Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
98° (1979-80), Vol. IV, fasc. 3, pagg. 25-42.

CIRO CILIBERTO (*)

Ipersuperficie algebriche a punti parabolici e relative hessiane (**)

SUMMARY. — Let f be an irreducible projective hypersurface; if every simple point of f is h-parabolic, the polynomial f^h divides the hessian polynomial of f, $H(f)$. The aim of this paper is to give a characterization of the hypersurfaces f such that every simple point of f is h-parabolic and $H(f)$ is divisible by f^{h+1}. Of this characterization, provided in Theorem 1, I give also several applications.

1. Dato un campo K, algebricamente chiuso e di caratteristica zero, indicheremo con $S_r(K)$, o semplicemente con S_r, uno spazio proiettivo di dimensione r su K.

Sia f una ipersuperficie di S_r, di equazione $f(x_0, \ldots, x_r) = 0$ in un riferimento proiettivo di S_r che supporremo fissato una volta per tutte. Indicheremo con $n(f)$ l'ordine di f. Se P è un punto semplice di f, indicheremo con A (P) il luogo delle rette di S_r passanti per P ed aventi con f in P molteplicità di intersezione maggiore di due. E' noto che possono verificarsi le seguenti due circostanze:

— A (P) coincide con l'iperpiano tangente a f in P, e in tal caso si dice che P è un punto di *flesso* per f;

— A (P) è un cono quadrico, avente un punto doppio in P, giacente nell'iperpiano tangente a f in P, detto *cono asintotico* a f in P.

Il punto P si dice *parabolico* per f se è un flesso o se A (P) è specializzato; precisamente P si dice *h-parabolico* per f, con $1 \leq h < r-1$, se il vertice di A (P) è un sottospazio lineare h-dimensionale, o, come diremo più brevemente, un h-sottospazio, dell'iperpiano tangente a f in P, e $(r-1)$-parabolico se è un flesso.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R. Istituto di Matematica « R. Caccioppoli » dell'Università di Napoli.

(**) Memoria presentata dal socio Carlo MIRANDA il 24 Maggio 1979.

ISSN 0370-3460

Sia f irriducibile, e sia $\tilde{f}$ la chiusura di Zariski nel duale S_r^* di S_r, dell'insieme dei punti di S_r^* immagini degli iperpiani di S_r tangenti a f nei suoi punti semplici. E' noto che dim $\tilde{f}=n-h-1$, con $h \in \mathbb{N}$, se e solo se f è *a punti h-parabolici*, ossia se e solo se ogni punto semplice di f è h-parabolico. In tal caso infatti f è costituita da un sistema algebrico irriducibile $\Sigma(f)$, di dimensione $n-h-1$, di h-sottospazi di S_r, e in ogni punto semplice di f appartenente ad un fissato sottospazio di $\Sigma(f)$, f ha lo stesso iperpiano tangente (cfr. [8], nn. 4, 5).

E' noto che, se f è a punti h-parabolici, il polinomio f^h divide il polinomio hessiano di f, che indicheremo con $H(f)$ (cfr. [5], pg. 172). B. Segre, nella nota [5], pg. 172, ha posto il problema di determinare le ipersuperficie f a punti h-parabolici, tali che $H(f)$ risulti divisibile per f^{h+1}. Il problema è stato trattato da A. Franchetta nelle note [3] e [4], limitatamente al caso $h=1$. In questo lavoro assegno, per h qualunque, una caratterizzazione delle ipersuperficie che hanno la proprietà anzidetta; tale caratterizzazione è espressa dal seguente:

Teorema 1. — *Sia* f *una ipersuperficie irriducibile di* S_r *a punti* h-*parabolici; sono equivalenti le proposizioni*:

a) f^{h+1} *divide* $H(f)$;

b) *per ogni sottospazio* $\tau \in \Sigma(f)$ *e per ogni* $(h+1)$-*sottospazio* σ *di* S_r *contenente* τ *e non contenuto nell'iperpiano tangente a* f *nei punti di* τ *semplici per* f, σ *interseca* f, *fuori di* τ *in una ipersuperficie di* σ *d'ordine* $n(f)-1$ *che interseca* τ *in una ipersuperficie d'ordine* $n(f)-1$ *di* τ *a hessiana indeterminata.*

Alla dimostrazione del Teorema 1 sono dedicati i nn. 2 e 3. Nei paragrafi successivi il Teorema, opportunamente esteso alle ipersuperficie riducibili, viene utilizzato per dimostrare varie proposizioni. Fra l'altro, nei nn. 5 e 6 provo che un'ipersuperficie irriducibile f, a punti $(r-2)$-parabolici di S_r, $r=4$, 5, tale che f^{r-1} divida $H(f)$, è un cono, e quindi ha hessiana indeterminata, e che, più in generale, se f è riducibile in componenti semplici, ciascuna di queste è un cono. Nel n. 8 studio le ipersuperficie f di $S_5(\mathbf{C})$ a punti 2-parabolici, tali che f^3 divida $H(f)$ e dimostro che è un'ipersuperficie di questo tipo il luogo dei piani tangenti ad una rigata razionale normale generale del quarto ordine, la cui hessiana è l'ipersuperficie stessa contata tre volte. Nel n. 9 dimostro che le sole ipersuperficie di un $S_r(\mathbf{C})$ che, contate due volte, esauriscono la propria hessiana sono la sviluppabile circoscritta alla cubica gobba e il luogo delle corde di una superficie di Veronese. Infine nel n. 10 provo che non è valida una congettura formulata da B. Segre in [7].

2. E' utile per il seguito il:

Lemma 2. — *Sia* f *una ipersuperficie di* S_r; *un punto* P *semplice di* f *è h-parabolico per* f *se e solo se esiste un* $(h-1)$-*sottospazio* $\sigma(P)$ *di* S_r *tale che tutti e soli i punti di* $\sigma(P)$ *abbiano polare prima rispetto a* f *avente un punto doppio in* P.

Dimostrazione. Sia σ (P) lo spazio singolare della quadrica polare di P rispetto a f; si tenga conto che:

— σ (P) coincide con il sottoinsieme dei punti di S_r la cui polare prima rispetto a f ha in P un punto doppio (cfr. [6], pg. 66);

— σ (P) è contenuto nell'iperpiano tangente a f in P, non contiene P, e il vertice τ (P) del cono asintotico A (P) coincide con lo spazio congiungente P con σ (P) (cfr. [5], pg. 167).

Da ciò segue l'asserto.

Proviamo ora il:

TEOREMA 3. — *Sia* f *una ipersuperficie di* S_r; *se* P *è un punto* h-*parabolico per* f, *l'ipersuperficie hessiana* H (f) *di* f *ha in* P *un punto almeno* h-*plo. Se inoltre il vertice* τ (P) *del cono asintotico* A (P), *è contenuto in* f, *e in ogni punto di* τ (P), *semplice per* f, f *ha lo stesso iperpiano tangente, sono equivalenti le proposizioni*:

a) H (f) *ha in* P *molteplicità almeno* h+1;

b) *esiste un punto* Q $\in \sigma$ (P) *tale che il cono osculatore in* P *alla polare prima* f'_Q *di* Q *rispetto a* f *ha spazio singolare contenente* τ (P).

