1.0), (2.1.4),

(2.1.5), (2.3.4) di [BA 1], (3.4.1) anche per i dati in (3.9.6)) si ottiene che $\left(f, \mu/_{(\mathcal{C}/_{\psi(I(g))})}, \varrho\right)$ verifica la proprietà (INf) [risp. $(sINf)$] e pertanto, visto che $\left((\psi(I(g))\times X)\cap E, \mu/_{(\mathcal{C}/_{\psi(I(g))})}, \{K\in\mathcal{K}: K\subset\psi(I(g))\}, \tau/_{\psi(I(g))}, \varrho\right)$ verifica la proprietà (SDa) [risp. $(sSDa)$] (infatti $\mu(T\setminus\psi(I(g)))=0$ per (2.1.4) di [BA 1] e per (3.9.1)), risulta che $\left(f, \psi(I(g)), \mu/_{(\mathcal{C}/_{\psi(I(g))})}, \tau/_{\psi(I(g))}, \varrho\right)$ verifica la proprietà $SD[\{K\in\mathcal{K}: K\subset\psi(I(g))\}]$ [risp. $SD[s\{K\in\mathcal{K}: K\subset\subset\psi(I(g))\}]$]. Applicando la parte $b)$ del Lemma 3.4 ai dati in (3.9.6) ed a $\{K\in\mathcal{K}: K\subset\psi(I(g))\}$, $\{H\in\mathcal{K}: H\subset I(g)\}$ (grazie a (3.9.1) si verifica facilmente che continuano a valere le condizioni (2.4.0), (2.4.1) di [BA 1] e (1.33.0)) si ottiene allora che $\left(g/_{(I(g)\times X_0)\cap E_0}, I(g), \mu_0/_{(\mathcal{C}_0/_{I(g)})}, \tau_0/_{I(g)}, \varrho_0\right)$ verifica la proprietà $SD[\{H\in\mathcal{K}: H\subset I(g)\}]$ [risp. $SD[s\{H\in\mathcal{K}: H\subset I(g)\}]$] e pertanto $(g, T_0, \mu_0, \tau_0, \varrho_0)$ verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}]$].

$b)$ Sia $g: E_0\to[-\infty,\infty]$ tale che $(g, T_0, \mu_0, \tau_0, \varrho_0)$ verifichi la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}]$]. Allora se vale $b')$ per (3.9.2) esiste $f: E\to[-\infty,\infty]$ tale che sia $g=f\circ((\psi\times\varphi)/_{E_0})$ e per $d)$ del Lemma 3.4 si ha che $(f, T, \mu, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}]$]. Poichè $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà (SDb) [risp. $(sSDb)$], si ottiene che (f, μ, ϱ) verifica la proprietà (INf) [risp. $(sINf)$]. Allora, applicando il Lemma 3.7, si conclude.

Se ora vale $b'')$ e se $I(g)$ è come nella dimostrazione di $a)$, poichè si ha che $I(g)\supset\bigcup_{n\in\mathbf{N}} H_n$ (ove $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$ è relativa a $(g, T_0, \mu_0, \tau_0, \varrho_0)$ ed alla proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}]$]), per la completezza di μ_0 risulta che $I(g)\in\mathcal{C}_0$ e $\mu(T_0\setminus I(g))=0$. Ora è lecito applicare $b)$ del Teorema 1.3 a $\psi(I(g))$, $I(g)$, X, X_0, $([-\infty,\infty], \sigma_i)$, $\mathcal{C}_0/_{I(g)}$, ϱ_0 [risp. $s\varrho_0$], $\psi_{|I(g)}, \varphi_{|I(g)}, \varphi$, $(I(g)\times X_0)\cap E_0, g/_{(I(g)\times X_0)\cap E_0}$ (ove σ_i è la topologia della semicontinuità inferiore su $[-\infty,\infty]$, per cui, come visto nella dimostrazione del Teorema 1.20 $b)$, risulta che: se (Y, σ) è uno spazio topologico e $h: Y\to[-\infty,\infty]$, si ha che h è s.c.i. [risp. s.s.c.i.] se e solo se $h: (Y, \sigma)\to([-\infty,\infty], \sigma_i)$ è continua [risp. sequenzialmente continua]). Infatti vale (3.9.1); $(I(g)\times X_0)\cap E_0\in\mathcal{C}_0\times\mathcal{B}(\varrho_0)\subset\theta(\{C\times A: C\in\theta(\mathcal{C}_0/_{I(g)}), A\in\theta(\varrho_0)$ [risp. $A\in\theta(s\varrho_0)$]$\})$ per $a)$ del Lemma 1.2 e per $b)$ del Teorema 1.1 di [BA 1]; inoltre dalle ipotesi segue che $g/_{(H_n\times X_0)\cap E_0}$ è continua [risp. sequenzialmente continua] rispetto alla topologia σ_i su $[-\infty,\infty]$ per ogni $n\in\mathbf{N}$ e pertanto se $y\in X_0$ si ha che [risp. utilizzando l'equivalenza tra $f')$ ed $f'')$ del Teorema 1.1 di [BA 1] si ha che] $g(\cdot, y)/_{H_n\cap(E_0)^y}$ è continua [risp. sequenzialmente continua] rispetto alla topologia σ_i su $[-\infty,\infty]$ e quindi è $\mathcal{C}_0/_{H_n\cap(E_0)^y}$-misurabile per ogni $n\in\mathbf{N}$, perciò $g(\cdot, y)/_{(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} H_n)\cap(E_0)^y}$ è $\mathcal{C}_0/_{(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} H_n)\cap(E_0)^y}$-misurabile ed essendo μ_0 completa risulta che $g(\cdot, y)/_{I(g)\cap(E_0)^y}$ è $\mathcal{C}_0/_{I(g)\cap(E_0)^y}$-misurabile;

infine se $t \in I(g)$ si ha che $g(t, \cdot): (E_0)_t \to [-\infty, \infty]$ è continua [risp. sequenzialmente continua] rispetto alla topologia σ_t su $[-\infty, \infty]$.

Per b') del Teorema 1.3 esiste allora $h: (\psi \times \varphi)\big((I(g) \times X_0) \cap E_0\big) \to [-\infty, \infty]$ tale che $h \circ \big((\psi \times \varphi)/_{(I(g) \times X_0) \cap E_0}\big) = g/_{(I(g) \times X_0) \cap E_0}$. Pertanto, per il Lemma 3.8 e per (3.9.1), se si considera f come in (3.9.4), vale (3.9.5). Si può ora applicare la parte d) del Lemma 3.4 ai dati in (3.9.6) ed a $\{K \in \mathcal{K}: K \subset \subset \psi(I(g))\}$, $\{H \in \mathcal{K}: H \subset I(g)\}$ (infatti $F \cap \psi(I(g)) = \psi(I(g))$ verifica (3.4.2) relativa ai dati in (3.9.6) visto che, essendo $\mu_0(T_0 \setminus I(g)) = 0$, risulta $\psi(I(g)) \in \mathfrak{C}$ ed inoltre per le altre verifiche basta utilizzare (3.9.1) ed il fatto che se $K \subset \psi(T_0)$, $\psi^{-1}(K) \subset I(g)$ allora $K = \psi(\psi^{-1}(K)) \subset \psi(I(g))$) e si ottiene che $\big(f, \psi(I(g)), \mu/_{(\mathfrak{C}/_{\psi(I(g))})}, \tau/_{\psi(I(g))}, \varrho\big)$ verifica la proprietà $SD[\{K \in \mathcal{K}: K \subset \subset \psi(I(g))\}]$ [risp. $SD[s\{K \in \mathcal{K}: K \subset \psi(I(g))\}]$]. Ora, poichè dalle ipotesi di b') risulta che $\mu\big(T \setminus \psi(I(g))\big) = 0$, si ha che $\big((\psi(I(g)) \times X) \cap E, \mu/_{(\mathfrak{C}/_{\psi(I(g))})}, \{K \in \mathcal{K}: K \subset \psi(I(g))\}, \tau/_{\psi(I(g))}, \varrho\big)$ verifica la proprietà (SDb) [risp. $(sSDb)$] e quindi $\big(f, \mu/_{(\mathfrak{C}/_{\psi(I(g))})}, \varrho\big)$ verifica la proprietà (INf) [risp. $(sINf)$]. Ora da (2.3.0), (2.3.1) di [BA 1], applicando a) del Teorema 2.3 di [BA 1], ove si supponga $f = f_{0,0} = 0$, e dall'ipotesi che $E \in \mathfrak{C} \times \mathfrak{B}(\varrho)$ si deduce che $E_0 \in \mathfrak{C}_0 \times \mathfrak{B}(\varrho_0)$; applicando inoltre il Lemma 3.7 (in cui non occorre stavolta l'ipotesi (2.1.1) di [BA 1] poichè si è già visto che $I(g) \in \mathfrak{C}_0$ e che $\mu_0(T_0 \setminus I(g)) = 0$) ai dati in (3.9.6) si conclude che $g/_{(I(g) \times X_0) \cap E_0}$ è

$$(\mathfrak{C}_0 \times \mathfrak{B}(\varrho_0))/_{(I(g) \times X_0) \cap E_0}\text{-misurabile.}$$

e) Sia $g: E_0 \to [-\infty, \infty]$ tale che (g, μ_0, ϱ_0) verifichi la proprietà (INd) [risp. $(sINd)$]. Allora se vale c') per (3.9.3) esiste $f: E \to [-\infty, \infty]$ tale che sia $g = f \circ \big((\psi \times \varphi)/_{E_0}\big)$ e da e) del Lemma 3.4 segue che $E \in \mathfrak{C} \times \mathfrak{B}(\varrho) \in (f, \mu, \varrho)$ verifica la proprietà (INd) [risp. $(sINd)$]. Poichè $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà (SDa') [risp. $(sSDa')$], si ha ora che $(f, T, \mu, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}]$] e da b) del Lemma 3.4 si deduce quindi che $(g, T_0, \mu_0, \tau_0, \varrho_0)$ verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}]$].

Se ora vale c') allora, se D è relativo a (g, μ_0, ϱ_0) ed alla proprietà (INd) [risp. $(sINd)$], per il Teorema 1.3 e) esiste $h: (\psi \times \varphi)((D \times X_0) \cap E_0) \to [-\infty, \infty]$ tale che $h \circ \big((\psi \times \varphi)/_{(D \times X_0) \cap E_0}\big) = g/_{(D \times X_0) \cap E_0}$.

Se quindi si considera

$$f: (\psi(D) \times X) \cap E \to [-\infty, \infty],$$

$$f(t, x) = \begin{cases} h(t, x) & \text{se } (t, x) \in (\psi \times \varphi)((D \times X_0) \cap E_0) \\ 0 & \text{se } (t, x) \in \big((\psi(D) \times X) \cap E\big) \setminus (\psi \times \varphi)((D \times X_0) \cap E_0) \end{cases},$$

risulta che

$$f \circ \big((\psi \times \varphi)/_{(D \times X_0) \cap E_0}\big) = g/_{(D \times X_0) \cap E_0}$$

e

$$(D\times X_0)\cap E_0=(\psi\times\varphi)^{-1}((\psi(D)\times X)\cap E)\,,$$

ove l'ultima eguaglianza segue dal Lemma 3.8 e da (3.9.1). Applicando ora la parte *c*) del Lemma 3.4 a

$$(3.9.7)\qquad (\psi(D),\tau/_{\psi(D)}),\ (D,\tau_0/_D),\ (X,\varrho),\ (X_0,\varrho_0),\ \mathfrak{C}/_{\psi(D)},\ \mathfrak{C}_0/_D,$$
$$\mu/(\mathfrak{C}/_{\psi(D)}),\ \mu_0/(\mathfrak{C}_0/_D),\ \psi/_D,\quad \varphi,\quad (\psi(D)\times X)\cap E,$$
$$(D\times X_0)\cap E_0,\ f,\ g/(D\times X_0)\cap E_0$$

(il che è lecito come si è visto in modo del tutto analogo in *a*)) si ottiene che $(f,\mu/(\mathfrak{C}/_{\psi(D)}),\varrho)$ verifica la proprietà (INd) [risp. $(sINd)$] e pertanto, visto che $((\psi(D)\times X)\cap E,\ \mu/(\mathfrak{C}/_{\psi(D)}),\ \{K\in\mathcal{K}:\ K\subset\psi(D)\},\ \tau/_{\psi(D)},\ \varrho)$ verifica la proprietà (SDa') [risp. $(sSDa')$] (infatti per (2.1.4) di [BA 1] e per (3.9.1) si ha che $\psi(D)\in\mathfrak{C}$ e $\mu(T\setminus\psi(D))=0$), risulta che $(f,\psi(D),\mu/(\mathfrak{C}/_{\psi(D)}),\tau/_{\psi(D)},\varrho)$ verifica la proprietà $SD[\{K\in\mathcal{K}:\ K\subset\psi(D)\}]$ [risp. $SD[s\{K\in\mathcal{K}:\ K\subset\psi(D)\}]$]. Applicando la parte *b*) del Lemma 3.4 ai dati in (3.9.7) ed a $\{K\in\mathcal{K}:\ K\subset\psi(D)\}$, $\{H\in\mathcal{K}:\ H\subset D\}$ (il che è lecito grazie a (3.9.1) come in *a*)) si ottiene quindi che $(g/_D,D,\mu_0/(\mathfrak{C}_0/_D),\tau_0/_D,\varrho_0)$ verifica la proprietà $SD[\{H\in\mathcal{K}:\ H\subset D\}]$ [risp. $SD[s\{H\in\mathcal{K}:\ H\subset D\}]$] e pertanto $(g,T_0,\mu_0,\tau_0,\varrho_0)$ verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}]$].

d) Sia $g:E_0\to[-\infty,\infty]$ tale che $(g,T_0,\mu_0,\tau_0,\varrho_0)$ verifichi la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}]$]. Allora se vale *d'*) per (3.9.2) esiste $f:E\to[-\infty,\infty]$ tale che sia $g=f\circ((\psi\times\varphi)/_{E_0})$ e per *d*) del Lemma 3.4 si ha che (f,T,μ,τ,ϱ) verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}]$]. Poichè $(E,\mu,\mathcal{K},\tau,\varrho)$ verifica la proprietà (SDb') [risp. $(sSDb')$], si ottiene che (f,μ,ϱ) verifica la proprietà (INd) [risp. $(sINd)$]. Allora da *a*) del Lemma 3.4, se D è relativo a (f,μ,ϱ) ed alla proprietà (INd) [risp. $(sINd)$], segue che $E_0\in\mathfrak{C}_0\times\mathcal{B}(\varrho_0)$, $\psi^{-1}(D)\in\mathfrak{C}_0$, $\psi^{-1}(D)\subset I(g,\varrho_0)$ [risp. $\psi^{-1}(D)\subset I(s,g,\varrho_0)$] e $g/(\psi^{-1}(D)\times X_0)\cap E_0$ è $(\mathfrak{C}_0\times\mathcal{B}(\varrho_0))/(\psi^{-1}(D)\times X_0)\cap E_0$-misurabile. Da (2.1.1) di [BA 1] segue inoltre che $\mu_0(T_0\setminus\psi^{-1}(D))=0$. Pertanto (g,μ_0,ϱ_0) verifica la proprietà (INd) [risp. $(sINd)$].

Se ora vale *d''*) e se $(H_n)_{n\in N}$ è relativa a $(g,T_0,\mu_0,\tau_0,\varrho_0)$ ed alla proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}]$], si può applicare *c*) del Teorema 1.3 (di cui vale l'ipotesi *c''*)) a $\psi(\bigcup_{n\in N}H_n)$, $(\bigcup_{n\in N}H_n,\tau_0/\bigcup_{n\in N}H_n)$, X, $\mathfrak{C}_0/\bigcup_{n\in N}H_n$, (X_0,ϱ_0), $([-\infty,\infty],\sigma_i)$ (ove σ_i è la topologia della semicontinuità inferiore su $[-\infty,\infty]$, per cui, come visto nella dimostrazione del Teorema 1.20 *b*), risulta che: se (Y,σ) è

uno spazio topologico e $b\colon Y \to [-\infty, \infty]$, si ha che b è s.c.i. [risp. s.s.c.i.] se e solo se $b\colon (Y, \sigma) \to ([-\infty, \infty], \sigma_i)$ è continua [risp. sequenzialmente continua]), $\left(\left(\bigcup_{n\in N} H_n\right) \times X_0\right) \cap E_0$, $\psi/\bigcup_{n\in N} H_n$, φ, $g/\left(\left(\bigcup_{n\in N} H_n\right) \times X_0\right) \cap E_0$ e pertanto esiste

$$b\colon (\psi\times\varphi)\left(\left(\left(\bigcup_{n\in N} H_n\right) \times X_0\right) \cap E_0\right) \to [-\infty, \infty]$$

tale che

$$b\circ\left((\psi\times\varphi)/\left(\left(\bigcup_{n\in N} H_n\right) \times X_0\right) \cap E_0\right) = g/\left(\left(\bigcup_{n\in N} H_n\right) \times X_0\right) \cap E_0 .$$

Se allora si considera

$$f\colon \left(\psi\left(\bigcup_{n\in N} H_n\right) \times X\right) \cap E \to [-\infty, \infty],$$

$$f(t, x) = \begin{cases} b(t, x) & \text{se } (t, x) \in (\psi\times\varphi)\left(\left(\left(\bigcup_{n\in N} H_n\right) \times X_0\right) \cap E_0\right) \\ 0 & \text{se } (t, x) \in \left(\left(\psi\left(\bigcup_{n\in N} H_n\right) \times X\right) \cap E\right) \setminus \\ & \qquad \setminus (\psi\times\varphi)\left(\left(\left(\bigcup_{n\in N} H_n\right) \times X_0\right) \cap E_0\right) \end{cases},$$

si ha che

$$f\circ\left((\psi\times\varphi)/\left(\left(\bigcup_{n\in N} H_n\right) \times X_0\right) \cap E_0\right) = g/\left(\left(\bigcup_{n\in N} H_n\right) \times X_0\right) \cap E_0$$

e per il Lemma 3.8 e per (3.9.1) risulta che

$$\left(\left(\bigcup_{n\in N} H_n\right) \times X_0\right) \cap E_0 = (\psi\times\varphi)^{-1}\left(\left(\psi\left(\bigcup_{n\in N} H_n\right) \times X\right) \cap E\right).$$

Applicando ora la parte *d*) del Lemma 3.4 a

$$\begin{aligned} (3.9.8) \quad & \left(\psi\left(\bigcup_{n\in N} H_n\right), \tau/\psi\left(\bigcup_{n\in N} H_n\right)\right), \left(\bigcup_{n\in N} H_n, \tau_0/\bigcup_{n\in N} H_n\right), (X, \varrho), (X_0, \varrho_0), \\ & \varrho/\psi\left(\bigcup_{n\in N} H_n\right), \varrho_0/\bigcup_{n\in N} H_n, \mu/\left(\varrho/\psi\left(\bigcup_{n\in N} H_n\right)\right), \mu_0/\left(\varrho_0/\bigcup_{n\in N} H_n\right), \eta/\bigcup_{n\in N} H_n, \\ & \varphi, \left(\psi\left(\bigcup_{n\in N} H_n\right) \times X\right) \cap E, \left(\left(\bigcup_{n\in N} H_n\right) \times X_0\right) \cap E_0, f, \\ & g/\left(\left(\bigcup_{n\in N} H_n\right) \times X_0\right) \cap E_0, \left\{K \in \mathcal{K} : K \subset \psi\left(\bigcup_{n\in N} H_n\right)\right\}, \left\{H \in \mathcal{H} : H \subset \bigcup_{n\in N} H_n\right\} \end{aligned}$$

(il che è lecito come si è visto in modo del tutto analogo in *b*)) si ottiene che $\left(f, \psi\left(\bigcup_{n\in N} H_n\right), \mu/\left(\varrho/\psi\left(\bigcup_{n\in N} H_n\right)\right), \tau/\psi\left(\bigcup_{n\in N} H_n\right), \varrho\right)$ verifica la proprietà $SD\left[\left\{K \in \mathcal{K} :\right.\right.$

$K \subset \psi(\bigcup_{n\in N} H_n)\}]$ [risp. $SD[s\{K \in \mathcal{K}: K \subset \psi(\bigcup_{n\in N} H_n)\}]$]. Ora, poichè dalle ipotesi di d'') risulta che $\mu\big(T \setminus \psi(\bigcup_{n\in N} H_n)\big) = 0$, si ha che

$$\Big(\big(\psi(\bigcup_{n\in N} H_n)\big) \times X\Big) \cap E, \mu/\Big(\mathcal{C}/_{\psi(\bigcup_{n\in N} H_n)}\Big), \Big\{K \in \mathcal{K}: K \subset \psi\big(\bigcup_{n\in N} H_n\big)\Big\}, \tau/_{\psi(\bigcup_{n\in N} H_n)}, \varrho\Big)$$

verifica la proprietà (SDb') [risp. $(sSDb')$] e quindi $\Big(f, \mu/\Big(\mathcal{C}/_{\psi(\bigcup_{n\in N} H_n)}\Big), \varrho\Big)$ verifica la proprietà (INd) [risp. $(sINd)$]. Sia allora D relativo a

$$\Big(f, \mu/\Big(\mathcal{C}/_{\psi(\bigcup_{n\in N} H_n)}\Big), \varrho\Big)$$

ed alla proprietà (INd) [risp. $(sINd)$]. Allora, visto che

$$\mu(T \setminus D) < \mu\Big(T \setminus \psi\big(\bigcup_{n\in N} H_n\big)\Big) + \mu\Big(\psi\big(\bigcup_{n\in N} H_n\big) \setminus D\Big) = 0,$$

da (2.1.1) di [BA 1] segue che $\psi^{-1}(D) \in \mathcal{C}_0$ e $\mu_0(T_0 \setminus \psi^{-1}(D)) = 0$. Inoltre come in b) si ottiene che $E_0 \in \mathcal{C}_0 \times \mathcal{B}(\varrho_0)$; applicando infine a) del Lemma 3.4 ai dati in (3.9.8), poichè da (3.9.1) segue che $\psi^{-1}(D) \subset \psi^{-1}\big(\psi(\bigcup_{n\in N} H_n)\big) = \bigcup_{n\in N} H_n$, si ha che $g/(\psi^{-1}(D) \times X_0) \cap E_0$ è $(\mathcal{C}_0 \times \mathcal{B}(\varrho_0))/(\psi^{-1}(D) \times X_0) \cap E_0$-misurabile e d'altra parte $\bigcup_{n\in N} H_n \in I(g, \varrho_0)$ [risp. $\bigcup_{n\in N} H_n \in I(s, g, \varrho_0)$], per cui (g, μ_0, ϱ_0) verifica la proprietà (INd) [risp. $(sINd)$].

e) Sia $f: E \to [-\infty, \infty]$ tale che (f, μ, ϱ) verifichi la proprietà (INf) [risp. $(sINf)$]. Allora, se $g = f \circ ((\psi \times \varphi)/_{E_0})$, per il Lemma 3.7 si ha che (g, μ_0, ϱ_0) verifica la proprietà (INf) [risp. $(sINf)$]. Poichè $(E_0, \mu_0, \mathcal{K}, \tau_0, \varrho_0)$ verifica la proprietà (SDa) [risp. $(sSDa)$], si ha che $(g, T_0, \mu_0, \tau_0, \varrho_0)$ verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}]$] e quindi da d) del Lemma 3.4 segue che $(f, T, \mu, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}]$].

3.10 Osservazione: Si noti che, se T, T_0 sono insiemi, (X, ϱ), (X_0, ϱ_0) sono spazi topologici, $\mathcal{C}$ σ-algebra su T, $\mathcal{C}_0$ σ-algebra su T_0, $\psi: T_0 \to T$, $\varphi: X_0 \to X$ ed $E_0 \subset T_0 \times X_0$, allora condizione necessaria e sufficiente affinchè esista $E \subset T \times X$ tale che sia $(\psi \times \varphi)^{-1}(E) = E_0$ è che valga

$$(\psi \times \varphi)^{-1}((\psi \times \varphi)(E_0)) = E_0. \tag{3.10.0}$$

Infatti è sempre vero che $(\psi \times \varphi)^{-1}((\psi \times \varphi)(E_0)) \supset E_0$ e, se $E \subset T \times X$ è tale che sia $(\psi \times \varphi)^{-1}(E) = E_0$, allora $E \supset (\psi \times \varphi)(E_0)$, per cui $E_0 = (\psi \times \varphi)^{-1}(E) \supset$ $\supset (\psi \times \varphi)^{-1}((\psi \times \varphi)(E_0)) \supset E_0$ e quindi vale (3.10.0). Viceversa se vale (3.10.0) basta considerare $E = (\psi \times \varphi)(E_0)$.

Si noti anche che, se $E_0 \in \mathfrak{L}_0 \times \mathfrak{B}(\varrho_0)$ e se $\psi^{-1}(\psi(A)) = A$ per ogni $A \in \mathfrak{L}_0$, $\varphi^{-1}(\varphi(B)) = B$ per ogni $B \in \varrho_0$, allora utilizzando *a*) e *c*) del Lemma 1.2 si ottiene che vale (3.10.0).

3.11 Definizione: Siano T insieme, (X, ϱ), (Z, ζ) spazi topologici, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu: \mathfrak{L} \to [0, \infty]$ misura, $E \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho)$, $g: E \to Z$, $I(g, \varrho, \zeta) = \{t \in T: x \in E_t \mapsto g(t, x) \in Z$ è continua$\}$, $I(s, g, \varrho, \zeta) = \{t \in T: x \in E_t \mapsto g(t, x) \in Z$ è sequenzialmente continua$\}$. Allora si dice che:

a) (g, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà (Cf) se $I(g, \varrho, \zeta) \in \mathfrak{L}$, $\mu(T \setminus I(g, \varrho, \zeta)) = 0$ e $g/_{(I(g, \varrho, \zeta) \times X) \cap E}$ è $(\mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho))/_{(I(g, \varrho, \zeta) \times X) \cap E}$-misurabile; (g, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà (μCf) se verifica la proprietà (Cf) e se $t \in I(g, \varrho, \zeta) \cap E^x \mapsto g(t, x) \in Z$ è $\mu/_{(\mathfrak{L}/_{(I(g, \varrho, \zeta) \cap E^x)})}$-misurabile per ogni $x \in X$;

b) (g, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà (sCf) se $I(s, g, \varrho, \zeta) \in \mathfrak{L}$, $\mu(T \setminus I(s, g, \varrho, \zeta)) = 0$ e $g/_{(I(s, g, \varrho, \zeta) \times X) \cap E}$ è $(\mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho))/_{(I(s, g, \varrho, \zeta) \times X) \cap E}$-misurabile; (g, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà (μsCf) se verifica la proprietà (sCf) e se $t \in I(s, g, \varrho, \zeta) \cap E^x \mapsto g(t, x) \in Z$ è $\mu/_{(\mathfrak{L}/_{(I(s, g, \varrho, \zeta) \cap E^x)})}$-misurabile per ogni $x \in X$;

c) (g, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà (Cd) [risp. (sCd)] se esiste $D \in \mathfrak{L}$, $D \subset I(g, \varrho, \zeta)$ [risp. $D \subset I(s, g, \varrho, \zeta)$] tale che sia $\mu(T \setminus D) = 0$ e $g/_{(D \times X) \cap E}$ sia $(\mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho))/_{(D \times X) \cap E}$-misurabile; (g, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà (μCd) [risp. (μsCd)] se verifica la proprietà (Cd) [risp. (sCd)] e se $t \in D \cap E^x \mapsto g(t, x) \in Z$ è $\mu/_{(\mathfrak{L}/_{(D \cap E^x)})}$-misurabile per ogni $x \in X$ (ove D è relativo a (g, μ, ϱ, ζ) ed alla proprietà (Cd) [risp. (sCd)]).

