Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
98° (1979-80), Vol. IV, fasc. 5, pagg. 63-82.

ESTER GIARRUSSO (*)

Problemi quasi-ellittici dipendenti da un parametro in L^p. (**)

SUMMARY. — In this paper we prove theorems of existence and uniqueness in L^p for the quasi-elliptic equation depending on a parameter q: $L(x, D, q)\, u = f(x, q)$ in R^n and for the Dirichlet's problem for this equation in R^n_+.

INTRODUZIONE

In una recente nota A. Alvino e G. Trombetti [2] hanno stabilito dei teoremi di esistenza ed unicità per problemi ellittici dipendenti da un parametro, considerando soluzioni appartenenti agli ordinari spazi di Sobolev $W^{l,p}$ con $l \in N$ e $p > 1$.

In questa nota estendo parte di tali risultati; dimostrando l'esistenza e l'unicità nello spazio di una soluzione di una equazione quasi-ellittica (cfr. n. 4) del tipo:

$$\text{(I)} \qquad \sum_{\langle \alpha, \varkappa \rangle + k \leq m} a_{\alpha k}(x)\, q^k D^\alpha u = f(x, q) \qquad \varkappa = \left(\frac{m}{m_1}, \ldots, \frac{m}{m_n} \right), \; x \in R^n ,$$

dove u appartiene ad un opportuno spazio $H_{l,p}$ con $l \in \bar{R}_+$ e $p > 1$ (cfr. def. 1.1.) che coincide con lo spazio $W^{l,p}$ considerato in [2] quando $m_1 = \ldots = m_n$ ed $l \in N$ e dove, inoltre, i coefficienti $a_{\alpha k}(x)$ appartengono ad opportuni spazi $M_{l,p}$ (cfr. def. 1.5.) per i quali vale la diseguaglianza dimostrata nel teorema 3.1.

Stabilisco, inoltre, un teorema di esistenza ed unicità nel semispazio R^n_+ per il problema di Dirichlet per un'equazione del tipo (I), limitandomi in tal caso a considerare la soluzione in uno spazio $H^+_{l,p}$ con $l \in \bar{R}_+$ e tale che per ogni

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni del C.N.R. presso l'Istituto Matematico « Renato Caccioppoli » dell'Università di Napoli.

(**) Memoria presentata dall'Accademico dei XL CARLO MIRANDA il 24 dicembre 1979.

ISSN-0370-3460

$i \in \{1, \ldots, n\}$ $\dfrac{lm_i}{m} \in \mathrm{N}$. Tali restrizioni sono dovute al fatto che utilizzando opportunamente i teoremi sull'interpolazione di [6] e [7] si prova la validità di un teorema di tracce per gli elementi di $\mathrm{H}^+_{l,p}$ con $\dfrac{lm_i}{m} \in \mathrm{N}$ ed $i = 1, \ldots, n$ (cfr. th. 1.1. e prop. 3.1.).

La validità di un teorema di tracce in ipotesi meno restrittive implicherebbe la possibilità di estendere i teoremi di esistenza ed unicità provati a problemi di tipo più generale in R^n_+. Ciò sarà oggetto di ulteriori studi.

Nel n. 1 sono richiamati gli spazi nei quali si considera il problema ed alcune loro proprietà; nel n. 2 è enunciato il teorema di Mihlin e si dimostra un lemma che ne semplifica l'applicazione a funzioni x'-omogenee; nel n. 3 si definiscono opportune norme dipendenti dal parametro q e si stabiliscono mediante il lemma 2.1. alcune maggiorazioni con costanti indipendenti da q, che verranno poi utilizzate nei numeri 4 e 5 dove si studiano, infine i suddetti problemi in R^n ed in R^n_+.

1. - Gli spazi $\mathrm{H}_{l,p}$, $\mathrm{W}^{\bar{r},p}$ e $\mathrm{B}^{\bar{r}}_p$

Richiamiamo, anzitutto, alcune usuali notazioni di cui ci serviremo nel seguito.

Detto α un multi-indice, cioè una n-pla di interi non negativi $\alpha_1, \ldots \alpha_n$, porremo $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\mathrm{D}_k = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x_k} = \dfrac{1}{i}\partial x_k$, $\mathrm{D}^\alpha = \mathrm{D}^\alpha_x = \mathrm{D}^{\alpha_1}_1, \ldots, \mathrm{D}^{\alpha_n}_n$ ed, inoltre, con $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathrm{R}^n$ e $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{R}^n$ si porrà $\xi^\alpha = \xi^{\alpha_1}_1, \ldots, \xi^{\alpha_n}_n$ e $\langle \xi, x \rangle = \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_n x_n$.

Indicheremo, poi, con $\Lambda(\xi)$, o più semplicemente con Λ, quando ciò non dia luogo ad equivoci, la funzione così definita:

$$\Lambda(\xi) = (1 + \sum_{i=1}^{n} \xi^{2m_i}_i)^{1/2m} ,$$

dove $m_1, \ldots, m_n$ sono n interi positivi ed $m = \max\{m_1, \ldots, m_n\}$.

Infine, indicheremo, come di consueto, con Ω un aperto di R^n e, la trasformata e l'antitrasformata di Fourier di una distribuzione temperata u di R^n, rispettivamente con $\mathcal{F}u$ ed $\mathcal{F}^{-1}u$.

Ciò posto, introduciamo alcuni spazi funzionali. Diamo la:

Definizione 1.1. - *Per ogni* $\mathrm{p} > 1$, $\mathrm{l} \geqslant 0$ *indichiamo con* $\mathrm{H}_{\mathrm{l,p}}$ *lo spazio delle distribuzioni temperate* u *tali che*: $\mathcal{F}^{-1}\Lambda^l \mathcal{F}u \in \mathrm{L}^p(\mathrm{R}^n)$, *munito della norma*:

$$\|u\|_{l,p} = \|\mathcal{F}^{-1}\Lambda^l \mathcal{F}u\|_{\mathrm{L}^p(\mathrm{R}^n)}$$

Quando $m_1 = \ldots = m_n$ tali spazi sono ben noti e sono stati ampiamente studiati da vari autori (cfr. [3, 5, 6, 13]).

Indicato poi con R^n_+ il semispazio costituito dai punti $x = (x_1, \ldots, x_n)$ per i

quali $x_n > 0$, e con $(H_{l,p})_-$ il sottospazio di $H_{l,p}$ costituito da quegli elementi il cui supporto è contenuto nel semispazio $R^n - R^n_+$ diamo la:

DEFINIZIONE 1.2. - *Per ogni* $p > 1$, $l \geqslant 0$ *indichiamo con* $H^+_{l,p}$ *lo spazio quoziente*:

$$H^+_{l,p} = \frac{H_{l,p}}{(H_{l,p})_-}$$

munito della norma quoziente:

$$\|u\|^+_{l,p} = \inf \|f\|_{l,p} \qquad f \in H_{l,p} \text{ ed } f = u \text{ per } x_n > 0 \ .$$

Richiamiamo, ora, la definizione di spazi che generalizzano gli spazi di Sobolev (cfr. [6]).

