FILOMENA PACELLA (*)

Connessioni tra alcune estensioni della teoria del grado topologico (**)

SUMMARY. — We deal with the reciprocal indipendence between the topological degree theories of A. Canfora, G. Mussi and M. Minnini, for non compact operators in a separable Hilbert space, and the degree theories of Browder-Petryshyn for A-proper maps and of Nussbaum for (α) k-set contractions ($k < 1$).

Moreover we prove the degrees of the same operator I-T, definites according to various theories, agree with Leray-Schauder degree, when T is compact.

INTRODUZIONE

Negli ultimi dieci anni si è proceduto ad estendere, in varie direzioni, la teoria classica di Leray-Schauder del grado topologico, mirando essenzialmente a definire il grado per operatori del tipo $I-T : S \subseteq X \to X$ (X spazio di Banach, I = identità) con T non compatto.

In [1], ad esempio, si definisce il grado topologico per operatori del tipo $I-T : S_r \subset X \to X$, dove X è uno spazio di Hilbert reale separabile, S_r è la sfera con centro nell'origine e raggio r contenuta in X e T è un'applicazione avente le seguenti proprietà:

(*a*) $T : S_r \subseteq X \to X$ è limitata, finitamente continua e debolmente chiusa;

(*b*) T verifica la condizione di divaricazione, cioè:

$$\exists \alpha \in R : \forall x \in \partial S_r \quad , \quad \left(\frac{x}{\| x \|} , \frac{T(x)}{\| T(x) \|} \right) < \cos \alpha < 0 .$$

Ricordiamo, a tale proposito, che per un generico operatore $T : S \subseteq X \to Y$ (con X e Y spazi di Banach) si danno le seguenti definizioni:

DEFINIZIONE 1. T *è limitato se trasforma parti limitate di* S *in parti limitate di* Y.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca per l'Analisi Funzionale del C.N.R. presso l'Istituto di Matematica «Renato Caccioppoli» dell'Università di Napoli.

(**) Memoria presentata dal Vice-Presidente dell'Accademia CARLO MIRANDA il 23 dicembre 1978.

DEFINIZIONE 2. *T è finitamente continuo se è continua la restrizione di* T *ad ogni parte del tipo* $S \cap X_n$, *con* X_n *sottospazio di* X *di dimensione finita.*

DEFINIZIONE 3. *T è debolmente chiuso se per ogni successione* $\{x_n\} \subset S$, *convergente debolmente a un punto* $x \in S$ *si ha che se* $T(x_n) \to y$ *nello spazio* Y, *allora* $T(x) = y$.

La costruzione del grado topologico per gli operatori sopra citati, si basa essenzialmente sulla compattezza debole di T, nonché sull'equivalenza fra la topologia indotta sulle sfere dalla topologia debole di X ed una conveniente topologia metrica.

In precedenza, altre estensioni della teoria del grado topologico erano state ottenute.

In particolare citiamo quella di F. E. Browder e W. V. Petryshyn riguardante la classe degli operatori A-propri (cfr. [2] e [3]) e quella di Nussbaum per le « (α) k-set contractions » (cfr. [4] e [5]). Per quanto concerne la prima, giova ricordare le seguenti definizioni:

DEFINIZIONE 4. *Siano* X *ed* Y *due spazi di Banach. Dicesi « schema (orientato) di approssimazione da* X *ad* Y *» una terna* $(\{X_n\}, \{Y_n\}, \{Q_n\})$ *in cui:* $\{X_n\}$ *è una successione crescente (per inclusione) di sottospazi (orientati) di* X *di dimensione finita,* $\{Y_n\}$ *è una successione crescente di sottospazi (orientati) di* Y *di dimensione finita, i* Q_n *sono dei proiettori lineari da* Y *su* Y_n *tali che*

$$\forall y \in Y \quad \lim_n Q_n y = y,$$

ed inoltre risulta:

$$\forall n \quad \dim(X_n) = \dim(Y_n) \qquad e \quad \overline{\bigcup_n X_n} = X.$$

DEFINIZIONE 5. *Si dice che un operatore* $T : \overline{G}\,(\subseteq X) \to Y$, *con* G *aperto limitato, è A-proprio rispetto a un assegnato schema di approssimazione, se vale la seguente implicazione:*

$$\left.\begin{array}{c} \{x_{nj}\} \subset \overline{G}\,,\ x_{nj} \in X_{nj}\,,\ n_j \to \infty \\ Q_{nj}\, T x_{nj} \to y \in Y \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \exists\, \{x_{njk}\} \subset \{x_{nj}\}\,,\ \exists x \in X : \\ x_{njk} \to x\,,\ T(x) = y\,. \end{array}\right.$$

DEFINIZIONE 6. *Siano* $T : \overline{G}\,(\subseteq X) \to Y$ *un operatore continuo ed A-proprio rispetto ad un assegnato schema di approssimazione,* $p \in Y$ *un punto tale che* $T(x) \neq p$ $\forall x \in \partial G$, *e* Z' *l'insieme ampliato dei numeri interi, cioè* $Z' = Z \cup \{-\infty, +\infty\}$. *Poniamo inoltre, per ogni* n, $G_n = G \cap X_n$, $T_n = Q_n \circ T|_{G_n}$. *Dicesi «(multi) grado* $d^*(T; G; p)$ *di* T *rispetto a* G *ed a* p*» il sottoinsieme di* Z' *definito come segue:*

(1) *l'intero* m *appartiene a* $d^*(T; G; p)$ *se esiste una successione* $\{n_j\}$ *di interi positivi, con* $n_j \to \infty$, *tale che*[1], $\forall j$, $d(T_{nj}; G_{nj}; Q_{nj}\, p)$ *è ben definito e* $d(T_{nj}; G_{nj}; Q_{nj}\, p) = m$.