3.12 Osservazione: Si noti che, dalla definizione di ν-misurabilità e dal fatto che se h è $(\mathcal{M} \times \mathfrak{B}(\sigma))/_A$-misurabile segue che $s \in S \cap A^y \mapsto h(s, y) \in Z$ è $\mathcal{M}/_{(S \cap A^y)}$-misurabile per ogni $y \in Y$ (ove S è un insieme, $\mathcal{M}$ è una σ-algebra su S, $\nu: \mathcal{M} \to [0, \infty]$ è una misura, (Y, σ), (Z, ζ) sono spazi topologici, $A \in \mathcal{M} \times \mathfrak{B}(\sigma)$, $h: A \to Z$), con le notazioni della Definizione 3.11 risulta:

a) (g, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà (μCf) [risp. (μsCf)] se e solo se verifica la proprietà (Cf) [risp. (sCf)] e per ogni $x \in X$ esiste $S(x) \in \mathfrak{L}$, $S(x) \subset I(g, \varrho, \zeta) \cap E^x$ [risp. $S(x) \subset I(s, g, \varrho, \zeta) \cap E^x$] tale che sia $\mu((I(g, \varrho, \zeta) \cap E^x) \setminus S(x)) = 0$ [risp. $\mu((I(s, g, \varrho, \zeta) \cap E^x) \setminus S(x)) = 0$] e $\{g(t, x): t \in S(x)\}$ sia contenuto in un sottospazio separabile di (Z, ζ);

b) (g, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà (μCd) [risp. (μsCd)] se e solo se verifica la proprietà (Cd) [risp. (sCd)] relativamente ad un insieme $D \in \mathfrak{L}$, $D \subset I(g, \varrho, \zeta)$ [risp. $D \subset I(s, g, \varrho, \zeta)$] e per ogni $x \in X$ esiste $S(x) \in \mathfrak{L}$, $S(x) \subset D$

tale che sia $\mu((D \cap E^x) \setminus S(x)) = 0$ e $\{g(t, x) : t \in S(x)\}$ sia contenuto in un sottospazio separabile di (Z, ζ).

3.13 Definizione: Siano (T, τ), (X, ϱ), (Z, ζ) spazi topologici, $\mathfrak{C}$ σ-algebra su T, $\mu : \mathfrak{C} \to [0, \infty]$ misura, $\mathcal{K} \subset \mathfrak{C}$, $E \in \mathfrak{C} \times \mathcal{B}(\varrho)$. Allora si dice che:

a) $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà (εSDa) [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDa)$, $(\varepsilon SDa')$, $(\varepsilon\varepsilon SDa')$] se per ogni $f : E \to Z$ tale che (f, μ, ϱ, ζ) verifichi la proprietà (Cf) [risp. (εCf), (Cd), (εCd)] risulta che $(f, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K})$ [risp. $SD(\varepsilon\mathcal{K})$, $SD(\mathcal{K})$, $SD(\varepsilon\mathcal{K})$];

b) $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà (εSDb) [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDb)$, $(\varepsilon SDb')$, $(\varepsilon\varepsilon SDb')$] se per ogni $f : E \to Z$ tale che $(f, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifichi la proprietà $SD(\mathcal{K})$ [risp. $SD(\varepsilon\mathcal{K})$, $SD(\mathcal{K})$, $SD(\varepsilon\mathcal{K})$] si ha che (f, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà (Cf) [risp. (εCf), (Cd), (εCd)];

c) $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà (εSDc) [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDc)$, $(\varepsilon SDc')$, $(\varepsilon\varepsilon SDc')$] se per ogni $f : E \to Z$ tale che (f, μ, ϱ, ζ) verifichi la proprietà (μCf) [risp. $(\mu\varepsilon Cf)$, (μCd), $(\mu\varepsilon Cd)$] risulta che $(f, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K})$ [risp. $SD(\varepsilon\mathcal{K})$, $SD(\mathcal{K})$, $SD(\varepsilon\mathcal{K})$];

d) $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà (εSDd) [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDd)$, $(\varepsilon SDd')$, $(\varepsilon\varepsilon SDd')$] se per ogni $f : E \to Z$ tale che $(f, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifichi la proprietà $SD(\mathcal{K})$ [risp. $SD(\varepsilon\mathcal{K})$, $SD(\mathcal{K})$, $SD(\varepsilon\mathcal{K})$] si ha che (f, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà (μCf) [risp. $(\mu\varepsilon Cf)$, (μCd), $(\mu\varepsilon Cd)$].

3.14 Teorema: Siano (T, τ), (X, ϱ), (Z, ζ), $\mathfrak{C}$, μ, $\mathcal{K}$, E come nella Definizione 3.13. Allora:

a) se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(\varepsilon SDa')$ [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDa')$] allora $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà (εSDa) [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDa)$];

b) se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà (εSDb) [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDb)$] allora $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(\varepsilon SDb')$ [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDb')$];

c) se vale (3.2.0) e se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà (εSDa) [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDa)$] allora $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(\varepsilon SDa')$ [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDa')$];

d) se vale (3.2.0) e se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(\varepsilon SDb')$ [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDb')$] allora $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà (εSDb) [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDb)$];

e) se $f : E \to Z$, allora $(f, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K})$ [risp. $SD(\varepsilon\mathcal{K})$] se e solo se

(3.14.0) esiste $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tale che $K_n \in \mathcal{K}$, $K_n \subset I(f, \varrho, \zeta)$ [risp. $K_n \subset I(\tau, f, \varrho, \zeta)$], $\mu(T \setminus K_n) < 1/(n+1)$, $f|_{(K_n \times X) \cap E}$ è continua [risp. sequenzialmente continua] per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Dimostrazione: È del tutto analoga a quella del Teorema 3.2, ove si tenga conto che, se vale (3.2.0), per f) del Teorema 1.1 di [BA 1], se F è chiuso in ζ risulta che $\{x \in E_t : f(t, x) \in F\}$ è chiuso [risp. sequenzialmente chiuso] in $\varrho/_{E_t}$ per ogni $t \in I(f, \varrho, \zeta)$ [risp. $t \in I(s, f, \varrho, \zeta)$] (ove $f: E \to Z$).

3.15 Teorema: Siano (T, τ), (X, ϱ) spazi topologici, $\mathfrak{C}$ σ-algebra su T, $\mu: \mathfrak{C} \to [0, \infty]$ misura, $\mathcal{K} \subset \mathfrak{C}$, $E \in \mathfrak{C} \times \mathfrak{B}(\varrho)$. Allora:

a) se vale

$$H \cap K \in \mathcal{K} \text{ per ogni } H, K \in \mathcal{K} \tag{3.15.0}$$

si ha che, se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà (SDa) [risp. $(sSDa)$], risulta che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \eta)$ verifica la proprietà (εSDa) [risp. $(s\varepsilon SDa)$];

b) se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà (SDb) [risp. $(sSDb)$], risulta che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \eta)$ verifica la proprietà (εSDb) [risp. $(s\varepsilon SDb)$];

c) se vale (3.15.0) si ha che, se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà (SDa') [risp. $(sSDa')$], risulta che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \eta)$ verifica la proprietà $(\varepsilon SDa')$ [risp. $(s\varepsilon SDa')$];

d) se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà (SDb') [risp. $(sSDb')$], risulta che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \eta)$ verifica la proprietà $(\varepsilon SDb')$ [risp. $(s\varepsilon SDb')$].

Dimostrazione: *a*) Sia $f: E \to [-\infty, \infty]$ tale che (f, μ, ϱ, η) verifichi la proprietà (Cf) [risp. (sCf)]. Sia $I(f) = I(f, \varrho, \eta)$ [risp. $I(f) = I(s, f, \varrho, \eta)$]. Allora, per come è definito $I(f)$, per ogni $t \in T \setminus I(f)$ si ha che $\varrho/_{E_t}$ [risp. $s(\varrho/_{E_t})$] non è la topologia discreta. Allora per ogni $t \in T \setminus I(f)$ esiste $x_t \in E_t$ tale che $\{x_t\} \notin \varrho/_{E_t}$ [risp. $\{x_t\} \notin s(\varrho/_{E_t})$], per cui la funzione $g_t: E_t \to [-\infty, \infty]$ tale che

$$g_t(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = x_t \\ 0 & \text{se } x \in E_t \setminus \{x_t\} \end{cases}$$

non è s.c.i. [risp. s.s.c.i.]; pertanto, se $f_i: E \to [-\infty, \infty]$ $(i = 1, 2)$ sono così definite:

$$f_1(t, x) = \begin{cases} f(t, x) & \text{se } (t, x) \in (I(f) \times X) \cap E \\ g_t(x) & \text{se } (t, x) \in ((T \setminus I(f)) \times X) \cap E \end{cases}$$

$$f_2(t, x) = \begin{cases} -f(t, x) & \text{se } (t, x) \in (I(f) \times X) \cap E \\ g_t(x) & \text{se } (t, x) \in ((T \setminus I(f)) \times X) \cap E \end{cases}$$

risulta che

$$I(f_i) = \{t \in T\colon x \in E_t \mapsto f_i(t, x) \in [-\infty, \infty] \text{ è s.c.i. [risp. s.s.c.i.]}\} = I(f) \qquad (i = 1, 2).$$

D'altra parte, visto che $(f, \mu, \varrho, \bar{\eta})$ verifica la proprietà (Cf) [risp. (sCf)], risulta che (f_i, μ, ϱ) verifica la proprietà (INf) [risp. $(sINf)$] $(i = 1, 2)$. Quindi $(f_i, T, \mu, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}]$] $(i = 1, 2)$, per cui esistono $(K'_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(K''_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tali che K'_n, $K''_n \in \mathcal{K}$,

$$\mu(T \setminus K'_n) < 1/(n+1), \qquad \mu(T \setminus K''_n) < 1/(n+1)$$

e

$$f|_{(K'_n \times X) \cap E} = f_1|_{(K'_n \times X) \cap E} \text{ sia s.c.i. [risp. s.s.c.i.]},$$

$$f|_{(K''_n \times X) \cap E} = -f_2|_{(K''_n \times X) \cap E} \text{ sia s.c.s. [risp. s.s.c.s.]}.$$

Basta ora considerare $K_n = K'_{2n+1} \cap K''_{2n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$ e utilizzare (3.15.0) per concludere.

b) Sia $f\colon E \to [-\infty, \infty]$ tale che $(f, T, \mu, \tau, \varrho, \bar{\eta})$ verifichi la proprietà $SD(\mathcal{K})$ [risp. $SD(s\mathcal{K})$] e sia $I(f)$ come in *a*). Allora $(f, T, \mu, \tau, \varrho)$ e $(-f, T, \mu, \tau, \varrho)$ verificano la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}]$] e quindi (f, μ, ϱ) e $(-f, \mu, \varrho)$ verificano la proprietà (INf) [risp. $(sINf)$]. Pertanto, se $I_i(f)$ e $I_s(f)$ sono tali che

$$(3.15.1) \qquad I_i(f) = \{t \in T\colon x \in E_t \mapsto f(t, x) \in [-\infty, \infty] \text{ è s.c.i. [risp. s.s.c.i.]}\},$$
$$I_s(f) = \{t \in T\colon x \in E_t \mapsto f(t, x) \in [-\infty, \infty] \text{ è s.c.s. [risp. s.s.c.s.]}\},$$

si ha che $I(f) = I_i(f) \cap I_s(f)$, $I_i(f)$, $I_s(f) \in \mathcal{C}$, $\mu(T \setminus I_i(f)) = \mu(T \setminus I_s(f)) = 0$, $f|_{(I_i(f) \times X) \cap E}$ è $(\mathcal{C} \times \mathcal{B}(\varrho))|_{(I_i(f) \times X) \cap E}$-misurabile e quindi $(f, \mu, \varrho, \bar{\eta})$ verifica la proprietà (Cf) [risp. (sCf)].

c) Sia $f\colon E \to [-\infty, \infty]$ tale che $(f, \mu, \varrho, \bar{\eta})$ verifichi la proprietà (Cd) [risp. (sCd)] e sia D relativo a $(f, \mu, \varrho, \bar{\eta})$ ed a tale proprietà. Sia $I(f)$ come in *a*) e siano $I_i(f)$, $I_s(f)$ come in (3.15.1). Allora (f, μ, ϱ) e $(-f, \mu, \varrho)$ verificano la proprietà (INd) [risp. $(sINd)$] e l'insieme D di cui sopra è relativo sia a (f, μ, ϱ) che a $(-f, \mu, \varrho)$ ed alla proprietà (INd) [risp. $(sINd)$] (visto che risulta che $D \subset I(f) = I_i(f) \cap I_s(f)$). Pertanto $(f, T, \mu, \tau, \varrho)$ e $(-f, T, \mu, \tau, \varrho)$ verificano la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[s\mathcal{K}]$] e quindi utilizzando (3.15.0) si conclude.

d) Sia $f\colon E \to [-\infty, \infty]$ tale che $(f, T, \mu, \tau, \varrho, \bar{\eta})$ verifichi la proprietà $SD(\mathcal{K})$ [risp. $SD(s\mathcal{K})$], sia $I(f)$ come in *a*) e siano $I_i(f)$, $I_s(f)$ come in (3.15.1). Allora $(f, T, \mu, \tau, \varrho)$ e $(-f, T, \mu, \tau, \varrho)$ verificano la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp.

$SD[\iota\mathcal{K}]]$ e quindi (f, μ, ϱ) e $(-f, \mu, \varrho)$ verificano anche la proprietà (INd) [risp. (ιINd)]. Pertanto, se D_1 e D_2 sono relativi rispettivamente a (f, μ, ϱ) e a $(-f, \mu, \varrho)$ ed alla proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $SD[\iota\mathcal{K}]$], considerando $D = D_1 \cap D_2$, si ha che $D \subset I_s(f) \cap I_s(f) = I(f)$ per cui (f, μ, ϱ, η) verifica la proprietà (Cd) [risp. (ιCd)].

3.16. Lemma: Se:

A) (T, τ), (X, ϱ), (Z, ζ), (Z_j, ζ_j) sono spazi topologici, $\mathfrak{C}$ σ-algebra su T, $\mu: \mathfrak{C} \to [0, \infty]$ misura, $\mathcal{K} \subset \mathfrak{C}$, $\mathcal{K}_j \subset \mathfrak{C}$, $\theta_j: Z \to Z_j$ $(j \in J)$, $E \in \mathfrak{C} \times \mathfrak{B}(\varrho)$,

B) $f: E \to Z$, $f_j: E \to Z_j$ sono tali che $f_j = \theta_j \circ f$ per ogni $j \in J$,

allora:

a) se valgono le condizioni (2.0.5), (2.2.0) e se (f, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà (Cd) [risp. (ιCd)] si ha che

(3.16.0) $\quad D \subset I(f_j, \varrho, \zeta_j)$ [risp. $D \subset I(t, f_j, \varrho, \zeta_j)$] e $f_j|_{(D \times X) \cap E}$ è $(\mathfrak{C} \times \mathfrak{B}(\varrho))|_{(D \times X) \cap E}$-misurabile per ogni $j \in J$,

se inoltre vale (2.2.3) e se (f, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà (μCd) [risp. $(\mu\iota Cd)$] risulta anche che

(3.16.1) $\quad t \in D \cap E^x \mapsto f_j(t, x) \in Z_j$ è $\mu|_{(\mathfrak{C}|_{(D \cap E^x)})}$-misurabile per ogni $x \in X$,

(ove D è relativo a (f, μ, ϱ, ζ) ed alla proprietà (Cd) [risp. (ιCd)]);

b) se $J \subset \mathbf{N}$, se vale almeno una delle due seguenti condizioni: (2.2.6) e

(3.16.2) $$J = \{0\},$$

se valgono le condizioni (2.2.7), (2.0.5) e se $(f_j, \mu, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà (Cf) [risp. (ιCf)] per ogni $j \in J$, si ha che (f, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà (Cf) [risp. (ιCf)]; inoltre se nelle ipotesi di cui sopra si sostituisce (3.16.2) con

(3.16.3) $$J = \{0\} \text{ e } \theta_0 \text{ è surgettiva}$$

e se $(f_j, \mu, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà (μCf) [risp. $(\mu\iota Cf)$] per ogni $j \in J$, si ha che (f, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà (μCf) [risp. $(\mu\iota Cf)$];

c) se $J \subset \mathbf{N}$, se vale almeno una delle due condizioni (2.2.6) e (3.16.2), se vale la condizione (2.2.7) e se $(f_j, \mu, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà (Cd) [risp. (ιCd)] per ogni $j \in J$, si ha che (f, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà (Cd) [risp. (ιCd)]; inoltre se nelle ipotesi di cui sopra si sostituisce (3.16.2) con (3.16.3)

e se $(f_j, \mu, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà (μCd) [risp. (μsCd)] per ogni $j \in J$, si ha che (f, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà (μCd) [risp. (μsCd)].

Dimostrazione: *a*) Sia D relativo a (f, μ, ϱ, ζ) ed alla proprietà (Cd) [risp. (sCd)]. Poichè vale (2.0.5) si ha, come nella dimostrazione di *a*) del Teorema 2.0, che

$$D \subset I(f, \varrho, \zeta) \subset \bigcap_{j \in J} I(f_j, \varrho, \zeta_j) \quad \left[\text{risp. } D \subset I(s, f, \varrho, \zeta) \subset \bigcap_{j \in J} I(s, f_j, \varrho, \zeta_j)\right].$$

D'altra parte da *a*) del Teorema 2.2 applicato a D, $(D \times X) \cap E$ si ricava che $f|_{(D \times X) \cap E}$ è $(\mathfrak{C} \times \mathfrak{B}(\varrho))|_{(D \times X) \cap E}$-misurabile per ogni $j \in J$. Se inoltre (f, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà (μCd) [risp. (μsCd)] basta applicare *a*') del Teorema 2.2 a D, $(D \times X) \cap E$ per ottenere (3.16.1).

b) Siano $I(f) = I(f, \varrho, \zeta)$ [risp. $I(f) = I(s, f, \varrho, \zeta)$] e $I(f_j) = I(f_j, \varrho, \zeta_j)$ [risp. $I(f_j) = I(s, f_j, \varrho, \zeta_j)$] per ogni $j \in J$. Da (2.2.7) segue (2.0.3) e da (2.0.3) e (2.0.5) segue, come nella dimostrazione di *b*) del Teorema 2.0, che $I(f) = \bigcap_{j \in J} I(f_j)$. Pertanto, visto che $J \subset \mathbf{N}$, risulta che $I(f) \in \mathfrak{C}$, $\mu(T \setminus I(f)) = 0$. Utilizzando ora (2.2.7) e rispettivamente: per *b*) del Teorema 2.2 applicato a $I(f)$, $(I(f) \times X) \cap E$ se vale (2.2.6), per il Corollario 2.3 applicato a $I(f)$, $(I(f) \times X) \cap E$ se vale (3.16.2) o se vale (3.16.3), si ottiene che

$$f|_{(I(f) \times X) \cap E} \text{ è } (\mathfrak{C} \times \mathfrak{B}(\varrho))|_{(I(f) \times X) \cap E}\text{-misurabile}$$

e

$$t \in I(f) \cap E^x \mapsto f(t, x) \in Z \text{ è } \mu|_{(\mathfrak{C}|_{(I(f) \cap E^x)})}\text{-misurabile per ogni } x \in X.$$

c) Sia D_j relativo a $(f_j, \mu, \varrho, \zeta_j)$ ed alla proprietà (Cd) [risp. (sCd)] $(j \in J)$. Da (2.2.7) segue (2.0.3) e da (2.0.3) segue, come nella dimostrazione di *b*) del Teorema 2.0, che $I(f, \varrho, \zeta) \supset \bigcap_{j \in J} I(f_j, \varrho, \zeta_j) \supset \bigcap_{j \in J} D_j$ [risp. $I(s, f, \varrho, \zeta) \supset \bigcap_{j \in J} I(s, f_j, \varrho, \zeta_j) \supset \bigcap_{j \in J} D_j$]. Pertanto basta considerare $D = \bigcap_{j \in J} D_j$: visto che $J \subset \mathbf{N}$ si ha che $D \in \mathfrak{C}$, $\mu(T \setminus D) = 0$ e, tenendo conto di (2.2.7) e rispettivamente: per *b*) del Teorema 2.2 applicato a D, $(D \times X) \cap E$ se vale (2.2.6), per il Corollario 2.3 applicato a D, $(D \times X) \cap E$ se vale (3.16.2) o se vale (3.16.3), si ottiene che $f|_{(D \times X) \cap E}$ è $(\mathfrak{C} \times \mathfrak{B}(\varrho))|_{(D \times X) \cap E}$-misurabile e $t \in D \cap E^x \mapsto f(t, x) \in Z$ è $\mu|_{(\mathfrak{C}|_{(D \cap E^x)})}$-misurabile per ogni $x \in X$.

3.17 Osservazione: Si noti che, se E, Z, Z_j sono insiemi, $\theta_j: Z \to Z_j$ $(j \in J)$ e se è data una famiglia di applicazioni $\{f_j: E \to Z_j : j \in J\}$ tale che sia $\bigcap_{j \in J} \theta_j^{-1}(\{f_j(e)\}) \neq \emptyset$ per ogni $e \in E$ allora esiste $f: E \to Z$ tale che $f_j = \theta_j \circ f$ per ogni $j \in J$. (Basta infatti considerare $f(e) \in \bigcap_{j \in J} \theta_j^{-1}(\{f_j(e)\})$ per ogni $e \in E$).

3.18 Teorema: Valga A) del Lemma 3.16. Allora:

a) a') se $J \subset \mathbf{N}$, se valgono le condizioni (2.0.3), (2.0.5), (2.2.0), (2.5.0), si ha che, se $(E, \mu, \mathcal{K}_j, \tau, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà $(cSDa)$ [risp. $(csSDa)$] per ogni $j \in J$, risulta che anche $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(cSDa)$ [risp. $(csSDa)$];

a'') se, oltre alle ipotesi di a'), vale anche la condizione (2.2.3) si ha che, se $(E, \mu, \mathcal{K}_j, \tau, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà $(cSDc)$ [risp. $(csSDc)$] per ogni $j \in J$, risulta che anche $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(cSDc)$ [risp. $(csSDc)$];

b) b') se $J \subset \mathbf{N}$, se $\mathcal{K} \subset \bigcap_{j \in J} \mathcal{K}_j$, se vale almeno una delle due condizioni (2.2.6) e (3.16.2), se valgono le condizioni (2.0.5), (2.2.7), si ha che, se $(E, \mu, \mathcal{K}_j, \tau, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà $(cSDb)$ [risp. $(csSDb)$] per ogni $j \in J$, risulta che anche $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(cSDb)$ [risp. $(csSDb)$];

b'') se nelle ipotesi di b') si sostituisce (3.16.2) con (3.16.3) si ha che, se $(E, \mu, \mathcal{K}_j, \tau, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà $(cSDd)$ [risp. $(csSDd)$] per ogni $j \in J$, risulta che anche $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(cSDd)$ [risp. $(csSDd)$];

c) c') se $J \subset \mathbf{N}$, se valgono le condizioni (2.0.3), (2.0.5), (2.2.0), (2.5.0), si ha che, se $(E, \mu, \mathcal{K}_j, \tau, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà $(cSDa')$ [risp. $(csSDa')$] per ogni $j \in J$, risulta che anche $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(cSDa')$ [risp. $(csSDa')$];

c'') se, oltre alle ipotesi di c'), vale anche la condizione (2.2.3) si ha che, se $(E, \mu, \mathcal{K}_j, \tau, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà $(cSDc')$ [risp. $(csSDc')$] per ogni $j \in J$, risulta che anche $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(cSDc')$ [risp. $(csSDc')$];

d) d') se $J \subset \mathbf{N}$, se $\mathcal{K} \subset \bigcap_{j \in J} \mathcal{K}_j$, se vale almeno una delle due condizioni (2.2.6) e (3.16.2), se valgono le condizioni (2.0.5), (2.2.7), si ha che, se $(E, \mu, \mathcal{K}_j, \tau, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà $(cSDb')$ [risp. $(csSDb')$] per ogni $j \in J$, risulta che anche $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(cSDb')$ [risp. $(csSDb')$];

d'') se nelle ipotesi di d') si sostituisce (3.16.2) con (3.16.3) si ha che, se $(E, \mu, \mathcal{K}_j, \tau, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà $(cSDd')$ [risp. $(csSDd')$] per ogni $j \in J$, risulta che anche $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(cSDd')$ [risp. $(csSDd')$].

Dimostrazione: a) Sia $f: E \to Z$ tale che (f, μ, ϱ, ζ) verifichi la proprietà (Cf) [risp. (sCf)]. Allora, se $f_j = \theta_j \circ f$ per ogni $j \in J$, per a) del Lemma 3.16 si ha che vale (3.16.0) con $D = I(f, \varrho, \zeta)$ [risp. $D = I(s, f, \varrho, \zeta)$]. Siano $I(f) = I(f, \varrho, \zeta)$ [risp. $I(f) = I(s, f, \varrho, \zeta)$] e $I(f_j) = I(f_j, \varrho, \zeta_j)$ [risp. $I(f_j) = I(s, f_j, \varrho, \zeta_j)$] per ogni $j \in J$. Sia ora $J_0 = \{j \in J: \zeta_j$ non è la topologia banale$\}$. Per come è definito $I(f)$ per ogni $t \in T \setminus I(f)$ si ha che $\varrho/_{E_t}$ [risp.

$s(\varrho|_{E_t})$] non è la topologia discreta. Quindi, se $j \in J_0$, $t \in T \setminus I(f)$, si ha che esistono $x_t \in E_t$ tale che $\{x_t\} \notin \varrho|_{E_t}$ [risp. $\{x_t\} \notin s(\varrho|_{E_t})$] e $z_t \in Z_j$ per cui esiste $A \in \zeta_j$ tale che $z_j \in A \subsetneq Z_j$ e pertanto, se si considera un'applicazione $g_{t,j}: E_t \to Z_j$ tale che

$$g_{t,j}(x_t) = z_j, \qquad g_{t,j}(x) \in Z_j \setminus A \text{ se } x \in E_t \setminus \{x_t\},$$

risulta che $g_{t,j}$ non è continua [risp. non è sequenzialmente continua]; pertanto se si definisce per ogni $j \in J_0$ l'applicazione $g_j: E \to Z_j$ nel seguente modo:

$$g_j(t, x) = \begin{cases} f_j(t, x) & \text{se } (t, x) \in (I(f) \times X) \cap E \\ g_{t,j}(x) & \text{se } (t, x) \in [(T \setminus I(f)) \times X] \cap E \end{cases}$$

risulta che $\{t \in T: x \in E_t \mapsto g_j(t, x) \in Z_j$ è continua [risp. sequenzialmente continua]$\} = I(f)$. Se invece $j \in J \setminus J_0$ sia $z_j \in Z_j$ e sia $g_j: E \to Z_j$ tale che

$$g_j(t, x) = z_j \text{ per ogni } (t, x) \in E;$$

allora $\{t \in T: x \in E_t \mapsto g_j(t, x) \in Z_j$ è continua [risp. sequenzialmente continua]$\} = T$ e g_j è $(\mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho))|_E$-misurabile. Pertanto per ogni $j \in J$ si ha che $(g_j, \mu, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà (Cf) [risp. (sCf)] e quindi, poichè $(E, \mu, \mathcal{K}_j, \tau, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà $(cSDa)$ [risp. $(csSDa)$], risulta che $(g_j, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K}_j)$ [risp. $SD(s\mathcal{K}_j)$]. Quindi se $j \in J_0$, tenendo conto del fatto che $I(f) \subset I(f_j)$ e di come è definita g_j, si ha che $(f_j, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K}_j)$ [risp. $SD(s\mathcal{K}_j)$]; se invece $j \in J \setminus J_0$ e se $(K_{n,j})_{n \in \mathbf{N}}$ sono tali che $K_{n,j} \in \mathcal{K}_j$, $\mu(T \setminus K_{n,j}) < 1/(n+1)$ e $g_j|_{(K_{n,j} \times X) \cap E}$ è continua [risp. sequenzialmente continua] $(n \in \mathbf{N})$, risulta che anche $f_j|_{(K_{n,j} \times X) \cap E}$ è continua [risp. sequenzialmente continua] $(n \in \mathbf{N})$ in quanto ζ_j (e quindi anche ζ_j^*) è la topologia banale. Pertanto anche in questo caso $(f_j, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K}_j)$ [risp. $SD(s\mathcal{K}_j)$]. Allora per $b)$ del Teorema 2.5 si ottiene che $(f, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K})$ [risp. $SD(s\mathcal{K})$].