DEFINIZIONE 1.3. - *Per ogni* n-*pla* $\bar{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ *di interi non negativi e per ogni* $p \geqslant 1$, *indichiamo con* $W^{\bar{r},p}(\Omega)$ *lo spazio delle funzioni* u *tali che*:

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k_i} \in L^p(\Omega) \qquad \text{con } 0 \leqslant k \leqslant r_i \ , i = 1, \ldots, n \ ;$$

munito della norma:

$$\|u\|_{W^{\bar{r},p}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_i} \left\| \frac{\partial^k u}{\partial x^k_i} \right\|_{L^p(\Omega)} .$$

Indichiamo, ora, con $\Delta_{i,t}$ l'operatore così definito:

$$\Delta_{i,t} f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_i + t, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)$$

e diamo la:

DEFINIZIONE 1.4. — *Per ogni* $p \geqslant 1$ *e per ogni* n-*pla di numeri reali positivi* $\bar{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ *indichiamo con* $B^{\bar{r}}_p(R^n)$ *lo spazio delle funzioni* u *tali che*:

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k_i} \in L^p(R^n) \qquad k = 0, 1, \ldots, r^*_i \qquad i = 1, \ldots, n$$

ed inoltre per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$h_i(u) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{1+p\alpha_i}} \left(\int_{R^n} \left| \Delta^{k_i}_{i,t} \frac{\partial^{r_i *} u}{\partial x^{r_i *}_i} \right|^p dx \right) dt < \infty$$

dove r^*_i *è il più grande intero minore di* r_i , $\alpha_i = r_i - r^*_i$, $k_i = 1$ *per* $\alpha_i < 1$ *e* $k_i = 2$ *per* $\alpha_i = 1$. *In questo spazio poniamo*:

$$\|u\|_{B^{\vec{r}}_p(R^n)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_i} \left\| \frac{\partial^k u}{\partial x^k_i} \right\|_{L^p(R^n)} + \sum_{i=1}^{n} (h_i(u))^{1/p} .$$

Posto, ora, per ogni $u \in \mathcal{D}(\bar{R}^n_+)$, $\gamma_0 u = u(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ e

$$T_k u = \left(\gamma_0 u , \gamma_0 \frac{\partial u}{\partial x_n} , \ldots, \gamma_0 \frac{\partial^k u}{\partial x^k_n} \right)$$

si ha il seguente teorema di traccia:

Teorema 1.1. — *Per ogni* $p > 1$ *e per ogni* n-*pla* $\vec{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ *di interi positivi, detto* k *il più grande intero minore di* $r_n - 1/p$, *l'applicazione*: $u \in \mathcal{D}(\bar{R}^n_+) \to T_k u$ *si prolunga per continuità in una applicazione che denotiamo ancora con* $u \to T_k u = \left(\gamma_0 u , \gamma_0 \frac{\partial u}{\partial x_n} , \ldots, \gamma_0 \frac{\partial^k u}{\partial x^k_n} \right)$ *da* $W^{\vec{r},p}(R^n_+)$ *a* $\prod_{j=0}^{k} B^{\left(1 - \frac{j}{r_n} - \frac{1}{pr_n}\right)\vec{r}'}(R^{n-1})$ *con* $\vec{r}' = (r_1, \ldots, r_{n-1})$; *esiste cioè una costante* $C > 0$ *tale che per ogni* $u \in W^{\vec{r},p}(R^n_+)$ *si ha*:

$$\sum_{j=0}^{k} \left\| \gamma_0 \frac{\partial^j u}{\partial x^j_n} \right\|_{B^{\left(1 - \frac{j}{r_n} - \frac{1}{pr_n}\right)\vec{r}'}(R^{n-1})} \leq C \|u\|_{W^{\vec{r},p}(R^n_+)} .$$

Inoltre, per ogni $(v_0, v_1, \ldots, v_k) \in \prod_{j=0}^{k} B^{\left(1 - \frac{j}{r_n} - \frac{1}{pr_n}\right)\vec{r}'}(R^{n-1})$ *esiste almeno una* $u \in W^{\vec{r},p}(R^n_+)$ *tale che*: $\gamma_0 \frac{\partial^j u}{\partial x^j_n} = v_j$ $(j = 0, \ldots, k)$ *e si ha*:

$$\|u\|_{W^{\vec{r},p}(R^n_+)} \leq C \sum_{j=0}^{k} \|v_j\|_{B^{\left(1 - \frac{j}{r_n} - \frac{1}{pr_n}\right)\vec{r}'}(R^{n-1})}$$

con C indipendente da $(v_0, \ldots, v_k)$.

Tale teorema si ricava come applicazione del teorema 2.1. di [6] pag. 211, tenendo conto anche del teorema 9.1. di pag. 193 e della nota 5.1. ancora di [6][(1)].

Nel seguito porremo con $l \in \bar{R}_+$:

$$l_i = \frac{lm_i}{m} \quad \text{e} \quad l^*_i = \left(\frac{lm_i}{m} \right)^* \quad i = 1, \ldots, n$$

e posto, inoltre, $\vec{r} = (l_1, \ldots, l_n)$ ed $\vec{r}' = (l_1, \ldots, l_{n-1})$ indicheremo, se l è positivo, con $B_{l,p}(R^n)$ e $B_{l,p}(R^{n-1})$ rispettivamente gli spazi $B^{\vec{r}}_p(R^n)$ e $B^{\vec{r}'}_p(R^{n-1})$ e, se gli l_i per $i \in \{1, \ldots, n\}$ sono interi non negativi con $W_{l,p}(\Omega)$ lo spazio $W^{\vec{r},p}(\Omega)$.

Nel numero seguente (cfr. prop. 3.1.) dimostreremo che $H_{l,p} = W_{l,p}(R^n)$ e $H^+_{l,p} = W_{l,p}(R^n_+)$ con equivalenza di norme.

Introduciamo infine una classe di spazi di moltiplicatori per gli elementi di $H_{l,p}$ e di $H^+_{l,p}$ (cfr. th. 3.1.).

Definizione 1.5. — Con $M_{l,p}$, $l \in \bar{R}_+$, *indichiamo la classe delle funzioni* φ, *per le quali* $\dfrac{\partial^k \varphi}{\partial x^k_i} \in L_\infty$ [2] *con* $k \leq [l_i]$ [3] *ed* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *ed inoltre*:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k \leqslant [l_i]} \int_R \frac{\|\Delta_{i,t}\, \partial x^k_i\, \varphi\|_\infty}{|t|^{l_i - [l_i] + 1}}\, dt < \infty .$$

2. - Il teorema di Mihlin per funzioni $\varkappa'$-omogenee.

Si chiama moltiplicatore di Fourier su $L^p(R^n)$, $p > 1$, (cfr. [2, 3, 13]) ogni distribuzione temperata ψ per la quale:

$$\|\mathcal{F}^{-1} \psi\, \mathcal{F} u\|_{L^p(R^n)} \leq C\, \|u\|_{L^p(R^n)} \quad \text{per ogni } u \in \mathcal{S} \tag{2.1.}$$

$\mathcal{S}$ essendo lo spazio delle funzioni a decrescenza rapida.

E' noto che vale il seguente teorema di Mihlin (cfr. [2, 8, 13]), di cui riportiamo l'enunciato in quanto spesso ne faremo uso nel seguito:

Teorema 2.1. — *Condizione sufficiente affinché* $\psi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *sia un moltiplicatore di Fourier su* $L^p(R^n)$ *è che esista una costante* $K > 0$, *tale che per ogni* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *con* $\alpha_i \leqslant 1$ *si abbia*:

$$|\xi^\alpha|\, |D^\alpha \psi(\xi)| \leqslant K .$$

(1) Infatti, utilizzando le notazioni di [6] e [7] si ha:

$$W^{r_n, L^p_0(E)} = W^{\vec{r},p}(R^n_+) \quad \text{e} \quad W^{r_n, E} = W^{\vec{r},p}(R^{n-1})$$

quando si prende in R^{n-1} l'operatore:

$$A = \mathcal{F}^{-1}\left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \xi^{2r_i}{}_i\right)^{1/2r_n} \quad \text{ed} \quad E = L^p(R^{n-1}) .$$

(2) Con L_∞ indicheremo, come di consueto, lo spazio delle funzioni φ limitate in R^n munito della norma $\|\varphi\|_\infty = \sup |\varphi(x)|$.