(1) Qui e nel seguito il grado topologico negli spazi euclidei nonché quello di Leray-Schauder verrà indicato con d. Con d^* si indicherà il grado nel senso di Browder-Petryshyn, con $\bar{d}$ quello secondo [1] e con d' quello nel senso di Nussbaum.

(2) $\pm\infty$ *appartiene a* $d^*(\mathrm{T}\,;\mathrm{G}\,;p)$ *se esiste una successione* $\{n_j\}$ *di interi positivi, con* $n_j \to \infty$, *tale che*, $\forall j$, $d(\mathrm{T}_{n_j}\,;\mathrm{G}_{n_j}\,;\mathrm{Q}_{n_j}\,p)$ *è ben definito e* $\lim_{j\to\infty} d(\mathrm{T}_{n_j}\,;\mathrm{G}_{n_j}\,;\mathrm{Q}_{n_j}\,p) = \pm\infty$.

La teoria di Nussbaum invece si basa principalmente sulle seguenti definizioni:

DEFINIZIONE 7. *Sia* Ω *un insieme limitato contenuto nello spazio di Banach* X. *Dicesi «misura di non compattezza» di* Ω *il numero* $\alpha(\Omega) = \inf\{\rho > 0$ *tale che* Ω *si può ricoprire con un numero finito di insiemi di diametro* $\leq \rho\}$.

DEFINIZIONE 8. *Un operatore continuo* $\mathrm{T} : \mathrm{S} \subseteq \mathrm{X} \to \mathrm{X}$, *con* X *spazio di Banach, è una* (α) *k-set contraction se esiste una costante* $k \geq 0$, *tale che* $\alpha(\mathrm{T}(\Omega)) \leq k\alpha(\Omega)$, *per ogni parte limitata* Ω *contenuta in* S.

In [4], [5] la definizione di grado topologico è data per operatori del tipo $\mathrm{I}-\mathrm{T} : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$, dove X è uno spazio di Banach e $\mathrm{T} : \overline{\mathrm{G}} \subseteq \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ con G aperto limitato è una (α) k-set contraction con $k < 1$.

In un lavoro di prossima pubblicazione [10] G. Muni ed M. Mininni estendono la teoria di A. Canfora e danno una nozione di grado topologico per certi operatori definiti in uno spazio vettoriale topologico reale localmente convesso e separato $(\mathrm{E}\,,\mathfrak{F})$, nel quale sia assegnata una applicazione $\varphi : \mathrm{E}\times\mathrm{E} \to \mathrm{R}$ lineare e continua nella prima variabile, continua (ma non necessariamente lineare) nella seconda e verificante la condizione:

$$\varphi(x\,,x) > 0 \qquad \forall x \neq 0\,.$$

Per esempio E potrebbe essere uno spazio di Hilbert, $\mathfrak{F}$ la topologia debole su E e φ il prodotto scalare.

Il seguente lemma giuoca un ruolo essenziale nella teoria di Muni–Mininni:

LEMMA 1. *Siano* V *e* C *un intorno aperto convesso ed equilibrato di* $0 \in \mathrm{E}$ *e, rispettivamente, un sottoinsieme compatto di* E. *Allora esiste una applicazione* $\Psi : \mathrm{C} \to \mathrm{E}$ *tale che*:

(1) Ψ *è continua, compatta ed ha codominio di dimensione finita*;

(2) $x - \Psi(x) \in \mathrm{V} \quad , \quad \forall x \in \mathrm{C}$;

(3) $\varphi(\Psi(x)\,,x) > 0 \quad , \quad \forall x \in \mathrm{C}$ *tale che* $\Psi(x) \neq 0$.

Siano, ora, K, B ed S dei sottoinsiemi di E tali che:

(4) K *è chiuso*, $\mathrm{K} = \mathrm{B} \cup \mathrm{S}\,,\ \mathrm{B} \cap \mathrm{S} = \emptyset\,,\ 0 \notin \mathrm{S}$;

(5) *per ogni sottospazio* $\mathrm{E}_0 \subset \mathrm{E}$ *di dimensione finita*, $\mathrm{B}_0 = \mathrm{B} \cap \mathrm{E}_0$ *è aperto in* E_0, $\mathrm{S}_0 = \mathrm{S} \cap \mathrm{E}_0$ *contiene la frontiera di* B_0 *in* E_0.

Muni e Mininni considerano applicazioni $\mathrm{F} : \mathrm{K} \to \mathrm{E}$ con le seguenti proprietà:

(6) F *è compatta, chiusa (ovviamente nel senso della topologia* $\mathscr{E}$) *e finitamente continua*;

(7) $\varphi(x, \mathrm{F}(x)) \leq 0 \quad , \quad \forall x \in \mathrm{S}$.

È evidente che, quando si assuma $\mathrm{K} = \mathrm{S}$, ed $\mathrm{S} = \partial \mathrm{S}$, nello spazio di Hilbert reale E munito della topologia debole $\mathscr{E}$, (6) e (7) generalizzano le condizioni (*a*) e (*b*) di [1].

Ebbene, detto V un intorno aperto convesso ed equilibrato di $0 \in \mathrm{E}$ e detto C un compatto contenente il codominio $\mathrm{F}(\mathrm{K})$ di F, sia $\Psi : \mathrm{C} \to \mathrm{E}$ un qualunque operatore verificante le (1), (2), (3) del lemma 1; si vede che l'applicazione $\Psi \circ \mathrm{F}$ è compatta e finitamente continua, ha codominio di dimensione finita, ed in più verifica la condizione:

(8) $x \neq \Psi \circ \mathrm{F}(x) \qquad \forall x \in \mathrm{S}$.