Dimostrazione. E' lecito assumere il riferimento proiettivo di S_r in modo che P $\equiv$ (1, 0, ..., 0), l'iperpiano π (P) tangente a f in P abbia equazione $x_1=0$, τ (P) abbia equazioni $x_1 = x_{h+2} = \dots = x_r = 0$, σ (P) abbia equazioni $x_0 = x_1 = x_{h+2} = \dots = x_r = 0$, il cono A (P) abbia, in π (P), equazione:

$$\sum_{h+2}^{r}{}_j\, x^2{}_j = 0$$

In un tale riferimento l'equazione di f è del tipo:

$$f(x_0, \dots, x_r) = x_1 x_0^{n-1} + [x_1(a_1 x_1 + \sum_{h+2}^{r}{}_j\, a_j x_j) + a(\sum_{h+2}^{r}{}_j\, x^2{}_j)]\, x_0^{n-2} +$$
$$+ \varphi^{(3)}(x_1, \dots, x_r)\, x_0^{n-3} + \dots + \varphi^{(n)}(x_1, \dots, x_r) = 0$$

dove a, a_1, a_j, $j = h+2, \dots, r$, sono costanti, a è non nulla, le $\varphi^{(i)}(x_1, \dots, x_r)$ sono forme di grado i in $x_1, \dots, x_r$, $i = 3, \dots, n$. Indicando con l'indice k in basso la derivazione di un polinomio rispetto alla variabile x_k, $k = 0, \dots, r$, si ha:

$$f_0 = (n-1)\, x_1 x_0^{n-2} + (n-2)\, [x_1(a_1 x_1 + \sum_{h+2}^{r}{}_j\, a_j x_j) + a\, (\sum_{h+2}^{r}{}_j\, x^2{}_j)]\, x_0^{n-3} +$$
$$+ (n-3)\, \varphi^{(3)}\, x_0^{n-4} + \dots + \varphi^{(n-1)}$$

$$f_1 = x_0^{n-1} + (2a_1 x_1 + \sum_{h+2}^{r}{}_j\, a_j x_j)\, x_0^{n-2} + \varphi^{(3)}{}_1\, x_0^{n-3} + \dots + \varphi^{(n)}{}_1$$

$$f_i = \varphi^{(3)}{}_i\, x_0^{n-3} + \dots + \varphi^{(n)}{}_i\ ,\ i = 2, \dots, h+1$$

$$f_j = a_j x_1 x_0^{n-2} + 2a x_j x_0^{n-2} + \varphi^{(3)}{}_j\, x_0^{n-3} + \dots + \varphi^{(n)}{}_j\ ,\ j = h+2, \dots, r$$

Si ha inoltre:

$$f_{00} = (n-1)\,(n-2)\,x_1 x_0^{n-3} + (n-2)\,(n-3)\,[x_1\,(a_1 x_1 + \sum_{h+2}^{r}{}_j\, a_j\, x_j) +$$

$$+\, a\,(\sum_{h+2}^{r}{}_j\, x^2{}_j)]\, x_0^{n-4} + (n-3)\,(n-4)\,\varphi^{(3)}\, x_0^{n-5} + \ldots + 2\,\varphi^{(n-2)}$$

$$f_{01} = (n-1)\, x_0^{n-2} + (n-2)\,(2a_1 x_1 + \sum_{h+2}^{r}{}_j\, a_j\, x_j)\, x_0^{n-3} + (n-3)\,\varphi^{(3)}{}_1\, x_0^{n-4} +$$

$$+ \ldots + \varphi^{(n-1)}{}_1$$

$$f_{0i} = (n-3)\,\varphi^{(3)}{}_i\; x_0^{n-4} + \ldots + \varphi^{(n-1)}{}_i\;,\; i = 2, \ldots, h+1$$

$$f_{0j} = (n-2)\,(a_j x_1 + 2a x_j)\, x_0^{n-3} + (n-3)\,\varphi^{(3)}{}_j\; x_0^{n-4} + \ldots + \varphi^{(n-1)}{}_j\;,\; j = h+2, \ldots, r$$

$$f_{11} = 2a_1 x_0^{n-2} + \varphi^{(3)}{}_{11}\; x_0^{n-3} + \ldots + \varphi^{(n)}{}_{11}$$

$$f_{1i} = \varphi^{(3)}{}_{1i}\; x_0^{n-3} + \ldots + \varphi^{(n)}{}_{1i}\;,\; i = 2, \ldots, h+1$$

$$f_{1j} = a_j\, x_0^{n-2} + \varphi^{(3)}{}_{1j}\; x_0^{n-3} + \ldots + \varphi^{(n)}{}_{1j}\;,\; j = h+2, \ldots, r$$

$$f_{i\ell} = \varphi^{(3)}{}_{i\ell}\; x_0^{n-3} + \ldots + \varphi^{(n)}{}_{i\ell},\; i, \ell = 2, \ldots, h+1$$

$$f_{ij} = \varphi^{(3)}{}_{ij}\; x_0^{n-3} + \ldots + \varphi^{(n)}{}_{ij}\;,\; i = 2, \ldots, h+1,\; j = h+2, \ldots, r$$

$$f_{jk} = 2a\,\delta_{jk}\, x_0^{n-2} + \varphi^{(3)}{}_{jk}\; x_0^{n-3} + \ldots + \varphi^{(n)}{}_{jk}\;,\; j, k = h+2, \ldots, r$$

δ_{jk} essendo il simbolo di Kronecker. Scriviamo il determinante hessiano $H(f)$, passando a coordinate non omogenee $(x_1, \ldots, x_r)$ e trascurando i termini di grado più alto in $x_1, \ldots, x_r$. Si ha:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} (n-1)\,(n-2)\,x_1 & n-1 & (n-3)\,\varphi^{(3)}{}_i & (n-2)\,(a_j x_1 + 2a x_j) \\ n-1 & 2a_1 & \varphi^{(3)}{}_{1i} & a_j \\ (n-3)\,\varphi^{(3)}{}_\ell & \varphi^{(3)}{}_{1\ell} & \varphi^{(3)}{}_{\ell i} & \varphi^{(3)}{}_{\ell j} \\ (n-2)\,(a_k x_1 + 2a x_k) & a_k & \varphi^{(3)}{}_{ki} & 2a\,\delta_{kj} \end{vmatrix}$$

con $i, \ell = 2, \ldots, h+1$, $j, k = h+2, \ldots, r$. Ogni riga del determinante (1), dalla terza alla $(h+2)$-sima, ha al primo posto un polinomio omogeneo di secondo grado, e agli altri posti polinomi omogenei di primo grado, sicché il termine di grado più basso in $x_1, \ldots, x_r$ nello sviluppo di $H(f)$ ha almeno grado h, e ciò prova la prima parte dell'asserto. Calcoliamo esplicitamente il termine di grado h, sviluppando il determinante (1) con la regola di Laplace applicata alla prima colonna. Tale sviluppo fornisce:

$$\mathrm{H}(f) = (n-1)\,(n-2)\,x_1 H_0 + (n-1)\,\mathrm{H}_1 + \sum_{2}^{h+1}{}_{\ell}\,(n-3)\,\varphi^{(3)}{}_{\ell}\,\mathrm{H}_{\ell} +$$

$$+ \sum_{h+2}^{r}{}_{k}\,(n-2)\,(a_k x_1 + 2a x_k)\,\mathrm{H}_k + \ldots$$

dove H_i, $i = 0, \ldots, r$, sono i complementi algebrici degli elementi della prima colonna del determinante (1), e i puntini stanno ad indicare termini di grado superiore a quello dei termini scritti. Ragionando sui determinanti H_i, $i = 0, \ldots, r$, come già fatto sul determinante (1), si verifica che:

— H_0, H_1, H_k, $k = h + 2, \ldots, r$, sono almeno di grado h;

— H_ℓ, $\ell = 2, \ldots, h + 1$, sono almeno di grado $h-1$.