(3) Con $[l_i]$ si indica la parte intera di l_i.

In tal caso la (2.1) vale con $C = KA_{p,n}$ *dove* $A_{p,n}$ *è una costante che dipende solo da* p *e da* n.

Indichiamo, ora, come in seguito con $\varkappa'$ il vettore di R^{n+1} di componenti $1, \frac{m}{m_1}, \ldots, \frac{m}{m_n}$ e con Q l'insieme così definito:

$$Q = \{ q \in \mathcal{C} \ : \ a \leqslant \arg.q \leqslant b \} \qquad a, b \in R$$

e diamo la seguente:

Definizione 2.1. — *Una funzione* $\psi(q; \xi_1, \ldots, \xi_n)$ *di* $Q \times R^n$ *si dice* $\varkappa'$*-omogenea di grado* h *se, per ogni* $t > 0$, *si ha*:

$$\psi(tq \, ; t^{m/m_1} \xi_1, \ldots, t^{m/m_n} \xi_n) = t^h \, \psi(q \, ; \xi_1, \ldots, \xi_n) \ .$$

Posto, inoltre, per ogni $(q, \xi) \in \mathcal{C} \times R^n$:

$$\Lambda(q \, ; \xi) = (|q|^{2m} + \sum_{i=1}^{n} \xi^{2m_i}_i)^{1/2m}$$

e:

$$\Sigma = \{ (q, \xi) \in Q \times R^n \ : \ \Lambda(q \, ; \xi) = 1 \}$$

proviamo il

Lemma 2.1. — *Sia* $\psi(q \, ; \xi_1, \ldots, \xi_n)$ *una funzione* $\varkappa'$*-omogenea di grado* $-h, h \geqslant 0$, *in* $Q \times R^n$. *Se esiste una costante* $M > 0$, *tale che*:

$$\sup_{(q, \xi) \in \Sigma} |\xi^\alpha D^\alpha_\xi \psi(q \, ; \xi_1, \ldots, \xi_n)| \leqslant M \qquad \forall \ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \ : \ \alpha_i \leqslant 1$$

allora per ogni fissato $q \neq 0$ $\psi(q \, ; \xi)$ *è un moltiplicatore di Fourier su* $L^p(R^n)$ *e vale la (2.1.) con* $C = MA_{p,n} |q|^{-h}$.

Infatti è facile verificare che, poiché anche le funzioni $\xi^\alpha D^\alpha_\xi \psi(q \, ; \xi_1, \ldots, \xi_n)$ risultano $\varkappa'$-omogenee di grado $-h$, vale la diseguaglianza:

$$| \xi^\alpha D^\alpha_\xi \psi(q \, ; \xi_1, \ldots, \xi_n) | \leqslant M \Lambda^{-h}(q \, ; \xi) \leqslant M |q|^{-h}$$

per ogni $(q, \xi) \neq (0, 0)$ e per ogni $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ con $\alpha_i \leqslant 1$ $(i = 1, \ldots, n)$. Dal teorema 2.1. si ricava allora l'asserto.

3. - Norme dipendenti da un parametro

Dal teorema di Mihlin si trae che per ogni $u \in \mathcal{S}$, $q \in Q - \{0\}$ ed $l \geqslant 0$

$$\| \mathcal{F}^{-1} \Lambda^l(q \, ; \xi) \mathcal{F} u \|_{L^p(R^n)} \leqslant K_q \|u\|_{l,p} \tag{3.1.}$$

K_q essendo una costante dipendente da q.

E' lecito, allora, porre con $q \in Q - \{0\}$ e $u \in H_{l,p}$:

$$|||u|||_{l,p} = \|\mathcal{F}^{-1} \Lambda^l (q\,;\xi)\, \mathcal{F}u\,\|_{L^p(R^n)}$$

e con $u \in H^+_{l,p}$:

$$|||u|||^+_{l,p} = \inf \; |||f|||_{l,p} \qquad \text{con } f \in H_{l,p} \text{ ed } f = u \text{ per } x_n > 0 \; .$$

Dal lemma 2.1. si traggono le seguenti diseguaglianze di cui spesso in seguito faremo uso:

$$(3.2) \qquad |q|^s \, |||u|||_{l-s,p} \leqslant C \;\; |||u|||_{l,p} \qquad 0 \leqslant s \leqslant l$$

$$(3.3) \qquad |||D^\alpha u|||_{l-<\alpha,\varkappa>,p} \leqslant C \, |||u|||_{l,p} \; , \; \varkappa = \left(\frac{m}{m_1}, \ldots, \frac{m}{m_n} \right) \; , \; <\alpha, \varkappa> \leqslant l$$

dove $u \in H_{l,p}$ e C è una costante indipendente da q. Da queste tenendo conto della definizione di $H^+_{l,p}$, si ha anche:

$$(3.4) \qquad |q|^s \, |||u|||^+_{l-s,p} \leqslant C \;\; |||u|||^+_{l,p} \qquad 0 \leqslant s \leqslant l$$

e

$$(3.5) \qquad |||D^\alpha u|||^+_{l-<\alpha,\varkappa>,p} \leqslant C \, |||u|||^+_{l,p} \; , \; \varkappa = \left(\frac{m}{m_1}, \ldots, \frac{m}{m_n} \right) \; , \; <\alpha, \varkappa> \leqslant l$$

dove $u \in H^+_{l,p}$ e C non dipende da q.
Ancora dal lemma 2.1. si trae:

$$(3.6) \qquad \|\mathcal{F}^{-1} \Lambda^l (q'\,;\xi)\, \mathcal{F}u\|_{L^p(R^n)} \leqslant C \, \{ \|\mathcal{F}^{-1} \Lambda^l (q''\,;\xi)\, \mathcal{F}u\|_{L^p(R^n)} + $$
$$+ |q'|^l \, \|u\|_{L^p(R^n)} \} \; ^{(4)} \qquad q', q'' \in Q - \{0\} \text{ e } \quad u \in \mathcal{S}$$

C essendo indipendente da q' , q''.