Se invece (f, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà (μCf) [risp. (μsCf)] allora, per $a)$ del Lemma 3.16, le f_j sopra definite $(j \in J)$ verificano anche (3.16.1) con $D = I(f)$ e quindi si può fare in modo che $t \in E^x \mapsto g_j(t, x) \in Z_j$ siano $\mu|_{(\mathfrak{L}|_{E^x})}$-misurabili per ogni $x \in X$ (ove g_j $(j \in J)$ sono definite sopra). Pertanto, utilizzando ora il fatto che $(E, \mu, \mathcal{K}_j, \tau, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà $(cSDc)$ [risp. $(csSDc)$] per ogni $j \in J$, si ottiene che $(g_j, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K}_j)$ [risp. $SD(s\mathcal{K}_j)$] e si procede come sopra.

$b)$ Sia $f: E \to Z$ tale che $(f, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifichi la proprietà $SD(\mathcal{K})$ [risp. $SD(s\mathcal{K})$, $SD(\mathcal{K})$, $SD(s\mathcal{K})$]. Siano $f_j = \theta_j \circ f$ $(j \in J)$. Allora da $a)$ del Teorema 2.5 segue che $(f_j, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K}_j)$ [risp. $SD(s\mathcal{K}_j)$,

$SD(\mathcal{K}_j)$, $SD(s\mathcal{K}_j)$] per ogni $j \in J$ e quindi, visto che $(E, \mu, \mathcal{K}_j, \tau, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà (εSDb) [risp. $(\varepsilon sSDb)$, (εSDd), $(\varepsilon sSDd)$] per ogni $j \in J$, risulta che $(f_j, \mu, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà (Cf) [risp. (sCf), (μCf), (μsCf)] per ogni $j \in J$. Utilizzando ora $b)$ del Lemma 3.16 si ricava che (f, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà (Cf) [risp. (sCf), (μCf), (μsCf)].

$c)$ Sia $f: E \to Z$ tale che (f, μ, ϱ, ζ) verifichi la proprietà (Cd) [risp. (sCd)]. Allora, se $f_j = \theta_j \circ f$ per ogni $j \in J$, per $a)$ del Lemma 3.16 si ha che vale (3.16.0) (ove D è relativo a (f, μ, ϱ, ζ) ed alla proprietà (Cd) [risp. (sCd)]) e quindi $(f_j, \mu, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà (Cd) [risp. (sCd)] per ogni $j \in J$. Pertanto per ogni $j \in J$, visto che $(E, \mu, \mathcal{K}_j, \tau, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà $(\varepsilon SDa')$ [risp. $(\varepsilon sSDa')$], risulta che $(f_j, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K}_j)$ [risp. $SD(s\mathcal{K}_j)$]. Da $b)$ del Teorema 2.5 si ottiene quindi che $(f, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K})$ [risp. $SD(s\mathcal{K})$]. Se invece (f, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà (μCd) [risp. (μsCd)] e se vale (2.2.3) allora le f_j definite sopra $(j \in J)$ verificano anche (3.16.1), pertanto $(f_j, \mu, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà (μCd) [risp. (μsCd)] per ogni $j \in J$ e si procede in modo del tutto analogo a quanto sopra.

$d)$ Sia $f: E \to Z$ tale che $(f, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifichi la proprietà $SD(\mathcal{K})$ [risp. $SD(s\mathcal{K})$, $SD(\mathcal{K})$, $SD(s\mathcal{K})$]. Siano $f_j = \theta_j \circ f$ $(j \in J)$. Allora da $a)$ del Teorema 2.5 segue che $(f_j, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K}_j)$ [risp. $SD(s\mathcal{K}_j)$, $SD(\mathcal{K}_j)$, $SD(s\mathcal{K}_j)$] per ogni $j \in J$ e quindi, visto che $(E, \mu, \mathcal{K}_j, \tau, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà $(\varepsilon SDb')$ [risp. $(\varepsilon sSDb')$, $(\varepsilon SDd')$, $(\varepsilon sSDd')$] per ogni $j \in J$, risulta che $(f_j, \mu, \varrho, \zeta_j)$ verifica la proprietà (Cd) [risp. (sCd), (μCd), (μsCd)] per ogni $j \in J$. Utilizzando ora $c)$ del Lemma 3.16 si ricava che (f, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà (Cd) [risp. (sCd), (μCd), (μsCd)].

3.19 Teorema: Valga $A)$ del Lemma 3.16 con $J = \{0\}$ e ove si indicherà più brevemente θ_0 con θ. Allora:

$a)$ se $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_0$, se (relativamente a $J = \{0\}$) valgono le condizioni (2.0.5), (2.2.7), se vale

(3.19.0) per ogni $g: E \to Z_0$ applicazione non costante tale che $(g, \mu, \varrho, \zeta_0)$ verifichi la proprietà (Cf) [risp. (sCf)] risulta che $g(E) \subset \theta(Z)$,

si ha che, se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà (εSDa) [risp. $(\varepsilon sSDa)$], risulta che anche $(E, \mu, \mathcal{K}_0, \tau, \varrho, \zeta_0)$ verifica la proprietà (εSDa) [risp. $(\varepsilon sSDa)$]; inoltre se θ è anche surgettiva si ha che, se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà (εSDc) [risp. $(\varepsilon sSDc)$], risulta che anche $(E, \mu, \mathcal{K}_0, \tau, \varrho, \zeta_0)$ verifica la proprietà (εSDc) [risp. $(\varepsilon sSDc)$];

$b)$ se $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}$, se (relativamente a $J = \{0\}$) valgono le condizioni (2.0.3), (2.0.5), (2.2.0), se vale

(3.19.1) per ogni $g: E \to Z_0$ applicazione non costante tale che $(g, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta_0)$ verifichi la proprietà $SD(\mathcal{K}_0)$ [risp. $SD(s\mathcal{K}_0)$] risulta che $g(E) \subset \theta(Z)$,

si ha che, se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà (εSDb) [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDb)$], risulta che anche $(E, \mu, \mathcal{K}_0, \tau, \varrho, \zeta_0)$ verifica la proprietà (εSDb) [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDb)$]; inoltre se vale anche la condizione (2.2.3) si ha che, se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà (εSDd) [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDd)$], risulta che anche $(E, \mu, \mathcal{K}_0, \tau, \varrho, \zeta_0)$ verifica la proprietà (εSDd) [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDd)$];

c) se $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_0$, se (relativamente a $f = \{0\}$) valgono le condizioni (2.0.5), (2.2.7), se vale

(3.19.2) per ogni $g\colon E \to Z_0$ applicazione non costante tale che $(g, \mu, \varrho, \zeta_0)$ verifichi la proprietà (Cd) [risp. (εCd)] risulta che $g(E) \subset \theta(Z)$,

si ha che, se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(\varepsilon SDa')$ [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDa')$], risulta che anche $(E, \mu, \mathcal{K}_0, \tau, \varrho, \zeta_0)$ verifica la proprietà $(\varepsilon SDa')$ [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDa')$]; inoltre se θ è anche surgettiva si ha che, se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(\varepsilon SDc')$ [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDc')$], risulta che anche $(E, \mu, \mathcal{K}_0, \tau, \varrho, \zeta_0)$ verifica la proprietà $(\varepsilon SDc')$ [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDc')$];

d) se $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}$, se (relativamente a $f = \{0\}$) valgono le condizioni (2.0.3), (2.0.5), (2.2.0), se vale (3.19.1), si ha che, se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(\varepsilon SDb')$ [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDb')$], risulta che anche $(E, \mu, \mathcal{K}_0, \tau, \varrho, \zeta_0)$ verifica la proprietà $(\varepsilon SDb')$ [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDb')$]; inoltre se vale anche la condizione (2.2.3) si ha che, se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(\varepsilon SDd')$ [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDd')$], risulta che anche $(E, \mu, \mathcal{K}_0, \tau, \varrho, \zeta_0)$ verifica la proprietà $(\varepsilon SDd')$ [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDd')$].

Dimostrazione: *a*) Sia $g\colon E \to Z_0$ tale che $(g, \mu, \varrho, \zeta_0)$ verifichi la proprietà (Cf) [risp. (εCf)]. Se g è costante, basta considerare una qualunque $f\colon E \to Z$ costante: poichè $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà (εSDa) [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDa)$] e poichè (f, μ, ϱ, ζ) verifica ovviamente la proprietà (Cf) [risp. (εCf)] si ha che esiste $(K_n)_{n\in N}$ tale che $K_n \in \mathcal{K}$, $\mu(T \setminus K_n) < 1/(n+1)$ $(n \in \mathbf{N})$ e, visto che $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_0$ per ipotesi, si ha quindi che $(g, T_0, \mu, \tau, \varrho, \zeta_0)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K}_0)$ [risp. $SD(\varepsilon\mathcal{K}_0)$] e $(K_n)_{n\in N}$ è relativa a $(g, T_0, \mu, \tau, \varrho, \zeta_0)$ ed a tale proprietà. Se g non è costante, per (3.19.0) risulta che $g(E) \subset \theta(Z)$. Pertanto, se si considera $f\colon E \to Z$ tale che $f(\varepsilon) \in \theta^{-1}(\{g(\varepsilon)\})$ per ogni $\varepsilon \in E$, si ha che $g = \theta \circ f$. Per *b*) del Lemma 3.16 si ha ora che (f, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà (Cf) [risp. (εCf)] e, poichè $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà (εSDa) [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDa)$], risulta che $(f, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K})$ [risp. $SD(\varepsilon\mathcal{K})$]. Per *a*) del Teorema 2.5 si ottiene quindi che $(g, T_0, \mu, \tau, \varrho, \zeta_0)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K}_0)$ [risp. $SD(\varepsilon\mathcal{K}_0)$]. Se invece $(g, \mu, \varrho, \zeta_0)$ verifica la proprietà (μCf) [risp. $(\mu\varepsilon Cf)$] e se θ è surgettiva allora $g(E) \subset \theta(Z)$ e basta procedere in modo del tutto analogo alla seconda parte della dimostrazione di cui sopra.

b) Sia $g\colon E \to Z_0$ tale che $(g, T_0, \mu, \tau, \varrho, \zeta_0)$ verifichi la proprietà $SD(\mathcal{K}_0)$ [risp. $SD(\varepsilon\mathcal{K}_0)$, $SD(\mathcal{K}_0)$, $SD(\varepsilon\mathcal{K}_0)$]. Se g è costante è ovvio che $(g, \mu, \varrho, \zeta_0)$ verifica la proprietà (Cf) [risp. (εCf), (μCf), $(\mu\varepsilon Cf)$]. Se g non è costante, per (3.19.1) risulta che $g(E) \subset \theta(Z)$ e pertanto come in *a*) esiste $f\colon E \to Z$

tale che $g = \theta \circ f$. Da b) del Teorema 2.5 segue che $(f, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K})$ [risp. $SD(s\mathcal{K})$, $SD(\mathcal{K})$, $SD(s\mathcal{K})$] e quindi, poichè $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(cSDb)$ [risp. $(csSDb)$, $(cSDd)$, $(csSDd)$], risulta che (f, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà (Cf) [risp. (sCf), (μCf), (μsCf)]. Ora, come in b) del Teorema 2.0, utilizzando le condizioni (2.0.3) e (2.0.5) relative a $J = \{0\}$, si ottiene che $I(f, \varrho, \zeta) = I(g, \varrho, \zeta_0)$ [risp. $I(s, f, \varrho, \zeta) = I(s, g, \varrho, \zeta_0)$, $I(f, \varrho, \zeta) = I(g, \varrho, \zeta_0)$, $I(s, f, \varrho, \zeta) = I(s, g, \varrho, \zeta_0)$]. Pertanto, se si applica a) del Lemma 3.16 con $D = I(f, \varrho, \zeta)$ [risp. $D = I(s, f, \varrho, \zeta)$, $D = I(f, \varrho, \zeta)$, $D = I(s, f, \varrho, \zeta)$] e $J = \{0\}$, si ottiene che $(g, \mu, \varrho, \zeta_0)$ verifica la proprietà (Cf) [risp. (sCf), (μCf), (μsCf)].

c) Sia $g: E \to Z_0$ tale che $(g, \mu, \varrho, \zeta_0)$ verifichi la proprietà (Cd) [risp. (sCd)]. Se g è costante, basta considerare una qualunque $f: E \to Z$ costante: poichè $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(cSDc)$ [risp. $(csSDc)$] e poichè (f, μ, ϱ, ζ) verifica ovviamente la proprietà (Cd) [risp. (sCd)] si ha che esiste $(K_n)_{n \in N}$ tale che $K_n \in \mathcal{K}$, $\mu(T \setminus K_n) < 1/(n+1)$ $(n \in N)$ e, visto che $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_0$ per ipotesi, risulta che $(g, T_0, \mu, \tau, \varrho, \zeta_0)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K}_0)$ [risp. $SD(s\mathcal{K}_0)$] e $(K_n)_{n \in N}$ è relativa a $(g, T_0, \mu, \tau, \varrho, \zeta_0)$ ed a tale proprietà. Se g non è costante, per (3.19.2) risulta che $g(E) \subset \theta(Z)$ e pertanto come in a) esiste $f: E \to Z$ tale che $g = \theta \circ f$. Da c) del Lemma 3.16 segue ora che (f, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà (Cd) [risp. (sCd)] e, poichè $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(cSDa')$ [risp. $(csSDa')$], risulta che $(f, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K})$ [risp. $SD(s\mathcal{K})$]. Applicando a) del Teorema 2.5 si ottiene allora che $(g, T_0, \mu, \tau, \varrho, \zeta_0)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K}_0)$ [risp. $SD(s\mathcal{K}_0)$]. Se invece $(g, \mu, \varrho, \zeta_0)$ verifica la proprietà (μCd) [risp. (μsCd)] e se θ è surgettiva allora $g(E) \subset \theta(Z)$ e basta procedere in modo del tutto analogo alla seconda parte della dimostrazione di cui sopra.

d) Sia $g: E \to Z_0$ tale che $(g, T_0, \mu, \tau, \varrho, \zeta_0)$ verifichi la proprietà $SD(\mathcal{K}_0)$ [risp. $SD(s\mathcal{K}_0)$, $SD(\mathcal{K}_0)$, $SD(s\mathcal{K}_0)$]. Se g è costante è ovvio che $(g, \mu, \varrho, \zeta_0)$ verifica la proprietà (Cd) [risp. (sCd), (μCd), (μsCd)]. Se g non è costante, per (3.19.1) risulta che $g(E) \subset \theta(Z)$ e quindi come in a) esiste $f: E \to Z$ tale che $g = \theta \circ f$. Per b) del Teorema 2.5 si ha che $(f, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K})$ [risp. $SD(s\mathcal{K})$, $SD(\mathcal{K})$, $SD(s\mathcal{K})$] e pertanto, visto che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(cSDb')$ [risp. $(csSDb')$, $(cSDd')$, $(csSDd')$], risulta che (f, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà (Cd) [risp. (sCd), (μCd), (μsCd)]. Usando ora a) del Lemma 3.16 si conclude che $(g, \mu, \varrho, \zeta_0)$ verifica la proprietà (Cd) [risp. (sCd), (μCd), (μsCd)].

3.20 Lemma: Siano (T, τ), (X, ϱ), (Z, ζ) spazi topologici, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu: \mathfrak{L} \to [0, \infty]$ misura, $\mathcal{K} \subset \mathfrak{L}$, $E \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho)$. Allora, se $g: E \to Z$, risulta che:

a) se $(g, T, \mu, s\tau, s\varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K})$ si ha che $(g, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(s\mathcal{K})$ e vale anche il viceversa nelle seguenti

ipotesi:

(3.20.0) $s(\tau\times\varrho)\subset s\tau\times s\varrho$,

(3.20.1) $s\big((\tau\times\varrho)/(K\times X)\cap E\big)\subset\big(s(\tau\times\varrho)\big)/(K\times X)\cap E$ per ogni $K\in\mathcal{K}$;

b) se $(g, T, \mu, s\tau, s\varrho, s\zeta)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K})$ si ha che $(g, T, \mu, s\tau, s\varrho, \zeta)$ verifica la stessa proprietà $SD(\mathcal{K})$ e vale anche il viceversa nelle ipotesi (3.20.0) e (3.20.1);

c) se vale

(3.20.2) $$s(\varrho/E_t)\subset(s\varrho)/E_t \text{ per ogni } t\in T$$

e se (g, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà (sCf) [risp. (sCd), (μsCf), (μsCd)], si ha che $(g, \mu, s\varrho, \zeta)$ verifica la proprietà (Cf) [risp. (Cd), (μCf), (μCd)];

d) se vale

(3.20.3) $$\mathcal{B}(s\varrho)\subset\mathcal{B}(\varrho)$$

si ottiene che:

d') se $(g, \mu, s\varrho, \zeta)$ verifica la proprietà (Cd) [risp. (μCd)], si ha che (g, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà (sCd) [risp. (μsCd)];

d'') se vale (3.20.2) e se $(g, \mu, s\varrho, \zeta)$ verifica la proprietà (Cf) [risp. (μCf)], si ha che (g, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà (sCf) [risp. (μsCf)];

e) se vale (3.20.2) si ha che: $(g, \mu, s\varrho, s\zeta)$ verifica la proprietà (Cf) se e solo se $(g, \mu, s\varrho, \zeta)$ verifica la stessa proprietà (Cf);

f) se vale (3.20.2) si ottiene che:

se $(g, \mu, s\varrho, s\zeta)$ verifica la proprietà (μCf), si ha che $(g, \mu, s\varrho, \zeta)$ verifica la stessa proprietà (μCf) e vale anche il viceversa nell'ulteriore ipotesi seguente:

(3.20.4) se S è sottospazio separabile di (Z, ζ) risulta che S è sottospazio separabile di $(Z, s\zeta)$;

g) se $(g, \mu, s\varrho, s\zeta)$ verifica la proprietà (Cd) si ha che $(g, \mu, s\varrho, \zeta)$ verifica la stessa proprietà (Cd) e vale anche il viceversa nell'ipotesi (3.20.2);

h) se $(g, \mu, s\varrho, s\zeta)$ verifica la proprietà (μCd), si ha che $(g, \mu, s\varrho, \zeta)$ verifica la stessa proprietà (μCd) e vale anche il viceversa nelle ipotesi (3.20.2) e (3.20.4).

Dimostrazione: *a*) Se $K\in\mathcal{K}$ è tale che

$$g/(K\times X)\cap E:\ \big((K\times X)\cap E, (s\tau\times s\varrho)/(K\times X)\cap E\big)\to(Z,\zeta)$$

sia continua, poichè da *c*) e da *d*) del Teorema 1.1 di [BA 1] segue che

$$(3.20.5)\qquad (s\tau\times s\varrho)/_{(K\times X)\cap E}\subset(s(\tau\times\varrho))/_{(K\times X)\cap E}\subset$$
$$\subset s((\tau\times\varrho)/_{(K\times X)\cap E}),$$

risulta che $g/_{(K\times X)\cap E}\colon ((K\times X)\cap E, s((\tau\times\varrho)/_{(K\times X)\cap E}))\to(Z,\zeta)$ è continua e quindi per l'equivalenza tra f') ed f'') del Teorema 1.1 di [BA 1] si ha che $g/_{(K\times X)\cap E}\colon ((K\times X)\cap E, s((\tau\times\varrho)/_{(K\times X)\cap E}))\to(Z,s\zeta)$ è continua. Viceversa, se valgono (3.20.0) e (3.20.1), allora in (3.20.5) si possono invertire tutte le inclusioni e pertanto se $K\in\mathcal{K}$ è tale che

$$g/_{(K\times X)\cap E}\colon ((K\times X)\cap E, (\tau\times\varrho)/_{(K\times X)\cap E})\to(Z,\zeta)$$

sia sequenzialmente continua, utilizzando di nuovo l'equivalenza tra f') ed f'') del Teorema 1.1 di [BA 1], risulta che

$$g/_{(K\times X)\cap E}\colon ((K\times X)\cap E, (s\tau\times s\varrho)/_{(K\times X)\cap E})\to(Z,\zeta)$$

è continua.

b) Se $K\in\mathcal{K}$ è tale che

$$g/_{(K\times X)\cap E}\colon ((K\times X)\cap E, (s\tau\times s\varrho)/_{(K\times X)\cap E})\to(Z,s\zeta)$$

sia continua, tenendo conto del fatto che $\zeta\subset s\zeta$ per *b*) del Teorema 1.1 di [BA 1], risulta che $g/_{(K\times X)\cap E}\colon ((K\times X)\cap E, (s\tau\times s\varrho)/_{(K\times X)\cap E})\to$ $\to(Z,\zeta)$ è continua. Viceversa, se valgono (3.20.0) e (3.20.1), tenendo conto di (3.20.5) (che vale per ogni $K\in\mathcal{K}$ per *c*) e *d*) del Teorema 1.1 di [BA 1]), per ogni $K\in\mathcal{K}$ risulta che $(s\tau\times s\varrho)/_{(K\times X)\cap E}=s((\tau\times\varrho)/_{(K\times X)\cap E})$ e d'altra parte dall'equivalenza tra f') ed f'') del Teorema 1.1 di [BA 1] se $K\in\mathcal{K}$ segue che $g/_{(K\times X)\cap E}\colon ((K\times X)\cap E, s((\tau\times\varrho)/_{(K\times X)\cap E}))\to$ $\to(Z,\zeta)$ è continua se e solo se

$$g/_{(K\times X)\cap E}\colon ((K\times X)\cap E, s((\tau\times\varrho)/_{(K\times X)\cap E}))\to(Z,s\zeta)$$

è continua, per cui si conclude.

c) Per (3.20.2), per *d*) del Teorema 1.1 di [BA 1] e per l'equivalenza tra f') ed f'') del Teorema 1.1 di [BA 1], se $t\in T$ si ha che $x\in(E_t,\varrho/_{E_t})\mapsto$ $\mapsto g(t,x)\in(Z,\zeta)$ è sequenzialmente continua se e solo se $x\in(E_t,(s\varrho)/_{E_t})\mapsto$ $\mapsto g(t,x)\in(Z,\zeta)$ è continua e quindi $I(s,g,\varrho,\zeta)=I(g,s\varrho,\zeta)$; inoltre da [BA 1]

(b) del Teorema 1.1) segue che $s\varrho \supset \varrho$, da cui $\mathcal{B}(s\varrho) \supset \mathcal{B}(\varrho)$ e che $s\zeta \supset \zeta$, da cui risulta che se S è separabile in $(Z, s\zeta)$ allora S è separabile anche in (Z, ζ); pertanto si conclude.

d) Si ha che $s(\varrho|_{E_t}) \supset (s\varrho)|_{E_t}$ per ogni $t \in T$ (cfr. d) del Teorema 1.1 di [BA 1]) e dall'equivalenza tra f') ed f'') del Teorema 1.1 di [BA 1] se $t \in T$ risulta che $x \in (E_t, s(\varrho|_{E_t})) \mapsto g(t, x) \in (Z, \zeta)$ è continua se e solo se $x \in (E_t, \varrho|_{E_t}) \mapsto g(t, x) \in (Z, \zeta)$ è sequenzialmente continua; pertanto

$$I(g, s\varrho, \zeta) \subset I(s, g, \varrho, \zeta)$$

e si conclude per quanto riguarda d'). Se inoltre vale (3.20.2) si ha che

$$I(g, s\varrho, \zeta) = I(s, g, \varrho, \zeta)$$

e quindi vale anche d'').

e) Poichè vale (3.20.2), poichè si ha che $s(\varrho|_{E_t}) \supset (s\varrho)|_{E_t}$ per ogni $t \in T$ (cfr. d) del Teorema 1.1 di [BA 1]) e per l'equivalenza tra f') ed f'') del Teorema 1.1 di [BA 1], si ottiene che $x \in (E_t, (s\varrho)|_{E_t}) \mapsto g(t, x) \in (Z, s\zeta)$ è continua se e solo se $x \in (E_t, (s\varrho)|_{E_t}) \mapsto g(t, x) \in (Z, \zeta)$ è continua e quindi $I(g, s\varrho, s\zeta) = I(g, s\varrho, \zeta)$ da cui la tesi.

f) La prima parte della tesi segue tenendo conto di e) e del fatto che, poichè $s\zeta \supset \zeta$ (cfr. b) del Teorema 1.1 di [BA 1]), si ha che se S è sottospazio separabile di $(Z, s\zeta)$ allora S è sottospazio separabile anche di (Z, ζ). La seconda parte della tesi segue da e) e dall'ipotesi (3.20.4).

g) Poichè per b) del Teorema 1.1 di [BA 1] si ha che $s\zeta \supset \zeta$, se $t \in T$ è tale che $x \in (E_t, (s\varrho)|_{E_t}) \mapsto g(t, x) \in (Z, s\zeta)$ sia continua, allora anche

$$x \in (E_t, (s\varrho)|_{E_t}) \mapsto g(t, x) \in (Z, \zeta)$$

è continua e pertanto $I(g, s\varrho, s\zeta) \subset I(g, s\varrho, \zeta)$ e si conclude per quanto riguarda la prima parte della tesi. Se inoltre vale (3.20.2) allora come in e) risulta che $I(g, s\varrho, s\zeta) = I(g, s\varrho, \zeta)$ e si conclude.

h) La prima parte della tesi segue da g) e dal fatto che, poichè $s\zeta \supset \zeta$ (cfr. b) del Teorema 1.1 di [BA 1]) si ha che se S è sottospazio separabile di $(Z, s\zeta)$ allora S è sottospazio separabile anche di (Z, ζ). La seconda parte della tesi segue da g) e dall'ipotesi (3.20.4).