E' allora ovvio che i termini di grado h di $\mathrm{H}(f)$ possono provenire solo da $(n-1)\,\mathrm{H}_1$, ossia:

$$(2) \qquad \mathrm{H}(f) = -(n-1) \begin{vmatrix} n-1 & (n-3)\,\varphi^{(3)}{}_i & (n-2)\,(a_j x_1 + 2a x_j) \\ \varphi^{(3)}{}_{1\ell} & \varphi^{(3)}{}_{\ell i} & \varphi^{(3)}{}_{\ell j} \\ a_k & \varphi^{(3)}{}_{ki} & 2a\,\delta_{kj} \end{vmatrix} + \ldots$$

dove $i, \ell = 2, \ldots, h + 1$, $j, k = h + 2, \ldots, r$, e i puntini stanno ad indicare termini di grado almeno $h + 1$. Sviluppando il determinante che compare in (2) con la regola di Laplace applicata alla prima riga, con i soliti ragionamenti si verifica che i termini di grado h provengono, tutti e soli, dal prodotto di $n-1$ per il proprio complemento algebrico, ossia:

$$(3) \qquad \mathrm{H}(f) = -\,(n-1)^2 \begin{vmatrix} \varphi^{(3)}{}_{\ell i} & \varphi^{(3)}{}_{\ell j} \\ \varphi^{(3)}{}_{ki} & 2a\,\delta_{kj} \end{vmatrix} + \ldots$$

con $i, \ell = 2, \ldots, h + 1$, $j, k = h + 2, \ldots, r$, i puntini indicando, come di consueto, termini di grado $h + 1$ almeno. Sviluppando infine il determinante in (3) con la regola di Laplace generalizzata, applicata alle ultime $r-h-1$ righe, si riconosce agevolmente che:

$$(4) \qquad \mathrm{H}(f) = -\,(2a)^{r-h-1}\,(n-1)^2\,\left|\,\varphi^{(3)}{}_{\ell i}\,\right| + \ldots$$

dove i puntini indicano termini di grado $h + 1$ almeno, e il determinante che compare in (4), con $i, \ell = 2, \ldots, h + 1$, è un determinante d'ordine h i cui elementi sono polinomi di primo grado, e quindi fornisce effettivamente il complesso dei termini di grado h di $\mathrm{H}(f)$. Osserviamo inoltre che, essendo $\tau(\mathrm{P})$ contenuto in f, si ha identicamente:

$$f(x_0, 0, x_2, \ldots, x_{h+1}, 0, \ldots, 0) = 0$$

Ciò comporta, tenendo conto dell'espressione di $f(x_0, ..., x_r)$, che si abbia identicamente:

$$\varphi^{(i)}(0, x_2, ..., x_{h+1}, 0, ..., 0) = 0, \; i = 3, ..., n \tag{5}$$

Inoltre, poiché in ogni punto di τ (P) semplice per f, f ha l'iperpiano $x_1 = 0$ come iperpiano tangente, si ha identicamente:

$$f_i(x_0, 0, x_2, ..., x_{h+1}, 0, ..., 0) = 0, \; i = 0,2, ..., r$$

Ciò implica, tenendo conto della espressione delle derivate di $f(x_0, ..., x_r)$, che si abbia identicamente:

$$\varphi^{(i)}{}_j(0, x_2, ..., x_{h+1}, 0, ..., 0) = 0, \; i = 3, ..., n, \; j = 2, ..., r \tag{6}$$

Consideriamo ora l'ipersuperficie cubica $\varphi^{(3)}$, di equazione $\varphi^{(3)}(x_1, ..., x_r) = 0$, nell'iperpiano $x_0 = 0$. Per le (5), $\varphi^{(3)}$ contiene σ (P). Inoltre per ogni punto Q $\in \sigma$ (P), o Q è multiplo per $\varphi^{(3)}$, oppure l'iperpiano tangente a $\varphi^{(3)}$ in Q coincide con l'iperpiano $x_1 = 0$, per le (6). Se Q $\equiv (0, \rho_2, ..., \rho_{h+1}, 0, ..., 0)$, detto iperpiano coincide con l'iperpiano polare di Q rispetto a $\varphi^{(3)}$, ossia con la polare seconda di Q rispetto a $\varphi^{(3)}$, che ha equazione:

$$\sum_{2}^{h+1}{}_{\ell i} \; \varphi^{(3)}{}_{\ell i}(x_1, ..., x_r) \, \rho_\ell \, \rho_i = 0 \tag{7}$$

Dovendo essere il primo membro dell'equazione (7) un polinomio proporzionale a x_1, con fattore di proporzionalità costante eventualmente nulla, e ciò identicamente nelle $\rho_2, ..., \rho_{h+1}$, non può che essere:

$$\varphi^{(3)}{}_{\ell i} = a_{\ell i} \, x_1 \quad , \qquad \ell, i = 2, ..., h + 1 \tag{8}$$

con $a_{\ell i}$ costanti. Si ha quindi:

$$| \, \varphi^{(3)}{}_{\ell i} \, | = x_1{}^h \, | \, a_{\ell i} \, | \quad , \qquad \ell, i = 2, ..., h + 1 \tag{9}$$

Proviamo ora che *a*) implica *b*). Se P è almeno $(h + 1)$-plo per H (f), si ha identicamente:

$$| \, \varphi^{(3)}{}_{\ell i} \, | = 0 \quad , \qquad \ell, i = 2, ..., h + 1 \tag{10}$$

Per la (9) ciò implica che:

$$| \, a_{\ell i} \, | = 0 \quad , \qquad \ell, i = 2, ..., h + 1$$

Esistono allora $\lambda_2, \ldots, \lambda_{h+1}$ costanti non tutte nulle tali che:

$$\sum_{2}^{h+1}{}_i \; \lambda_i \; a_{\ell i} = 0 \qquad , \qquad \ell = 2, \ldots, h+1$$

Per le (8) si ha:

$$\sum_{2}^{h+1}{}_i \; \lambda_i \; \varphi^{(3)}{}_{\ell i} = 0 \qquad , \qquad \ell = 2, \ldots, h+1 \tag{11}$$

Considerato il punto $Q = (0, 0, \lambda_2, \ldots, \lambda_{h+1}, 0, \ldots, 0) \in \sigma(P)$, si ha infine:

$$f'_Q(x_0, \ldots, x_r) = \sum_{2}^{h+1}{}_i \; \lambda_i \; (\varphi^{(3)}{}_i \; x_0{}^{n-3} + \ldots + \varphi^{(n)}{}_i) = 0$$

e quindi f'_Q ha un punto doppio in P con cono osculatore in P di equazione:

$$F(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{2}^{h+1}{}_i \; \lambda_i \; \varphi^{(3)}{}_i = 0$$

Valendo identicamente le (11), ne segue che F ha spazio singolare contenente $\tau(P)$. Viceversa, proviamo che *b*) implica *a*). Se vale la *b*), esiste un punto $Q = (0, 0, \lambda_2, \ldots, \lambda_{h+1}, 0, \ldots, 0) \in \sigma(P)$, tale che valgano identicamente le (11). Vale allora identicamente la (10), e quindi, per la (4), vale la *a*).