Dalle (3.2) e (3.6) con $q \in Q$, $q \neq 0$, $0 \leqslant s \leqslant l$ ed $u \in \mathcal{S}$ si ricava inoltre:

$$(3.7) \qquad \|u\|_{l-s,p} \leqslant C\{ \|u\|_{L^p(R^n)} + |q|^{-s} \, |||u|||_{l,p} \}$$
$$\leqslant C \, \{ \|u\|_{L^p(R^n)} + |q|^{-s} \, (|q|^l \, \|u\|_{L^p(R^n)} + \|u\|_{l,p} \}$$

(4) Per ottenere la (3.6) si applica un'ovvia generalizzazione del lemma 2.1. alla funzione:

$$\frac{\Lambda^l (q'\,;\xi)}{|q'| + \Lambda^l (q''\,;\xi)}$$

$\varkappa''$-omogenea di grado 0 in $Q \times Q \times R^n - \{0\}$ con $\varkappa'' = (1, 1, \frac{m}{m_1}, \ldots, \frac{m}{m_n})$.

da cui, ponendo $|q| = \dfrac{1}{\varepsilon}$ con $\varepsilon > 0$ e tenendo conto della densità di $\mathcal{S}$ in $H_{l,p}$ si ricava il

LEMMA 3.1. — *Per ogni* $\varepsilon > 0$, $l,s \in \bar{R}_+$ $s \leqslant l$ *e per ogni* $u \in H_{l,p}$ *vale la diseguaglianza*:

$$\|u\|_{l-s,p} \leqslant C \left\{ \varepsilon^s \|u\|_{l,p} + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^{l-s}}\right) \|u\|_{L^p(R^n)} \right\}$$

dove C *è una costante numerica.*

Da tale relazione si ha anche il

LEMMA 3.2. — *Per ogni* $\varepsilon > 0$, $l,s \in \bar{R}_+$ $s \leqslant l$ *e per ogni* $u \in H^+{}_{l,p}$ *vale la diseguaglianza*:

$$\|u\|^+{}_{l-s,p} \leqslant C \left\{ \varepsilon^s \|u\|^+{}_{l,p} + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^{l-s}}\right) \|u\|_{L^p(R^n{}_+)} \right\} .$$

Introduciamo ora alcune norme dipendenti dal parametro $q \in Q - \{0\}$ per gli spazi $W_{l,p}(\Omega)$ e $B_{l,p}(R^n)$.

Poniamo con $q \in Q$, $q \neq 0$ ed $l \geqslant 0$:

$$|||u|||_{W_{l,p}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=0}^{l_i} |q|^{(l-h\, m/m_i)} \left\| \frac{\partial^h u}{\partial x^h{}_i} \right\|_{L^p(\Omega)} \qquad \forall u \in W_{l,p}(\Omega)$$

e con l positivo:

$$|||u|||_{B_{l,p}(R^n)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=0}^{l^*{}_i} |q|^{(l-h\, m/m_i)} \left\| \frac{\partial^h u}{\partial x^h{}_i} \right\|_{L^p(R^n)} + \sum_{i=1}^{n} (b_i(u))^{1/p}$$

per ogni $u \in B_{l,p}(R^n)$.

Dal lemma 2.1. e dalla densità di $\mathcal{S}$ in $H_{l,p}$ si trae, inoltre, per ogni $u \in H_{l,p}$ la relazione:

$$C_1 \, |||u|||_{l,p} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|\mathcal{F}^{-1} (|q|^{2m} + \xi^{2m_i}{}_i)^{l/2m} \mathcal{F}u\|_{L^p(R^n)} \leqslant C_2 \, |||u|||_{l,p} \tag{3.8}$$

con C_1 e C_2 indipendenti da q.

Se i numeri $\dfrac{lm_i}{m}$ sono interi non negativi per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$, dalla (3.8) utilizzando noti procedimenti relativi agli spazi isotropi, nonché il lemma 2.1., si ottiene la diseguaglianza:

$$C_1 \, |||u|||_{l,p} \leqslant |||u|||_{W_{l,p}(R^n)} \leqslant C_2 \, |||u|||_{l,p} \tag{3.9}$$

con C_1 e C_2 indipendenti da q; da ciò si trae la

PROPOSIZIONE 3.1. — *Se gli* $\frac{lm_i}{m}$ $(i = 1, \ldots, n; \quad l \in \bar{R}_+)$ *sono interi non negativi, allora* $H_{l,p} = W_{l,p}(R^n)$ *e* $H^+_{l,p} = W_{l,p}(R^n_+)$ *con equivalenza di norme.*
Vale, poi, la seguente

PROPOSIZIONE 3.2. — *Se gli* $\frac{lm_i}{m}$ $(i = 1, \ldots, n; \quad l \in \bar{R}_+)$ *sono interi positivi, allora detto* k *il più grande degli interi minori di* $\frac{lm_n}{m} - \frac{1}{p}$ *si ha per ogni* $u \in W_{l,p}(R^n_+)$:

$$\sum_{j=0}^{k} \left\| \gamma_0 \frac{\partial^j u}{\partial x^j_n} \right\|_{B_{l - \frac{jm}{m_n} - \frac{m}{pm_n}, p}(R^{n-1})} \leqslant C \, |||u|||_{W_{l,p}(R^n_+)}$$

dove C *è una costante indipendente da* q.

Inoltre per ogni $(v_0, \ldots, v_k) \in \prod_{j=0}^{k} B_{l - \frac{jm}{m_n} - \frac{m}{pm_n}, p}(R^{n-1})$ *esiste almeno una* $u \in W_{l,p}(R^n_+)$ *tale che* $\gamma_0 \frac{\partial^j u}{\partial x^j_n} = v_j \quad j = 0, \ldots, k$ *e si ha:*

$$|||u|||_{W_{l,p}(R^n_+)} \leqslant C \sum_{j=0}^{k} |||v_j|||_{B_{l - \frac{jm}{m_n} - \frac{m}{pm_n}, p}(R^{n-1})}$$

dove C *non dipende da* q.

Dim. Posto:

$$x'_i = x_i \, |q|^{m/m_i} \qquad i = 1, \ldots, n \qquad \text{e} \qquad u'(x') = u\left(\frac{x'_i}{|q|^{m/m_i}}\right) \tag{3.10}$$

l'asserto consegue dal teorema 1.1., osservando che si ha con $u \in W_{l,p}(R^n_+)$:

$$|||u|||_{W_{l,p}(R^n_+)} = |q|^{l - \sum_{i=1}^{n} \frac{m}{pm_i}} \, \|u'\|_{W_{l,p}(R^n_+)} \tag{3.11}$$

e

$$\left\| \gamma_0 \frac{\partial^j u}{\partial x^j_n} \right\|_{B_{l - \frac{jm}{m_n} - \frac{m}{pm_n}, p}(R^{n-1})} \tag{3.12}$$

$$= |q|^{l-\sum_{i=1}^{n}\frac{m}{pm_i}} \left\| \gamma_0 \frac{\partial^j u'}{\partial x'^j_n} \right\|_{B_{l-\frac{jm}{m_n}-\frac{m}{pm_n},p}(R^{n-1})}$$

Proviamo, ora, il

TEOREMA 3.1. — *Per ogni* $l \in \bar{R}_+$, $\varphi(x) \in M_{l,p}$ *e* $u \in H_{l,p}$ *si ha*:

$$|||\varphi u|||_{l,p} \leqslant C\, |||u|||_{l,p} \{ \|\varphi\|_\infty + \delta(q) \} \qquad q \in Q - \{0\}$$

e con $u \in H^+_{l,p}$ *si ha*:

$$|||\varphi u|||^+_{l,p} \leqslant C\, |||u|||^+_{l,p} \{ \|\varphi\|_\infty + \delta(q) \} \qquad q \in Q - \{0\}$$

C *essendo una costante indipendente da* q *e* $\delta(q)$ *essendo una quantità che dipende da* $\varphi(x)$ *e da* $|q|$ *e che tende a zero per* $|q| \to \infty$.

Ovviamente basta dimostrare l'asserto per $u \in \mathcal{S}$.
Per $l = 0$ il teorema è banale.

Supponiamo, allora, dapprima che per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ sia $0 < l_i < 1$.