Dunque si può considerare il grado (di Brouwer) $d((\mathrm{I} - \Psi \circ \mathrm{F})|_{\mathrm{K} \cap \mathrm{E}_\varphi} ; \mathrm{K} \cap \mathrm{E}_\varphi ; 0)$ dove $\mathrm{E}_\varphi \subset \mathrm{E}$ è un sottospazio di dimensione finita contenente il codominio di Ψ. Muni e Mininni mostrano che $d((\mathrm{I} - \Psi \circ \mathrm{F})|_{\mathrm{K} \cap \mathrm{E}_\varphi} ; \mathrm{K} \cap \mathrm{E}_\varphi ; 0)$ è indipendente da E_φ, Ψ, C e V e dipende solo da φ ed F. Dopo ciò definiscono φ-grado di I-F il numero $d((\mathrm{I} - \Psi \circ \mathrm{F})|_{\mathrm{K} \cap \mathrm{E}_\varphi} ; \mathrm{K} \cap \mathrm{E}_\varphi ; 0)$. Denoteremo con d anche tale φ-grado.

Col presente lavoro ci proponiamo di dimostrare, tramite alcuni esempi, l'indipendenza reciproca fra le teorie esposte in [1]–[10] e quelle di Browder–Petryshyn e di Nussbaum.

Inoltre, nell'ultimo paragrafo, è fornita la dimostrazione che, in uno spazio di Hilbert reale, nel caso particolare che l'operatore T sia compatto nel senso della norma e verifichi le proprietà (*a*) e (*b*) ovvero (6) e (7), i gradi di I–T definiti secondo le varie teorie, a partire da quella classica di Leray–Schauder, sono coincidenti. Ed è proprio questa circostanza, com ben s'intende, che consente di parlare di « estensione » della teoria di Leray–Schauder.

1. Indipendenza tra le varie estensioni della teoria del grado

Teorema 1.1. *Sia* X *uno spazio di Hilbert reale separabile. Esiste un operatore* $\mathrm{T} : \mathrm{S}_r \subset \mathrm{X} \to \mathrm{X}$, *tale che*:

i) T *verifica le condizioni* (*a*) *e* (*b*) *dell'introduzione*;

ii) T *non è una* (α) *k-set contraction con* $k < 1$;

iii) I–T *non è* A*-proprio*.

Dimostrazione. Sia $\{e_n\}$ un sistema ortonormale completo in X.

Definiamo nella sfera $\mathrm{S}_1 (\subset \mathrm{X})$, con centro nell'origine e raggio 1, il seguente operatore a valori in X:

$$\mathrm{T} : \mathrm{S}_1 \to \mathrm{X} \quad ; \quad \mathrm{T}(x) = \lambda(x)\, x - \mu(x)\, e_1 ,$$

dove

$$\lambda(x) = f((x, e_1)) \quad \text{con } f(t) = \begin{cases} 1 & \text{in } \left[\frac{6}{7}, 1\right] \\ 14t - 11 & \text{in } \left[\frac{5}{7}, \frac{6}{7}\right] \\ -1 & \text{in } \left[-1, \frac{5}{7}\right] \end{cases}$$

$$\mu(x) = g((x, e_1)) \quad \text{con } g(t) = \begin{cases} 2 & \text{in } \left[\frac{4}{7}, 1\right] \\ 14t - 6 & \text{in } \left[\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right] \\ 0 & \text{in } \left[-1, \frac{3}{7}\right] \end{cases}$$

L'operatore T verifica le seguenti proprietà:

(a_1) è limitato in quanto si ha:

$$\| T(x) \| = \| \lambda(x) x - \mu(x) e_1 \| \leq | \lambda(x) | \| x \| +$$
$$+ | \mu(x) | \| e_1 \| \leq \| x \| + 2 \qquad \forall x \in S_1 ;$$

(a_2) è continuo, poiché $\lambda(x)$ e $\mu(x)$ sono funzionali continui;

(a_3) è debolmente continuo, (quindi anche debolmente chiuso) in quanto se $\{x_n\} \subseteq S_1$ è una qualunque successione convergente debolmente a un punto $x \in S_1$ si ha:

$$(x_n, e_1) \to (x, e_1)$$

e quindi:

$$\lambda(x_n) \to \lambda(x) \quad \text{e} \quad \mu(x_n) \to \mu(x) .$$

Da queste due ultime relazioni di limite consegue che $\{T(x_n)\}$ converge debolmente a $T(x)$ in quanto

$$\forall \zeta \in X, (\zeta, T(x_n)) = \lambda(x_n)(\zeta, x_n) - \mu(x_n)(\zeta, e_1) \to$$
$$\to \lambda(x)(\zeta, x) - \mu(x)(\zeta, e_1) = (\zeta, T(x)) .$$

(b) verifica la condizione di divaricazione. Infatti se $x \in \partial S_1$, cioè $\| x \| = 1$, si ha:

$$(x, T(x)) = \lambda(x)(x, x) - \mu(x)(x, e_1) = \lambda(x) - \mu(x)(x, e_1) .$$

Allora:

se $\quad \frac{6}{7} \leq (x, e_1) \leq 1 \quad , \quad \lambda(x) = 1 \quad , \quad \mu(x) = 2$

$$(x, \mathrm{T}(x)) = 1 - 2(x, e_1) \leq 1 - 2 \cdot \frac{6}{7} = -\frac{5}{7} < 0 ;$$

se $\quad \frac{5}{7} \leq (x, e_1) \leq \frac{6}{7} \quad , \quad -1 \leq \lambda(x) \leq 1 \quad , \quad \mu(x) = 2$

$$(x, \mathrm{T}(x)) = \lambda(x) - 2(x, e_1) \leq -\frac{3}{7} < 0 ;$$

se $\quad \frac{4}{7} \leq (x, e_1) \leq \frac{5}{7} \quad , \quad \lambda(x) = -1 \quad , \quad \mu(x) = 2$