Osservazione. Il Teorema 3 generalizza un teorema di Bompiani, dimostrato in [1], cap. VII, relativo al caso $h = 1$. Va rilevato che Bompiani dimostra l'asserto senza ricorrere all'ipotesi che $\tau(P)$ sia contenuto in f e che in ogni punto di $\tau(P)$, semplice per f, f abbia lo stesso iperpiano tangente. Tale ipotesi infatti non è stata utilizzata nella dimostrazione del Teorema 3 per provare che *b*) implica *a*) e, pur essendo in generale adoperata per provare che *a*) implica *b*), si verifica facilmente essere superflua, non solo nel caso $h = 1$, ma anche nel caso $h = 2$. Volendo dimostrare che *a*) implica *b*), nel caso generale, prescindendo da tale ipotesi occorrerebbe dedurre dalla (10), valida identicamente, l'esistenza di costanti $\lambda_2, \ldots, \lambda_{h+1}$, non tutte nulle, tali che valgano identicamente le (11). Ciò equivale alla risoluzione del seguente problema geometrico: data, nell'iperpiano $x_0 = 0$, l'ipersuperficie cubica $\varphi^{(3)}$, tale che tutte le polari prime di $\varphi^{(3)}$ intersechino lo $(h-1)$-sottospazio $\sigma(P)$ in un cono quadrico, può affermarsi l'esistenza di un punto $Q \in \sigma(P)$ tale che la polare prima di P rispetto a $\varphi^{(3)}$ abbia spazio singolare contenente $\sigma(P)$? Anche così formulato il problema ha facile soluzione per $h = 1, 2$, ma resta aperto per $h > 2$.

3. Possiamo ora fornire la:

Dimostrazione del Teorema 1. Proviamo che *a*) implica *b*). La sezione di σ con f è costituita da τ e da un'ipersuperficie V di σ non contenente τ. Sia P un punto di τ semplice per f, e sia Q il punto, esistente a norma del Teorema 3 su τ, tale che

f'_Q abbia in P un punto doppio, con cono osculatore in P avente spazio singolare contenente τ. La sezione di f'_Q con σ è ovviamente costituita da τ e dalla polare prima V'_Q di Q rispetto a V in σ. Poiché la ipersuperficie di σ spezzata in τ e in V'_Q ha in P un punto doppio con cono osculatore costituito da τ contato due volte, V'_Q è tangente a τ in P. Sia W la ipersuperficie $V \cap \tau$ di τ; avendosi $W'_Q = V'_Q \cap \tau$, W'_Q ha in P un punto doppio. Per l'arbitrarietà di P, ne segue che W ha hessiana indeterminata. Proviamo che *b*) implica *a*), conservando le notazioni già introdotte. Per ogni punto P di τ, semplice per f, esiste un punto $Q \in \tau$ tale che W'_Q abbia in P un punto doppio. Essendo $W'_Q = V'_Q \cap \tau$, V'_Q è tangente a τ in P. Poiché la sezione di f'_Q con σ è costituita da τ e da V'_Q, per la arbitrarietà di σ è ovvio che f'_Q ha in P un punto doppio, con cono osculatore in P avente spazio singolare contenente τ. L'asserto segue allora dal Teorema 3.

Osservazione 1. Poiché le ipersuperficie a hessiana indeterminata di S_r, con $r \leq 3$, sono solo i coni, la condizione geometrica affinché f^{h+1} divida $H(f)$, espressa dalla *b*) del Teorema 1, assume una forma particolarmente semplice per le ipersuperficie a punti h-parabolici con $h \leq 3$. Per $h = 1$ si ritrova il teorema stabilito da Franchetta nella già citata nota [3].

Osservazione 2. Conservando le notazioni adoperate nella dimostrazione del Teorema 1, è opportuno per il seguito rilevare esplicitamente che, per ogni $\tau \in \sum(f)$ la ipersuperficie W di τ è indipendente da σ ed è il luogo dei punti multipli per f appartenenti a τ (cfr. [1], cap. VII).

4. E' opportuno per il seguito estendere il Teorema 1 al caso delle ipersuperficie riducibili.

Se f è una ipersuperficie, eventualmente riducibile, di S_r, diremo che essa è a punti h-parabolici, $h \in \mathbb{N}$, se ogni componente irriducibile di f è a punti k-parabolici, con $k \geq h$, ed esiste una componente irriducibile semplice di f a punti h-parabolici. Se f è una ipersuperficie di S_r a punti h-parabolici, e se $f_1, \ldots, f_m$ sono le componenti irriducibili semplici a punti h-parabolici di f, porremo $\sum(f) = \bigcup_{i=1}^{m} \sum(f_i)$.

Tenuto conto che:

— se g è una componente irriducibile semplice, a punti k-parabolici, di f, con $k > h$, g^{h+1} divide $H(f)$ per il Teorema 3;

— se g è una componente irriducibile multipla di f, g^{h+1} divide f, per quanto stabilito in [10];

f^{h+1} divide $H(f)$ se e solo se g^{h+1} divide $H(f)$ per ogni componente irriducibile semplice g a punti h-parabolici di f. Il Teorema 1 si estende allora alle ipersuperficie riducibili a punti h-parabolici, continuando a valere anche in questo caso i ragionamenti svolti nella dimostrazione fornita nel n. 3.

5. In S_4 possono ricercarsi:

a) ipersuperficie a punti 2-parabolici contenute almeno triplamente nella propria ipersuperficie hessiana;

b) ipersuperficie a punti 1-parabolici contenute almeno doppiamente nella propria ipersuperficie hessiana.

Le ipersuperficie irriducibili del tipo *a*) sono coni, e dunque hanno hessiana indeterminata. Infatti, se f è un'ipersuperficie irriducibile del tipo *a*), τ è un qualunque piano di $\sum(f)$, un iperpiano σ contenente τ e non tangente a f nei punti di τ semplici per f, sega f, fuori di τ, in una superficie V rigata sviluppabile, tale che $V \cap \tau$ sia un insieme finito di rette di un fascio. Ciò può accadere solo se V è un cono, il che comporta che anche f sia un cono. In maniera analoga si prova che ogni componente irriducibile di una ipersuperficie riducibile del tipo *a*), priva di componenti multiple a punti 2-parabolici è un cono.

Per quanto riguarda le ipersuperficie del tipo *b*), è aperto il problema di provare l'esistenza di ipersuperficie siffatte che non siano ad hessiana indeterminata (cfr. [3], n. 5).

Osservazione. Le ipersuperficie irriducibili, non coni, di S_4 a punti 1-parabolici e ad hessiana indeterminata sono state caratterizzate da Franchetta nella nota [4]; da quanto precede si ha che esse sono le sole ipersuperficie irriducibili, non coni, di S_4 a hessiana indeterminata.