In tal caso dal teorema 2. pag. 104 di [11] e dal teorema 2.1. si trae che sono equivalenti le norme:

$$\sum_{i=1}^{n} \|\mathcal{F}^{-1} (1 + \xi^{2m_i}_i)^{l/2m} \mathcal{F}u\|_{L^p(R^n)}$$

e:

$$\|u\|_{L^p(R^n)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \int_R \frac{\Delta_{i,t}\, u}{|t|^{1+l_i}}\, dt \right\|_{L^p(R^n)}$$

Ora con le posizioni (3.10) con $q \in Q$ e $q \neq 0$ si ha:

$$|||u|||_{l,p} = |q|^{l-\sum_{i=1}^{n}\frac{m}{pm_i}} \|u'\|_{l,p} \tag{3.13}$$

e, pertanto, da tale eguaglianza, utilizzando la (3.8), nonché l'osservazione precedente, e ritornando alla variabile x, si ricava che sono equivalenti uniformemente rispetto a q le norme:

$$|||u|||_{l,p} \quad \text{e} \quad |q|^l \|u\|_{L^p(R^n)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \int_R \frac{\Delta_{i,t}\, u}{|t|^{1+l_i}}\, dt \right\|_{L^p(R^n)}$$

Da ciò con tecnica analoga a quella usata per la dimostrazione del teorema 1.3. in [3], si ricava:

$$(3.14)\qquad |||\varphi u|||_{l,p} \leqslant C\, |||u|||_{l,p} \left\{ \|\varphi\|_\infty + \frac{1}{|q|^l} \cdot \sum_{i=1}^{n} \int_R \frac{\|\Delta_{i,t}\, u\|_\infty}{|t|^{1+l_i}}\, dt \right\}$$

con C indipendente da q.

Per provare il teorema anche nel caso che esista una i per cui $l_i \geqslant 1$, osserviamo che dal lemma 2.1. si ricava che sono equivalenti uniformemente rispetto a q le norme:

$$|||u|||_{l,p} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=0}^{[l_i]} |q|^{(l-\bar{\eta}_i - h\, m/m_i)} \left\| \frac{\partial^h u}{\partial x^h_i} \right\|_{\bar{\eta}_i, p}$$

dove si è posto: $\eta_i = l_i - [l_i]$, $\bar{\eta}_i = \eta_i \dfrac{m}{m_i}$ $\quad i = 1, \ldots, n$.

Allora, poiché è $0 \leqslant \eta_i < 1$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$, da tale osservazione e dalla (3.14), si ricava con qualche calcolo:

$$(3.15)\qquad |||\varphi u|||_{l,p} \leqslant C\, |||u|||_{l,p} \left\{ \|\varphi\|_\infty + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{[l_i]} \frac{1}{|q|^{m/m_i j}} \left\| \frac{\partial^j \varphi}{\partial x^j_i} \right\|_\infty \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{[l_i]} |q|^{-(\bar{\eta}_i + jm/m_i)} \int_R \frac{\| \Delta_{i,t}\, \partial x^j_i\, u \|_\infty}{|t|^{1+\eta_i}}\, dt \right.$$

con C indipendente da q; allora, indicata con $\delta(q)$ la somma dei termini in parentesi che contengono $|q|$ elevato ad un esponente negativo, si trae l'asserto, tenendo conto infine della definizione di $H^+_{l,p}$.

4. - Il problema in R^n

In questo numero studiamo l'equazione:

$$(4.1)\qquad L(x, D, q)\, u = f(x, q)$$

dove:

$$L(x, D, q)\, u = \sum_{\langle \alpha, \varkappa \rangle + k \leq m} a_{\alpha k}(x)\, q^k D^\alpha u$$

con $\varkappa = \left(\dfrac{m}{m_1}, \ldots, \dfrac{m}{m_n} \right)$ e $\quad q \in Q$.

A tal fine consideriamo dapprima il caso particolare che i coefficienti $a_{\alpha k}(x)$

siano costanti e che l'operatore $L(D, q)$ contenga solo i termini per i quali $< \alpha, \varkappa > + k = m$.

In tali condizioni si ricava allora facilmente dalle (3.2) e (3.3) che per ogni $u \in H_{l,p}$ con $l \in R_+$, $l \geqslant m$ e $q \neq 0$ vale la diseguaglianza:

$$|||Lu|||_{l-m,p} \leqslant C\, |||u|||_{l,p} \tag{4.2}$$

dove C è una costante che non dipende da q.

Supponiamo ora che per l'operatore $L(D, q)$ valga la seguente ipotesi:

$$\text{A)} \qquad L(\xi, q) \neq 0 \qquad |\xi| + |q| \neq 0\ ; \qquad (q, \xi) \in Q \times R^n$$

Si ha allora il

Teorema 4.1. — *Se l'ipotesi A) è verificata, allora per ogni* $l \geqslant m$, $q \in Q - \{0\}$ *e per ogni* $f \in H_{l-m,p}$ *esiste ed è unica la soluzione* u *dell'equazione (4.1) e si ha:*

$$|||u|||_{l,p} \leqslant C\, |||f|||_{l-m,p} \tag{4.3}$$

con C *costante positiva indipendente da* q.

Infatti con $f \in \mathcal{S}$ si ha: $u = \mathcal{F}^{-1} L^{-1}(\xi, q)\, \mathcal{F} Lu$ e da ciò per il lemma 2.1. si ricava:

$$|||u|||_{l,p} \leqslant C\, |||f|||_{l-m,p}$$

con C indipendente da q ed $f = Lu$.
Da ciò si trae l'asserto essendo $\mathcal{S}$ denso in $H_{l,p}$.

Consideriamo adesso il caso generale e supponiamo che, per $l \geqslant m$, i coefficienti $a_{\alpha k}(x)$ di $L(x, D, q)$ siano funzioni di classe $M_{l-m,p}$; allora per il teorema 3.1. con $q \neq 0$ e per ogni $u \in H_{l,p}$ si ha una diseguaglianza analoga alla (4.2), dove però C è indipendente da q solo per $|q|$ sufficientemente grande.

Posto inoltre:

$$L'(x, D, q)\, u = \sum_{\langle \alpha, \varkappa \rangle + k = m} a_{\alpha k}(x)\, q^k D^\alpha u$$

proviamo il seguente

Teorema 4.2. — *Sia* $l \geqslant m$, $L'(x, D, q)$ *verifichi l'ipotesi A) per ogni fissato* $x \in R^n$ *ed i coefficienti* $a_{\alpha k}(x)$ *appartengano a* M_{l-m}. *Allora se al di fuori di una sfera di centro nell'origine le oscillazioni delle funzioni* $a_{\alpha k}(x)$ *con* $< \alpha, \varkappa > + k = m$ *sono minori di un opportuno* $\varepsilon > 0$, *esiste un* $q_0 > 0$ *tale che per* $|q| \geqslant q_0$, $q \in Q$ *si ha la diseguaglianza:*

$$|||u|||_{l,p} \leqslant C\, |||f|||_{l-m,p}$$

dove C *non dipende da* q *e* $f = Lu$.