$$(x, \mathrm{T}(x)) = -1 - 2(x, e_1) \leq -\frac{15}{7} < 0 ;$$

se $\quad \frac{3}{7} \leq (x, e_1) \leq \frac{4}{7} \quad , \quad \lambda(x) = -1 \quad , \quad 0 \leq \mu(x) \leq 2$

$$(x, \mathrm{T}(x)) = -1 - \mu(x)(x, e_1) \leq -1 < 0 ;$$

se $\quad (x, e_1) \leq \frac{3}{7} \quad , \quad \lambda(x) = -1 \quad , \quad \mu(x) = 0$

$$(x, \mathrm{T}(x)) = -1 < 0 .$$

In definitiva otteniamo:

$$\frac{(x, \mathrm{T}(x))}{\|x\| \, \|\mathrm{T}(x)\|} = \frac{\lambda(x) - \mu(x)(x, e_1)}{\|\lambda(x)\, x - \mu(x)\, e_1\|} \leq \frac{-3/7}{3} = -\frac{1}{7} < 0 \qquad \forall x \in \partial \mathrm{S}_1 .$$

Con ciò è provato il punto i) dell'asserto.

Dimostriamo ora che T non è una (α) k-set contraction, con $k < 1$. A tale scopo consideriamo la seguente successione:

$$\zeta_n = \frac{6}{7} e_1 + \frac{1}{7} e_n ;$$

poiché $\{e_n\}$ è un sistema ortonormale completo, $\{\zeta_n\}$ non ha alcuna estratta convergente in norma.

D'altra parte la successione

$$\{(\mathrm{I}-\mathrm{T})(\zeta_n)\} = \{\zeta_n - \lambda(\zeta_n)\, \zeta_n + \mu(\zeta_n)\, e_1\} ,$$

essendo $(\zeta_1, e_1) = 1$ e $(\zeta_n, e_1) = (6/7)$ $\forall n \neq 1$, non è altro che la successione costante $\{2 e_1\}$, ovviamente convergente in norma. Se allora T fosse una

(α) k-set contraction, con $k < 1$, si dovrebbe avere:

$$\alpha(\mathrm{T}(\Omega)) \leq k\alpha(\Omega)$$

per ogni sottoinsieme Ω contenuto in S_1.

In particolare quindi, per la successione $\{\zeta_n\}$ considerata prima, dovrebbe risultare:

$$\alpha(\{\mathrm{T}(\zeta_n)\}) \leq k\alpha(\{\zeta_n\}) < \alpha(\{\zeta_n\}) \tag{1.1}$$

poiché $\alpha(\{\zeta_n\}) > 0$, in quanto $\{\zeta_n\}$ non è compatta e lo spazio in cui ci siamo posti è completo.

D'altra parte per una proprietà della « misura di non compattezza » (cfr. [4], pag. 221, prop. 3) si ha:

$$\alpha(\{\zeta_n\}) = \alpha(\{\zeta_n - \mathrm{T}(\zeta_n) + \mathrm{T}(\zeta_n)\}) \leq \alpha(\{\zeta_n - \mathrm{T}(\zeta_n)\}) + \alpha(\{\mathrm{T}(\zeta_n)\})\,;$$

ed allora da quest'ultima relazione e dalla (1.1), essendo $\alpha(\{\zeta_n - \mathrm{T}(\zeta_n)\}) = 0$, poiché la successione $\{\zeta_n - \mathrm{T}(\zeta_n)\}$ è convergente in norma, si otterrebbe:

$$\alpha(\{\zeta_n\}) \leq \alpha(\{\mathrm{T}(\zeta_n)\}) < \alpha(\{\zeta_n\})\,.$$

Questo è un assurdo che dimostra quanto abbiamo affermato, e cioè il punto ii) dell'asserto.

Dimostriamo ora che l'operatore I-T non è A-proprio in nessun schema di approssimazione da X ad X. Sia $\{\mathrm{X}_n, \mathrm{Q}_n\}$ uno schema di approssimazione da X ad X. Senza ledere la generalità possiamo supporre che, per ogni n, X_n sia contenuto strettamente in X_{n+1}. Così facendo, la successione $\mathrm{N}(n)$ di numeri interi positivi, che ad ogni n associa la dimensione dello spazio X_n, risulta strettamente crescente.

Ora, per ogni sottospazio X_n, scegliamo una base, avendo cura però, che la base del sottospazio X_{n+1} che è costituita da $\mathrm{N}(n+1)$ vettori linearmente indipendenti, abbia come primi $\mathrm{N}(n)$ elementi i vettori della base scelta per il sottospazio X_n.

Così facendo perveniamo ad un sistema di vettori $\{\bar{x}_n\}$ linearmente indipendenti.

A questo punto si possono verificare due casi: o si ha $\dim \mathrm{X}_n = n$, $\forall n$, oppure $\dim \mathrm{X}_n = \mathrm{N}(n) \geq n$ (in quanto la successione $\mathrm{N}(n)$ è strettamente crescente) e $\dim \mathrm{X}_k > k$ per qualche k.

Nel secondo caso modifichiamo la successione $\{\mathrm{X}_n\}$ in modo da ottenere $\dim \mathrm{X}_n = n$. Procediamo in questo modo: abbiamo $\dim \mathrm{X}_n = \mathrm{N}(n) < \mathrm{N}(n+1)$ e $\dim \mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{N}(n+1) \geq n+1$; indichiamo allora con Z_1 il sottospazio generato da $\bar{x}_1$ e poniamo, $\forall n \geq 1$, $\mathrm{Z}_{\mathrm{N}(n)} = \mathrm{X}_n$, $\mathrm{Z}_{\mathrm{N}(n+1)} = \mathrm{X}_{n+1}$; inseriamo poi fra Z_1 e $\mathrm{Z}_{\mathrm{N}(1)}$ gli eventuali sottospazi di dimensione finita $\mathrm{Z}_2, \cdots, \mathrm{Z}_{\mathrm{N}(1)-1}$, generati rispettivamente dalle basi $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}, \cdots, \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_{\mathrm{N}(1)-1}\}$ e fra $\mathrm{Z}_{\mathrm{N}(n)}$ e $\mathrm{Z}_{\mathrm{N}(n+1)}$ gli eventuali sottospazi di dimensione finita $\mathrm{Z}_{\mathrm{N}(n)+1}, \cdots, \mathrm{Z}_{\mathrm{N}(n+1)-1}$, generati rispettivamente dalle basi

$$\{\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_{N(n)+1}\}, \cdots, \{\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_{N(n)+1}, \cdots, \bar{x}_{N(n+1)-1}\}.$$

Nulla vieta di scrivere, poi, X_k in luogo di Z_k.