6. In S_5 possono ricercarsi:

a) ipersuperficie a punti 3-parabolici contenute almeno quadruplamente nella propria ipersuperficie hessiana;

b) ipersuperficie a punti 2-parabolici contenute almeno triplamente nella propria ipersuperficie hessiana;

c) ipersuperficie a punti 1-parabolici contenute almeno doppiamente nella propria ipersuperficie hessiana.

Per quanto riguarda le ipersuperficie del tipo *a*), vale il seguente:

Teorema 4. — *Se* f *è una ipersuperficie di* S_5 *del tipo* a) *priva di componenti multiple a punti 3-parabolici, ogni componente irriducibile di* f *è un cono.*

Dimostrazione. Sia g una componente irriducibile di f; se g è a punti 4-parabolici, g è un iperpiano e l'asserto è vero per g. Supponiamo g a punti 3-parabolici. Se due sottospazi qualunque di $\sum(g)$ si intersecano in un piano, o i sottospazi di $\sum(g)$ passano tutti per un piano, e quindi g è un cono, oppure sono tutti contenuti in un iperpiano π; ma questa seconda eventualità non può verificarsi, perché allora π conterrebbe g, il che è assurdo. Supponiamo allora che due generici sottospazi di $\sum(g)$ si intersechino in una retta. Per il Teorema 1, per ogni $\tau \in \sum(g)$, ogni componente irriducibile del luogo dei punti singolari per f appartenenti a τ è un cono

(cfr. osservazioni 1 e 2 del n. 3). In particolare è un cono la ipersuperficie S di τ luogo delle rette segate su τ dai 3-sottospazi di $\sum(g)$ diversi da τ. Se S non è ridotta ad un piano ω di τ, contato più volte, tutte le rette che generano S passano per uno stesso punto, e allora tutti i sottospazi di $\sum(g)$ passano per uno stesso punto, il che comporta che g è un cono. Resta da esaminare il caso in cui S si riduca ad un piano ω di τ. In tal caso ogni iperpiano σ contenente τ e non tangente a g nei punti semplici per g appartenenti a τ, sega g in una ipersuperficie, di cui una componente è una ipersuperficie g' a punti 2-parabolici, luogo del sistema unidimensionale di piani, tutti incidenti ω in una retta, segati su σ dai sottospazi di $\sum(g)$ distinti da τ. Applicando il principio di dualità si verifica facilmente che $\tilde{g}'$ è una curva le cui tangenti sono tutte incidenti una retta fissata. Allora $\tilde{g}'$ è una curva piana e ciò comporta che tutti i sottospazi di $\sum(g')$ passano per una stessa retta, ovviamente contenuta in ω. Anche in questo caso ne segue che g è un cono.

Per quanto riguarda la ricerca delle ipersuperficie del tipo c), non coni, si tratta di un problema analogo a quello relativo alle ipersuperficie del tipo b) di S_4 (cfr. [3], n. 7).

7. Discutiamo ora il caso delle ipersuperficie irriducibili del tipo b) di S_5, non coni, limitandoci al caso $K = \mathbf{C}$. E' noto che su ogni piano di $\sum(f)$ i piani infinitamente vicini segnano una conica, detta *conica focale* (cfr. [8], n. 22; [9], n. 10) che, a norma del Teorema 1, deve essere riducibile, facendo parte del luogo dei punti singolari di f (cfr. osservazioni 1 e 2 del n. 3). In tal caso $\tilde{f}$ è una superficie di S_5^*, soluzione di una equazione differenziale lineare del secondo ordine, o, come diremo brevemente con C. Segre, del tipo ϕ (cfr. [9]). Si possono allora verificare i seguenti sottocasi:

b_1) il sistema $\sum(\tilde{f})$ degli iperpiani iperosculatori di $\tilde{f}$ (cfr. [9], n. 11) ha dimensione due;

b_2) $\sum(\tilde{f})$ ha dimensione uno;

b_3) $\sum(\tilde{f})$ ha dimensione zero.

Ovviamente nel caso b_3), f è un cono, perché $\tilde{f}$ è contenuta in un iperpiano di S_5^*, e quindi tutti i piani di $\sum(f)$ passano per uno stesso punto. Che poi possa effettivamente presentarsi il caso b_2), a priori escluso da C. Segre (cfr. [9], n. 10), risulta dall'esistenza di superficie del tipo ϕ, quali, ad esempio, le rigate a direttrice rettilinea, il cui sistema degli iperpiani iperosculatori ha dimensione uno.

8. Una ipersuperficie irriducibile rispondente al tipo b_1) è luogo dei piani tangenti a una superficie S irriducibile del tipo ϕ (cfr. [9], nn. 10, 13, 19). Se f non ha hessiana indeterminata, dovendo f^3 dividere $H(f)$, deve essere $6(n(f)-2) \geq 3\,n(f)$, da cui segue $n(f) \geq 4$. In relazione al caso $n(f) = 4$, che ora esamineremo, una ipersuperficie del tipo b_1), che non sia a hessiana indeterminata, se esiste, contata tre volte, esaurisce la propria hessiana. Dimostriamo in proposito il:

TEOREMA 5. — a) *Se* f *è una ipersuperficie irriducibile di* S_5 *del tipo* b_1), *d'ordine quattro, essa è il luogo dei piani tangenti a una rigata razionale normale del quarto ordine di* S_5 *di tipo generale, cioè senza direttrice rettilinea.*

b) *Se* S *è una superficie rigata razionale normale del quarto ordine di* S_5 *di tipo generale, cioè senza direttrice rettilinea, il luogo dei piani tangenti a* S *è una ipersuperficie* f *del quarto ordine di* S_5, *del tipo* b_1), *tale che* $H(f) = a f^3$, *con* a *costante non nulla.*