Dim. Consideriamo un ricoprimento di R^n mediante un numero finito di aperti $0_1, \ldots, 0_v$, di cui uno solo non limitato e sia $\varphi_1, \ldots, \varphi_v$ una partizione dell'unità relativa a tale ricoprimento. Si ha, quindi, per ogni $i \in \{1, \ldots, v\}$:

$$\varphi_i \in C^\infty(R^n) \quad , \quad \varphi_i \geqslant 0 \quad , \quad \text{supp. } \varphi_i \subset 0_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) = 1 \qquad \text{per ogni } x \in R^n .$$

Fissato, allora, per ogni $i \in \{1, \ldots, v\}$, un $x_i \in 0_i$ e posto $u_i = \varphi_i u$, per il teorema 4.1. si ha:

$$(4.4) \quad |||u|||_{l,p} \leqslant C \sum_{i=1}^{n} |||L(x, D, q)\, u_i|||_{l-m,p}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} |||(L(x, D, q) - L'(x_i, D, q))\, u_i|||_{l-m,p} .$$

Ora, dal teorema 3.1. e dalle (3.2) e (3.3) non è difficile verificare che per $|q|$ sufficientemente grande si ha:

$$(4.5) \quad |||(L(x, D, q)u_i|||_{l-m,p} \leqslant C\{|||Lu|||_{l-m,p} + \delta(q)\ |||u|||_{l,p}\}$$

e:

$$|||(L(x, D, q) - L'(x_i, D, q))\, u_i|||_{l-m,p} \leqslant C\{\delta(q)|||u|||_{l,p}$$

$$+ \sum_{\langle \alpha, \varkappa \rangle + k = m} \sum_{i=1}^{n} \sup_{0_i} |a_{\alpha k}(x) - a_{\alpha k}(x_i)|\ |||u|||_{l,p} .$$

Fissati, allora, opportunamente $v, 0_1, \ldots, 0_v$ e tenendo conto delle ipotesi da tali diseguaglianze si perviene all'asserto.

Si ha inoltre il

TEOREMA 4.3. — *Sia* $l \in \bar{R}_+$, $l \geqslant m$ *e* $L'(0, D, q)$ *verifichi l'ipotesi A); inoltre i coefficienti* $a_{\alpha k}(x)$ *siano di classe* $M_{l-m,p}$, *allora esiste un* $\varepsilon > 0$ *tale che, se:*

$$|a_{\alpha k}(x) - a_{\alpha k}(0)| < \varepsilon \qquad \langle \alpha, \varkappa \rangle + k = m ,$$

esiste un $q_0 > 0$ *tale che per* $|q| \geqslant q_0$ *l'operatore* L *ha un inverso destro* R *per il quale si ha:*

$$|||Rf|||_{l,p} \leqslant C\ |||f|||_{l-m,p}$$

con C *indipendente da* q.

Seguendo lo schema di dimostrazione della prop. 5.1. di [1] basta mostrare

che, nelle ipotesi poste, detto R_0 l'operatore inverso di $L'(0, D, q)$ esistente per il teorema 4.1., si ha:

$$(4.6) \qquad ||| (L(x, D, q) - L'(0, D, q)) R_0 f |||_{l-m,p} \leqslant \frac{1}{2} |||f|||_{l-m,p}$$

per ogni $f \in H_{l-m,p}$, per $|q|$ sufficientemente grande e ε sufficientemente piccolo.

A tale scopo osserviamo:

$$(4.7) \qquad (L(x, D, q) - L'(0, D, q)) R_0 f = (L'(x, D, q) - L'(0, D, q)) R_0 f$$

$$+ (L(x, D, q) - L'(x, D, q)) R_0 f \ .$$

Ora, poiché l'operatore $L'(x, D, q) - L'(0, D, q)$ contiene solo i termini per i quali $< \alpha, \varkappa > + k = m$, dalle (3.2) e (3.3) e dai teoremi 3.1. e 4.1. si ha che, se ε è sufficientemente piccolo e $|q|$ sufficientemente grande:

$$(4.8) \qquad ||| (L'(x, D, q) - L'(0, D, q)) R_0 f |||_{l-m,p} \leqslant \frac{1}{4} |||f|||_{l-m,p} \ .$$

Inoltre, poiché l'operatore $L(x, D, q) - L'(x, D, q)$ contiene solo i termini per i quali $< \alpha, \varkappa > + k < m$, dalle (3.2) e (3.3) e dai teoremi 3.1. e 4.1. per $|q|$ sufficientemente grande si ha:

$$(4.9) \qquad ||| (L(x, D, q) - L'(x, D, q)) R_0 f |||_{l-m,p} \leqslant \frac{1}{4} |||f|||_{l-m,p} \ .$$

Dalle (4.7), (4.8) e (4.9) consegue allora la (4.6).

Si ha, infine, il

TEOREMA 4.4. — *Sia* $l \geqslant m$, $L'(x, D, q)$ *verifichi l'ipotesi A) per ogni* $x \in R^n$ *ed i coefficienti* $a_{\alpha k}(x)$ *siano elementi di* $M_{l-m,p}$. *Allora, esiste un* $\varepsilon > 0$ *tale che, se si può determinare un* $h > 0$ *per il quale si ha*:

$$| a_{\alpha k}(x') - a_{\alpha k}(x'') | < \varepsilon \quad , \quad < \alpha, \varkappa > + k = m \quad \text{e} \quad |x'| \ , \ |x''| > h$$

per $|q|$ *sufficientemente grande esiste una sola soluzione del problema (4.1) e per essa si ha*:

$$|||u|||_{l,p} \leqslant C \, |||f|||_{l-m,p}$$

con C *indipendente da* q.

Il teorema si dimostra con ragionamenti analoghi a quelli del teorema 5.1. di [1] tenendo conto del teorema 4.2. e 4.3., delle (3.2) e (3.3) nonché del teorema 1.3.

5. - Un problema in R^n_+

Sia $n \geqslant 2$. Indicato con L l'operatore a coefficienti costanti:

$$L(D, q) = \sum_{\langle \alpha, \varkappa \rangle + k = m} a_{\alpha k}\, q^k D^\alpha \qquad \varkappa = \left(\frac{m}{m_1}, \ldots, \frac{m}{m_n} \right) \qquad q \in Q$$

e con L_o la sua parte principale, supponiamo che:

A ') $\qquad L(\xi, q) \neq 0 \qquad (\xi, q) \in R^n \times Q$ e $|\xi| + |q| \neq 0$

A") L sia propriamente quasi-ellittico di tipo r e cioè (cfr. [9]):

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{m_j} \leqslant C\, |L_o(\xi)| \qquad \forall\, \xi \in R^n$$

e per ogni $\xi' \in R^{n-1}$ il polinomio nella variabile complessa z $L_o(\xi', z)$ ammetta sempre lo stesso numero r di radici aventi coefficiente della parte immaginaria positiva.

Ricordiamo (cfr. [10] ed anche [1] per il caso ellittico) che in tali condizioni il polinomio in z: $(L(\xi', z, q)$, con $|\xi'| + |q| \neq 0$ e $(\xi', q) \in R^{n-1} \times Q$, ammette r radici aventi coefficiente della parte immaginaria positiva.

Ciò posto, consideriamo il seguente problema in R^n_+:

$$(5.1) \qquad \begin{cases} L(D, q)\, u = f(x, q) & x_n > 0 \\ \gamma_o(\partial^j_{x_n} u) = g_j(x', q) & j = 0, 1, \ldots, r-1 \;;\; x_n = 0 \;;\; x' \in R^{n-1} \end{cases}$$

Ricordiamo ancora (cfr. [10] e [1] per il caso ellittico) che nelle condizioni poste, il problema in R_+:

$$\begin{cases} L\left(\xi', -i \dfrac{d}{dx_n}, q\right) v(x_n) = 0 & x_n > 0 \\ \gamma_o\left(-i\right)^j \dfrac{d}{dx_n} v(x_n) = k_j & j = 0, 1, \ldots, r-1 \;;\; x_n = 0 \;;\; x' \in R^{n-1} \end{cases}$$

per ogni $\xi' \in R^{n-1}$ e $q \in Q$ con $|\xi'| + |q| \neq 0$ ammette per ogni r-pla di numeri complessi $k_o, \ldots, k_{r-1}$ un'unica soluzione nello spazio delle soluzioni stabili.