In questo modo ogni X_n viene ad essere il sottospazio di dimensione finita generato dai primi n elementi del sistema di vettori linearmente indipendenti $\{\bar{x}_n\}$. Quest'ultimo, ricordando che si ha $\bigcup_n X_n = X$, risulta essere un sistema completo, ed allora ad esso possiamo associare un sistema ortonormale completo $\{\bar{e}_n\}$, tale che:

$$\bar{e}_n = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^n x_i \qquad \forall n .$$

Da questa relazione discende che $\bar{e}_n \in X_n$, $\forall n$.

Ciò premesso osserviamo che, per dimostrare che I–T non è A-proprio nell'assegnato schema di approssimazione $(\{X_{N(n)}\}, \{Q_n\})$, basta provare l'esistenza di una successione $\{x_n\} \subseteq S_1$, con $x_n \in X_{N(n)}\ \forall n$, tale che la successione $\{Q_n(I-T)(x_n)\}$ converga ad un certo elemento $y \in X$, senza che però $\{x_n\}$ abbia alcuna estratta convergente in norma. A tale scopo consideriamo la seguente successione:

$$x_n = \frac{6}{7} Q_n e_1 + \frac{1}{8} \bar{e}_{N(n)} ;$$

Ovviamente $x_n \in X_{N(n)}$, per ogni n, e, poiché, $Q_n e_1 \to e_1$ e quindi $\|Q_n e_1\| \to 1$, $\{x_n\}$ risulta definitivamente contenuta in S_1.

Inoltre, essendo $\{\bar{e}_n\}$ un sistema ortonormale completo, la successione $\{x_n\}$ non ha alcuna estratta convergente in norma.

D'altra parte risulta:

$$(1.2) \qquad \lim_n (x_n, e_1) = \lim_n \left[\frac{6}{7} (Q_n e_1, e_1) + \frac{1}{8} (\bar{e}_{N(n)}, e_1) \right] = \frac{6}{7}$$

in quanto $Q_n e_1 \to e_1$ e $\{(\bar{e}_{N(n)}, e_1)\} \to 0$, essendo quest'ultima una estratta della successione $\{(\bar{e}_n, e_1)\}$ dei coefficienti di Fourier di e_1 rispetto al sistema ortonormale completo $\{\bar{e}_n\}$.

Da (1.2) consegue che $\{\lambda(x_n)\}$ converge ad 1 e $\{\mu(x_n)\}$ a 2 cosicché si ha:

$$(1.3) \qquad \lim_n (I-T)(x_n) = \lim_n [x_n - \lambda(x_n) x_n + \mu(x_n) e_1] = 2 e_1 .$$

Da quest'ultima relazione e dall'uniforme limitatezza della successione di proiettori $\{Q_n\}$ (cfr. [9], pag 75 teorema di Banach-Steinhaus) discende che:

$$(1.4) \qquad \lim_n Q_n (I-T)(x_n) = 2 e_1$$

in quanto si ha:

$$\| Q_n (I-T)(x_n) - 2 e_1 \| \leq \| Q_n (I-T)(x_n) - Q_n (2 e_1) \| +$$
$$+ \| Q_n (2 e_1) - 2 e_1 \| \leq \| Q_n \| \, \| (I-T)(x_n) - 2 e_1 \| + \| Q_n (2 e_1) - 2 e_1 \| \to 0.$$

La relazione di limite (1.4), unitamente all'osservazione che la successione $\{x_n\}$ non ha alcuna estratta convergente, ci dice che l'operatore (I–T) non è A-proprio.

In tal modo resta provato iii) e, quindi, il teorema.

Proviamo ora il seguente:

TEOREMA 1.2. *Sia* X *uno spazio di Hilbert reale separabile. Esiste un operatore* $T : S_1 \subseteq X \to X$ *verificante le condizioni*:

i) T *è una* (α) *k-set contraction* ($k < 1$);

ii) I–T *è A-proprio*;

iii) T *non verifica le proprietà* (*a*) *e* (*b*) *della introduzione*.

Dimostrazione. Siano $\{e_n\}$ un sistema ortonormale completo ed S_1 la sfera con centro nell'origine e raggio 1.

Definiamo in S_1 il seguente operatore a valori in X:

$$T(x) = \frac{1}{3} x + F(x) = \frac{1}{3} x + \rho(x) e_1 ,$$

essendo $\rho(x)$ il funzionale definito su X:

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 - \|x\|^2 & \text{se} \quad \|x\| \leq 1 \\ 0 & \text{se} \quad \|x\| > 1 \end{cases}$$

T è un operatore continuo; inoltre, poiché F è un operatore compatto ed $U(x) = (1/3)\, x$ una contrazione stretta, T è anche una (α) *k*-set contraction con $k < 1$ (cfr. [4], pag. 218).

Consideriamo ora l'operatore:

$$I-T = (I - U) + (-F),$$

(I — U), essendo U una contrazione stretta è un operatore A-proprio, ed allora tale è anche $(I - U) + (-F) = I-T$, dal momento che $-F$ è un operatore compatto (cfr. [2], pag. 230, prop. 2 e pag. 236-237 esempio (iii) e prop. 5).