Dimostrazione. a) Sia S la superficie di tipo ϕ i cui piani tangenti riempiono $\Sigma(f)$ e sia $V(f)$ il luogo dei punti singolari di f; ovviamente $S \subseteq V(f)$. Se fosse $\dim V(f) < 3$, poiché $V(f)$ è il luogo delle rette singolari per f su ciascuno dei piani di $\Sigma(f)$ (cfr. Teorema 1 e osservazione 1 del n. 3), $V(f)$ sarebbe unione di un numero finito di superficie rigate, tra cui S, oltre a contenere eventuali componenti di dimensione più bassa. L'ipersuperficie f sarebbe in tal caso luogo dei 3-sottospazi descritti dai fasci di piani tangenti a S nei punti delle sue generatrici (cfr. [8], n. 9); allora il generico 3-sottospazio σ di S_5 segherebbe f in una rigata irriducibile non sviluppabile del quarto ordine e dunque dotata di curva singolare (cfr. [2]). Avendosi $\dim(\sigma \cap V(f)) = 1$, per l'arbitrarietà di σ si avrebbe un assurdo. E' pertanto $\dim V(f) = 3$. Inoltre S è contenuta nella parte tridimensionale $\bar{V}(f)$ di $V(f)$. Infatti, se così non fosse, S sarebbe una componente di dimensione due di $V(f)$. Ragionando come sopra, si mostra che S sarebbe rigata e quindi la sezione di f con il generico 3-sottospazio σ di S_5 sarebbe una riga irriducibile non sviluppabile del quarto ordine di σ, avente qualche punto doppio isolato, il che è assurdo. Il generico 3-sottospazio σ di S_5 sega f in una superficie irriducibile del quarto ordine con curva multipla $\gamma(\sigma)$ che è almeno del terzo ordine. Infatti, se $\gamma(\sigma)$ fosse una retta, $\bar{V}(f)$ sarebbe un 3-sottospazio di S_5; allora S, contenuta in $\bar{V}(f)$,non apparterrebbe a S_5, il che è assurdo perché anche f, luogo dei piani tangenti a S non apparterrebbe a S_5. Per motivi analoghi $\gamma(\sigma)$ non può essere riducibile in due rette. Se $\gamma(\sigma)$ fosse una conica irriducibile, $\bar{V}(f)$ sarebbe una quadrica a tre dimensioni e perciò appartenente ad un iperpiano di S_5; anche S apparterrebbe a tale iperpiano e ciò è assurdo. Poiché una superficie irriducibile del quarto ordine ha curva multipla di ordine al più tre (cfr. [2], pg. 177), $\gamma(\sigma)$ è del terzo ordine e, con ragionamenti analoghi a quelli già svolti, si prova che $\gamma(\sigma)$ non può essere riducibile. Dunque la sezione di f con σ è una rigata del quarto ordine con cubica doppia (cfr. [2], pg. 177). Osservando che sulla cubica doppia di una rigata del quarto ordine di S_3 vi sono quattro punti cuspidali (cfr. [2], pg. 102), e che è ovviamente di tipo cuspidale la singolarità presentata da f nei punti di S, se ne deduce che l'ordine di S non supera quattro. Poiché non esistono superficie appartenenti a S_5 e d'ordine minore di quattro, S è d'ordine quattro. Non potendo S essere la superficie di Veronese, che non è di tipo ϕ (cfr. [9], n. 27), S è una rigata razionale normale del quarto ordine di S_5 (cfr. [2], pg. 275), ed, essendo f di tipo b_1), S non ha direttrice rettilinea.

b) Poiché le rigate razionali normali generali del quarto ordine sono tutte proiettivamente equivalenti (cfr. [2], pg. 119), possiamo supporre che S sia rap-

presentata in S_5 dalle equazioni parametriche:

$$x_0 = 1 \quad , \quad x_1 = \lambda \quad , \quad x_2 = \lambda^2 \quad , \quad x_3 = \mu \quad , \quad x_4 = \lambda\mu \quad , \quad x_5 = \lambda^2\mu$$

(cfr. [11], n. 7). Il piano tangente a S nel punto corrispondente ai valori λ, μ dei parametri, ha equazioni parametriche:

$$(12) \qquad x_0 = 1 \ , \ x_1 = \lambda + \alpha \ , \ x_2 = \lambda^2 + 2\alpha\lambda \ , \ x_3 = \mu + \beta \ , \ x_4 = \lambda\mu + \\ + \alpha\mu + \beta\lambda \ , \ x_5 = \lambda^2\mu + 2\alpha\lambda\mu + \beta\lambda^2$$

nei parametri α, β, λ, μ. Eliminando α, β, μ tra le (12) si ottiene:

$$(13) \qquad \begin{aligned} x_0\lambda^2 - 2x_1\lambda + x_2 = 0 \\ x_3\lambda^2 - 2x_4\lambda + x_5 = 0 \end{aligned}$$

che sono le equazioni del 3-sottospazio descritto dai piani tangenti a S nei punti della generatrice corrispondente ad un fissato valore del parametro λ. Eliminando λ tra le (13) si ottiene l'equazione di f, che è pertanto:

$$f(x_0, \ldots, x_5) = \begin{vmatrix} x_0 & -2x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & x_0 & -2x_1 & x_2 \\ x_3 & -2x_4 & x_5 & 0 \\ 0 & x_3 & -2x_4 & x_5 \end{vmatrix} = 0$$

Operando un cambiamento del riferimento proiettivo in S_5, l'equazione di f si può infine scrivere:

$$f(x_0, \ldots, x_5) = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & x_0 & x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 & x_5 & 0 \\ 0 & x_3 & x_4 & x_5 \end{vmatrix} = 0$$

L'ipersuperficie f è del quarto ordine e si ha $H(f) = -48 f^3$, come provato in [7], n. 15, risultando del tipo b_1).

Osservazione. Poiché le rigate razionali normali generali del quarto ordine sono tutte proiettivamente equivalenti, per quanto precede si può affermare che, a meno di omografie, esiste una e una sola ipersuperficie del quarto ordine di S_5 del tipo b_1).

Resta aperto il problema di vedere se esistono ipersuperficie del tipo b_1) d'ordine maggiore di quattro. Si può invece provare che:

TEOREMA 6. — *Non esistono ipersuperficie irriducibili del terzo ordine di* S_5 *del tipo* b_1).

Dimostrazione. Supponiamo esista una superficie S del tipo ϕ i cui piani tangenti riempiano una ipersuperficie f di ordine tre di S_5 del tipo b_1). La sezione di f con un generico 3-sottospazio di S_5 sarebbe una superficie cubica irriducibile che può essere:

i) liscia;

ii) dotata di singolarità isolate;

iii) dotata di retta doppia.

Il caso i) non può presentarsi, perché in tal caso la dimensione del luogo dei punti singolari di f, $V(f)$, non supererebbe uno, mentre $S \subseteq V(f)$. Neanche il caso ii) può verificarsi, perché, avendo una superficie cubica di S_3 al più quattro punti doppi isolati, S sarebbe d'ordine quattro, e cioè la superficie di Veronese, che non è di tipo ϕ, o la rigata razionale normale del quarto ordine, il cui luogo dei piani tangenti non è una ipersuperficie del terzo ordine (cfr. Teorema 5). Se si verificasse il caso iii), f avrebbe un 3-sottospazio di punti doppi e S sarebbe contenuta in esso, il che è assurdo. Non potendo verificarsi nessuno dei casi i), ii), iii), ne segue l'asserto.

Resta infine aperto il problema di studiare le ipersuperficie del tipo b_2).

9. Si può porre il seguente problema: per ogni intero naturale $h > 1$, caratterizzare le ipersuperficie f di un S_r, tali che $H(f) = a f^h$, con a costante non nulla. Al riguardo, relativamente al caso $K = \mathbf{C}$, $h = 2$, vale il seguente:

TEOREMA 7. — *La sviluppabile circoscritta alla cubica gobba di* S_3 *e il luogo delle corde della superficie di Veronese di* S_5 *sono le uniche due ipersuperficie irriducibili di uno spazio proiettivo che, contate due volte, esauriscono la propria hessiana.*

Dimostrazione. Se f è una ipersuperficie di S_r tale che $H(f) = a f^2$, con a costante non nulla, deve essere:

$$(r+1)\,(n(f)-2) = 2\,n(f) \tag{14}$$

Da ciò si trae:

i) $n(f) = 4$, $r = 3$;

ii) $n(f) = 3$, $r = 5$.