3.21 Teorema: Siano (T, τ), (X, ϱ), (Z, ζ), μ, K, E come nel Lemma 3.20. Allora:

a) se vale (3.20.2) e se $(E, \mu, \mathcal{K}, s\tau, s\varrho, \zeta)$ verifica la proprietà (εSDa) [risp. $(\varepsilon SDa')$, (εSDc), $(\varepsilon SDc')$] si ha che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(\varepsilon\varepsilon SDa)$ [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDa')$, $(\varepsilon\varepsilon SDc)$, $(\varepsilon\varepsilon SDc')$];

b) se vale (3.20.2) e se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(\varepsilon\varepsilon SDb)$ [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDb')$, $(\varepsilon\varepsilon SDd)$, $(\varepsilon\varepsilon SDd')$] si ha che $(E, \mu, \mathcal{K}, s\tau, s\varrho, \zeta)$ verifica la proprietà (εSDb) [risp. $(\varepsilon SDb')$, (εSDd), $(\varepsilon SDd')$];

c) se valgono (3.20.0), (3.20.1), (3.20.2) e (3.20.3) e se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(\varepsilon\varepsilon SDa)$ [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDc)$] si ha che $(E, \mu, \mathcal{K}, s\tau, s\varrho, \zeta)$ verifica la proprietà (εSDa) [risp. (εSDc)];

d) se valgono (3.20.0), (3.20.1), (3.20.2) e (3.20.3) e se $(E, \mu, \mathcal{K}, s\tau, s\varrho, \zeta)$ verifica la proprietà (εSDb) [risp. (εSDd)] si ha che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(\varepsilon\varepsilon SDb)$ [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDd)$];

e) se valgono (3.20.0), (3.20.1) e (3.20.3) e se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(\varepsilon\varepsilon SDa')$ [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDc')$] si ha che $(E, \mu, \mathcal{K}, s\tau, s\varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(\varepsilon SDa')$ [risp. $(\varepsilon SDc')$];

f) se valgono (3.20.0), (3.20.1) e (3.20.3) e se $(E, \mu, \mathcal{K}, s\tau, s\varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(\varepsilon SDb')$ [risp. $(\varepsilon SDd')$] si ha che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(\varepsilon\varepsilon SDb')$ [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDd')$];

g) se valgono (3.20.0), (3.20.1) e (3.20.2) e se $(E, \mu, \mathcal{K}, s\tau, s\varrho, \zeta)$ verifica la proprietà (εSDa) [risp. (εSDc)], si ha che $(E, \mu, \mathcal{K}, s\tau, s\varrho, s\zeta)$ verifica la stessa proprietà (εSDa) [risp. (εSDc)];

h) se valgono (3.20.0), (3.20.1) e (3.20.2) e se $(E, \mu, \mathcal{K}, s\tau, s\varrho, s\zeta)$ verifica la proprietà (εSDb) [risp. (εSDd)] si ha che $(E, \mu, \mathcal{K}, s\tau, s\varrho, \zeta)$ verifica la stessa proprietà (εSDb) [risp. (εSDd)];

i) se valgono (3.20.0) e (3.20.1) e se $(E, \mu, \mathcal{K}, s\tau, s\varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(\varepsilon SDa')$ [risp. $(\varepsilon SDc')$] si ha che $(E, \mu, \mathcal{K}, s\tau, s\varrho, s\zeta)$ verifica la stessa proprietà $(\varepsilon SDa')$ [risp. $(\varepsilon SDc')$];

j) se valgono (3.20.0) e (3.20.1) e se $(E, \mu, \mathcal{K}, s\tau, s\varrho, s\zeta)$ verifica la proprietà $(\varepsilon SDb')$ [risp. $(\varepsilon SDd')$] si ha che $(E, \mu, \mathcal{K}, s\tau, s\varrho, \zeta)$ verifica la stessa proprietà $(\varepsilon SDb')$ [risp. $(\varepsilon SDd')$];

k) se vale (3.20.2) si ottiene che:

k') se $(E, \mu, \mathcal{K}, s\tau, s\varrho, \zeta)$ verifica la proprietà (εSDb) [risp. $(\varepsilon SDb')$] si ha che $(E, \mu, \mathcal{K}, s\tau, s\varrho, s\zeta)$ verifica la stessa proprietà (εSDb) [risp. $(\varepsilon SDb')$];

k'') se vale (3.20.4) e se $(E, \mu, \mathcal{K}, s\tau, s\varrho, \zeta)$ verifica la proprietà (εSDd) [risp. $(\varepsilon SDd')$] si ha che $(E, \mu, \mathcal{K}, s\tau, s\varrho, s\zeta)$ verifica la stessa proprietà (εSDd) [risp. $(\varepsilon SDd')$];

l) se vale (3.20.2) si ottiene che:

l') se $(E, \mu, \mathcal{K}, s\tau, s\varrho, s\zeta)$ verifica la proprietà (εSDa) [risp. $(\varepsilon SDa')$] si ha che $(E, \mu, \mathcal{K}, s\tau, s\varrho, \zeta)$ verifica la stessa proprietà (εSDa) [risp. $(\varepsilon SDa')$];

l') se vale (3.20.4) e se $(E, \mu, \mathcal{K}, s\tau, s\varrho, s\zeta)$ verifica la proprietà $(sSDc)$ [risp. $(sSDc')$] si ha che $(E, \mu, \mathcal{K}, s\tau, s\varrho, \zeta)$ verifica la stessa proprietà $(sSDc)$ [risp. $(sSDc')$].

Dimostrazione: *a*), *b*) Seguono entrambe da *a*) e *c*) del Lemma 3.20.

c), *d*), *e*), *f*) Sono tutte conseguenze di *a*) e *d*) del Lemma 3.20.

g), *h*) Discendono entrambe da *b*), *e*) ed *f*) del Lemma 3.20.

i), *j*) Si deducono da *b*), *g*) e *h*) del Lemma 3.20.

k'), *l'*) Si ottengono applicando *b*), *e*) e *g*) del Lemma 3.20.

k''), *l''*) Sono conseguenze di *b*), *f*) e *h*) del Lemma 3.20.

3.22 Corollario: Siano (T, τ), (X, ϱ), μ, $\mathcal{K}$, E come nel Lemma 3.20. Allora:

a) se vale (3.20.2) e se $(E, \mu, \mathcal{K}, s\tau, s\varrho)$ verifica la proprietà (SDa) [risp. (SDa')] si ha che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $(sSDa)$ [risp. $(sSDa')$];

b) se vale (3.20.2) e se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $(sSDb)$ [risp. $(sSDb')$] si ha che $(E, \mu, \mathcal{K}, s\tau, s\varrho)$ verifica la proprietà (SDb) [risp. (SDb')];

c) se valgono (3.20.0), (3.20.1) e (3.20.3) [risp. se valgono (3.20.0), (3.20.1), (3.20.2) e (3.20.3)] e se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $(sSDa')$ [risp. $(sSDa)$] si ha che $(E, \mu, \mathcal{K}, s\tau, s\varrho)$ verifica la proprietà (SDa') [risp. (SDa)];

d) se valgono (3.20.0), (3.20.1) e (3.20.3) [risp. se valgono (3.20.0), (3.20.1), (3.20.2) e (3.20.3)] e se $(E, \mu, \mathcal{K}, s\tau, s\varrho)$ verifica la proprietà (SDb') [risp. (SDb)] si ha che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $(sSDb')$ [risp. $(sSDb)$].

Dimostrazione: Se σ_s è la topologia della semicontinuità inferiore su $[-\infty, \infty]$, come visto nella dimostrazione del Teorema 1.20 *b*) risulta che: se (Y, σ) è uno spazio topologico e $b: Y \to [-\infty, \infty]$, si ha che b è s.c.i. [risp. s.s.c.i.] se e solo se $b: (Y, \sigma) \to ([-\infty, \infty], \sigma_s)$ è continua [risp. sequenzialmente continua]. Inoltre risulta ovviamente che $\mathcal{B}(\sigma_s) = \mathcal{B}(\bar{\eta})$. Pertanto, se (S, θ) è uno spazio topologico, $\mathcal{M}$ σ-algebra su S, $\nu: \mathcal{M} \to [0, \infty]$ misura, $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$, $D \in \mathcal{M} \times \mathcal{B}(\sigma)$, si ha che $(D, \nu, \mathcal{K}, \theta, \sigma)$ verifica la proprietà (SDa) [risp. (SDa'), (SDb), (SDb'), $(sSDa)$, $(sSDa')$, $(sSDb)$, $(sSDb')$] se e solo se $(D, \nu, \mathcal{K}, \theta, \sigma, \sigma_s)$ verifica la proprietà $(sSDa)$ [risp. $(sSDa')$, $(sSDb)$, $(sSDb')$, $(ssSDa)$, $(ssSDa')$, $(ssSDb)$, $(ssSDb')$]. Allora *a*), *b*), *c*), *d*) seguono rispettivamente da *a*), da *b*), da *c*) ed *e*), da *d*) ed *f*) del Teorema 3.21.

3.23 Osservazione: *a*) Si noti che le ipotesi (3.20.0), (3.20.1) e (3.20.2) non sono sempre verificate (cfr. [BA 1], Esempi 1.3 *b*), 1.2 *c*)). Per una discussione più ampia sull'argomento si può vedere anche [F 1] (Esempio 1.8, Proposizione 1.9, Esempio 1.11) e [F 2] (Proposizione 5.2, Proposizione 5.8).

b) Si noti che anche l'ipotesi (3.20.3) non è sempre verificata, come mostra l'esempio 3.24 *a*) e che d'altra parte esistono spazi topologici (X, ϱ) con $\varrho \neq s\varrho$ e con $\mathcal{B}(\varrho) = \mathcal{B}(s\varrho)$, come si vede con l'Esempio 3.24 *b*).

c) Si noti infine che l'ipotesi (3.20.4) è verificata anche da alcuni spazi topologici (X, ϱ) con $\varrho \neq s\varrho$ (v. Esempi 3.24 *a*) e *b*)); ma che, anche se tale ipotesi è verificata da (X, ϱ), non è detto che, se $A \subset X$, un insieme numerabile che sia denso in $(A, \varrho|_A)$ sia denso anche in $(A, (s\varrho)|_A)$ (v. Esempio 3.24 *b*)).

3.24 Esempi: *a*) Siano $X = \mathbf{R}$ e $\varrho = \{A \subset \mathbf{R}: \mathbf{R} \setminus A$ è al più numerabile$\} \cup \cup \{\emptyset\}$. Allora in (X, ϱ) convergono solo le successioni definitivamente costanti e quindi $s\varrho = \varkappa$. Si ha che (X, ϱ) non verifica la condizione (3.20.3) mentre verifica la condizione (3.20.4).

Infatti $\mathcal{B}(\varrho) = \varrho \cup \{B \subset \mathbf{R}: B$ al più numerabile$\}$, mentre $\mathcal{B}(\varkappa) = 2^{\mathbf{R}}$ e inoltre S è sottospazio separabile di $(\mathbf{R}, \varrho)$ se e solo se S è al più numerabile e così accade anche per $(\mathbf{R}, \varkappa)$.

b) Sia X spazio di Hilbert separabile e di dimensione infinita su $\mathbf{R}$, $\varrho = w(X)$. Allora per [BA 1] (Esempio 1.2 *a*)) risulta che $s\varrho \neq \varrho$. Si ha però che (X, ϱ) verifica entrambe le condizioni (3.20.3) e (3.20.4).

Infatti ogni sfera chiusa di X è chiusa in $w(X)$ e pertanto è in $\mathcal{B}(w(X))$; quindi anche ogni sfera aperta, come unione numerabile di sfere chiuse, è in $\mathcal{B}(w(X))$. Pertanto $\mathcal{B}(w(X)) = \mathcal{B}(s(X))$ e d'altra parte, poichè $s(X)$ è a base numerabile di intorni, per *b*) del Teorema 1.1 di [BA 1] si ha che $sw(X) = s(X)$ e quindi $w(X) \subset sw(X) \subset s(X)$, da cui

$$\mathcal{B}(w(X)) = \mathcal{B}(sw(X)) = \mathcal{B}(s(X)) .$$

Inoltre, poichè $(X, s(X))$ è metrico e separabile, è a base numerabile di aperti e quindi ogni suo sottospazio è a base numerabile di aperti e pertanto separabile. D'altra parte $w(X) \subset sw(X) \subset s(X)$; perciò risulta che ogni sottoinsieme S di X è sottospazio separabile sia di $(X, w(X))$ che di $(X, sw(X))$.

Infine, se si considera $A = \{\sqrt{n+1}\, e_n : n \in \mathbf{N}\} \cup \{0\}$, ove $\{e_n : n \in \mathbf{N}\}$ è un sistema O.N.C. in X, risulta che

$$\{\sqrt{n+1}\, e_n : n \in \mathbf{N}\} = \overline{\{\sqrt{n+1}\, e_n : n \in \mathbf{N}\}}^{w(X)} \quad \text{e} \quad 0 \in \overline{\{\sqrt{n+1}\, e_n : n \in \mathbf{N}\}}^{sw(X)}$$

(cfr. Esempio 1.2 *a*) di [BA 1]) e pertanto $\{\sqrt{n+1}\, e_n : n \in \mathbf{N}\}$ è denso in $(A, w(X)|_A)$ e non è denso in $(A, (sw(X))|_A)$.

3.25 Teorema: Siano (T, τ), (X, ϱ), (Z, ζ) spazi topologici, $\mathfrak{C}$ σ-algebra su T, $\mu: \mathfrak{C} \to [0, \infty]$ misura, $\mathcal{K} \subset \mathfrak{C}$, $E \in \mathfrak{C} \times \mathcal{B}(\varrho)$ e ζ sia metrizzabile e separabile. Allora:

a) se vale

(3.25.0) $\bigcap_{n\in N} K_n \in \mathcal{K}$ per ogni $(K_n)_{n\in N}$ tale che $K_n \in \mathcal{K}$ per ogni $n \in N$

e se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \eta)$ verifica la proprietà $(cSDa)$ [risp. $(csSDa)$], risulta che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la stessa proprietà $(cSDa)$ [risp. $(csSDa)$];

b) se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \eta)$ verifica la proprietà $(cSDb)$ [risp. $(csSDb)$], risulta che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la stessa proprietà $(cSDb)$ [risp. $(csSDb)$];

c) se vale (3.25.0) e se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \eta)$ verifica la proprietà $(cSDa')$ [risp. $(csSDa')$], risulta che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la stessa proprietà $(cSDa')$ [risp. $(csSDa')$];

d) se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \eta)$ verifica la proprietà $(cSDb')$ [risp. $(csSDb')$], risulta che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la stessa proprietà $(cSDb')$ [risp. $(csSDb')$].

Dimostrazione: Per [*K*] (Cap. 4, Teorema 16) esistono Z' sottospazio topologico di R^N e $\Phi: Z \to Z'$ omeomorfismo. Sia ora $p_m: R^N \to R$ la proiezione sull'm-simo fattore di R^N $(m \in N)$. Per concludere basta provare che si possono applicare rispettivamente *a'*), *b'*), *c'*), *d'*) del Teorema 3.18 a (T, τ), (X, ϱ), (Z, ζ), (Z_m, ζ_m), $\mathcal{C}$, μ, $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_m$, $p_m \circ \Phi$, E $(m \in N)$, ove $(Z_m, \zeta_m) = (R, \eta)$ e $\mathcal{K}_m = \mathcal{K}$ per ogni $m \in N$. Si ha che

(3.25.1) ζ è la topologia iniziale delle ζ_m rispetto alle $p_m \circ \Phi$ $(m \in N)$.

Infatti $\{p_m^{-1}(A): A \in \eta, m \in N\}$ è una sottobase di aperti per la topologia canonica di R^N; pertanto $\{p_m^{-1}(A) \cap Z': A \in \eta, m \in N\}$ è una sottobase di aperti per la topologia di Z' come sottospazio topologico di R^N; utilizzando ora il fatto che Φ è un omeomorfismo si ottiene che

$$\{(p_m \circ \Phi)^{-1}(A) = (p_m/_{Z'} \circ \Phi)^{-1}(A) =$$
$$= \Phi^{-1}((p_m/_{Z'})^{-1}(A)) = \Phi^{-1}(p_m^{-1}(A) \cap Z'): A \in \eta, m \in N\}$$

è una sottobase di aperti per Z e pertanto vale (3.25.1). Ora, tenendo conto del fatto che $s\zeta = \zeta$ e $s\eta = \eta$ per *b*) del Teorema 1.1 di [BA 1] e del fatto che ζ è a base numerabile di aperti essendo metrizzabile e separabile, da (3.25.1) seguono (2.0.3), (2.0.5), (2.2.0), (2.2.6), (2.2.7) e inoltre (2.5.0) è conseguenza di (3.25.0), per cui si conclude.

3.26 Teorema: Siano (T, τ), (X, ϱ), (Z, ζ) spazi topologici, $\mathcal{C}$ σ-algebra su T, $\mu: \mathcal{C} \to [0, \infty]$ misura, $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}$, $E \in \mathcal{C} \times \mathcal{B}(\varrho)$ e

(3.26.0) esistano X_0 al più numerabile, $X_0 \subset X$, $T^0 \in \mathcal{C}$ con $\mu(T \setminus T^0) = 0$ tali che $\overline{X_0 \cap E_t^0} = E_t^0$ [risp. $\overline{X_0 \cap E_t^{*0}} = E_t^{*0}$] per ogni $t \in T^0$.

Allora, se $((C\times X)\cap E, \mu/_{(\mathfrak{C}/_C)}, \{K\in\mathcal{K}: K\subset C\}, \tau/_C, \varrho, \zeta/_W)$ verifica la proprietà (ιSDa) [risp. $(\iota\iota SDa)$] per ogni $C\in\mathfrak{C}$ con $\mu(T\setminus C)=0$ e per ogni $W\subset Z$ tale che $\zeta/_W$ sia separabile, si ha che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica le proprietà (ιSDc) e $(\iota SDc')$ [risp. $(\iota\iota SDc)$ e $(\iota\iota SDc')$].

Dimostrazione: Poichè da $a)$ del Teorema 3.14 segue ovviamente che se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(\iota SDc')$ [risp. $(\iota\iota SDc')$] allora $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà (ιSDc) [risp. $(\iota\iota SDc)$], basta provare che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(\iota SDc')$ [risp. $(\iota\iota SDc')$].

Sia $f: E\to Z$ tale che (f, μ, ϱ, ζ) verifichi la proprietà (μCd) [risp. $(\mu\iota Cd)$] e sia D relativo a (f, μ, ϱ, ζ) ed a tale proprietà. Allora per ogni $x\in X_0$ esiste $T(x)\subset D\cap T^0$ tale che $T(x)\in\mathfrak{C}$, $\mu(T\setminus T(x))=0$ e $t\in T(x)\cap E^x\mapsto f(t,x)\in Z$ ha rango contenuto in $A(x)$, sottospazio separabile di (Z, ζ). Quindi, se $T'=\bigcap_{x\in X_0} T(x)$, si ha che $T'\in\mathfrak{C}$, $\mu(T\setminus T')=0$ e per ogni $x\in X_0$ risulta che $\{f(t,x): t\in T'\cap E^x\}\subset A(x)$. Pertanto $\bigcup_{x\in X_0}\{f(t,x): t\in T'\cap E^x\}\subset\bigcup_{x\in X_0} A(x)$, che è separabile e, se $A=\overline{\bigcup_{x\in X_0} A(x)}$, si ha che A è separabile e

$$\overline{\bigcup_{x\in X_0}\{f(t,x): t\in T'\cap E^x\}}\subset A\,.$$

Inoltre, se $(t,x)\in(T'\times X)\cap E$, visto che $T'\subset T^0$ e per (3.26.0), esistono $(I, \succ)$ insieme diretto e $x_i\in X_0\cap E_t$ $(i\in I)$ tali che $\lim_{i\in I} x_i=x$ in ϱ [risp. in $\iota\varrho$]; allora $t\in T'\cap E^{x_i}$ per ogni $i\in I$, per cui $f(t,x_i)\in A$ per ogni $i\in I$ ed inoltre, visto che $T'\subset D\subset I(f, \varrho, \zeta)$ [risp. $T'\subset D\subset I(\iota, f, \varrho, \zeta)$], risulta che $\lim_{i\in I} f(t,x_i)=f(t,x)$ in ζ [risp. in ζ, ove si tenga conto dell'equivalenza tra $f^{\prime}$) ed $f^{\prime\prime}$) del Teorema 1.1 di [BA 1]] e quindi $f(t,x)\in A$. Allora $f((T'\times X)\cap E)\subset A$, che è separabile. Utilizzando ora l'ipotesi sulla verifica della proprietà (ιSDa) [risp. $(\iota\iota SDa)$] per $((T'\times X)\cap E, \mu/_{(\mathfrak{C}/_{T'})}, \{K\in\mathcal{K}: K\subset T'\}, \tau/_{T'}, \varrho, \zeta/_A)$ si ottiene che $(f/_{(T'\times X)\cap E}, T', \mu/_{(\mathfrak{C}/_{T'})}, \tau/_{T'}, \varrho, \zeta/_A)$ verifica la proprietà $SD(\{K\in\mathcal{K}: K\subset T'\})$ [risp. $SD(\iota\{K\in\mathcal{K}: K\subset T'\})$] e quindi, siccome $T'\in\mathfrak{C}$, $\mu(T\setminus T')=0$, si ha che $(f, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K})$ [risp. $SD(\iota\mathcal{K})$].

3.27 Osservazioni: $a)$ Si noti che la stessa idea usata all'inizio della dimostrazione del Teorema 3.25 era già comparsa in [Ca 1] (Teorema 3.1).

$b)$ Si noti che, se (T, τ), (X, ϱ) sono spazi topologici, $\mathfrak{C}$ σ-algebra su T, $\mu: \mathfrak{C}\to[0, \infty]$ misura, $E\in\mathfrak{C}\times\mathcal{B}(\varrho)$, allora la parte non sequenziale della condizione (3.26.0) è implicata dalla seguente condizione

(3.27.0) (X, ϱ) è separabile ed esiste $T^0\in\mathfrak{C}$ con $\mu(T\setminus T^0)=0$ tale che per ogni $t\in T^0$ esista $A(t)\in\varrho$ per cui $A(t)\subset E_t\subset\overline{A(t)}^{\varrho}$;

naturalmente, se in (3.27.0) si sostituisce ϱ con $s\varrho$ si ottiene l'analoga condizione che implica la parte sequenziale della condizione (3.26.0).

Se vale (3.27.0) e se si considera X_0 al più numerabile, $X_0 \subset X$ tale che $X_0^\varrho = X$ allora per ogni $t \in T^\varrho$, essendo $A(t) \in \varrho$, risulta che $\overline{X_0 \cap A(t)}^\varrho \supset \supset A(t)$ e pertanto, visto che $A(t) \subset E_t \subset \overline{A(t)}^\varrho$, risulta che

$$\overline{X_0 \cap E_t}^\varrho \supset \overline{X_0 \cap A(t)}^\varrho \supset \overline{A(t)}^\varrho \supset E_t$$

e quindi $\overline{X_0 \cap E_t}^\varrho = \overline{E_t}^\varrho$.

3.28 Osservazioni: *a*) Si noti che, se (Z, ζ) è uno spazio topologico, continuano a valere il Lemma 2.0 ed i Teoremi 2.1, 2.3 e 2.4 di [BA 1] anche se si sostituiscono ad f, $f_{i,j}$, T^ϱ, $T^\varrho_{i,j}$, (2.4.3), (2.4.4) rispettivamente le applicazioni $g\colon E \to Z$, $g_{i,j}\colon E_{i,j} \to Z$, gli insiemi

$$D^\varrho = \{t \in T\colon x \in E_t \mapsto g(t, x) \in Z \text{ è continua [risp. sequenzialmente continua]}\}$$

e

$$D^\varrho_{i,j} = \{t \in T_i\colon y \in (E_{i,j})_t \mapsto g_{i,j}(t, y) \in Z \text{ è continua [risp. sequenzialmente continua]}\} \quad (i \in I,\ j \in J)$$

e le condizioni seguenti:

« $(g, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K})$ [risp. $SD(s\mathcal{K})$] »,

« $(g_{i,j}, T_i, \mu_i, \tau_i, \varrho_j, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K}_{i,j})$ [risp. $SD(s\mathcal{K}_{i,j})$] per ogni $i \in I$, $j \in J$ ».

Le dimostrazioni rimangono le stesse (con le ovvie sostituzioni di « s.c.i. », « s.s.c.i. » rispettivamente con « continua », « sequenzialmente continua » e degli insiemi del tipo $]a, \infty]$ (con $a \in [-\infty, \infty]$) con insiemi $A \in \zeta$ [risp. $A \in s\zeta$]).

Inoltre, tenendo conto dell'Osservazione 1.33 *a*), il Teorema 2.4 di [BA 1] continua a valere con le sostituzioni di cui sopra e con le ulteriori sostituzioni di (2.4.2), « $\mu/(\zeta/_{(T \setminus F)})$ è $\{K \in \mathcal{K}\colon K \subset T \setminus F\}$-i.r. », (2.4.6) rispettivamente con (1.33.0), (1.33.1), (1.33.2).

b) Tenendo conto dell'Osservazione *a*) e con una dimostrazione del tutto analoga a quella fatta nel Lemma 3.4 si può dimostrare anche il seguente lemma, che permette (insieme al Lemma 3.30 e tenendo conto dell'Osservazione 3.12) di ottenere risultati analoghi a quelli visti nei n. 3.6 e 3.9.

3.29 Lemma: Valga A) del Lemma 3.4 e sia (Z, ζ) spazio topologico. Inoltre siano $g: E \to Z$, $g_{i,j}: E_{i,j} \to Z$ tali che $g_{i,j} = g \circ ((\psi_i \times \varphi_j)/_{E_{i,j}})$ per ogni $i \in I$, $j \in J$. Allora:

a) se $E \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho)$, se valgono le condizioni (2.1.0), (2.3.0), (2.3.1) di [BA 1], se (g, μ, ϱ, ζ) verifica la condizione (Cd) [risp. (sCd)] e D è relativo a (g, μ, ϱ, ζ) ed a tale proprietà, si ha che

(3.29.0) $E_{i,j} \in \mathfrak{L}_i \times \mathfrak{B}(\varrho_j)$, $\psi_i^{-1}(D) \in \mathfrak{L}_i$, $\psi_i^{-1}(D) \subset I(g_{i,j}, \varrho, \zeta)$ [risp. $\psi_i^{-1}(D) \subset \subset I(s, g_{i,j}, \varrho, \zeta)$] e $g_{i,j}/_{(\psi_i^{-1}(D) \times X_j) \cap E_{i,j}}$ è $(\mathfrak{L}_i \times \mathfrak{B}(\varrho_j))/_{(\psi_i^{-1}(D) \times X_j) \cap E_{i,j}}$-misurabile per ogni $i \in I$, $j \in J$;

b) se valgono le condizioni (2.4.0), (2.4.1) di [BA 1], se vale (1.33.0) e se $(g, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K})$ [risp. $SD(s\mathcal{K})$] si ha che $(g_{i,j}, T_i, \mu_i, \tau_i, \varrho_j, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K}_{i,j})$ [risp. $SD(s\mathcal{K}_{i,j})$] per ogni $i \in I$, $j \in J$;

c) se $J \subset \mathbf{N}$, se $E_{i,j} \in \mathfrak{L}_i \times \mathfrak{B}(\varrho_j)$ per ogni $i \in I$, $j \in J$, se valgono le condizioni (2.1.0), (2.1.4), (2.1.5), (2.3.4) di [BA 1], se vale (3.4.1) e se $(g_{i,j}, \mu_i, \varrho_j, \zeta)$ verifica la proprietà (Cf) [risp. (sCf)] per ogni $i \in I$, $j \in J$, si ha che $E \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho)$ e (g, μ, ϱ, ζ) verifica la stessa proprietà (Cf) [risp. (sCf)];

d) se $J \subset \mathbf{N}$, se $F \in \mathfrak{L}$ verifica (3.4.2), se vale almeno uno dei due gruppi di condizioni i) e ii) del Teorema 2.4 di [BA 1] (ove in i) si sostituisca a (2.4.6) di [BA 1] la condizione (1.33.2)) e se $(g_{i,j}, T_i, \mu_i, \tau_i, \varrho_j, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K}_{i,j})$ [risp. $SD(s\mathcal{K}_{i,j})$] per ogni $i \in I$, $j \in J$, si ha che $(g, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K})$ [risp. $SD(s\mathcal{K})$];

e) se $J \subset \mathbf{N}$, se $E_{i,j} \in \mathfrak{L}_i \times \mathfrak{B}(\varrho_j)$ per ogni $i \in I$, $j \in J$, se valgono le condizioni (2.1.0), (2.1.4), (2.1.5), (2.3.4) di [BA 1], se valgono (3.3.1) e (3.4.3) e se $(g_{i,j}, \mu_i, \varrho_j, \zeta)$ verifica la proprietà (Cd) [risp. (sCd)] per ogni $i \in I$, $j \in J$, si ha che $E \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho)$ e (g, μ, ϱ, ζ) verifica la stessa proprietà (Cd) [risp. (sCd)].