Sia qui come nel seguito $l_o = \max\left(m, \dfrac{jm}{m_n} + \dfrac{m}{pm_n} \;;\; j = 0, 1, \ldots, r-1\right)$ e C una costante indipendente da q.

E' evidente che dalla prop. 3.2 e dalle (3.4) e (3.5) si trae che, se $l > l_o$ e $\frac{lm_i}{m} \in N$ per ogni $i \in \{1, ..., n\}$, allora:

$$(5.2) \quad |||Lu|||_{W_{l-m,p}(R^n_+)} + \sum_{j=0}^{r-1} |||\gamma_o(\partial^j_{x_n} u)|||_{B_{l-\frac{jm}{m_n}-\frac{m}{pm_n},p}(R^{n-1})} \leqslant C\,|||u|||_{W_{l,p}(R^n_+)}$$

Nelle ipotesi A'), A") si ha il

TEOREMA 5.1. — *Se* $l > l_o$ *e* $\frac{lm_i}{m} \in N$ *per ogni* $i \in \{1, ..., n\}$, *allora per ogni* $f \in W_{l-m,p}(R^n_+)$ *e* $g_j \in B_{l-\frac{jm}{m_n}-\frac{m}{pm_n},p}(R^{n-1})$ $(j = 0, ..., r-1)$ *,con* $q \in Q$ *e* $q \neq 0$, *esiste ed è unica la soluzione del problema (5.1) e si ha:*

$$(5.3) \quad |||u|||_{W_{l,p}(R^n_+)} \leqslant C\,\{|||f|||_{W_{l-m,p}(R^n_+)} + \sum_{j=0}^{r-1} |||g_j|||_{B_{l-\frac{jm}{m_n}-\frac{m}{pm_n},p}(R^{n-1})}\}.$$

Sia ψ un prolungamento di f in R^n, certamente esistente per la prop. 3.1., per il quale si ha:

$$(5.4) \qquad |||\psi|||_{W_{l-m,p}(R^n)} \leqslant C\,|||f|||_{W_{l-m,p}(R^n_+)}$$

Per il teorema 4.1. esiste una $u_o \in W_{l,p}(R^n)$ per la quale $Lu_o = \psi$ ed inoltre, tenendo conto anche della (5.4):

$$(5.5) \qquad |||u_o|||_{W_{l,p}(R^n)} \leqslant C\,|||f|||_{W_{l-m,p}(R^n_+)}$$

Posto, allora, $u = u_o + u_1$, per provare l'asserto basterà far vedere che esiste ed è unica la soluzione u_1 del problema:

$$(5.6) \quad \begin{cases} L(D, q)\,u_1 = 0 & x_n > 0 \\ \gamma_o(\partial^j_{x_n} u_1) = g_j - \gamma_o(\partial^j_{x_n} u_o) = h_j & j = 0, ..., r-1 \end{cases}$$

e che per essa si ha:

$$(5.7) \qquad |||u_1|||_{W_{l,p}(R^n_+)} \leqslant C \sum_{j=0}^{r-1} |||h_j|||_{B_{l-\frac{jm}{m_n}-\frac{m}{pm_n},p}(R^{n-1})}$$

ed infatti, con tali u_1, u_o ed u si avrebbe:

$$|||u|||_{W_{l,p}(R^n_+)} \leqslant C \{ |||f|||_{W_{l-m,p}(R^n_+)} + \sum_{j=0}^{r-1} |||g_j|||_{B_{l-\frac{jm}{m_n}-\frac{m}{pm_n},p}(R^{n-1})}$$

$$+ \sum_{j=0}^{r-1} ||| \gamma_0 (\partial^j_{x_n} u_0) |||_{B_{l-\frac{jm}{m_n}-\frac{m}{pm_n},p}(R^{n-1})} \} .$$

e da ciò si ricaverebbe la (5.3) tenendo conto della prop. 3.2. e della (5.5).

Incominciamo, allora, a provare la validità della (5.7) nel caso che u_1 sia una soluzione del problema (5.6) appartenente ad $\mathcal{S}(R^n_+)$ e che sia $|q| = 1$.

In tali condizioni con ragionamenti analoghi a quelli seguiti nella dimostrazione del teorema 2.2 di [3] (cfr. anche th. 1 di [4]), si ha per tale u_1 :

$$(5.8) \quad \|u_1\|_{W_{l,p}(R^n_+)} \leqslant C \{ \|Lu_1\|_{W_{l-m,p}(R^n_+)} + \|u_1\|^+_{l-\frac{m}{m_n},p}$$

$$+ \sum_{j=0}^{r-1} \|h_j\|_{B_{l-\frac{jm}{m_n}-\frac{m}{pm_n},p}(R^{n-1})} \} .$$

Da cui per il lemma 3.2. si ha:

$$(5.9) \quad \|u_1\|_{W_{l,p}(R^n_+)} \leqslant C \{ \sum_{j=0}^{r-1} \|h_j\|_{B_{l-\frac{jm}{m_n}-\frac{m}{pm_n},p}(R^{n-1})} + \|u_1\|_{L^p(R^n_+)} \} .$$

Detta ora $\mathcal{F}'$ la trasformata di Fourier rispetto alle variabili $x_1, \ldots, x_{n-1}$ ricordiamo (cfr. [10] e [1] per il caso ellittico) che nelle ipotesi poste se u_1 è una soluzione di (5.6) appartenente a $\mathcal{S}(R^n_+)$ è del tipo:

$$(5.10) \qquad u_1 = \mathcal{F}'^{-1} \left(\sum_{j=0}^{r-1} \Omega_j \, \mathcal{F}' h_j \right)$$

dove:

$$\Omega_j = \int_{\gamma_+} e^{i\lambda x_n} L_+^{-1} (q, \xi', \lambda) N_j (q, \xi', \lambda) \, d\lambda \qquad \xi' \in R^{n-1}$$

γ_+ essendo una curva regolare contenuta nel semipiano $Im\lambda > 0$, all'interno della quale cadono le λ-radici di $L_+(q, \xi', \lambda)$ e dove $N_j(q, \xi', \lambda)$ sono polinomi in λ $\varkappa'$-omogenei di grado $\frac{m}{m_n}(r - j - 1)$ e $L_+(q, \xi', \lambda)$ è $\varkappa'$-omogenea di grado $r \frac{m}{m_n}$.

Da tale osservazione e dal lemma 2.1. con ragionamenti simili a quelli adoperati per la dimostrazione del teorema 3.1. di [2] si ricava:

$$\|u_1\|_{L^p(R^n_+)} \leqslant C \sum_{j=0}^{r-1} \|h_j\|_{L^p(R^n_+)}$$

e da ciò per la (5.9) si trae la (5.7).

Ricaviamo ora la validità della (5.7) per una soluzione $u_1 \in \mathcal{S}(R^n_+)$ di (5.6) con $q \in Q - \{0\}$.
Posto, allora:

$$x'_i = x_i |q|^{m/m_i} \qquad i = 1, \dots, n$$

$$u'_1(x') = u_1\left(\frac{x'_i}{|q|^{m/m_i}}\right) \quad \text{e} \quad h'_j(x') = h_j\left(\frac{x'_i}{|q|^{m/m_i}}\right) \qquad j = 0, \dots, r-1$$

ed ancora: $q' = \dfrac{q}{|q|}$

è evidente che se u_1 risolve il problema (5.6), allora $u'_1(x')$ risolve il problema:

$$\begin{cases} \sum\limits_{\langle \alpha, \varkappa \rangle + k = m} a_{\alpha k}\, q'^k D^\alpha_{x'} u'_1 = |q|^{-m} L u_1 = 0 & x_n > 0 \\ \gamma_0 (\partial^j_{x'_n} u'_1) = |q|^{-jm/m_n} h'(x') & j = 0, \dots, r-1 \end{cases}$$

con $|q'| = 1$ e, quindi, per quanto precedentemente osservato, per u'_1 vale la (5.7). Da tali considerazioni, tenendo conto anche delle (3.11) e (3.12) si ricava la validità della (5.7) anche per la u_1.