In relazione alla soluzione i) della (14) si trova la sviluppabile circoscritta alla cubica gobba, che è l'unica ipersuperficie di S_3 che, contata due volte esaurisce la propria hessiana (cfr. [3], n. 3). In relazione alla soluzione ii) della (14), si trova intanto il luogo delle corde della superficie di Veronese (cfr. [12]). Resta

da provare che, se un'ipersuperficie f di S_5, contata due volte esaurisce la propria hessiana, essa è il luogo delle corde della superficie di Veronese. Una ipersuperficie siffatta ha ordine tre; è a punti parabolici e, non potendo essere a punti 1-parabolici perché avrebbe ordine sedici (cfr. [3], n. 1), né a punti h-parabolici con $h > 2$ (cfr. Teorema 3), è a punti 2-parabolici. Sia $V(f)$ il luogo dei punti singolari di f e τ un generico piano di $\Sigma(f)$; poiché $n(f) = 3$, $\tau \cap V(f)$ è la conica focale, su τ, del sistema $\Sigma(f)$, la quale è non degenere, perché altrimenti, a norma del Teorema 1, f^3 dividerebbe $H(f)$. Si ha allora $\dim V(f) \geq 2$, e non può essere $\dim V(f) = 3$, perché in tal caso f avrebbe un 3-sottospazio di punti multipli e sarebbe ad hessiana indeterminata. E' dunque $\dim V(f) = 2$, e sia S la superficie, eventualmente riducibile, unione delle componenti di dimensione due di $V(f)$. Poiché la sezione di f con un generico 3-sottospazio di S_5 è una superficie cubica con singolarità isolate, S ha ordine al più quattro. Se S fosse riducibile, ciascuna sua componente sarebbe contenuta in un iperpiano e, poiché ogni piano di $\Sigma(f)$ interseca qualche componente di S in una conica non degenere, f sarebbe riducibile, contro le ipotesi. S è dunque irriducibile, d'ordine quattro; poiché S contiene il sistema bidimensionale delle coniche focali dei piani di $\Sigma(f)$, S è la superficie di Veronese (cfr. [9], n. 27) e $\Sigma(f)$ coincide con il sistema dei piani delle coniche di S. Da ciò l'asserto.

Osservazione. Volendo studiare le ipersuperficie irriducibili $f \subseteq S_r$ tali che $H(f) = a f^3$, con a costante non nulla, si osservi che deve essere:

i) $n(f) = 8$, $r = 3$;

ii) $n(f) = 5$, $r = 4$;

iii) $n(f) = 4$, $r = 5$;

iv) $n(f) = 3$, $r = 8$.

Tenendo conto dei risultati di [3] e di quanto stabilito nel n. 4, si verifica facilmente che i casi i) e ii) non possono realizzarsi. Il caso iii) può realizzarsi, perché, come visto nel n. 8, a questi caratteri corrisponde il luogo dei piani tangenti alla rigata razionale normale generale del quarto ordine di S_5; resta aperto il problema di vedere se essa è l'unica ipersuperficie di S_5 relativa al caso iii). Resta infine aperto il caso iv).

10. Concludiamo occupandoci di un problema posto da B. Segre in [7], n. 15. Si considerino due forme binarie su S_1:

$$f(x_0, x_1) = X_0 x_0^n + X_1 x_0^{n-1} x_1 + \ldots + X_n x_1^n$$

$$g(x_0, x_1) = Y_0 x_0^m + Y_1 x_0^{m-1} x_1 + \ldots + Y_m x_1^m$$

di gradi rispettivi n e m. Il risultante di f e g, scritto sotto forma di determinante di Sylvester:

$$\left.\begin{vmatrix} X_0 & . & . & . & X_n & . & . \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ . & . & X_0 & . & . & . & X_n \\ Y_0 & . & . & . & Y_m & . & . \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ . & . & Y_0 & . & . & . & Y_m \end{vmatrix}\right\} \begin{matrix} m \text{ volte} \\ \\ n \text{ volte} \end{matrix}$$

è un polinomio omogeneo $R_{n,m}(X_0, ..., X_n, Y_0, ..., Y_m)$, di grado $n + m$ nelle variabili $X_0, ..., X_n, Y_0, ..., Y_m$, e precisamente di grado m in $X_0, ..., X_n$, e di grado n in $Y_0, ..., Y_m$. Indicata sinteticamente con (X, Y) la $(n + m + 2)$-pla $(X_0, ..., X_n, Y_0, ..., Y_m)$, l'equazione $R_{n,m}(X, Y) = 0$ definisce un'ipersuperficie $R_{n,m}$ nello spazio proiettivo S_s, $s = n+m+1$, in cui le coordinate omogenee di punto siano date da (X, Y).

Se $n = 0$ $(m = 0)$, l'ipersuperficie si riduce, com'è facile verificare, ad un iperpiano contato m volte (n volte). Nel seguito, per evitare casi banali, supporremo $n>0$ e $m>0$.

Fissato un punto $P \equiv (\alpha, \beta) \in S_1$, si considerino le forme f e g tali che $f(\alpha, \beta) = 0$, $g(\alpha, \beta) = 0$, ossia tali che:

$$X_0 \alpha^n + X_1 \alpha^{n-1} \beta + ... + X_n \beta^n = 0 \tag{15}$$

$$Y_0 \alpha^m + Y_1 \alpha^{m-1} \beta + ... + Y_m \beta^m = 0$$

I punti $(X, Y) \in S_s$ tali che (X, Y) verifichino le (15), appartengono a $R_{n,m}$, che dunque è costituita da un sistema unidimensionale $\Sigma'(R_{n,m})$ di $(s-2)$-sottospazi di S_s. Inoltre il gruppo delle omografie di S_1 in sé individua, in maniera naturale, un gruppo di omografie di S_s in sé che opera transitivamente sugli spazi di $\Sigma'(R_{n,m})$, mutando $R_{n,m}$ in sé; volendo studiare il comportamento di $R_{n,m}$ lungo uno dei sottospazi di $\Sigma'(R_{n,m})$, possiamo dunque supporre $P \equiv (\alpha, \beta) \equiv (1, 0)$, limitandoci a studiare il comportamento di $R_{n,m}$ lungo il sottospazio di equazioni:

$$X_0 = Y_0 = 0$$

E' facile verificare che, per ogni punto $(0, X_1, ... ,X_n, 0, Y_1, ..., Y_m) \in \sigma$, si ha:

$$\frac{\partial R_{n,m}}{\partial X_i} = \frac{\partial R_{n,m}}{\partial Y_j} = 0 \ , i = 1, ..., n \ , j = 1, ..., m$$

mentre si ha:

$$\frac{\partial R_{n,m}}{\partial X_0} = (-1)^{m+1} Y_1 R^{(1)}_{n,m} \ , \frac{\partial R_{n,m}}{\partial Y_0} = X_1 R^{(1)}_{n,m}$$

dove:

$$R^{(1)}_{n,m}(X_1,..,X_n,Y_1,..,Y_m) = \begin{vmatrix} X_1 & . & . & . & X_n & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & X_1 & . & . & . & X_n \\ Y_1 & . & . & . & Y_m & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & Y_1 & . & . & . & Y_m \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m-1 \text{ volte} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n-1 \text{ volte} \end{matrix}$$