3.30 Lemma: Valga A) del Lemma 3.4; siano inoltre (Z, ζ) spazio topologico, $g: E \to Z$, $g_{i,j}: E_{i,j} \to Z$ tali che $g_{i,j} = g \circ ((\psi_i \times \varphi_j)/_{E_{i,j}})$ per ogni $i \in I$, $j \in J$ e sia $D \subset \bigcup_{i \in I} \psi_i(T_i)$. Allora:

a) se valgono le seguenti condizioni

(3.30.0) $\psi_i^{-1}(A) \in \mathfrak{L}_i$ per ogni $A \in \mathfrak{L}$ e per ogni $i \in I$

(3.30.1) $\mu_i(\psi_i^{-1}(A)) = 0$ per ogni $A \in \mathfrak{L}$ per cui $\mu(A) = 0$ e per ogni $i \in I$

e se vale

(3.30.2) $D \in \mathfrak{L}$ e per ogni $x \in X$ esiste $D(x) \in \mathfrak{L}$, $D(x) \subset D \cap E^x$, tale che sia $\mu((D \cap E^x) \setminus D(x)) = 0$ e $\{g(t, x): t \in D(x)\}$ sia contenuto in un sottospazio separabile di (Z, ζ),

si ha che vale

(3.30.3) $\psi_i^{-1}(D) \in \mathfrak{C}_i$ $(i \in I)$ e per ogni $i \in I$, $j \in J$ e per ogni $y \in X_j$ esiste $D_{i,j}(y) \in \mathfrak{C}_i$, $D_{i,j}(y) \subset \psi_i^{-1}(D) \cap (E_{i,j})^y$, tale che sia $\mu_i\big((\psi_i^{-1}(D) \cap \cap (E_{i,j})^y) \setminus D_{i,j}(y)\big) = 0$ e $\{g_{i,j}(t, y) : t \in D_{i,j}(y)\}$ sia contenuto in un sottospazio separabile di (Z, ζ);

b) se valgono le seguenti condizioni

(3.30.4) I è al più numerabile, $X = \bigcup_{i \in I} \varphi_i(X_i)$,

(3.30.5) $\psi_i(A) \in \mathfrak{C}$ per ogni $A \in \mathfrak{C}_i$ e per ogni $i \in I$,

(3.30.6) $\psi_i^{-1}(\psi_i(A)) = A$ per ogni $A \in \mathfrak{C}_i$ e per ogni $i \in I$,

(3.30.7) $\mu(A) = 0$ per ogni $A \in \mathfrak{C}$ tale che esistano $B_i \in \mathfrak{C}_i$ $(i \in I)$ per cui $\psi_i^{-1}(A) \subset B_i$ e $\mu_i(B_i) = 0$ $(i \in I)$

e se vale (3.30.3), si ha che vale (3.30.2).

Dimostrazione: *a*) Valgano (3.30.0), (3.30.1) e (3.30.2). Da (3.30.0) e dal fatto che $D \in \mathfrak{C}$ segue che $\psi_i^{-1}(D) \in \mathfrak{C}_i$ per ogni $i \in I$. Si proverà ora (3.30.3) con $D_{i,j}(y) = \psi_i^{-1}\big(D(\varphi_j(y))\big)$ $(y \in X_j,\ i \in I,\ j \in J)$. Siano $i \in I$, $j \in J$ e $y \in X_j$. Allora da (3.30.0) e dal fatto che $D(\varphi_j(y)) \in \mathfrak{C}$ segue che $\psi_i^{-1}\big(D(\varphi_j(y))\big) \in \mathfrak{C}_i$. Risulta inoltre che

(3.30.8) $$\psi_i^{-1}(D \cap E^{\varphi_j(y)}) = \psi_i^{-1}(D) \cap (E_{i,j})^y.$$

Infatti si ha che:

(3.30.9) $$(E_{i,j})^y = ((\psi_i \times \varphi_j)^{-1}(E))^y = \{t \in T_i : (t, y) \in (\psi_i \times \varphi_j)^{-1}(E)\} = \\ = \{t \in T_i : (\psi_i(t), \varphi_j(y)) \in E\} = \{t \in T_i : \psi_i(t) \in E^{\varphi_j(y)}\} = \psi_i^{-1}(E^{\varphi_j(y)})$$

e quindi

$$\psi_i^{-1}(D \cap E^{\varphi_j(y)}) = \psi_i^{-1}(D) \cap \psi_i^{-1}(E^{\varphi_j(y)}) = \psi_i^{-1}(D) \cap (E_{i,j})^y.$$

Poichè inoltre per (3.30.2) si ha che $D(\varphi_j(y)) \subset D \cap E^{\varphi_j(y)}$, da (3.30.8) segue che

$$\psi_i^{-1}\big(D(\varphi_j(y))\big) \subset \psi_i^{-1}(D) \cap (E_{i,j})^y.$$

Da (3.30.8) si deduce anche che

$$\mu_i\Big(\big(\psi_i^{-1}(D) \cap (E_{i,j})^y\big) \setminus \psi_i^{-1}\big(D(\varphi_j(y))\big)\Big) = \mu_i\Big(\psi_i^{-1}(D \cap E^{\varphi_j(y)}) \setminus \psi_i^{-1}\big(D(\varphi_j(y))\big)\Big) = \\ = \mu_i\Big(\psi_i^{-1}\big((D \cap E^{\varphi_j(y)}) \setminus D(\varphi_j(y))\big)\Big) = 0,$$

ove l'ultima eguaglianza è conseguenza di (3.30.1) e di (3.30.2).

Risulta infine che

$\{g_{i,j}(t,y): t \in \psi_i^{-1}(D(\psi_j(y)))\}$ è contenuto in un sottospazio separabile di (Z, ζ).

Infatti $t \in \psi_i^{-1}(D(\psi_j(y)))$ se e solo se $\psi_i(t) \in D(\psi_j(y))$ e, visto che $g_{i,j}(t,y) = g(\psi_i(t), \psi_j(y))$, risulta che

$$\{g_{i,j}(t,y): t \in \psi_i^{-1}(D(\psi_j(y)))\} =$$
$$= \{g(\psi_i(t), \psi_j(y)): t \in T_i \text{ per cui } \psi_i(t) \in D(\psi_j(y))\} \subset \{g(t, \psi_j(y)): t \in D(\psi_j(y))\},$$

ove l'ultimo insieme è contenuto in un sottospazio separabile di (Z, ζ) per (3.30.2).

b) Valgano (3.30.4), (3.30.5), (3.30.6), (3.30.7) e (3.30.3). Per (3.30.4) e (3.30.5) risulta che $D = \bigcup_{i \in I} \psi_i(\psi_i^{-1}(D)) \in \mathfrak{L}$. Per (3.30.4), per ogni $x \in X$ esistono $j_x \in J$ e $y_x \in X_{j_x}$ tali che $\psi_{j_x}(y_x) = x$. Si proverà allora (3.30.2) con $D(x) = \bigcup_{i \in I} \psi_i(D_{i,j_x}(y_x))$ $(x \in X)$. Sia $x \in X$. Poichè per (3.30.3) si ha che $D_{i,j_x}(y_x) \in \mathfrak{L}_i$ per ogni $i \in I$, da (3.30.5) segue che $\psi_i(D_{i,j_x}(y_x)) \in \mathfrak{L}$ per ogni $i \in I$ e quindi per (3.30.4) si ha che $\bigcup_{i \in I} \psi_i(D_{i,j_x}(y_x)) \in \mathfrak{L}$. Inoltre, visto che $D_{i,j_x}(y_x) \subset \psi_i^{-1}(D) \cap (E_{i,j_x})^{y_x}$ $(i \in I)$ per (3.30.3) e visto che da (3.30.9) segue

$$(3.30.10) \qquad \psi_i^{-1}(D) \cap (E_{i,j_x})^{y_x} = \psi_i^{-1}(D) \cap \psi_i^{-1}(E^{\psi_{j_x}(y_x)}) =$$
$$= \psi_i^{-1}(D \cap E^{\psi_{j_x}(y_x)}) = \psi_i^{-1}(D \cap E^x) \qquad (i \in I),$$

risulta che

$$D_{i,j_x}(y_x) \subset \psi_i^{-1}(D \cap E^x) \qquad (i \in I)$$

e quindi

$$\psi_i(D_{i,j_x}(y_x)) \subset D \cap E^x \qquad (i \in I),$$

da cui

$$\bigcup_{i \in I} \psi_i(D_{i,j_x}(y_x)) \subset D \cap E^x.$$

Risulta anche che

$$(3.30.11) \qquad \psi_i^{-1}\Big((D \cap E^x) \setminus \Big(\bigcup_{i \in I} \psi_i(D_{i,j_x}(y_x))\Big)\Big) \subset \psi_i^{-1}\big((D \cap E^x) \setminus \psi_i(D_{i,j_x}(y_x))\big) =$$
$$= \psi_i^{-1}(D \cap E^x) \setminus \psi_i^{-1}(\psi_i(D_{i,j_x}(y_x))) = \psi_i^{-1}(D \cap E^x) \setminus D_{i,j_x}(y_x) \quad (i \in I),$$

ove per l'ultima eguaglianza si è tenuto conto di (3.30.6).

Ora, tenendo conto di (3.30.10) e di (3.30.3), risulta che

$$\mu_i(\psi_i^{-1}(D \cap E^x) \setminus D_{i,j_x}(y_x)) = 0 \text{ per ogni } i \in I$$

e pertanto da (3.30.11) e da (3.30.7) segue che

$$\mu\Big((D\cap E^c)\setminus\Big(\bigcup_{i\in I}\psi_i(D_{i,j_i}(y_i))\Big)\Big)=0\,.$$

Risulta infine che

$\Big\{g(t,x):t\in\bigcup_{i\in I}\psi_i(D_{i,j_i}(y_i))\Big\}$ è contenuto in un sottospazio separabile di (Z,ζ).

Infatti per ogni $t\in\bigcup_{i\in I}\psi_i(D_{i,j_i}(y_i))$ esistono $i_t\in I$ e $s_t\in D_{i_t,j_{i_t}}(y_{i_t})$ tali che $\psi_{i_t}(s_t)=t$ e quindi

$$g(t,x)=g(\psi_{i_t}(s_t),\psi_{i_t}(y_{i_t}))=(g\circ(\psi_{i_t}\times\psi_{i_t})/_{E_{i_t,i_t}})(s_t,y_{i_t})=g_{i_t,j_{i_t}}(s_t,y_{i_t})\,,$$

per cui

$$\Big\{g(t,x):t\in\bigcup_{i\in I}\psi_i(D_{i,j_i}(y_i))\Big\}\subset\bigcup_{i\in I}\{g_{i,j_i}(s,y_i):s\in D_{i,j_i}(y_i)\}\,,$$

che è contenuto in un sottospazio separabile di (Z,ζ) per (3.30.3) e (3.30.4).

§ 4. - Estensioni del teorema di Scorza-Dragoni

4.0 Lemma: Siano $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu:\mathfrak{L}\to[0,\infty]$ misura completa, (X,d) spazio pseudo-metrico e separabile, $E\in\mathfrak{L}\times\mathfrak{B}(\tau_d)$, $N\in\mathfrak{L}$, $\mu(N)=0$, $I\subset(N\times X)\cap E$ tale che I_t sia chiuso in $\tau_d/_{E_t}$ per ogni $t\in N$. Allora $I\in\mathfrak{L}\times\mathfrak{B}(\tau_d)$.

Dimostrazione: Sia $\{x_n:n\in\mathbf{N}\}$ denso in (X,τ_d). Allora:

$$I=\Big(\bigcap_{m\in\mathbf{N}}\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\Big[\Big[pr_T\Big(I\cap\big(T\times S_d(x_n,1/(m+1))\big)\Big)\Big]\times S_d(x_n,1/(m+1))\Big]\Big)\cap E\,.$$

È infatti ovvia l'inclusione del primo membro nel secondo. Sia ora $(t,x)\in E\setminus I$; esiste dunque $m_t\in\mathbf{N}$ tale che $1/(m_t+1)<d(x,I_t)$ e quindi $(t,x)\notin\Big[pr_T\Big(I\cap\big(T\times S_d(x_n,1/(2(m_t+1)))\big)\Big)\Big]\times S_d(x_n,1/(2(m_t+1)))$ per ogni $n\in\mathbf{N}$.

4.1 Teorema: Siano (T,τ), (X,ϱ) spazi topologici, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mathfrak{L}\supset\mathfrak{B}(\tau)$, $\mu:\mathfrak{L}\to[0,\infty]$ misura, $E\in\mathfrak{L}\times\mathfrak{B}(\varrho)$, $\mathcal{K}\subset\mathfrak{L}$. Allora:

a) se uno almeno tra (T,τ) e (X,ϱ) è a base numerabile di aperti, si ha che $(E,\mu,\mathcal{K},\tau,\varrho)$ verifica la proprietà (SDb');

b) se μ è completa, se esiste una pseudo-metrica d su X tale che sia $\varrho=\tau_d$ e se ϱ è separabile, risulta che $(E,\mu,\mathcal{K},\tau,\varrho)$ verifica la proprietà (SDb).

Dimostrazione: Sia $f:E\to[-\infty,\infty]$ tale che (f,T,μ,τ,ϱ) verifichi la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ e sia $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tale che $K_n\in\mathcal{K}$, $\mu(T\setminus K_n)<1/(n+1)$,

$f|_{(K_n \times X) \cap E}$ s.c.i. per ogni $n \in \mathbf{N}$. Allora $I(f, \varrho) \supset \bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n$ e $\mu\left(T \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\right)\right) < \mu(T \setminus K_m) < 1/(m+1)$ per ogni $m \in \mathbf{N}$, da cui $\mu\left(T \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\right)\right) = 0$. Se ora $a \in [-\infty, \infty]$ si ha che

$$\left(f|_{\left(\left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\right) \times X\right) \cap E}\right)^{-1}([-\infty, a]) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \left(f|_{(K_n \times X) \cap E}\right)^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{L} \times \mathcal{B}(\varrho)$$

in quanto per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta che $\left(f|_{(K_n \times X) \cap E}\right)^{-1}([-\infty, a])$ è chiuso in $(\tau \times \varrho)|_{(K_n \times X) \cap E}$ e quindi è intersezione di $(K_n \times X) \cap E \in \mathcal{L} \times \mathcal{B}(\varrho)$ con un insieme chiuso in $\tau \times \varrho$ e pertanto in $\mathcal{B}(\tau \times \varrho) = \mathcal{B}(\tau) \times \mathcal{B}(\varrho) \subset \mathcal{L} \times \mathcal{B}(\varrho)$, ove si è tenuto conto di [BA 1] (Teorema 1.5 *a*)) e del fatto che sia nelle ipotesi di *a*) che nelle ipotesi di *b*) risulta che uno almeno tra (T, τ) e (X, ϱ) è a base numerabile di aperti.

Se vale *a*) si ha la tesi considerando $D = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n$.

Se vale *b*), tenendo conto della completezza di μ e del fatto che $I(f, \varrho) \supset \bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n$, risulta che $I(f, \varrho) \in \mathcal{L}$, $\mu(T \setminus I(f, \varrho)) = 0$; inoltre se $a \in [-\infty, \infty]$ si ha che

$$\left(f|_{(I(f, \varrho) \times X) \cap E}\right)^{-1}([-\infty, a]) = \left(f|_{\left(\left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\right) \times X\right) \cap E}\right)^{-1}([-\infty, a]) \cup \left\{(t, x) \in \left(\left(I(f, \varrho) \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\right)\right) \times X\right) \cap E : f(t, x) \leq a\right\} \in \mathcal{L} \times \mathcal{B}(\varrho),$$

in quanto il primo dei due insiemi considerati è in $\mathcal{L} \times \mathcal{B}(\varrho)$ per quanto già dimostrato sopra e per provare che il secondo è in $\mathcal{L} \times \mathcal{B}(\varrho)$ basta utilizzare il Lemma 4.0.

4.2 Teorema: Siano (T, τ), (X, ϱ), (Z, ζ) spazi topologici, $\mathcal{L}$ σ-algebra su T, $\mathcal{L} \supset \mathcal{B}(\tau)$, $\mu : \mathcal{L} \to [0, \infty]$ misura, $E \in \mathcal{L} \times \mathcal{B}(\varrho)$, $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$. Allora, se valgono le ipotesi di *a*) [risp. di *b*)] del Teorema 4.1, si ha che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(cSDb')$ [risp. $(cSDb)$]. Se inoltre vale almeno una delle due seguenti condizioni:

i) $K \cap E^x$ è sottospazio separabile di (T, τ) per ogni $x \in X$ e per ogni $K \in \mathcal{K}$;

ii) $K \cap E^x$ è compatto in τ per ogni $x \in X$ e per ogni $K \in \mathcal{K}$ e (Z, ζ) è pseudo-metrizzabile,

si ha anche che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(cSDa')$ [risp. $(cSDa)$].

Dimostrazione: Sia $g : E \to Z$ tale che $(g, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifichi la proprietà $SD(\mathcal{K})$ e sia $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tale che $K_n \in \mathcal{K}$, $\mu(T \setminus K_n) < 1/(n+1)$, $g|_{(K_n \times X) \cap E}$

continua per ogni $n \in \mathbf{N}$. Allora come nella dimostrazione del Teorema 4.1 si ha che

$$I(g, \varrho, \zeta) \supset \bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n, \ \mu\Big(T \setminus \Big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\Big)\Big) = 0 \text{ e } \Big(g/\Big(\Big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\Big) \times X\Big) \cap E\Big)^{-1}(A) \in \mathfrak{T} \times \mathfrak{B}(\varrho)$$

per ogni A chiuso in ζ. Inoltre considerando $D = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n$ se valgono le ipotesi di *a*) del Teorema 4.1 ed utilizzando il Lemma 4.0 se valgono le ipotesi di *b*) del Teorema 4.1 si conclude per quanto riguarda la verifica delle proprietà ($\mathcal{S}D b'$) e ($\mathcal{S}D b$). Per provare la seconda parte della tesi, si può notare che se vale i) [risp. se vale ii)] $\{g(t, x): t \in K_n \cap E^x\}$ è separabile [risp. compatto] in ζ per ogni $x \in X$, $n \in \mathbf{N}$ in quanto $K_n \cap E^x$ è separabile [risp. compatto] in τ e $g/(K_n \times X) \cap E$ è continua ($x \in X$, $n \in \mathbf{N}$). Pertanto in ogni caso risulta che $\{g(t, x): t \in K_n \cap E^x\}$ è separabile ($x \in X$, $n \in \mathbf{N}$), poichè se vale ii) si ha che (Z, ζ) è pseudo-metrizzabile; quindi è separabile anche $\Big\{g(t, x): t \in \Big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n\Big) \cap E^x\Big\}$.

4.3 Lemma: Sia (X, ϱ) spazio topologico a base numerabile di aperti. Allora esistono un insieme Φ numerabile, i cui elementi sono funzioni $\varphi: X \to [0, \infty[$ s.c.i., ed una funzione $\zeta: [0, \infty] \to [-\infty, \infty]$ continua e crescente tali che, se T è un insieme, $E \subset T \times X$, $f: E \to [-\infty, \infty]$, $x \in E_t \mapsto f(t, x) \in [-\infty, \infty]$ è s.c.i. per ogni $t \in T$, si abbia

$$f(t, x) = \zeta\Big(\sup_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) \chi_{A_\varphi}(t)\Big) \text{ per ogni } (t, x) \in E,$$

ove $A_\varphi = \{t \in T: f(t, y) > \zeta(\varphi(y)) \text{ per ogni } y \in E_t\}$ per ogni $\varphi \in \Phi$.

Dimostrazione: Siano $\mathfrak{U}$ base numerabile di aperti per ϱ e

$$\Phi = \{k\chi_U: U \in \mathfrak{U}, k \in \mathbf{Q} \cap [0, \infty[\}.$$

Allora, se $D \subset X$, $g: D \to [0, \infty]$ è s.c.i., si ha che

$$g = \sup \{\varphi/_D: \varphi \in \Phi, \varphi/_D \leq g\}. \tag{4.3.0}$$

Infatti il primo membro è ovviamente non inferiore al secondo; viceversa se $x \in D$ è tale che $g(x) > 0$ e $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ è tale che $\varepsilon < g(x)$ si consideri $k \in \mathbf{Q}$ tale che $\varepsilon < k < g(x)$ e $U \in \mathfrak{U}$ tale che $x \in U \cap D \subset \{y \in D: k < g(x)\} \in \varrho/_D$ (si è sfruttato che $\{U \cap D: U \in \mathfrak{U}\}$ è una base di aperti per $(D, \varrho/_D)$). Allora $(k\chi_U)/_D \leq g$, $k\chi_U \in \Phi$ e $k\chi_U(x) = k$ e pertanto vale (4.3.0).

Sia ora $\theta: [-\infty, \infty] \to [0, \infty]$ tale che $\theta(y) = e^y$ se $y \in \mathbf{R}$, $\theta(-\infty) = 0$, $\theta(\infty) = \infty$. Poichè θ è continua e crescente, si ha che $x \in E_t \mapsto (\theta \circ f)(t, x) \in$

$\in [0, \infty]$ è s.c.i. per ogni $t \in T$ e quindi da (4.3.0) segue che

$$(\theta \circ f)(t, x) =$$
$$= \sup \{\varphi(x) : \varphi \in \Phi,\ \varphi(y) < (\theta \circ f)(t, y) \text{ per ogni } y \in E_t\} \text{ per ogni } (t, x) \in E$$

e pertanto se $\zeta = \theta^{-1}$ risulta che

$$f(t, x) = \zeta(\sup \{\varphi(x) : \varphi \in \Phi,\ (\zeta \circ \varphi)(y) < f(t, y) \text{ per ogni } y \in E_t\})$$
$$\text{per ogni } (t, x) \in E$$

e tenendo conto del fatto che

$$\{\varphi \in \Phi : (\zeta \circ \varphi)(y) < f(t, y) \text{ per ogni } y \in E_t\} = \{\varphi \in \Phi : t \in A_\varphi\} \text{ per ogni } t \in T$$

si ottiene la tesi.

4.4 Lemma: Siano $\mathfrak{C}$ σ-algebra su T, (X, ϱ) spazio topologico a base numerabile di aperti, $E \in \mathfrak{C} \times \mathcal{B}(\varrho)$, $f : E \to [-\infty, \infty]$ tale che $x \in E_t \mapsto f(t, x) \in [-\infty, \infty]$ sia s.c.i. per ogni $t \in T$.

Allora, se vale almeno una delle due seguenti condizioni:

a) esiste X_0 al più numerabile, $X_0 \subset X$ tale che $\overline{X_0 \cap E_t} = \overline{E_t}$ per ogni $t \in T$, $t \in E^x \mapsto f(t, x) \in [-\infty, \infty]$ è $\mathfrak{C}/_{E^x}$-misurabile per ogni $x \in X$ e $x \in E_t \mapsto$ $\mapsto f(t, x) \in [-\infty, \infty]$ è continua per ogni $t \in T$

b) (X, ϱ) è susliniano, $\mu : \mathfrak{C} \to [0, \infty]$ misura completa, f è $(\mathfrak{C} \times \mathcal{B}(\varrho))/_E$-misurabile,

si ha che $A_\varphi \in \mathfrak{C}$ per ogni $\varphi \in \Phi$, ove A_φ $(\varphi \in \Phi)$, Φ e ζ sono come nel Lemma 4.3.

Dimostrazione: Se vale *a*) siano $\varphi \in \Phi$, $x \in X$ e

$$A_{\varphi, x} = \{t \in E^x : f(t, x) > \zeta(\varphi(x))\} \cup (T \setminus E^x).$$

Poichè $t \in E^x \mapsto f(t, x) \in [-\infty, \infty]$ è $\mathfrak{C}/_{E^x}$-misurabile, si ha allora che $A_{\varphi, x} \in \mathfrak{C}$ e quindi anche $\bigcap_{x \in X_0} A_{\varphi, x} \in \mathfrak{C}$. D'altra parte $\bigcap_{x \in X_0} A_{\varphi, x} = A_\varphi$. Infatti

$$\bigcap_{x \in X_0} A_{\varphi, x} = \{t \in T : f(t, x) > \zeta(\varphi(x)) \text{ per ogni } x \in X_0 \cap E_t\}$$

e pertanto è ovvio che $A_\varphi \subset \bigcap_{x \in X_0} A_{\varphi, x}$; viceversa se $t \in \bigcap_{x \in X_0} A_{\varphi, x}$ e se $y \in E_t$ allora esistono $x_n \in X_0 \cap E_t$ $(n \in \mathbf{N})$ tali che $x_n \to y$ e quindi, tenendo conto del fatto che $\zeta \circ \varphi$ è s.c.i. e $f(t, \cdot)$ è continua, risulta che

$$\zeta(\varphi(y)) < \liminf_{n \to \infty} \zeta(\varphi(x_n)) < \liminf_{n \to \infty} f(t, x_n) = f(t, y)$$

da cui segue che $t \in A_\varphi$.

Valga ora $b)$ e sia $\varphi \in \Phi$. Allora, tenendo conto del fatto che $\zeta \circ \varphi$ è $\mathcal{B}(\varrho)$-misurabile e che f è $(\mathfrak{L} \times \mathcal{B}(\varrho))/_E$-misurabile, si ha che

$$\widetilde{A}_\varphi = \{(t, x) \in E : f(t, x) < \zeta(\varphi(x))\} \in \mathfrak{L} \times \mathcal{B}(\varrho)$$

e quindi per [CV] (Teorema III.23) risulta che $T \setminus pr_T \widetilde{A}_\varphi \in \mathfrak{L}$. D'altra parte si ha ovviamente che $T \setminus pr_T \widetilde{A}_\varphi = A_\varphi$.

4.5 Lemma: Siano (T, τ) spazio topologico, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu : \mathfrak{L} \to [0, \infty]$ misura $\mathcal{K}$-i.r. ove $\mathcal{K} \subset \{$chiusi di $\tau\}$ è tale che $\mathcal{K} \subset \mathfrak{L}$, $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} K_n \in \mathcal{K}$ per ogni famiglia $\{K_n : n \in \mathbf{N}\} \subset \mathcal{K}$, $\bigcup_{i \in I} K_i \in \mathcal{K}$ per ogni I finito e per ogni famiglia $\{K_i : i \in I\} \subset \mathcal{K}$, (X, ϱ) spazio topologico a base numerabile di aperti, $E \in \mathfrak{L} \times \mathcal{B}(\varrho)$, $f : E \to [-\infty, \infty]$, $D \in \mathfrak{L}$, $\mu(T \setminus D) = 0$, $D \subset \{t \in T : x \in E_t \mapsto f(t, x) \in [-\infty, \infty]$ è s.c.i.$\}$ [risp. $D \subset \{t \in T : x \in E_t \mapsto f(t, x) \in [-\infty, \infty]$ è continua$\}$]. Siano Φ, ζ come nel Lemma 4.3 e siano $A_\varphi = \{t \in D : f(t, y) > \zeta(\varphi(y))$ per ogni $y \in E_t\}$ [risp. $B_\varphi = \{t \in D : f(t, y) > \zeta(\varphi(y))$ per ogni $y \in E_t\}$, $C_\varphi = \{t \in D : -f(t, y) > \zeta(\varphi(y))$ per ogni $y \in E_t\}$] $(\varphi \in \Phi)$. Se $A_\varphi \in \mathfrak{L}$ [risp. $B_\varphi, C_\varphi \in \mathfrak{L}$] per ogni $\varphi \in \Phi$, allora $(f, T, \mu, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ [risp. $(f, T, \mu, \tau, \varrho, \eta)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K})$].

Dimostrazione: Per il Lemma 4.3 si ha che

$$(4.5.0) \qquad f(t, x) = \zeta\left(\sup_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) \chi_{A_\varphi}(t)\right) \text{ per ogni } (t, x) \in (D \times X) \cap E$$
$$\left[\text{risp. } f(t, x) = \zeta\left(\sup_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) \chi_{B_\varphi}(t)\right) \text{ e } -f(t, x) = \zeta\left(\sup_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) \chi_{C_\varphi}(t)\right) \text{ per ogni } (t, x) \in (D \times X) \cap E\right].$$

Poichè Φ è numerabile esistono $\varepsilon_\varphi \in \mathbf{R}_+$ $(\varphi \in \Phi)$ tali che $\sum_{\varphi \in \Phi} \varepsilon_\varphi = 1$.