Infine dalla densità di $\mathcal{S}(R^{n-1})$ in $B_{l-\frac{jm}{m_n}-\frac{m}{pm_n}, p}(R^{n-1})$ e dalla densità di $\mathcal{S}(R^n_+)$ in $W_{l,p}(R^n_+)$ tenendo conto della (5.10) consegue l'asserto con le medesime considerazioni di [2].

Consideriamo, ora, il seguente problema nel semispazio R^n_+:

$$(5.11) \qquad \begin{cases} L(x, D, q)\, u = f(x, q) & x_n > 0 \\ \gamma_0 (\partial^j_{x_n} u) = g_j(x', q) & x_n = 0 \quad x' \in R^{n-1} \quad j = 0, \dots, r-1 \end{cases}$$

dove:

$$Lu = L(x, D, q)\, u = \sum_{\langle \alpha, \varkappa \rangle + k \leq m} a_{\alpha k}(x)\, q^k D^\alpha u\,.$$

Analogamente a quanto abbiamo fatto nel n. 4 indicheremo con $L'(x, D, q)\, u$ la somma dei termini di Lu per i quali $< \alpha, \varkappa > + k = m$. Facciamo l'ipotesi seguente:

I) i coefficienti $a_{\alpha k}(x) \in M_{l-m,p} \qquad < \alpha, \varkappa > + k \leqslant m$;

è evidente, allora, che se $l > l_0$, dal teorema 3.1., dalla prop. 3.2., nonché dalle (3.4) e (3.5), per il problema (5.11) si ricava una diseguaglianza analoga alla (5.2) dove C è indipendente da q solo se $|q|$ è sufficientemente grande.

Si ha il

TEOREMA 5.2. — *Sia* $l \in R_+$ *e* $l > l_0$. *L'operatore* $L'(x, D, q)$ *verifichi le ipotesi A') e A") per ogni* $x \in \bar{R}^n_+$ *ed, inoltre, sia verificata la I). Allora, se all'esterno di una sfera di centro nell'origine le oscillazioni delle funzioni* $a_{\alpha k}(x)$ *con* $<\alpha, \varkappa> + k = m$ *sono minori di un opportuno* $\varepsilon > 0$, *esiste un* $q_0 > 0$ *tale che per* $|q| \geqslant q_0$ *e* $q \in Q$ *vale la diseguaglianza*:

$$(5.12) \qquad |||u|||_{W_{l,p}(R^n_+)} \leqslant C \{ |||Lu|||_{W_{l-m,p}(R^n_+)} + \sum_{j=0}^{r-1} |||\gamma_0(\partial^j_{x_n} u)|||_{B_{l-\frac{jm}{m_n}-\frac{m}{pm_n}, p}(R^{n-1})}$$

dove C *non dipende da* q.

La dimostrazione è analoga a quella del teorema 4.2.

Vale, inoltre, il seguente teorema di esistenza:

TEOREMA 5.3. — *Sia* l *un numero reale positivo maggiore di* l_0. *L'operatore* $L'(0, D, q)$ *verifichi le ipotesi A'), A") e sia verificata anche l'ipotesi I). Esiste, allora, un* $\varepsilon > 0$ *tale che se*:

$$|a_{\alpha k}(x) - a_{\alpha k}(0)| < \varepsilon \quad \text{con} \quad <\alpha, \varkappa> + k = m$$

per $|q|$ *sufficientemente grande l'operatore*

$$\mathcal{U}u = \{ Lu, \gamma_0(\partial^j_{x_n} u) \quad (j = 0, \ldots, r-1) \}$$

è dotato di inverso destro R *per il quale si ha*:

$$|||R(f, g_j)|||_{W_{l,p}(R^n_+)} \leqslant C \{ |||f|||_{W_{l-m,p}(R^n_+)} + \sum_{j=0}^{r-1} |||g_j|||_{B_{l-\frac{jm}{m_n}-\frac{m}{mp_n}, p}(R^{n-1})} \}$$

con C *indipendente da* q.

Il teorema si dimostra con procedimento analogo a quello del teorema 4.3., tenendo conto, ovviamente, delle (3.4) e (3.5) in luogo delle (3.2) e (3.3).

Si ha infine il:

TEOREMA 5.4. — *Sia* l *un numero reale positivo maggiore di* l_0. *L'operatore* $L'(x, D, q)$ *verifichi A') e A") e sia verificata anche l'ipotesi I). Allora esiste un* $\varepsilon > 0$ *tale che, se si può determinare un* $h > 0$ *per il quale si ha*:

$$|a_{\alpha k}(x_1) - a_{\alpha k}(x_2)| < \varepsilon \quad \text{con} \quad <\alpha, \varkappa> + k = m, \ |x_1|, |x_2| > h$$

per $|q|$ *sufficientemente grande esiste una sola soluzione del problema (5.11) e per essa si ha la (5.12).*

Tenendo conto del teorema 3.1. e seguendo lo schema di dimostrazione del teorema 5.1. di [1], si prova l'asserto.

BIBLIOGRAFIA

[1] Agranovich M.S., Vishik M.I. (1964) — *Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type*, « Russian Math. Surv. », *19*, 53-157.

[2] Alvino A. e Trombetti G. (1977) — *Problemi ellittici dipendenti da un parametro* L^p. Ric. di Mat., Vol. XXVI, Fasc. 2°.

[3] Arkerid L. (1966) — *On the* L^p *estimates for elliptic boundary problems*, « Math. Scand. », *19*, 59-76.

[4] Arkerid L. (1966) — *On the* L^p *estimates for quasi-elliptic boundary problems*, « Math. Scand. », *24*, 141-144.

[5] Calderon A.P. (1961) — *Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions.* Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. IV, 33-49.

[6] Grisvard P., (1966) — *Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications*, « J. Math. pures et appl. », *45* 143-206 e 207-290.

[7] Grisvard P. (1972) — *Spazi di tracce e applicazioni.* Rendiconti di Matematica, Serie VI, Vol. 5, 657-729.

[8] Lizorkin P.I. (1963) — *Generalized Liouville differentiation...*, « Mat. Sb. », *60* (102), 325-353.

[9] Matsuzawa T. (1968) — *On quasi-elliptic boundary problems*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *133*, 241-263.

[10] Schianchi R., *Problemi quasi-ellittici nel semispazio.* Rend. Circ. Mat. di Palermo (in corso di stampa).

[11] Stein E.M. (1961) — *The characterization of function arising as potentials I.*, « Bull. Amer. Math. Soc. », *67*, 102-104.

[12] Stein E.M. (1962) — *The characterization of function arising as potentials II.*, « Bull. Amer. Math. Soc. », *68*, 577-582.

[13] Volevich L.R. and Paneyakh B.P. (1965) — *Certain spaces of generalized functions and embedding theorems*, « Russian Math. Surv. », *20*, 1-73.

Direttore respon.: Prof. P. Di Mattei - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 del 28-12-1959 - Tip. della Pace, Roma