D'altra parte T non è debolmente chiuso in quanto si ha:

$$e_n \rightharpoonup 0 \qquad T(e_n) = \frac{1}{3} e_n \rightharpoonup 0 ,$$

ma $T(o) = e_1 \neq 0$.

Inoltre T non verifica la condizione di divaricazione; infatti, per ogni elemento e_n del sistema ortonormale considerato si ha:

$$(e_n, \mathrm{T}(e_n)) = \left(e_n, \frac{1}{3} e_n\right) = \frac{1}{3} > 0 .$$

L'asserto è provato.

Dal teorema 1.1 segue banalmente il seguente:

TEOREMA 1.3. *Sia X uno spazio di Hilbert reale separabile. Esiste un operatore* $\mathrm{T} : \mathrm{S}_r \subset \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ *tale che*:

i) T *verifica la condizione* (a) *dell'introduzione e la condizione*:

$$(x, \mathrm{T}(x)) \leq 0 \qquad \forall x \in \partial \mathrm{S}_r \text{ [2]}$$

ii) T *non è una* (α) *k-set contraction con* $k < 1$;

iii) I–T *non è A-proprio.*

È poi facile convincersi che gli stessi argomenti con cui si è provato il teorema 1.2, valgono a provare anche il seguente:

TEOREMA 1.4. *Sia X uno spazio di Hilbert reale separabile. Esiste un operatore* $\mathrm{T} : \mathrm{S}_r \subset \mathrm{X} \to$ *tale che*:

i) T *è una* (α) *k-set contraction con* $k < 1$;

ii) I–T *è A-proprio*;

iii) T *non verifica le proprietà* (a) *e* (7) *dell'introduzione.*

2. COINCIDENZA DEI GRADI DI I–T QUANDO T È COMPATTO

Nel paragrafo precedente abbiamo dimostrato che non esiste alcun legame fra gli operatori verificanti le condizioni (a) e (b), ovvero (a) e (7), le (α) k-set contractions ($k < 1$) e gli operatori A-propri.

In modo più semplice si può dimostrare che sono indipendenti fra loro anche le nozioni di operatore compatto e di operatore verificante le proprietà (a) e (b).

A tal proposito basta osservare che l'operatore F del teorema 1.2 è compatto ma non è debolmente chiuso, mentre la contrazione $\mathrm{U}(x) = -1/3\, x$ rappresenta un esempio banale di un operatore limitato, finitamente continuo, debolmente chiuso e verificante la proprietà di divaricazione (b), che non è compatto.

(2) Questa non è altro che la condizione (7) dell'introduzione quando l'applicazione $\varphi : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathrm{R}$ di Muni-Mininni si assuma coincidente col prodotto scalare.

A questo punto sorge spontaneo chiedersi quale relazione ci sia fra i diversi « gradi topologici » di un operatore $I-T : S_r \subset X \to X$ (X spazio di Hilbert reale separabile) allorché T rientri in più di una delle classi di operatori per cui ha senso la definizione di grado.

Ricordiamo che tale problema, per le (α) k-set contractions e gli operatori A-propri è già stato studiato in [4] e [6].

Si pone, ovviamente, il problema di vedere che cosa succede quando T è limitato, finitamente continuo, debolmente chiuso e verificante la condizione di divaricazione (b) ed inoltre I–T è A-proprio.

Diciamo subito che, nelle sole ipotesi ora dette, la questione si presenta di non facile soluzione e resta tuttora aperta.

La situazione è, invece, del tutto chiara sotto l'ipotesi aggiuntiva che T sia compatto; in questo caso infatti è possibile affermare che i gradi di I–T secondo [1] e [2] coincidono entrambi con quello di Leray-Schauder.

Si dimostra il seguente teorema:

TEOREMA 2.1. *Siano* X *uno spazio di Hilbert reale separabile*, $(\{X_n\}, \{Q_n\})$ *uno schema di approssimazione da* X *ad* X *e* T *un operatore definito nella sfera chiusa* $S_r \subset X$ *ed a valori in* X. *Allora, se* T *è compatto, debolmente chiuso e verificante la condizione di divaricazione* (b) *si ha*:

$$d(I-T\,;S_r\,;0) = d(I-T\,;S_r\,;0) = d^*(I-T\,;S_r\,;0)$$

(d^* *ha senso per* I–T *in quanto, essendo* T *compatto,* I–T *è* A-*proprio rispetto a qualunque schema di approssimazione*).

Dimostrazione. Poiché I–T è A-proprio, esistono sicuramente (cfr. [2], pag. 220, lemma 1) un indice $n_0 \geq 1$ ed un numero $d > 0$ tali che:

$$\| Q_n(I-T)(x) - Q_n(0) \| \geq d > 0 \qquad \forall n \geq n_0\,, \forall x \in \partial S_r^n = \partial(S_r \cap X_n)\,.$$

Pertanto, $\forall n \geq n_0$, ha senso considerare il grado topologico:

$$d(Q_n(I-T)\,;S_r^n\,;Q_n(0)) = d(I - Q_n T\,;S_r^n\,;0)$$

dove $S_r^n = S_r \cap X_n$ e $Q_n(0) = 0$ poiché ogni Q_n è lineare.