Sia ora $\varphi \in \Phi$; visto che $A_\varphi \in \mathfrak{L}$ [risp. $B_\varphi, C_\varphi \in \mathfrak{L}$] esistono $K^1_{n,\varphi}, K^2_{n,\varphi} \in \mathcal{K}$ [risp. $H^1_{n,\varphi}, H^2_{n,\varphi}, H^3_{n,\varphi}, H^4_{n,\varphi} \in \mathcal{K}$] $(n \in \mathbf{N})$ tali che $K^1_{n,\varphi} \subset A_\varphi$, $K^2_{n,\varphi} \subset D \setminus A_\varphi$, $\mu(A_\varphi \setminus K^1_{n,\varphi}) < \varepsilon_\varphi/(2(n+1))$, $\mu((D \setminus A_\varphi) \setminus K^2_{n,\varphi}) < \varepsilon_\varphi/(2(n+1))$ [risp. $H^1_{n,\varphi} \subset B_\varphi$, $H^2_{n,\varphi} \subset D \setminus B_\varphi$, $H^3_{n,\varphi} \subset C_\varphi$, $H^4_{n,\varphi} \subset D \setminus C_\varphi$, $\mu(B_\varphi \setminus H^1_{n,\varphi}) < \varepsilon_\varphi/(4(n+1))$, $\mu((D \setminus B_\varphi) \setminus H^2_{n,\varphi}) < \varepsilon_\varphi/(4(n+1))$, $\mu(C_\varphi \setminus H^3_{n,\varphi}) < \varepsilon_\varphi/(4(n+1))$, $\mu((D \setminus C_\varphi) \setminus H^4_{n,\varphi}) < \varepsilon_\varphi/(4(n+1))$] $(n \in \mathbf{N})$ e, poichè $\mathcal{K} \subset \{$chiusi di $\tau\}$, se $K_{n,\varphi} = K^1_{n,\varphi} \cup K^2_{n,\varphi}$ [risp. $H'_{n,\varphi} = H^1_{n,\varphi} \cup H^2_{n,\varphi}$, $H''_{n,\varphi} = H^3_{n,\varphi} \cup H^4_{n,\varphi}$] $(n \in \mathbf{N})$, risulta che $\chi_{A_\varphi}/_{K_{n,\varphi}}$ [risp. $\chi_{B_\varphi}/_{H'_{n,\varphi}}$, $\chi_{C_\varphi}/_{H''_{n,\varphi}}$] sono continue $(n \in \mathbf{N})$ e d'altra parte $K_{n,\varphi} \in \mathcal{K}$, $\mu(D \setminus K_{n,\varphi}) < \varepsilon_\varphi/(n+1)$ [risp. $H'_{n,\varphi}, H''_{n,\varphi} \in \mathcal{K}$, $\mu(D \setminus H'_{n,\varphi}) < \varepsilon_\varphi/(2(n+1))$, $\mu(D \setminus H''_{n,\varphi}) < \varepsilon_\varphi/(2(n+1))$] $(n \in \mathbf{N})$.

Pertanto, se $K_n = \bigcap_{\varphi \in \Phi} K_{n,\varphi}$ [risp. $H_n = \bigcap_{\varphi \in \Phi} (H'_{n,\varphi} \cap H''_{n,\varphi})$] $(n \in \mathbf{N})$ si ha che $K_n \in \mathcal{K}$, $\mu(T \setminus K_n) \leq \mu(T \setminus D) + \mu(D \setminus K_n) \leq \sum_{\varphi \in \Phi} \varepsilon_\varphi/(n+1) = 1/(n+1)$ [risp. $H_n \in \mathcal{K}$, $\mu(T \setminus H_n) < 1/(n+1)$] $(n \in \mathbf{N})$ e $\chi_{A_\varphi}/_{K_n}$ [risp. $\chi_{B_\varphi}/_{H_n}$, $\chi_{C_\varphi}/_{H_n}$] sono

continue ($n \in \mathbf{N}$, $\varphi \in \Phi$); quindi $(t, x) \in K_n \times X \mapsto \chi_{A_n}(t)\varphi(x) \in [0, \infty[$ [risp. $(t, x) \in H_n \times X \mapsto \chi_{B_n}(t)\varphi(x) \in [0, \infty[$ e $(t, x) \in H_n \times X \mapsto \chi_{C_n}(t)\varphi(x) \in [0, \infty[$] sono s.c.i. ($n \in \mathbf{N}$, $\varphi \in \Phi$). Allora, tenendo conto del fatto che l'estremo superiore di funzioni s.c.i. è s.c.i. e del fatto che $\zeta \circ \psi$: $(Y, \sigma) \to [-\infty, \infty]$ è s.c.i. se ψ: $(Y, \sigma) \to [0, \infty]$ è s.c.i. (ove (Y, σ) è uno spazio topologico) in quanto ζ è continua e crescente, da (4.5.0) segue che $f\!\!\!/_{(K_n \times X) \cap E}$ è s.c.i. [risp. $f\!\!\!/_{(H_n \times X) \cap E}$ è s.c.i., $-f\!\!\!/_{(H_n \times X) \cap E}$ è s.c.i., per cui $f\!\!\!/_{(H_n \times X) \cap E}$ è continua] per ogni $n \in \mathbf{N}$.

4.6 Teorema: Siano (T, τ) spazio topologico, $\mathfrak{C}$ σ-algebra su T, μ: $\mathfrak{C} \to [0, \infty]$ misura $\mathcal{K}$-i.r. ove $\mathcal{K}$ è come nel Lemma 4.5, (X, ϱ) spazio topologico a base numerabile di aperti, $E \in \mathfrak{C} \times \mathcal{B}(\varrho)$. Allora:

a) se μ è completa, (X, ϱ) è suslíniano, risulta che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica le proprietà (SDa) e (SDa');

b) se esistono X_0 al più numerabile, $X_0 \subset X$, $T^0 \in \mathfrak{C}$ con $\mu(T \setminus T^0) = 0$ tali che $\overline{X_0 \cap E_t} = \overline{E_t}$ per ogni $t \in T^0$, risulta che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \bar{\eta})$ verifica le proprietà $(cSDa)$ e $(cSDa')$.

Dimostrazione: Siano Φ e ζ come nel Lemma 4.3.

a) Sia f: $E \to [-\infty, \infty]$ tale che (f, μ, ϱ) verifichi la proprietà (INd) e sia D relativo a (f, μ, ϱ) ed a tale proprietà. Applicando il Lemma 4.4 (di cui vale l'ipotesi *b*)) a D, $\mathfrak{C}/_D$, (X, ϱ), $(D \times X) \cap E$, $f\!\!\!/_{(D \times X) \cap E}$ si ottiene che l'insieme A_φ del Lemma 4.5 è in $\mathfrak{C}$ per ogni $\varphi \in \Phi$. Utilizzando ora il Lemma 4.5 si ottiene che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà (SDa') e quindi (per *a*) del Teorema 3.2) anche la proprietà (SDa).

b) Per *a*) del Teorema 3.14 basta provare che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \bar{\eta})$ verifica la proprietà $(cSDa')$. Sia f: $E \to [-\infty, \infty]$ tale che $(f, \mu, \varrho, \bar{\eta})$ verifichi la proprietà (Cd) e sia D' relativo a $(f, \mu, \varrho, \bar{\eta})$ ed a tale proprietà. Applicando il Lemma 4.4 (di cui vale l'ipotesi *a*)) a $D' \cap T^0$, $\mathfrak{C}/_{D' \cap T^0}$, (X, ϱ), $((D' \cap T^0) \times X) \cap E$, una prima volta a $f\!\!\!/_{((D' \cap T^0) \times X) \cap E}$ ed una seconda volta a $-f\!\!\!/_{((D' \cap T^0) \times X) \cap E}$ si ottiene che

$$\{t \in D' \cap T^0 : f(t, y) > \zeta(\varphi(y)) \text{ per ogni } y \in E_t\},$$

$$\{t \in D' \cap T^0 : -f(t, y) > \zeta(\varphi(y)) \text{ per ogni } y \in E_t\} \in \mathfrak{C}$$

per ogni $\varphi \in \Phi$. Applicando ora il Lemma 4.5 con $D = D' \cap T^0$ si ottiene che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \bar{\eta})$ verifica la proprietà $(cSDa')$.

4.7 Lemma: Siano $\mathfrak{C}$ σ-algebra su T, (X, ϱ) spazio topologico pseudo-metrizzabile e separabile, $E \in \mathfrak{C} \times \mathcal{B}(\varrho)$. Allora le due seguenti condizioni sono equivalenti:

a) esiste X_0 al più numerabile, $X_0 \subset X$ tale che $\overline{X_0 \cap E_t} = \overline{E_t}$ per ogni $t \in T$;

b) esistono $a_k : E \to X$ applicazioni $(\mathfrak{C} \times \mathcal{B}(\varrho))/_E$-misurabili e a valori numerabili ($k \in \mathbf{N}$) tali che $a_k(t, x) \in E_t$ per ogni $(t, x) \in E$, $k \in \mathbf{N}$ e $\lim_{k \to \infty} a_k(t, x) = x$ per ogni $(t, x) \in E$.

Dimostrazione: Se vale *b*) basta considerare $X_0 = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} a_k(E)$. Allora X_0 è al più numerabile, $X_0 \subset X$ e se $(t, x) \in E$ allora $x = \lim_{k \to \infty} a_k(t, x)$, ove $a_k(t, x) \in X_0 \cap E_t$ per ogni $k \in \mathbf{N}$. Viceversa se vale *a*) sia $\{x_n : n \in \mathbf{N}\} = X_0$, sia d pseudo-metrica su X tale che $\varrho = \tau_d$ e sia $a_k : E \to X$ tale che $a_k(t, x) = x_{n(k,t,x)}$ ove $n(k, t, x) = \min A(k, t, x) \in \mathbf{N}$ e $A(k, t, x) = \{n \in \mathbf{N} : x_n \in E_t$ e $x \in S_d(x_n, 1/(k+1))\}$ che è non vuoto visto che da *a*) segue che

$$S_d(x, 1/(k+1)) \cap X_0 \cap E_t \neq \emptyset \qquad (k \in \mathbf{N}, (t, x) \in E).$$

Allora a_k sono a valori numerabili, $a_k(t, x) \in E_t \cap S_d(x, 1/(k+1))$ ($k \in \mathbf{N}$, $(t, x) \in E$) e quindi $\lim_{k \to \infty} a_k(t, x) = x$ per ogni $(t, x) \in E$. Si ha infine che

$$a_k^{-1}(\{x_n\}) = E \cap \Big(\big(E^{x_n} \times S_d(x_n, 1/(k+1))\big) \setminus \bigcup_{m<n} \big(E^{x_m} \times S_d(x_m, 1/(k+1))\big) \Big) \in$$
$$\in \mathfrak{C} \times \mathcal{B}(\varrho) \text{ per ogni } k, n \in \mathbf{N}$$

e, poichè $a_k(E) \subset X_0$ per ogni $k \in \mathbf{N}$, risulta che a_k è $(\mathfrak{C} \times \mathcal{B}(\varrho))/_E$-misurabile per ogni $k \in \mathbf{N}$.

4.8 Teorema: Siano $\mathfrak{C}$ σ-algebra su T, (X, ϱ) spazio topologico a base numerabile di aperti, $D \in \mathfrak{C}$, $E \in \mathfrak{C} \times \mathcal{B}(\varrho)$ tale che esista X_0 al più numerabile, $X_0 \subset X$ per cui $\overline{X_0 \cap E_t} = \overline{E_t}$ per ogni $t \in D$, (Z, ζ) spazio topologico, $f : E \to Z$, $D \subset \{t \in T : x \in E_t \mapsto f(t, x) \in Z$ è continua$\}$, $D \in \mathfrak{C}$. Allora, se vale almeno una delle due seguenti condizioni:

i) $(Z, \zeta) = ([-\infty, \infty], \mathfrak{i})$

ii) (X, ϱ) è pseudo-metrizzabile,

sono equivalenti i due seguenti fatti:

a) $t \in D \cap E^x \mapsto f(t, x) \in Z$ è $\mathfrak{C}/_{(D \cap E^x)}$-misurabile per ogni $x \in X$

b) $f/_{(D \times X) \cap E}$ è $(\mathfrak{C} \times \mathcal{B}(\varrho))/_{(D \times X) \cap E}$-misurabile.

Dimostrazione: È ovvio che da *b*) segue *a*).

Viceversa valga *a*). Se vale i) e se Φ e ζ sono come nel Lemma 4.3, per il Lemma 4.3 applicato a D, (X, ϱ), $(D \times X) \cap E$, $f/_{(D \times X) \cap E}$ si ha che

$$f(t, x) = \zeta\Big(\sup_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) \chi_{A_\varphi}(t)\Big) \text{ per ogni } (t, x) \in (D \times X) \cap E,$$

ove $A_\varphi = \{t \in D : f(t, y) > \zeta(\varphi(y))$ per ogni $y \in E_t\}$ per ogni $\varphi \in \Phi$.

Applicando ora il Lemma 4.4 a D, $\mathfrak{L}/_D$, (X, ϱ), $(D\times X)\cap E$, $f/_{(D\times X)\cap E}$ si ottiene che $A_\varphi \in \mathfrak{L}$ per ogni $\varphi \in \Phi$ e quindi, visto che ogni $\varphi \in \Phi$ è s.c.i., risulta che

$$(t, x) \in T\times X \mapsto \varphi(x)\,\chi_{A_\varphi}(t) \in [0, \infty[\text{ è } (\mathfrak{L}\times\mathcal{B}(\varrho))\text{-misurabile per ogni } \varphi \in \Phi .$$

Poichè Φ è numerabile e ζ è continua si ha pertanto che $f/_{(D\times X)\cap E}$ è $(\mathfrak{L}\times\mathcal{B}(\varrho))/_{(D\times X)\cap E}$-misurabile. Se invece vale ii) allora dal Lemma 4.7 applicato a D, (X, ϱ), $(D\times X)\cap E$ segue che esistono a_k: $(D\times X)\cap E \to X$ applicazioni $(\mathfrak{L}\times\mathcal{B}(\varrho))/_{(D\times X)\cap E}$-misurabili e a valori numerabili tali che $a_k(t, x) \in X_0 \cap E_t$ per ogni $(t, x) \in (D\times X)\cap E$, $k \in \mathbf{N}$ e $\lim_{k\to\infty} a_k(t, x) = x$ per ogni $(t, x) \in (D\times X)\cap E$. Pertanto, se f_k: $(D\times X)\cap E \to Z$, $f_k(t, x) = f(t, a_k(t, x))$ per ogni $(t, x) \in (D\times X)\cap E$, $k \in \mathbf{N}$, per ogni $y \in X_0$ risulta che $f_k(t, x) = f(t, y)$ per ogni $(t, x) \in a_k^{-1}(\{y\}) \in \mathfrak{L}\times\mathcal{B}(\varrho)$ e da a) segue che $(t, x) \in a_k^{-1}(\{y\}) \mapsto f(t, y) \in Z$ è $(\mathfrak{L}\times\mathcal{B}(\varrho))/_{a_k^{-1}(\{y\})}$-misurabile e d'altra parte

$$\bigcup_{y\in X_0} a_k^{-1}(\{y\}) = (D\times X)\cap E \qquad (k \in \mathbf{N}) ;$$

quindi, visto che X_0 è al più numerabile, risulta che f_k è

$$(\mathfrak{L}\times\mathcal{B}(\varrho))/_{(D\times X)\cap E}\text{-misurabile per ogni } k \in \mathbf{N}.$$

Inoltre $\lim_{k\to\infty} f_k(t, x) = \lim_{k\to\infty} f(t, a_k(t, x)) = f(t, x)$ per ogni $(t, x) \in (D\times X)\cap E$, visto che $y \in E_t \mapsto f(t, y) \in Z$ è continua per ogni $t \in D$ e quindi anche f è $(\mathfrak{L}\times\mathcal{B}(\varrho))/_{(D\times X)\cap E}$-misurabile.

4.9 Esempi: a) Si noti che il Teorema 4.8 non vale più se all'ipotesi di continuità di $f(t, \cdot)$ per ogni $t \in D$ si sostituisce l'ipotesi che $f(t, \cdot)$ sia s.c.i. per ogni $t \in D$, come si vede con il seguente esempio che presenta analogie con l'Esempio 2.7 di [Br].

Siano

$$T = X = [0, 1], \quad \mathfrak{L} = \mathfrak{L}([0, 1]), \quad \varrho = \eta/_{[0, 1]},$$

$$D = [0, 1], \quad E = [0, 1]\times[0, 1], \quad X_0 = \mathbf{Q}\cap[0, 1],$$

V l'insieme di Vitali su $[0, 1]$,

$$f: [0, 1]\times[0, 1] \to \mathbf{R}, \; f(t, x) = \begin{cases} -1 & \text{se } t = x \in V \\ 0 & \text{se } (t, x) \in ([0, 1]\times[0, 1])\setminus\{(y, y) : y \in V\} \end{cases}$$

Allora è ovvio che $f(t, \cdot)$ è s.c.i. per ogni $t \in [0, 1]$, $f(\cdot, x)$ è $\mathfrak{L}([0, 1])$-misurabile per ogni $x \in [0, 1]$, mentre se f fosse $(\mathfrak{L}([0, 1]) \times \mathfrak{B}(\eta/_{[0, 1]}))$-misurabile sarebbe

$$f^{-1}(\{-1\}) = \{(t, x) \in [0, 1] \times [0, 1] : t = x \in V\} \in \mathfrak{L}([0, 1]) \times \mathfrak{B}(\eta/_{[0, 1]})$$

e quindi per [CV] (Teorema III.23) sarebbe

$$pr_T f^{-1}(\{-1\}) = V \in \mathfrak{L}([0, 1]) ,$$

il che è assurdo.

b) Nelle notazioni del Teorema 4.8, si noti che, se nel Teorema 4.8 non si facesse l'ipotesi riguardo all'esistenza dell'insieme X_θ, la tesi potrebbe non valere.

Basta considerare T, X, $\mathfrak{L}$, ϱ, D, V come in *a*),

$$E = \{(t, x) \in [0, 1] \times [0, 1] : t = x\} , \qquad f : E \to \mathbb{R} ,$$

$$f(t, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in V \\ 0 & \text{se } t \in [0, 1] \setminus V \end{cases} \quad \text{per ogni } t \in [0, 1] .$$

Allora è ovvio che $x \in E_t \mapsto f(t, x) \in \mathbb{R}$ è continua per ogni $t \in [0, 1]$, $t \in E^x \mapsto f(t, x) \in \mathbb{R}$ è $\mathfrak{L}/_{E^x}$-misurabile per ogni $x \in [0, 1]$, in quanto $E_t = \{t\}$ ed $E^x = \{x\}$ per ogni $t, x \in [0, 1]$. D'altra parte se fosse

$$f^{-1}(\{1\}) = \{(t, x) \in [0, 1] \times [0, 1] : t = x \in V\} \in \mathfrak{L}([0, 1]) \times \mathfrak{B}(\eta/_{[0, 1]}) ,$$

allora per [CV] (Teorema III.23) risulterebbe che

$$V = pr_T f^{-1}(\{1\}) \in \mathfrak{L}([0, 1]) ,$$

il che è assurdo.

4.10 Osservazione: Si noti che, se (T, τ), $\mathfrak{L}$, μ, $\mathcal{K}$, (X, ϱ), E sono come nel Lemma 4.5 e se $f : E \to [-\infty, \infty]$, $t \in D \cap E^x \mapsto f(t, x) \in [-\infty, \infty]$ è $\mathfrak{L}/_{(D \cap E^x)}$-misurabile per ogni $x \in X$, $x \in E_t \mapsto f(t, x) \in [-\infty, \infty]$ è continua per ogni $t \in D$, $D \in \mathfrak{L}$, $\mu(T \setminus D) = 0$, allora:

a) se esiste X_0 al più numerabile, $X_0 \subset X$ tale che $\overline{X_0 \cap E_t} = \overline{E_t}$ per ogni $t \in D$, utilizzando i Lemmi 4.4 e 4.5 si ottiene che $(f, T, \mu, \tau, \varrho, \bar{\eta})$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K})$;

b) se non vale l'ipotesi di *a*), allora $(f, T, \mu, \tau, \varrho, \bar{\eta})$ può non verificare la proprietà $SD(\mathcal{K})$, come mostrato dallo stesso esempio fatto in *b*) del

n. 4.9. Infatti se in tale esempio $(f, T, \mu, \tau, \varrho, \eta)$ verificasse la proprietà $SD(\mathcal{K})$ (con $\mathcal{K} \subset \mathfrak{C}$) allora $(f, T, \mu, \tau, \varrho)$ verificherebbe la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ e pertanto, per $b)$ del Teorema 4.1, f sarebbe $(\mathfrak{L}([0, 1]) \times \mathfrak{B}(\eta/_{[0, 1]}))$-misurabile, il che è assurdo per quanto visto nell'esempio 4.9 $b)$.

4.11 Corollario: Siano (T, τ) spazio topologico, $\mathfrak{C}$ σ-algebra su T, $\mu: \mathfrak{C} \to [0, \infty]$ misura completa e $\mathcal{K}$-i.r. ove $\mathcal{K}$ è come nel Lemma 4.5 e

(4.11.0) sia (X, ϱ) spazio topologico a base numerabile di aperti e tale che esistano (Y, σ) spazio topologico susliniano e $\varphi: X \to Y$ continua, aperta, surgettiva e con $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = A$ per ogni $A \in \varrho$.

Sia inoltre $E \in \mathfrak{C} \times \mathfrak{B}(\varrho)$. Allora $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica le proprietà (SDa) e (SDa').

Dimostrazione: Sia $S \in \mathfrak{C}$ tale che $\mu(T \setminus S) = 0$. Allora risulta che

$$\left((S \times Y) \cap ((id_T \times \varphi)(E)), \mu/_{(\mathfrak{C}/_S)}, \{K \in \mathcal{K}: K \subset S\}, \tau/_S, \sigma\right)$$

verifica le proprietà (SDa) e (SDa') per $a)$ del Teorema 4.6 (che si può applicare in quanto $(id_T \times \varphi)(E) \in \mathfrak{C} \times \mathfrak{B}(\sigma)$ per $f)$ del Lemma 1.7 di [BA 1], la famiglia $\{K \in \mathcal{K}: K \subset S\}$ verifica ovviamente le condizioni del Lemma 4.5 ed inoltre (Y, σ) è a base numerabile di aperti poichè se $\{A_n: n \in \mathbf{N}\}$ è una base di aperti per (X, ϱ) allora, tenendo conto del fatto che φ è continua, aperta e surgettiva, si ha che $\{\varphi(A_n): n \in \mathbf{N}\}$ è una base di aperti per (Y, σ)).

Per concludere basta ora verificare che è lecito applicare le parti $a)$ e $c)$ del Teorema 3.9 (con le ipotesi $a')$ e $c')$) a (T, τ), (Y, σ), (X, ϱ), $\mathfrak{C}$, μ, $\mathcal{K}$, id_T, φ, $(id_T \times \varphi)(E)$, E. Poichè $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = A$ per ogni $A \in \varrho$, da $a)$ e da $c)$ del Lemma 1.2 segue che $(id_T \times \varphi)^{-1}(id_T \times \varphi)(E) = E$. Valgono (2.1.0) e (2.4.0) di [BA 1] poichè φ è continua; vale (2.1.5) di [BA 1] nel caso non sequenziale (con $N_0 = 0$, $I = \{0\}$) per il Teorema 1.23 di [BA 1] (di cui vale l'ipotesi $b)$) e tenendo conto del fatto che, per $a)$ e $b)$ del Lemma 1.2, risulta

$$\varphi^{-1}\left(((id_T \times \varphi)(E))_t\right) = \varphi^{-1}(\varphi(E_t)) = E_t \text{ per ogni } t \in T;$$

(2.3.4) di [BA 1] segue dalla surgettività di φ (per cui $A = (id_T \times \varphi)((id_T \times \varphi)^{-1}(A))$ per ogni $A \in 2^{T \times Y}$) e da $f)$ del Lemma 1.7 di [BA 1]; è inoltre ovvia la verifica di (2.1.4), (2.4.1) di [BA 1] e di (1.33.0), (3.4.1).

4.12 Osservazione: $a)$ Si noti che la condizione (4.11.0) è equivalente alla seguente:

(4.12.0) sia (X, ϱ) spazio topologico a base numerabile di aperti tale che esistano (P, d) spazio pseudo-metrico, completo e separabile, (Y, σ) spazio topologico T_2, $p: P \to X$ continua e surgettiva, $\varphi: X \to Y$ continua, aperta, surgettiva e con $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = A$ per ogni $A \in \varrho$.

Infatti se vale (4.12.0) da c') del Teorema 1.7 segue che (Y, σ) è spazio susliniano e pertanto vale (4.11.0). Se viceversa vale (4.11.0) allora (Y, σ) è a base numerabile di aperti, visto che, se $\{A_n : n \in \mathbf{N}\}$ è una base di aperti per (X, ϱ), tenendo conto del fatto che φ è continua, aperta e surgettiva, risulta che $\{\varphi(A_n) : n \in \mathbf{N}\}$ è una base di aperti per (Y, σ); pertanto da b) del Teorema 1.1 di [BA 1] segue che $\sigma = s\sigma$ ed inoltre (Y, σ) è spazio susliniano; quindi per c') del Teorema 1.7 si ottiene che esistono (P, d) spazio pseudo-metrico, completo e separabile e $p : P \to X$ continua e surgettiva.

b) Si noti che una condizione sufficiente a garantire la validità di (4.11.0) è la seguente

(4.12.1) sia (X, ϱ) spazio pseudo-metrizzabile tale che esistano (P, d) spazio pseudo-metrico, completo e separabile e $p : P \to X$ continua e surgettiva.

Infatti se d_ϱ è una pseudo-metrica su X tale che $\tau_{(d_\varrho)} = \varrho$ e se (Y, δ) è lo spazio metrico quoziente di (X, d_ϱ) e $\varphi : (X, d_\varrho) \to (Y, \delta)$ la proiezione sul quoziente ottenuti come in a) del Teorema 1.7, per la stessa a) del Teorema 1.7 si ha che φ è continua, aperta, surgettiva e tale che $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = A$ per ogni $A \in \varrho$; d'altra parte (X, ϱ) è separabile come immagine continua di uno spazio separabile ed, essendo pseudo-metrizzabile, è anche a base numerabile di aperti; pertanto vale (4.12.0) e, tenendo conto di a), vale anche (4.11.0).

4.13 Corollario: Siano (T, τ), (X, ϱ) spazi topologici, $\mathfrak{C}$ σ-algebra su T, $\mathfrak{C} \supset \mathcal{B}(\tau)$, $\mu : \mathfrak{C} \to [0, \infty]$ misura, $E \in \mathfrak{C} \times \mathcal{B}(\varrho)$, $\mathbf{K} \subset \mathfrak{C}$. Inoltre valga la seguente condizione

(4.13.0) esistano $X_M \in \mathcal{B}(\varrho)$ $(M \in \mathbf{N})$ tali che: i) $X = \bigcup_{M \in \mathbf{N}} X_M$; ii) $\varrho/_{X_M}$ sia a base numerabile di aperti per ogni $M \in \mathbf{N}$; iii) $A \in \varrho$ se e solo se per ogni $M \in \mathbf{N}$ risulta che $A \cap X_M \in \varrho$

e valga almeno una delle due seguenti condizioni:

iv) $E_t \in \varrho \cup \{\text{chiusi in } \varrho\}$ per ogni $t \in T$

v) per ogni x_k, $x \in X$ $(k \in K)$, $(K, \succ)$ insieme diretto tali che $\lim_{k \in K} x_k = x$ in ϱ, esistano $M \in \mathbf{N}$, $(H, \succ)$ insieme diretto e $(\beta(b))_{b \in H}$ successione generalizzata estratta da $(k)_{k \in K}$ per cui $x, x_{\beta(b)} \in X_M$ per ogni $b \in H$.

Allora:

a) $(E, \mu, \mathbf{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $(SD\theta')$;

b) se μ è completa e se $(X_M, \varrho/_{X_M})$ è pseudo-metrizzabile per ogni $M \in \mathbf{N}$, risulta che $(E, \mu, \mathbf{K}, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $(SD\theta)$.

Dimostrazione: Sia $i_M: X_M \to X$ l'immersione per ogni $M \in \mathbf{N}$. Per il Teorema 4.1 per ogni $M \in \mathbf{N}$ si ha che $((T \times X_M) \cap E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho/_{X_M})$ verifica la proprietà (SDb') e, se valgono anche le ipotesi di $b)$, verifica anche la proprietà (SDb) (ove si tenga conto del fatto che $(T \times X_M) \cap E \in \mathfrak{C} \times \mathfrak{B}(\varrho/_{X_M})$ per ogni $M \in \mathbf{N}$, poichè per [BA 1] (f) e $a)$ del Lemma 1.7, $b)$ del Teorema 1.5) si ha che $(id_T \times i_M)^{-1}(D) \in \mathfrak{C} \times \mathfrak{B}(\varrho/_{X_M})$ per ogni $D \in \mathfrak{C} \times \mathfrak{B}(\varrho)$ $(M \in \mathbf{N})$).