L'iperpiano tangente a $R_{n,m}$ nel punto $(0, a_1, ..., a_n, 0, b_1, ..., b_m) \in \sigma$ ha dunque equazione:

$$(-1)^{m+1} b_1 R^{(1)}_{n,m}(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m) X_0 + a_1 R^{(1)}_{n,m}(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m) Y_0 = 0$$

e da ciò segue che:

a) l'ipersuperficie $R^{(1)}_{n,m}$, d'equazione $R^{(1)}_{n,m} = 0$, di σ, è il luogo dei punti singolari di $R_{n,m}$ in σ;

b) l'iperpiano di S_s di equazione (16) è tangente a $R_{n,m}$ in tutti i punti semplici per $R_{n,m}$ dell'$(s-3)$-sottospazio, contenuto in σ, di equazioni:

$$X_0 = Y_0 = 0 \qquad b_1 X_1 = a_1 Y_1 \tag{17}$$

Quindi $R_{n,m}$ è a punti $(s-3)$-parabolici, il sistema $\Sigma(R_{n,m})$ essendo costituito da fasci di $(s-3)$-sottospazi di S_s, ciascuno sito in uno degli $(s-2)$-sottospazi di $\Sigma'(R_{n,m})$. Si può ulteriormente precisare che:

c) $R_{n,m}$ non è un cono;

d) $R_{n,m}{}^{s-3}$ divide $H(R_{n,m})$, cosa del resto già stabilita in [7], n. 15.

In [7], n. 15, B. Segre ha formulato la congettura che $R_{n,m}{}^t$ non divida $H(R_{n,m})$, se $t > s-3$ e $n \geq 2$ e $m \geq 3$ o $n \geq 3$ e $m \geq 2$. Tale congettura è falsa come segue dal:

Teorema 8. — *Se* $H(R_{n,m})$ *non è identicamente nullo, si ha*:

$$2n \geq m-1 \quad e \quad 2m \geq n-1$$

Dimostrazione. Tenendo conto di quanto stabilito in [7], n. 13, $H(R_{n,m})$, se non è identicamente nullo, è un polinomio omogeneo di grado $m(n+m+2)-2(n+1)$ in $X_0, ..., X_n$ e di grado $n(m+n+2)-2(m+1)$ in $Y_0, ..., Y_m$. Poiché $R_{n,m}{}^{s-3}$ divide $H(R_{n,m})$, $s = n+m+1$, se $H(R_{n,m})$ non è identicamente nullo, deve essere:

$$m(n+m+2)-2(n+1) \geq m(n+m-2)$$

$$n(n+m+2)-2(m+1) \geq n(n+m-2)$$

e da ciò l'asserto.

Dal Teorema 9 segue che, fissato comunque $m \in \mathbb{N}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che:

$$n < \frac{m-1}{2} \quad \text{o} \quad n > 2m - 1$$

è $H(R_{n,m})$ identicamente nullo, e quindi divisibile per ogni potenza di $R_{n,m}$. Gli unici valori di n per i quali non è detto che $H(R_{n,m})$ sia identicamente nullo sono quelli per cui:

$$\frac{m-1}{2} \leq n \leq 2m-1 \tag{18}$$

In particolare per $m = 2$ la (18) fornisce $n = 2$ e $n = 3$, casi in cui effettivamente $H(R_{n,2})$ non è identicamente nullo (cfr. [7], n. 15); per $n > 3$ invece $H(R_{n,2})$ è identicamente nullo. Soffermiamoci su questo caso particolare per mostrare, alla luce del Teorema 1, perché cade in difetto la congettura di B. Segre. Considerato il sottospazio $\tau \in \Sigma(R_{n,2})$, di equazione (17), supposto $b_1 \neq 0$ e posto $\alpha = a_1 / b_1$, si verifica agevolmente che il luogo dei punti doppi per $R_{n,2}$ su τ è la ipersuperficie d'ordine $n + 1$ di τ di equazione:

$$\alpha\, Y_1^2 \left| \begin{matrix} 1 & Y_2 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & Y_1 & Y_2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & Y_1 & Y_2 \\ \alpha & X_2 & . & . & . & . & X_n \end{matrix} \right| \Bigg\} \; n-1 \text{ volte} = 0 \tag{19}$$

dove in τ si assumono come coordinate $(X_2, X_3, \ldots, X_n, Y_1, Y_2)$. Poiché nel polinomio a primo membro dell'equazione (19) compaiono linearmente $X_2, \ldots, X_n$, il suo polinomio hessiano è identicamente nullo, a meno che non sia $n \leq 3$. Tenendo conto allora del Teorema 1 si ritrova quanto dianzi stabilito per altra via. Notiamo ancora che il determinante che compare a primo membro dell'equazione (19) definisce una ipersuperficie W di τ che non è un cono. Infatti W ha lo spazio $Y_1 = Y_2 = 0$ di punti $(n-2)$-pli, non ha altri punti multipli fuori di questo sottospazio, e non ha punti $(n-1)$-pli, perché tra le derivate di ordine $n-2$ di W vi sono $X_2, \ldots, X_n$, moltiplicate per interi positivi. L'ipersuperficie $R_{n,2}$, per $n > 3$, fornisce pertanto un esempio di ipersuperficie a hessiana indeterminata tale che il luogo dei punti singolari per $R_{n,2}$ su ogni spazio di $\Sigma(R_{n,2})$ sia ad hessiana indeterminata, ma non sia un cono.

Osserviamo infine che $R_{2,2}$ è il luogo dei piani tangenti ad una rigata razionale normale generale del quarto ordine di S_5, come si rileva dalla dimostrazione del Teorema 6, *b*).

BIBLIOGRAFIA

[1] E. Bompiani (1947) — *Note ciclostilate di Appunti del Corso di Geometria Differenziale*, Roma, Istituto di Matematica dell'Università.

[2] F. Conforto (1939) — *Le Superficie Razionali*, Bologna, Zanichelli.

[3] A. Franchetta (1951) — *Forme algebriche sviluppabili e relative hessiane*, « Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. », *10*, 1-4.

[4] A. Franchetta (1954) — *Sulle forme algebriche di* S_4 *aventi l'hessiana indeterminata*, « Rend. Mat. », (5) *13*, 1-6.

[5] B. Segre (1951) — *Bertini forms and hessian matrices*, « J. London Math. Soc. », *26*, 164-176.

[6] B. Segre (1972) — *Prodromi di geometria algebrica*, Roma, Cremonese.

[7] B. Segre (1964) — *Sull'hessiano di taluni polinomi (determinanti, pfaffiani, discriminanti, risultanti, hessiani)*, note I e II, « Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. », 37_2, 109-117 e 215-221.

[8] C. Segre (1910) — *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazio*, « Rend. Circ. Mat. Palermo », *30*, 87-121.

[9] C. Segre (1906-07) — *Su una classe di superficie degli iperspazi legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine*, « Atti Accad. Sci. Torino », *42*, 559-591.

[10] C. Segre (1895) — *Sulla forma hessiana*, « Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. », *4*, 143-148.

[11] C. Segre (1883-84) — *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque*, « Atti Accad. Sci. Torino », *19*, 265-282.

[12] A. Terracini (1966) — *A remark on the cubic primal of* S_5 *which is filled by the chords of a Veronese surface*, Prospectives in Geometry and Relativity, Indiana Univ. Press., *40*.

Direttore respon.: Prof. P. Di Mattei - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 del 28-12-1959 - Tip. della Pace, Roma