Inoltre, come è noto, il grado di Leray-Schauder $d(I-T\,;S_r\,;0)$ non dipende dalla scelta degli operatori convergenti uniformemente a T secondo la norma. D'altra parte, essendo T compatto, il grado $d^*(I-T\,;S_r\,;0)$ (nel senso di Browder-Petryshyn) dell'operatore A-proprio I–T, si riduce all'unico valore $d(I-T\,;S_r\,;0)$ (cfr. [3], pag. 643, teorema 2): e quaesto qualunque sia lo schema di approssimazione $(\{X_n\}, \{Q_n\})$. Pertanto $d^*(I-T\,;S_r\,;0)$ risulta indipendente dalla particolare scelta della successione di proiettori $\{Q_n\}$. Se, cioè, $\{\tilde{Q}_n\}$ è una diversa successione di proiettori e $\tilde{d}^*(I-T\,;S_r\,;0)$ è il grado di Browder-Petryshyn associato allo schema di approssimazione $(\{X_n\}, \{\tilde{Q}_n\})$, si ha:

$$\tilde{d}^*(I-T\,;S_r\,;0) = d(I-T\,;S_r\,;0) = d^*(I-T\,;S_r\,;0)\,.$$

Questa circostanza ci autorizza a supporre che la successione di proiettori data nell'enunciato coincida con una qualunque successione di proiettori $\{Q_n\}$ scelta in modo conveniente.

Orbene, nel teorema 1.1 del paragrafo precedente abbiamo visto che ogni X_n può essere considerato come il sottospazio di dimensione finita n, generato dai primi n elementi di un opportuno sistema ortonormale completo $\{e_i\}$.

Ebbene, definiamo la successione di proiettori $\{Q_n\}$ al modo seguente: per ogni $x = \sum_1^\infty x_i e_i = \sum_1^\infty (x, e_i) e_i \in X$, poniamo, $\forall n : Q_n(x) = \sum_1^n x_i e_i$.

I Q_n così definiti verificano tutte le proprietà richieste, ed è ad essi che ci riferiremo nel seguito.

Per una proprietà della successione $\{Q_n\}$ si ha:

$$\lim_n \| Q_n T(x) - T(x) \| = 0 \qquad \forall x \in S_r \tag{2.1}$$

e quindi, essendo $T(S_r)$ un insieme compatto, si ha anche:

$$\lim_n \| Q_n T(x) - T(x) \| = 0 \qquad \text{uniformemente in } S_r\,. \tag{2.2}$$

Dimostriamo la (2.2). Fissato un qualunque $\varepsilon > 0$ è possibile ricoprire $T(S_r)$ con un numero finito p di sfere con centro in un punto di $T(S_r)$ e raggio ε: indichiamo con $S_{(T(x_i), \varepsilon)}$, $i = 1, \cdots, p$, tali sfere.

Per la (2.1), in corrispondenza di ogni i esiste un indice ν_i, tale che:

$$\forall n \geq \nu_i \qquad \| Q_n T(x_i) - T(x_i) \| < \varepsilon\,;$$

detto allora ν il più grande dei ν_i, ed osservando che $\{Q_n\}$ è uniformemente limitata grazie al teorema di Banach-Steinhaus, si ha che: $\forall n \geq \nu$ e $\forall x \in S_r$:

$$\| Q_n T(x) - T(x) \| \leq \| Q_n T(x) - Q_n T(x_i) \| + \| Q_n T(x_i) - T(x_i) \| +$$
$$+ \| T(x_i) - T(x) \| < \| Q_n \| \quad \| T(x) - T(x_i) \| + \varepsilon + \varepsilon < (\sup_n \| Q_n \| + 2)\, \varepsilon$$

dove, per ogni x, x_i è scelto in modo tale che $T(x) \in S_{(T(x_i), \varepsilon)}$.

Dalle disuguaglianze precedenti segue la (2.2).

Si ha inoltre:

$$\lim_n \rho(Q_n T(x), T(x)) = 0 \qquad \text{uniformemente in } S_r\,; \tag{2.3}$$

dove $\rho(x, y)$ è la metrica introdotta in [1].

Infatti, fissato un qualunque $\varepsilon > 0$ si ha, per la (2.2):

$$\exists \nu : \forall n \geq \nu \quad \text{e} \quad \forall x \in S_r : \| Q_n T(x) - T(x) \| < \varepsilon\,;$$

ed allora ricordando che la funzione numerica $f(t) = \dfrac{t}{1+t}$ è crescente in

$[0, +\infty[$, si ha anche:

$$\rho(Q_n T(x), T(x)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\langle x'_k, Q_n T(x) - T(x)\rangle|}{1 + |\langle x'_k, Q_n T(x) - T(x)\rangle|} \leq$$ [3]

$$\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|x'_k\| \, \|Q_n T(x) - T(x)\|}{1 + \|x'_k\| \, \|Q_n T(x) - T(x)\|} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \quad \forall n \geq \nu$$

Da ciò segue la (2.3).

Consideriamo ora gli operatori $T_n : S_r \to X_n$, costruiti in [1] (pag. 17) per definire il grado topologico.

Per essi si ha:

$$(2.4) \quad \begin{cases} \lim_n \rho(T_n(x), T(x)) = 0 & \text{uniformemente in } S_r \\ \forall n, \forall x \in S_r & T_n(x) \in \{0\} \cup S_R^+(T(x)) \ ^{(4)} \\ \forall n, \forall x \in \partial S_r & T_n(x) \neq x . \end{cases}$$

D'altra parte queste stesse proprietà valgono anche per la successione $\{Q_n T\}$ considerata prima. Infatti la seconda delle (2.4) discende dal fatto che, posto $T(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i e_i$, o risulta $Q_n T(x) = 0$, oppure:

$$(Q_n T(x), T(x)) = \left(\sum_1^n \alpha_i e_i, \sum_1^{+\infty} \alpha_i e_i\right) = \sum_1^n \alpha_i^2 > 0$$

e quindi, in ogni caso $Q_n T(x) \in \{0\} \cup S_R^+(T(x)) \quad \forall x \in S_r$.

Da ciò e dalla proprietà di divaricazione di T discende che

$$Q_n T(x) \neq x \quad , \quad \forall n \in N \quad e \quad \forall x \in \partial S_r .$$

La prima delle (2.4) invece non è altro che la (2.3).