Per ottenere $a)$ [risp. $b)$] basta allora verificare che si può applicare la parte $d)$ [risp. la parte $b)$] del Teorema 3.6 a (T, τ), (X, ϱ), $(X_M, \varrho/_{X_M})$, $\mathfrak{C}$, μ, $\mathcal{K}$, id_T, i_M, E, $(T \times X_M) \cap E$ $(M \in \mathbf{N})$. Valgono ovviamente le condizioni (3.3.1), (3.4.1), (3.4.3), (1.33.0) e le condizioni (2.1.4), (2.4.1) di [BA 1]. Inoltre vale (2.1.0) di [BA 1] poichè i_M è continua per ogni $M \in \mathbf{N}$; vale (2.1.5) di [BA 1] nel caso non sequenziale (con $N_0 = \emptyset$, $I = \{0\}$) per iii) di (4.13.0) e per il Teorema 1.23 di [BA 1] (di cui vale l'ipotesi $a)$ se vale iv) di (4.13.0) e l'ipotesi $b)$-$b')$ se vale v) di (4.13.0)); vale (2.3.4) di [BA 1] poichè $X_M \in \mathfrak{B}(\varrho)$ $(M \in \mathbf{N})$, per i) di (4.13.0) e per il Teorema 1.27 $b)$ di [BA 1]; vale (2.4.0) di [BA 1] poichè i_M è continua per ogni $M \in \mathbf{N}$.

4.14 Esempio: Si noti che, se (T, τ), $\mathfrak{C}$, μ, $\mathcal{K}$ sono come nel Corollario 4.13, esistono spazi topologici (X, ϱ) ed insiemi $E \in \mathfrak{C} \times \mathfrak{B}(\varrho)$ tali che valga (4.13.0) con (X, ϱ) non a base numerabile di aperti. Pertanto il Corollario 4.13 non è un caso particolare del Teorema 4.1.

Basta considerare ad esempio X spazio di Hilbert separabile e di dimensione infinita su $\mathbf{R}$, $\varrho = w(X)$. Sia d metrica indotta su X dal suo prodotto scalare e sia $X_M = \overline{S_d(0, M)}^{s(X)}$ per ogni $M \in \mathbf{N}$. Allora $(X_M, \varrho/_{X_M})$ è metrizzabile e pertanto è a base numerabile di aperti (infatti X_M è chiuso e convesso in $(X, s(X))$, quindi X_M è chiuso in $(X, w(X))$ e anche in $(X, w(X))$ essendo $w(X) \supset w(X)$ per $b)$ del Teorema 1.1 di [BA 1]; pertanto per $d)$ del Teorema 1.1 di [BA 1] risulta che

$$\varrho/_{X_M} = s(w(X)/_{\overline{S_d(0, M)}^{s(X)}}) = w(X)/_{\overline{S_d(0, M)}^{s(X)}},$$

ove l'ultima eguaglianza segue dal fatto che $w(X)/_{\overline{S_d(0, M)}^{s(X)}}$ è metrizzabile e da $b)$ del Teorema 1.1 di [BA 1]) $(M \in \mathbf{N})$. Per verificare iii) di (4.13.0) basta provare che, se $C \subset X$ è tale che $C \cap X_M$ sia chiuso in $\varrho/_{X_M}$ per ogni $M \in \mathbf{N}$, allora C è chiuso in ϱ. Sia allora $C \subset X$ tale che $C \cap X_M$ sia chiuso in $\varrho/_{X_M}$ per ogni $M \in \mathbf{N}$ e siano $x_n \in C$ $(n \in \mathbf{N})$, $x \in X$ tali che $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ in $w(X)$. Allora esiste $M \in \mathbf{N}$ tale che $x_n, x \in X_M$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per $a)$ del Teorema 1.1 di [BA 1] si ha che $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ in ϱ; pertanto $x \in C \cap X_M$ e quindi C è sequenzialmente chiuso in $w(X)$ e cioè chiuso in ϱ. Ora, considerando $E \in \mathfrak{C} \times \mathfrak{B}(\varrho)$

che verifica iv) di (4.13.0), si ottiene che (X, ϱ) ed E soddisfano a (4.13.0). Basta provare ancora che (X, ϱ) non è base numerabile di aperti: ciò è conseguenza del fatto che nell'esempio 1.2 *b*) di [BA 1] si vede che (X, ϱ) non è a base numerabile di intorni.

4.15 Corollario: Siano (T, τ), (X, ϱ) spazi topologici, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu: \mathfrak{L} \to [0, \infty]$ misura completa e $\mathcal{K}$-i.r. ove $\mathcal{K}$ è come nel Lemma 4.5, $E \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho)$. Inoltre valga la seguente condizione:

(4.15.0) esistano $X_M \subset X$ $(M \in \mathrm{N})$ tali che $(X_M, \varrho/_{X_M})$ verifichi (4.11.0) per ogni $M \in \mathrm{N}$ e valga v) di (4.13.0).

Allora $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho)$ verifica le proprietà (SDa) e (SDa').

Dimostrazione: Sia $i_M: X_M \to X$ l'immersione per ogni $M \in \mathrm{N}$. Per il Corollario 4.11 per ogni $M \in \mathrm{N}$ si ha che $((T \times X_M) \cap E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho/_{X_M})$ verifica le proprietà (SDa) e (SDa') (ove si tenga conto del fatto che, come nella dimostrazione del Corollario 4.13, risulta che $(T \times X_M) \cap E \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho/_{X_M})$ $(M \in \mathrm{N})$). Per ottenere la tesi basta allora verificare che si può applicare la parte *a*) [risp. la parte *c*)] del Teorema 3.6 a (T, τ), (X, ϱ), $(X_M, \varrho/_{X_M})$, $\mathfrak{L}$, μ, $\mathcal{K}$, id_T, i_M, E, $(T \times X_M) \cap E$ $(M \in \mathrm{N})$. Si ha che $F = T$ verifica (3.4.2); vale (3.6.0) in quanto μ è $\mathcal{K}$-i.r.; (2.1.0) e (2.3.1) di [BA 1] sono verificate in quanto i_M è continua per ogni $M \in \mathrm{N}$; valgono ovviamente (2.1.1) e (2.3.0) di [BA 1]; vale ii) del Teorema 2.4 di [BA 1], poichè $X = \bigcup_{M \in \mathrm{N}} X_M$ per v) di (4.13.0), poichè (2.4.8) di [BA 1] è conseguenza del fatto che μ è $\mathcal{K}$-i.r. e poichè (2.4.7) di [BA 1] con la condizione *C*) si ottiene facilmente: la prima parte di (2.4.7) di [BA 1] è ovviamente verificata e *C*) è conseguenza di v) di (4.13.0) e del fatto che

(4.15.1) per ogni $K \in \mathcal{K}$ si ha che

$$(id_T \times i_M)_{((K \times X_M) \cap E, (K \times X_M) \cap E}: ((K \times X_M) \cap E, (\tau \times \varrho/_{X_M})/_{(K \times X_M) \cap E}) \to$$
$$\to ((K \times X_M) \cap E, (\tau \times \varrho)/_{(K \times X_M) \cap E}) \text{ è aperta } (M \in \mathrm{N})$$

(infatti se (Z, ζ) e (W, θ) sono spazi topologici, $A \subset Z$, $B \subset W$, allora $\zeta/_A \times \theta/_B = (\zeta \times \theta)/_{A \times B}$ e allora

$$(\tau \times \varrho/_{X_M})/_{(K \times X_M) \cap E} = ((\tau \times \varrho)/_{T \times X_M})/_{(K \times X_M) \cap E} =$$
$$= (\tau \times \varrho)/_{(K \times X_M) \cap E} \qquad (M \in \mathrm{N})).$$

4.16 Corollario: Siano (T, τ), (X, ϱ) spazi topologici, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu: \mathfrak{L} \to [0, \infty]$ misura $\mathcal{K}$-i.r. ove $\mathcal{K}$ è come nel Lemma 4.5, $E \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho)$.

Inoltre valga la seguente condizione:

(4.16.0) esistano $X_M \subset X$ ($M \in \mathbf{N}$) tali che valga v) di (4.13.0) ed inoltre per ogni $M \in \mathbf{N}$ esistano X_M^0 al più numerabile, $X_M^0 \subset X_M$, $T_M \in \mathfrak{C}$ con $\mu(T \setminus T_M) = 0$ tali che $X_M^0 \cap E_t = X_M \cap E_t$ per ogni $t \in T_M$.

Allora $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \eta)$ verifica le proprietà $(\mathcal{S}Da)$ e $(\mathcal{S}Da')$.

Dimostrazione: Per il Teorema 3.14 a) basta provare che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \eta)$ verifica la proprietà $(\mathcal{S}Da')$. Sia i_M: $X_M \to X$ l'immersione per ogni $M \in \mathbf{N}$. Per il Teorema 4.6 b) vale

(4.16.1) per ogni $M \in \mathbf{N}$ si ha che $((T \times X_M) \cap E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho|_{X_M}, \eta)$ verifica la proprietà $(\mathcal{S}Da')$

(ove si tenga conto del fatto che, come nella dimostrazione del Corollario 4.13, risulta che $(T \times X_M) \cap E \in \mathfrak{C} \times \mathcal{B}(\varrho|_{X_M})$ ($M \in \mathbf{N}$)). Sia ora f: $E \to \mathbf{R}$ tale che (f, μ, ϱ, η) verifichi la proprietà (Cd). Allora (f, μ, ϱ) e $(-f, \mu, \varrho)$ verificano la proprietà (INd). Siano $f_M = f \circ ((id_T \times i_M)|_{(T \times X_M) \cap E})$ ($M \in \mathbf{N}$). Si può ora applicare a) del Lemma 3.4 a (T, τ), (X, ϱ), $(X_M, \varrho|_{X_M})$, $\mathfrak{C}$, μ, $\mathcal{K}$, id_T, i_M, E, $(T \times X_M) \cap E$, f, f_M [risp. $-f$, $-f_M$] ($M \in \mathbf{N}$); infatti valgono (2.1.0) e (2.3.1) di [BA 1] poichè i_M sono continue ($M \in \mathbf{N}$) e vale ovviamente (2.3.0) di [BA 1]. Si ottiene allora che $(f_M, \mu, \varrho|_{X_M})$ e $(-f_M, \mu, \varrho|_{X_M})$ verificano la proprietà (INd) e, se D'_M e D''_M sono relativi rispettivamente a $(f_M, \mu, \varrho|_{X_M})$ ed a $(-f_M, \mu, \varrho|_{X_M})$ ed a tale proprietà, risulta che $(f_M, \mu, \varrho|_{X_M}, \eta)$ verifica la proprietà (Cd) e $D'_M \cap D''_M$ è relativo a $(f_M, \mu, \varrho|_{X_M}, \eta)$ ed a tale proprietà ($M \in \mathbf{N}$). Da (4.16.1) segue pertanto che $(f_M, T, \mu, \tau, \varrho|_{X_M}, \eta)$ verifica la proprietà $\mathcal{S}D(\mathcal{K})$ per ogni $M \in \mathbf{N}$. Allora $(f_M, T, \mu, \tau, \varrho|_{X_M})$ e $(-f_M, T, \mu, \tau, \varrho|_{X_M})$ verificano la proprietà $\mathcal{S}D[\mathcal{K}]$ ($M \in \mathbf{N}$). Ora è lecito applicare d) del Lemma 3.4 a (T, τ), (X, ϱ), $(X_M, \varrho|_{X_M})$, $\mathfrak{C}$, μ, $\mathcal{K}$, id_T, i_M, E, $(T \times X_M) \cap E$, f, f_M [risp. $-f$, $-f_M$] ($M \in \mathbf{N}$); infatti $F = T$ verifica (3.4.2) e vale ii) del Teorema 2.4 di [BA 1], poichè $X = \bigcup_{M \in \mathbf{N}} X_M$ per v) di (4.13.0), poichè (2.4.8) di [BA 1] è conseguenza del fatto che μ è $\mathcal{K}$-i.r. e poichè (2.4.7) di [BA 1] con la condizione C) si ottiene facilmente: la prima parte di (2.4.7) di [BA 1] è ovviamente verificata e C) è conseguenza di v) di (4.13.0) e del fatto che vale (4.15.1) come nel Corollario 4.15. Si conclude tenendo conto del fatto che l'intersezione di due elementi di $\mathcal{K}$ è in $\mathcal{K}$.

4.17. Corollario: Siano (T, τ), (X, ϱ) spazi topologici, $\mathfrak{C}$ σ-algebra su T, $\mathfrak{C} \supset \mathcal{B}(\tau)$, μ: $\mathfrak{C} \to [0, \infty]$ misura completa e $\mathcal{K}$-i.r. ove $\mathcal{K}$ è come nel Lem-

ma 4.5, $E \in \mathfrak{C} \times \mathcal{B}(\varrho)$. Inoltre valga la seguente condizione:

(4.17.0) esistano $X_M \in \mathcal{B}(\varrho)$ $(M \in \mathbf{N})$ tali che: i) $X = \bigcup_{M \in \mathbf{N}} X_M$; ii) $(X_M, \varrho/_{X_M})$ verifichi (4.11.0) [risp. (4.12.1)] per ogni $M \in \mathbf{N}$; iii) $A \in s\varrho$ se e solo se per ogni $M \in \mathbf{N}$ risulta che $A \cap X_M \in s(\varrho/_{X_M})$

e valga almeno una delle due seguenti condizioni:

iv) $E_t \in s\varrho \cup \{\text{chiusi in } s\varrho\}$ per ogni $t \in T$;

v) per ogni x_k, $x \in X$ $(k \in \mathbf{N})$ tali che $\lim_{k \to \infty} x_k = x$ in ϱ, esistano $M \in \mathbf{N}$ e $(k_h)_{h \in \mathbf{N}}$ successione strettamente crescente di naturali per cui x, $x_{k_h} \in X_M$ per ogni $h \in \mathbf{N}$.

Sia $f: E \to [-\infty, \infty]$. Allora condizione necessaria e sufficiente affinchè (f, μ, ϱ) verifichi la proprietà $(sINd)$ [risp. $(sINf)$] è che $(f/_{(T \times X_M)} \cap E, T, \mu, \tau, \varrho/_{X_M})$ verifichi la proprietà $SD[\mathbf{X}]$ per ogni $M \in \mathbf{N}$. (La condizione necessaria vale anche senza le ipotesi i), iii), iv) e v) di (4.17.0)).

Dimostrazione: Sia $i_M: X_M \to X$ l'immersione per ogni $M \in \mathbf{N}$. Tenendo conto dell'Osservazione 4.12 *b*) e del fatto che la validità della proprietà $(sINf)$ implica la validità della proprietà $(sINd)$, basta dimostrare la condizione necessaria nel caso in cui (f, μ, ϱ) verifica la proprietà $(sINd)$. Si supponga allora che (f, μ, ϱ) verifichi la proprietà $(sINd)$ e sia D relativo a (f, μ, ϱ) ed a tale proprietà. Si può ora applicare a $(D, \tau/_D)$, (X, ϱ), $(X_M, \varrho/_{X_M})$, $\mathfrak{C}/_D$, $\mu/_{(\mathfrak{C}/_D)}$, $\{K \in \mathbf{K}: K \subset D\}$, id_D, i_M, $(D \times X) \cap E$, $(D \times X_M) \cap E$, $f/_{(D \times X)} \cap E$, $f/_{(D \times X_M)} \cap E$ $(M \in \mathbf{N})$ la parte *a*) (nel caso sequenziale) del Lemma 3.4. Infatti vale (2.1.0) di [BA 1] poichè i_M sono continue e quindi

$$i_{M_{((D \times X_M) \cap E)_t, ((D \times X) \cap E)_t}}$$

sono sequenzialmente continue per ogni $t \in D$ $(M \in \mathbf{N})$; vale ovviamente (2.3.0) di [BA 1] e vale anche (2.3.1) di [BA 1] poichè i_M sono continue $(M \in \mathbf{N})$. Allora per *a*) del Lemma 3.4 per ogni $M \in \mathbf{N}$ risulta che

$$D \subset I(s, f/_{(D \times X_M)} \cap E, \varrho/_{X_M}) \subset I(s, f/_{(T \times X_M)} \cap E, \varrho/_{X_M})$$

e

$$(f/_{(T \times X_M)} \cap E)/_{(D \times X_M)} \cap E = f/_{(D \times X_M)} \cap E$$

è

$$(\mathfrak{C}/_D \times \mathcal{B}(\varrho/_{X_M}))/_{(D \times X_M)} \cap E\text{-misurabile}$$

e cioè

$$(\mathfrak{L}\times\mathfrak{B}(\varrho/_{X_M}))/_{(D\times X_M)\cap E}\text{-misurabile}$$

e quindi $(f/_{(T\times X_M)\cap E}, \mu, \varrho/_{X_M})$ verifica la proprietà $(sINd)$. Ora se $M\in\mathbf{N}$ si ha che $\varrho/_{X_M}$ è a base numerabile di aperti e quindi tale è anche $(\varrho/_{X_M})/_A$ per ogni $A\subset X_M$, per cui da $b)$ del Teorema 1.1 di [BA 1] segue che

$$(4.17.1)\qquad \begin{aligned} &r((\varrho/_{X_M})/_{X_M\cap E})=(\varrho/_{X_M})/_{X_M\cap E}=(r(\varrho/_{X_M}))/_{X_M\cap E}\,;\\ &r(\varrho/_{X_M})=\varrho/_{X_M}\end{aligned}$$

e pertanto per $c)$ del Lemma 3.20 (applicato con $(Z,\zeta)=([-\infty,\infty],\sigma_i)$, ove σ_i è la topologia della semicontinuità inferiore su $[-\infty,\infty]$ (cfr. dimostrazione del Teorema 1.20 $b)$)) risulta che

$$(f/_{(T\times X_M)\cap E}, \mu, \varrho/_{X_M}) \text{ verifica la proprietà } (INd).$$

Tenendo allora conto del fatto che

$$(4.17.2)\qquad (T\times X_M)\cap E\in(\mathfrak{L}\times\mathfrak{B}(\varrho))/_{T\times X_M}\subset\mathfrak{L}\times\mathfrak{B}(\varrho/_{X_M})\qquad (M\in\mathbf{N}),$$

per il Corollario 4.11 per ogni $M\in\mathbf{N}$ si ha che

$$(4.17.3)\qquad (f/_{(T\times X_M)\cap E}, T, \mu, \tau, \varrho/_{X_M}) \text{ verifica la proprietà } SD[\mathcal{K}].$$

Viceversa valga (4.17.3) per ogni $M\in\mathbf{N}$. Allora se $M\in\mathbf{N}$ per il Teorema 4.1 $a)$ [risp. 4.1 $b)$] (che si può applicare perchè vale ii) di (4.17.0)) si ha che

$$(f/_{(T\times X_M)\cap E}, \mu, \varrho/_{X_M}) \text{ verifica la proprietà } (INd) \text{ [risp. } (INf)].$$

Da (4.17.1) e da $d)$ del Lemma 3.20 (applicato con $(Z,\zeta)=([-\infty,\infty],\sigma_i)$, ove σ_i è la topologia della semicontinuità inferiore su $[-\infty,\infty]$ (cfr. dimostrazione del Teorema 1.20 $b)$)) segue ora che

$$(f/_{(T\times X_M)\cap E}, \mu, \varrho/_{X_M}) \text{ verifica la proprietà } (sINd) \text{ [risp. } (sINf)].$$

Per concludere basta allora provare che è lecito applicare la parte $e)$ [risp. $c)$] (nel caso sequenziale) del Lemma 3.4 a (T,τ), (X,ϱ), $(X_M,\varrho/_{X_M})$, $\mathfrak{L}$, μ, $\mathcal{K}$, id_T, i_M, E, $(T\times X_M)\cap E$, j, $f/_{(T\times X_M)\cap E}$ $(M\in\mathbf{N})$. Vale ovviamente (4.17.2); vale (2.1.0) di [BA 1] poichè i_M sono continue e quindi

$$i_M\,{}_{((T\times X_M)\cap E),((T\times X)\cap E)},$$

sono sequenzialmente continue per ogni $t \in T$ ($M \in \mathbf{N}$); vale (2.1.5) di [BA 1] nel caso sequenziale (con $N_0 = 0$, $I = \{0\}$) per iii) di (4.17.0) e per il Teorema 1.23 di [BA 1] (di cui vale l'ipotesi *a*) se vale *iv*) di (4.17.0) e l'ipotesi *b*)-*b'*) se vale v) di (4.17.0)); vale (2.3.4) di [BA 1] poichè $X_M \in \mathcal{B}(\varrho)$ ($M \in \mathbf{N}$), per i) di (4.17.0) e per il Teorema 1.27 *b*) di [BA 1]; valgono inoltre ovviamente (2.1.4) di [BA 1] e (3.3.1), (3.4.1), (3.4.3).

4.18 Osservazione: Si noti che nelle (4.13.0) e (4.17.0) risulta che la condizione iii) è implicata dalla corrispondente condizione v).

Basta infatti applicare il Teorema 1.23 di [BA 1] (di cui vale l'ipotesi *b*)-*b'*)) alle immersioni $i_M : X_M \to X$ ($M \in \mathbf{N}$).

4.19 Esempio: Si noti che se (T, τ), $\mathfrak{L}$, μ, $\mathcal{K}$ sono come nel Corollario 4.17, X spazio di Banach su $\mathbf{R}$ con duale continuo separabile, d metrica indotta su X dalla sua norma, $X_M = \overline{S_d(O, M)}^{\sigma(X)}$ ($M \in \mathbf{N}$), $\varrho = w(X)$ ed $E \in \mathfrak{L} \times \mathcal{B}(\varrho)$, allora vale (4.17.0).

Infatti se $M \in \mathbf{N}$ si ha che X_M verifica (4.12.1), in quanto $(X_M, \varrho/_{X_M})$ è metrizzabile e inoltre basta considerare come spazio pseudo-metrico, completo e separabile lo stesso X_M con la distanza indotta dalla norma e come applicazione continua e surgettiva l'identità. Allora per l'Osservazione 4.12 *b*) si ha che X_M verifica anche (4.11.0) per ogni $M \in \mathbf{N}$ e pertanto vale ii) di (4.17.0). È inoltre ovvio che valgono i) e v) di (4.17.0) e quindi anche iii) di (4.17.0) per l'Osservazione 4.18.

4.20 Corollario: Siano (T, τ), (X, ϱ) (Z, ζ) spazi topologici, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu : \mathfrak{L} \to [0, \infty]$ misura, $\mathcal{K} \subset \mathfrak{L}$, $E \in \mathfrak{L} \times \mathcal{B}(\varrho)$ e sia ζ pseudo-metrizzabile e separabile. Allora:

a) se vale (3.25.0) e se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \eta)$ verifica la proprietà $(cSDa)$ [risp. $(c\tau SDa)$, $(cSDa')$, $(c\tau SDa')$], risulta che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la stessa proprietà $(cSDa)$ [risp. $(c\tau SDa)$, $(cSDa')$, $(c\tau SDa')$];

b) se $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \eta)$ verifica la proprietà $(cSDb)$ [risp. $(c\tau SDb)$, $(cSDb')$, $(c\tau SDb')$], risulta che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la stessa proprietà $(cSDb)$ [risp. $(c\tau SDb)$, $(cSDb')$, $(c\tau SDb')$].

Dimostrazione: Sia d pseudo-distanza su Z tale che $\zeta = \tau_d$ e siano (W, δ) e φ relative a (Z, d) come in *a*) del Teorema 1.7. Per provare la tesi basta ora applicare il Teorema 3.25 e verificare che valgono le ipotesi per applicare *a'*), *b'*), *c'*), *d'*) del Teorema 3.18 a (T, τ), (X, ϱ), (Z, ζ), (W, τ_δ), $\mathfrak{L}$, μ, $\mathcal{K}$, φ, E. Ora per l'equivalenza tra (1.5.0) e (1.5.1) del Teorema 1.5 e per *a*) del Teorema 1.7 si ha che ζ è la topologia iniziale della topologia τ_δ rispetto a φ. Inoltre per *b*) del Teorema 1.1 di [BA 1] si ha che $\zeta = s_\zeta^*$, $\tau_\delta = s(\tau_\delta)$ e risulta anche che ζ è a base numerabile di aperti, essendo pseudo-metrizzabile e separa-

bile. Pertanto valgono le condizioni (2.0.3), (2.0.5), (2.2.0), (2.2.6), (2.2.7), mentre nel caso considerato (2.5.0) è ovvia, per cui si conclude.

4.21 Corollario: Siano (T, τ), (X, ϱ), (Z, ζ) spazi topologici, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu: \mathfrak{L} \to [0, \infty]$ misura, $\mathcal{K} \subset \mathfrak{L}$, $E \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho)$, sia ζ pseudo-metrizzabile e valgano (3.25.0) e (3.26.0). Allora, se $((D \times X) \cap E, \mu/_{(\mathfrak{L}/_D)}, \{K \in \mathcal{K}: K \subset D\}, \tau/_D, \varrho, \eta)$ verifica la proprietà (εSDa) [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDa)$] per ogni $D \in \mathfrak{L}$ con $\mu(T \setminus D) = 0$, si ha che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica le proprietà (εSDc) e $(\varepsilon SDc')$ [risp. $(\varepsilon\varepsilon SDc)$ e $(\varepsilon\varepsilon SDc')$].

Dimostrazione: Basta utilizzare il Teorema 3.26, le cui ipotesi valgono per il Corollario 4.20 applicato ad ogni $\mathcal{W}$ sottospazio separabile di Z.

4.22 Corollario: Siano (T, τ), (X, ϱ), (Z, ζ) spazi topologici, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mathfrak{L} \supset \mathfrak{B}(\tau)$, $\mu: \mathfrak{L} \to [0, \infty]$ misura, $\mathcal{K} \subset \mathfrak{L}$, $E \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho)$, sia ζ pseudo-metrizzabile e separabile e valga (4.13.0). Allora:

a) $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $(\varepsilon SDb')$;

b) se μ è completa e se $(X_M, \varrho/_{X_M})$ è pseudo-metrizzabile per ogni $M \in \mathbf{N}$, risulta che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà (εSDb).

Dimostrazione: Basta applicare il Corollario 4.13, il Teorema 3.15 ed il Corollario 4.20 *b*).

4.23 Corollario: Siano (T, τ), (X, ϱ), (Z, ζ) spazi topologici, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu: \mathfrak{L} \to [0, \infty]$ misura completa e $\mathcal{K}$-i.r. ove $\mathcal{K}$ è come nel Lemma 4.5, $E \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho)$. Inoltre (X, ϱ) verifichi la condizione (4.15.0), ζ sia pseudo-metrizzabile. Allora:

a) se ζ è separabile si ha che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica le proprietà (εSDa) e $(\varepsilon SDa')$;

b) se vale (3.26.0) (nel caso non sequenziale) si ha che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica le proprietà (εSDc) e $(\varepsilon SDc')$.

Dimostrazione: *a*) Basta utilizzare il Corollario 4.15, *a*) e *c*) del Teorema 3.15 e *a*) del Corollario 4.20.

b) Applicando il Corollario 4.15 e *a*) del Teorema 3.15 si ottiene che $((D \times X) \cap E, \mu/_{(\mathfrak{L}/_D)}, \{K \in \mathcal{K}: K \subset D\}, \tau/_D, \varrho, \eta)$ verifica la proprietà (εSDa) per ogni $D \in \mathfrak{L}$. Sfruttando ora il Corollario 4.21 si conclude.

4.24 Corollario: Siano (T, τ), (X, ϱ), (Z, ζ) spazi topologici, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu: \mathfrak{L} \to [0, \infty]$ misura $\mathcal{K}$-i.r. ove $\mathcal{K}$ è come nel Lemma 4.5, $E \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho)$.

Inoltre valga la condizione (4.16.0) e ζ sia pseudo-metrizzabile. Allora si ha che $(E, \mu, \mathcal{K}, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica le proprietà $(\varepsilon SD\alpha)$ e $(\varepsilon SD\alpha')$.

Dimostrazione: Applicando il Corollario 4.16 si ottiene che

(4.24.0) $\quad ((D\times X)\cap E, \mu/_{(\mathfrak{C}/_D)}, \{K\in\mathcal{K}: K\subset D\}, \tau/_D, \varrho, \eta)$ verifica la proprietà $(\varepsilon SD\alpha)$ per ogni $D\in\mathfrak{C}$.

D'altra parte vale la condizione (3.26.0) (nel caso non sequenziale).

Infatti, se T_M, X_M^0 $(M\in\mathbf{N})$ sono come in (4.16.0) e se $T^0=\bigcap_{M\in\mathbf{N}} T_M$ e $X_0=\bigcup_{M\in\mathbf{N}} X_M^0$, allora $T^0\in\mathfrak{C}$, $\mu(T\setminus T^0)=0$ ed inoltre, se $t\in T^0$ e $x\in E_t$, esistono $(K, \succ)$ insieme diretto e $(x_k)_{k\in K}$ successione generalizzata tali che $x_k\in E_t$ per ogni $k\in K$ e $\lim_{k\in K} x_k = x$; utilizzando ora v) di (4.13.0) si ottiene che esistono $M\in\mathbf{N}$, $(H, \cdot\succ)$ insieme diretto e $(\beta(b))_{b\in H}$ successione generalizzata estratta da $(k)_{k\in K}$ per cui $x, x_{\beta(b)}\in X_M$ per ogni $b\in H$; allora per ogni $b\in H$ si ha che $x_{\beta(b)}\in X_M\cap E_t$ e pertanto $x\in \overline{X_M\cap E_t}=\overline{X_M^0\cap E_t}\subset X_0\cap E_t$.

Si può quindi applicare il Corollario 4.21 e, tenendo conto di (4.24.0), si ottiene la tesi.

4.25 Corollario: Siano (T, τ), (X, ϱ), (Z, ζ) spazi topologici, $\mathfrak{C}$ σ-algebra su T, $\mathfrak{C}\supset\mathcal{B}(\tau)$, $\mu: \mathfrak{C}\to[0, \infty]$ misura completa e $\mathcal{K}$-i.r. ove $\mathcal{K}$ è come nel Lemma 4.5, $E\in\mathfrak{C}\times\mathcal{B}(\varrho)$, valga (4.17.0) e ζ sia pseudo-metrizzabile e separabile. Sia $f: E\to Z$. Allora condizione necessaria e sufficiente affinchè (f, μ, ϱ, ζ) verifichi la proprietà $(\varepsilon C\alpha)$ [risp. $(\varepsilon C\beta)$] è che $(f/_{(T\times X_M)\cap E}, T, \mu, \tau, \varrho/_{X_M}, \zeta)$ verifichi la proprietà $SD(\mathcal{K})$ per ogni $M\in\mathbf{N}$. (La condizione necessaria vale anche senza le ipotesi i), iii), iv) e v) di (4.17.0)).

Dimostrazione: Sia $i_M: X_M\to X$ l'immersione per ogni $M\in\mathbf{N}$. Tenendo conto dell'Osservazione 4.12 b') e del fatto che la validità della proprietà $(\varepsilon C\beta)$ implica la validità della proprietà $(\varepsilon C\alpha)$, basta dimostrare la condizione necessaria nel caso in cui (f, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà $(\varepsilon C\alpha)$. Si supponga allora che (f, μ, ϱ, ζ) verifichi la proprietà $(\varepsilon C\alpha)$ e sia D relativo a (f, μ, ϱ, ζ) ed a tale proprietà. Si può ora applicare a $(D, \tau/_D)$, (X, ϱ), $(X_M, \varrho/_{X_M})$, $\mathfrak{C}/_D$, $\mu/_{(\mathfrak{C}/_D)}$, $\{K\in\mathcal{K}: K\subset D\}$, id_D, i_M, $(D\times X)\cap E$, $(D\times X_M)\cap E$, $f/_{(D\times X)\cap E}$, $f/_{(D\times X_M)\cap E}$ $(M\in\mathbf{N})$, (Z, ζ) la parte α) (nel caso sequenziale) del Lemma 3.29 (lo si vede nello stesso modo in cui si è visto, nella dimostrazione del Corollario 4.17, che si poteva applicare la parte α) (nel caso sequenziale) del Lemma 3.4). Allora per ogni $M\in\mathbf{N}$ risulta che

$$D\subset I(f, f/_{(D\times X_M)\cap E}, \varrho/_{X_M}, \zeta)\subset I(f, f/_{(T\times X_M)\cap E}, \varrho/_{X_M}, \zeta)$$

e

$$(f/_{(T\times X_M)\cap E})/_{(D\times X_M)\cap E}=f/_{(D\times X_M)\cap E}$$

è

$$(\mathfrak{L}/_D \times \mathfrak{B}(\varrho/_{X_M}))/_{(D\times X_M)\cap E}\text{-misurabile}$$

e cioè

$$(\mathfrak{L}\times\mathfrak{B}(\varrho/_{X_M}))/_{(D\times X_M)\cap E}\text{-misurabile}$$

e quindi $(f/_{(T\times X_M)\cap E}, \mu, \varrho/_{X_M}, \zeta)$ verifica la proprietà (sCd). Ora vale (4.17.1) (per la stessa dimostrazione fatta nel n. 4.17) e quindi per $c)$ del Lemma 3.20 risulta che

$$(f/_{(T\times X_M)\cap E}, \mu, \varrho/_{X_M}, \zeta) \text{ verifica la proprietà } (Cd) \text{ per ogni } M\in\mathbf{N}.$$

Sia $M\in\mathbf{N}$; tenendo conto del fatto che vale (4.17.2) ed utilizzando il Corollario 4.23 $a)$ (applicato a (T, τ), $(X_M, \varrho/_{X_M})$, (Z, ζ), $\mathfrak{L}$, μ, $\mathfrak{K}$, $(T\times X_M)\cap E$) si ottiene che

(4.25.0) $\quad (f/_{(T\times X_M)\cap E}, T, \mu, \tau, \varrho/_{X_M}, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\mathfrak{K})$.

Viceversa valga (4.25.0) per ogni $M\in\mathbf{N}$. Allora se $M\in\mathbf{N}$ per il Teorema 4.2 nel caso della proprietà $(sSDb')$ [risp. $(sSDb)$] (che si può applicare perchè vale ii) di (4.17.0)) si ha che

$$(f/_{(T\times X_M)\cap E}, \mu, \varrho/_{X_M}, \zeta) \text{ verifica la proprietà } (Cd) \text{ [risp. } (Cf)].$$

Da (4.17.1) e da $d)$ del Lemma 3.20 segue ora che

$$(f/_{(T\times X_M)\cap E}, \mu, \varrho/_{X_M}, \zeta) \text{ verifica la proprietà } (sCd) \text{ [risp. } (sCf)].$$

Per concludere basta allora verificare che è lecito applicare la parte $e)$ [risp. $c)$] (nel caso sequenziale) del Lemma 3.29 a (T, τ), (X, ϱ), $(X_M, \varrho/_{X_M})$, $\mathfrak{L}$, μ, $\mathfrak{K}$, id_T, i_M, E, $(T\times X_M)\cap E$, f, $f/_{(T\times X_M)\cap E}$ $(M\in\mathbf{N})$, (Z, ζ). Tale verifica è la stessa di quella fatta nella parte finale della dimostrazione del Corollario 4.17.

4.26 Corollario: Siano (T, τ), (X, ϱ), (Z, ζ) spazi topologici, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mathfrak{L}\supset\mathfrak{B}(\tau)$, $\mu: \mathfrak{L}\to[0, \infty]$ misura completa e $\mathfrak{K}$-i.r. ove $\mathfrak{K}$ è come nel Lemma 4.5, $E\in\mathfrak{L}\times\mathfrak{B}(\varrho)$ e ζ sia pseudo-metrizzabile. Inoltre valgano le seguenti condizioni:

(4.26.0) esistano $X_M\in\mathfrak{B}(\varrho)$ $(M\in\mathbf{N})$ tali che: i) $X=\bigcup_{M\in\mathbf{N}} X_M$; ii) $(X_M, \varrho/_{X_M})$ verifichi (4.11.0) [risp. (4.12.1)] per ogni $M\in\mathbf{N}$; iii) per ogni $M\in\mathbf{N}$ esistano X_M^0 al più numerabile, $X_M^0\subset X_M$, $T_M\in\mathfrak{L}$ con $\mu(T\setminus T_M)=0$ tali che $\overline{X_M^0\cap E_t}=\overline{X_M\cap E_t}$ per ogni $t\in T_M$;

iv) $A \in s\varrho$ se e solo se per ogni $M \in \mathbf{N}$ risulta che $A \cap X_M \in s(\varrho|_{X_M})$

e valga almeno una delle due seguenti condizioni:

v) $E_t \in s\varrho \cup \{\text{chiusi in } s\varrho\}$ per ogni $t \in T$;

vi) per ogni x_k, $x \in X$ $(k \in \mathbf{N})$ tali che $\lim_{k \to \infty} x_k = x$ in ϱ, esistano $M \in \mathbf{N}$ e $(k_h)_{h \in \mathbf{N}}$ successione strettamente crescente di naturali per cui $x, x_{k_h} \in X_M$ per ogni $h \in \mathbf{N}$.

(4.26.1) $K \cap E^x$ è compatto e/o separabile in τ per ogni $x \in X$ e per ogni $K \in \mathcal{K}$.

Sia $f: E \to Z$. Allora condizione necessaria e sufficiente affinchè (f, μ, ϱ, ζ) verifichi la proprietà (μsCd) [risp. (μsCf)] è che $(f|_{(T \times X_M)} \cap E, T, \mu, \tau, \varrho|_{X_M}, \zeta)$ verifichi la proprietà $SD(\mathcal{K})$ per ogni $M \in \mathbf{N}$. (La condizione necessaria vale anche senza (4.26.1) e le ipotesi i), iv), v) e vi) di (4.26.0); la condizione sufficiente vale anche senza l'ipotesi iii) di (4.26.0)).

Dimostrazione: Sia $i_M: X_M \to X$ l'immersione per ogni $M \in \mathbf{N}$. Tenendo conto dell'Osservazione 4.12 *b*) e del fatto che la validità della proprietà (μsCf) implica la validità della proprietà (μsCd), basta dimostrare la condizione necessaria nel caso in cui (f, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà (μsCd). Si supponga allora che (f, μ, ϱ, ζ) verifichi la proprietà (μsCd) e sia D relativo a (f, μ, ϱ, ζ) ed alle proprietà (sCd), (μsCd).

Si può ora applicare a $(D, \tau|_D)$, (X, ϱ), $(X_M, \varrho|_{X_M})$, $\zeta|_D$, $\mu|_{(\zeta|_D)}$, $\{K \in \mathcal{K}: K \subset D\}$, id_D, i_M, $(D \times X) \cap E$, $(D \times X_M) \cap E$, $f|_{(D \times X)} \cap E$, $f|_{(D \times X_M)} \cap E$ $(M \in \mathbf{N})$, (Z, ζ) la parte *a*) (nel caso sequenziale) del Lemma 3.29 (lo si vede nello stesso modo in cui si è visto, nella dimostrazione del corollario 4.17, che si poteva applicare la parte *a*) (nel caso sequenziale) del Lemma 3.4). Allora per ogni $M \in \mathbf{N}$ risulta che

$$D \subset I(s, f|_{(D \times X_M)} \cap E, \varrho|_{X_M}, \zeta) \subset I(s, f|_{(T \times X_M)} \cap E, \varrho|_{X_M}, \zeta)$$

e

$$(f|_{(T \times X_M)} \cap E)|_{(D \times X_M)} \cap E = f|_{(D \times X_M)} \cap E$$

è

$$(\zeta|_D \times \mathcal{B}(\varrho|_{X_M}))|_{(D \times X_M)} \cap E\text{-misurabile}$$

e cioè

$$(\zeta \times \mathcal{B}(\varrho|_{X_M}))|_{(D \times X)} \cap E\text{-misurabile}$$

e quindi $(f|_{(T\times X_M)\cap E}, \mu, \varrho|_{X_M}, \zeta)$ verifica la proprietà (μCd) e D è relativo a $(f|_{(T\times X_M)\cap E}, \mu, \varrho|_{X_M}, \zeta)$ ed a tale proprietà. Ora vale (4.17.1) (per la stessa dimostrazione fatta nel n. 4.17) e quindi per $c)$ del Lemma 3.20 risulta che

(4.26.2) $(f|_{(T\times X_M)\cap E}, \mu, \varrho|_{X_M}, \zeta)$ verifica la proprietà (Cd) e D è relativo a $(f|_{(T\times X_M)\cap E}, \mu, \varrho|_{X_M}, \zeta)$ ed a tale proprietà $(M\in \mathbf{N})$

(ove l'ultima asserzione segue dalla dimostrazione di $c)$ del Lemma 3.20).

D'altra parte si può applicare a (T, τ), (X, ϱ), $(X_M, \varrho|_{X_M})$, $\mathfrak{L}$, μ, $\mathfrak{K}$, id_E, i_M, E, $(T\times X_M)\cap E$, (Z, ζ), f, $f|_{(T\times X_M)\cap E}$ $(M\in \mathbf{N})$ la parte $a)$ del Lemma 3.30 (infatti (3.30.0) e (3.30.1) sono ovviamente verificate) e, visto che (f, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà (μCd) e che D è relativo a (f, μ, ϱ, ζ) ed a tale proprietà, tenendo conto dell'Osservazione 3.12 $b)$, per $a)$ del Lemma 3.30 risulta che per ogni $M\in \mathbf{N}$ e per ogni $y\in X_M$ esiste $D_M(y)\in \mathfrak{L}$, $D_M(y)\subset D\cap((T\times X_M)\cap E)^y$ tale che sia

$$\mu\big((D\cap((T\times X_M)\cap E)^y)\setminus D_M(y)\big)=0$$

e $\{f|_{(T\times X_M)\cap E}(s, y) : s\in D_M(y)\}$ sia contenuto in un sottospazio separabile di (Z, ζ). Pertanto, tenendo conto di (4.26.2) e dell'Osservazione 3.12 $b)$, si ottiene che

$(f|_{(T\times X_M)\cap E}, \mu, \varrho|_{X_M}, \zeta)$ verifica la proprietà (μCd) per ogni $M\in \mathbf{N}$.

Sia $M\in \mathbf{N}$; tenendo conto del fatto che vale (4.17.2) ed utilizzando il Corollario 4.23 $b)$ (applicato a (T, τ), $(X_M, \varrho|_{X_M})$, (Z, ζ), $\mathfrak{L}$, μ, $\mathfrak{K}$, $(T\times X_M)\cap E$) si ottiene che

(4.26.3) $(f|_{(T\times X_M)\cap E}, T, \mu, \tau, \varrho|_{X_M}, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\mathfrak{K})$.

Viceversa valga (4.26.3) per ogni $M\in \mathbf{N}$. Allora se $M\in \mathbf{N}$ per il Teorema 4.2 (che si può applicare perchè valgono ii) di (4.26.0) e (4.26.1)) si ottiene che

(4.26.4) $(f|_{(T\times X_M)\cap E}, \mu, \varrho|_{X_M}, \zeta)$ verifica la proprietà (μCd) [risp. (μCf)].

Da (4.17.1) e da $d)$ del Lemma 3.20 segue ora che

$(f|_{(T\times X_M)\cap E}, \mu, \varrho|_{X_M}, \zeta)$ verifica la proprietà (μCd) [risp. (μCf)].

Poichè è ora lecito applicare la parte $e)$ [risp. $c)$] (nel caso sequenziale) del

Lemma 3.29 a (T, τ), (X, ϱ), $(X_M, \varrho|_{X_M})$, $\mathfrak{C}$, μ, $\mathcal{K}$, id_T, i_M, E, $(T \times X_M) \cap E$, f, $f|_{(T \times X_M) \cap E}$ $(M \in \mathbf{N})$, (Z, ζ) (lo si vede nello stesso modo in cui si è vista la verifica analoga nella parte finale della dimostrazione del Corollario 4.17), si ha che

(4.26.5) (f, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà (ιCd) [risp. (ιCf)].

Sia ora D relativo a (f, μ, ϱ, ζ) ed alla proprietà (ιCd) [risp. sia ora $D = I(\iota, f, \varrho, \zeta)$]. Si può allora applicare a $(D, \tau|_D)$, (X, ϱ), $(X_M, \varrho|_{X_M})$, $\mathfrak{C}|_D$, $\mu|_{(\mathfrak{C}|_D)}$, $\{K \in \mathcal{K}: K \subset D\}$, id_D, i_M, $(D \times X) \cap E$, $(D \times X_M) \cap E$, (Z, ζ), $f|_{(D \times X) \cap E}$, $f|_{(D \times X_M) \cap E}$ $(M \in \mathbf{N})$ la parte $b)$ del Lemma 3.30 (infatti (3.30.5) e (3.30.6) sono ovviamente verificate, (3.30.4) segue da $i)$ di (4.26.0) e (3.30.7) è conseguenza della completezza di μ) e, visto che da (4.26.4), che vale per ogni $M \in \mathbf{N}$, segue che

$(f|_{(D \times X_M) \cap E}, \mu|_{(\mathfrak{C}|_D)}, \varrho|_{X_M}, \zeta)$ verifica la proprietà (μCd) [risp. (μCf)],

tenendo conto dell'Osservazione 3.12 e di (4.26.5) per $b)$ del Lemma 3.30 si ottiene che

(f, μ, ϱ, ζ) verifica la proprietà $(\mu\iota Cd)$ [risp. $(\mu\iota Cf)$].

4.27 Osservazione: Siano (T, τ), (X, ϱ), μ, $\mathcal{K}$, E come nel Corollario 4.17, sia (Z, ζ) spazio topologico, siano $X_M \in \mathcal{M}(\varrho)$ $(M \in \mathbf{N})$, $f: E \to [-\infty, \infty]$, $g: E \to Z$. Allora:

$a)$ Se vale v) di (4.17.0), risulta che la condizione

(4.27.0) $(f|_{(T \times X_M) \cap E}, T, \mu, \tau, \varrho|_{X_M})$ verifica la proprietà $SD[\mathcal{K}]$ per ogni $M \in \mathbf{N}$

implica la condizione

(4.27.1) $(f, T, \mu, \tau, \varrho)$ verifica la proprietà $SD[\iota\mathcal{K}]$

e la condizione

(4.27.2) $(g|_{(T \times X_M) \cap E}, T, \mu, \tau, \varrho|_{X_M}, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\mathcal{K})$ per ogni $M \in \mathbf{N}$

implica la condizione

(4.27.3) $(g, T, \mu, \tau, \varrho, \zeta)$ verifica la proprietà $SD(\iota\mathcal{K})$.

Infatti risulta intanto che se da (4.27.2) segue (4.27.3) allora, considerando $g = f$ e $(Z, \zeta) = ([-\infty, \infty], \sigma_i)$ (ove σ_i è la topologia della semicontinuità inferiore su $[-\infty, \infty]$, per cui come visto nella dimostrazione del Teorema 1.20 *b*) risulta che: se (Y, σ) è uno spazio topologico e $h: Y \to [-\infty, \infty]$, si ha che h è s.c.i. [risp. s.s.c.i.] se e solo se $h: (Y, \sigma) \to ([-\infty, \infty], \sigma_i)$ è continua [risp. sequenzialmente continua]) si ottiene che da (4.27.0) segue (4.27.1) e d'altra parte se

$$K_{n,M} \in \mathcal{K}, \qquad \mu(T \setminus K_{n,M}) < 1/((n+1)2^{M+1}),$$

$g/(K_{n,M} \times X_M) \cap E$ è continua per ogni $n \in \mathbf{N}$, $M \in \mathbf{N}$ e se $K_n = \bigcap_{M \in \mathbf{N}} K_{n,M}$ allora

$$K_n \in \mathcal{K}, \qquad \mu(T \setminus K_n) < \sum_{M \in \mathbf{N}} 1/((n+1)2^{M+1}) = 1/(n+1)$$

ed inoltre se $n \in \mathbf{N}$, se $(t_k, x_k) \in (K_n \times X) \cap E$ $(k \in \mathbf{N})$, $(t_k, x_k) \to (t_0, x_0)$ e se per assurdo $g(t_k, x_k) \not\to g(t_0, x_0)$ in ζ allora esisterebbe una successione $(k_h)_{h \in \mathbf{N}}$ strettamente crescente di naturali tale che ogni successione estratta da $(g(t_{k_h}, x_{k_h}))_{h \in \mathbf{N}}$ non converga a $g(t_0, x_0)$ in ζ, ma d'altronde poichè vale v) di (4.17.0) esisterebbero $M \in \mathbf{N}$ e $(l_h)_{h \in \mathbf{N}}$ successione strettamente crescente di naturali tali che $x_0, x_{k_{l_h}} \in X_M$ per ogni $l \in \mathbf{N}$ e pertanto (t_0, x_0), $(t_{k_{l_h}}, x_{k_{l_h}}) \in$ $\in (K_{n,M} \times X_M) \cap E$ $(l \in \mathbf{N})$, per cui sarebbe $g(t_{k_{l_h}}, x_{k_{l_h}}) \to g(t_0, x_0)$ in ζ, il che è assurdo.

b) Se $(K, \tau/_K)$ e $(X_M, \varrho/_{X_M})$ sono a base numerabile di intorni per ogni $K \in \mathcal{K}$, $M \in \mathbf{N}$, risulta che da (4.27.1) segue (4.27.0) e da (4.27.3) segue (4.27.2).

Infatti, analogamente a quanto fatto in *a*), basta provare che da (4.27.3) segue (4.27.2) e d'altra parte nell'ipotesi considerata $(K \times X_M) \cap E$ $(K \in \mathcal{K}, M \in \mathbf{N})$ sono a base numerabile di intorni (cfr. [*K*], Cap. 3, Teorema 6) e quindi (4.27.2) equivale a

$$(g/(T \times X_M) \cap E, T, \mu, \tau, \varrho/_{X_M}, \zeta)$$

verifica la proprietà $SD(\mathcal{K})$ per ogni $M \in \mathbf{N}$,

che segue ovviamente da (4.27.3).

c) Si noti che da *a*) e da *b*) segue che, se gli elementi di $\mathcal{K}$ sono a base numerabile di intorni, i Corollari 4.17, 4.25 e 4.26 possono essere riformulati utilizzando rispettivamente (4.27.1), (4.27.3) e di nuovo (4.27.3) in luogo di (4.27.0), (4.27.2) e (4.27.2) e facendo nella parte necessaria l'ipotesi ulteriore che valga la condizione v) di (4.17.0).

4.28 Corollario (Teorema di Lusin): Siano (T, τ), (Z, ζ) spazi topologici, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mathfrak{L} \supset \mathcal{B}(\tau)$, $\mu: \mathfrak{L} \to [0, \infty]$ misura completa e $\mathcal{K}$-i.r., ove

$\mathcal{K} = \{$chiusi e compatti in $\tau\}$, ζ sia pseudo-metrizzabile, $a: T \to Z$. Allora a è μ-misurabile se e solo se per ogni $n \in \mathbf{N}$ esiste K_n compatto e chiuso in τ tale che sia $\mu(T \setminus K_n) < 1/(n+1)$ e $a/_{K_n}$ sia continua.

Dimostrazione: Basta applicare il Corollario 4.26 con $X = X_M = \{0\}$ $(M \in \mathbf{N})$, $E = T \times \{0\}$, $f: (t, 0) \in T \times \{0\} \mapsto a(t) \in Z$ (è ovvia in questo caso la verifica di (4.26.0) e di (4.26.1)).

4.29 Teorema: (di Severini-Egoroff): Siano $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu: \mathfrak{L} \to [0, \infty[$ misura, (Z, d) spazio pseudo-metrico e $x_n: T \to Z$ applicazioni μ-misurabili $(n \in \mathbf{N})$, $x: T \to Z$ tali che $x_n \to x$ q.o. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $E_\varepsilon \in \mathfrak{L}$ tale che $\mu(T \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$ e $x_n/_{E_\varepsilon} \rightrightarrows x/_{E_\varepsilon}$.

Dimostrazione: Sia (W, δ) lo spazio metrico quoziente di (Z, d) e $\varphi: (Z, d) \to (W, \delta)$ proiezione canonica sul quoziente come in a) del Teorema 1.7. Allora $\varphi \circ x_n: T \to W$ è μ-misurabile per ogni $n \in \mathbf{N}$ poichè φ è continua e, tenendo conto della definizione di δ, risulta che $\varphi \circ x_n \to \varphi \circ x$ q.o. Pertanto per [Di] (§ 6, Teorema 1) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $E_\varepsilon \in \mathfrak{L}$ tale che $\mu(T \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$ e $(\varphi \circ x_n)/_{E_\varepsilon} \rightrightarrows (\varphi \circ x)/_{E_\varepsilon}$. Tenendo di nuovo conto della definizione di δ, si conclude.

BIBLIOGRAFIA

[B] N. Bourbaki, *General Topology*, Hermann, Addison-Wesley (1966).

[BA 1] A. Bottaro Arduino, *Su alcune proprietà delle topologie sequenziali e delle integrande normali*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) 134 (1983), 27-65.

[BA 2] A. Bottaro Arduino, *$(\mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho))$-misurabilità e convergenza in misura*, di prossima pubblicazione su Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A, 118 (1984).

[BA 3] A. Bottaro Arduino, *Proprietà di inclusione e di uniforme continuità dell'operatore di Nemytskii*, di prossima pubblicazione su Ricerche Mat..

[BL] H. Berliocchi - J. M. Lasry, *Intégrandes normales et mesures paramétrées en calcul des variations*, Bull. Soc. Math. France, 101 (1973), 129-184.

[BO] G. F. Bottaro - P. Ottazzi, *Semicontinuità inferiore di un funzionale integrale dipendente da funzioni a valori in uno spazio di Banach*, Boll. Un. Mat. It., (5), 17 B (1980), 1290-1307.

[Br] P. Brunovský, *Scorza-Dragoni's Theorem for Unbounded Set - Valued Functions and Its Applications to Control Problems*, Mat. Casopis Sloven. Akad. Vied., 20 (1970), 205-213.

[Ca 1] C. Castaing, *Sur les multi-applications measurables*, Rev. Française Informat. Recherche Opérationnelle, 1 (1967), 91-126.

[Ca 2] C. Castaing, *Une nouvelle extension de théorème de Dragoni-Scorza*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér A, 271 (1970), 396-398.

[CV] C. Castaing - M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Lecture Notes in Math., n. 580, Springer (1977).

[Di] N. Dinculeanu, *Vector Measures*, Pergamon Press (1967).

[DS] N. Dunford - J. T. Schwartz, *Linear Operators, Part I*, Interscience Publishers Inc., (1957).

[F 1] S. P. Franklin, *Spaces in which Sequences Suffice*, Fund. Math., 57 (1965), 107-115.

[F 2] S. P. Franklin, *Spaces in which Sequences Suffice - II*, Fund. Math., 61 (1967), 51-56.

[G] G. S. Goodman, *On a Theorem of Scorza-Dragoni and Its Application to Optimal Control*, Mathematical Theory of Control, ed. A. V. Balakrishnan - L. W. Neustadt, Academic Press (1967), 222-233.

[J] M. Q. Jacobs, *Remarks on Some Recent Extensions of Filippov's Implicit Functions Lemma*, Siam J. Control., 5 (1967), 622-627.

[K] J.L. Kelley, *General Topology*, Springer (1955).

[Ro] R. T. Rockafellar, *Integral Functionals, Normal Integrands and Measurable Selections*, Nonlinear Operators and the Calculus of Variations, Lecture Notes in Math., n. 543, Springer (1976), 157-207.

[RV] B. Riccieri - A. Villani, *Separability and Scorza-Dragoni's Property*, Matematiche (Catania), 37 (1982), 156-161.

[SD] G. Scorza Dragoni, *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 17 (1948), 102-106.