Indicate ora con T'_n e $Q_n T$ le restrizioni a S_r degli operatori omonimi, consideriamo le seguenti omotopie di trasformazioni:

$$\forall t \in [0, 1], \forall x \in S_r \qquad H_n(x, t) = t T_n(x) + (1-t) Q_n T(x) .$$

Poiché $(x, T(x)) < 0$, $\forall x \in \partial S_r$, e poiché $T_n(x), Q_n T(x) \in \{0\} \cup S_R^+(T(x))$, $\forall x \in S_r$, per la convessità dell'insieme $\{0\} \cup S_R^+(T(x))$ si ha:

$$\forall n, H_n(x, t) \in \{0\} \cup S_R^+(T(x)) \quad , \quad \forall x \in S_r^n \quad e \quad \forall t \in [0, 1] .$$

Quindi, $\forall n$, $H_n(x, t) \neq x \; \forall x \in \partial S_r^n$ e $\forall t \in [0, 1]$.

Allora, per l'invarianza sotto omotopia del grado topologico negli spazi euclidei si ha:

$$d(I - T_n ; S_r^n ; 0) = d(I - Q_n T ; S_r^n ; 0) \qquad \forall n \in N$$

(3) $\{x'_k\}$ è una successione densa in $S'_1 = \{x' \in X' : \|x'\|_{X'} \leq 1\}$ quindi $\|x'_k\| \leq 1$, $\forall k$.

(4) Indicata con S_R la sfera, con centro nell'origine e raggio R, contenente $T(S_r)$ ricordiamo che: $S_R^+(T(x)) = \{y \in S_R : (y, T(x)) > 0\}$.

e quindi anche:

$$\bar{d}(\mathrm{I{-}T}\,;\mathrm{S}_r\,;0)=d^*(\mathrm{I{-}T}\,;\mathrm{S}_r\,;0)\,.$$

Ma il secondo membro, come già abbiamo notato, è uguale al grado di Leray-Schauder $d(\mathrm{I{-}T}\,;\mathrm{S}_r\,;0)$ e quindi il teorema è dimostrato.

È bene osservare che dall'ipotesi di compattezza, fatta nel teorema precedente, discende che T è una (α) k-set contraction, con $k<1$, ed allora, (cfr. [6], pag. 618) anche il grado $d'(\mathrm{I{-}T}\,;\mathrm{S}_r\,;0)$ nel senso di Nussbaum coincide con $d^*(\mathrm{I{-}T}\,;\mathrm{S}_r\,;0)$.

Il teorema 2.1 si può estendere al caso in cui, ferme restando tutte le altre assunzioni, si supponga che T, in luogo della (*b*), verifichi la condizione (7) dell'introduzione [con φ coincidente col prodotto scalare]:

TEOREMA 2.2. *Siano* X *uno spazio di Hilbert reale separabile*, $(\{\mathrm{X}_n\}\,,\{\mathrm{Q}_n\})$ *uno schema di approssimazione da* X *ad* X *e* T *un operatore definito nella sfera chiusa* $\mathrm{S}_r\subset\mathrm{X}$ *a valori in* X. *Allora, se* T *è compatto, debolmente chiuso e tale che*: $(x\,,\mathrm{T}(x))\le 0\,,\ \ \forall x\in\partial\mathrm{S}_r$, *si ha*:

$$d(\mathrm{I{-}T}\,;\mathrm{S}_r\,;0)=\bar{d}(\mathrm{I{-}T}\,;\mathrm{S}_r\,;0)=d^*(\mathrm{I{-}T}\,;\mathrm{S}_r\,;0)\,.$$

Dimostrazione. Poiché I–T è A-proprio sappiamo che $\exists n_0\ge 1$ tale che, $\forall n\ge n_0$, ha senso considerare il grado topologico $d(\mathrm{I}-\mathrm{Q}_n\mathrm{T}\,;\mathrm{S}_r^n\,;0)$.

Inoltre, per le stesse considerazioni fatte nel teorema precedente possiamo supporre che, $\forall n\,,\mathrm{Q}_n$ sia il proiettore lineare che ad ogni

$$x=\sum_1^\infty \alpha_i e_i=\sum_1^\infty (x\,,e_i)\,e_i\in\mathrm{X}\qquad\text{associa}\quad \mathrm{Q}_n(x)=\sum_1^n \alpha_i e_i\,.$$

Dalla (2.2) segue immediatamente:

$$(2.5)\qquad \forall z\in\mathrm{X}\quad \lim_n|(z\,,\mathrm{Q}_n\mathrm{T}(x)-\mathrm{T}(x))|=0\quad \text{uniformemente in } \mathrm{S}_r\,.$$

Consideriamo ora l'insieme:

$$\mathrm{V}=\{y\in\mathrm{X}:|(\bar{z}\,,y)|<\sigma\}$$

dove $\bar{z}$ è un fissato elemento di X e $\sigma\in\,]0\,,+\infty[$.

Come facilmente si vede V è un intorno aperto convesso ed equilibrato dell'origine nella topologia debole di X.

Allora da (2.5) segue che:

$$\exists\nu:\forall n\ge\nu\qquad |(\bar{z}\,,\mathrm{Q}_n\mathrm{T}(x)-\mathrm{T}(x)|<\sigma\qquad \forall x\in\mathrm{S}_r$$

e quindi

$$(2.6)\qquad \forall n\ge\nu\qquad (\mathrm{Q}_n\mathrm{T}(x)-\mathrm{T}(x))\in\mathrm{V}\,,\qquad \forall x\in\mathrm{S}_r\,.$$

Inoltre si ha:

$$(2.7)\qquad (\mathrm{Q}_n\mathrm{T}(x)\,,\mathrm{T}(x))=\sum_1^n\alpha_i^2>0\qquad \forall x\in\mathrm{S}_r:\mathrm{Q}_n\mathrm{T}(x)\ne 0\,.$$

In base a (2.6) e (2.7) possiamo asserire che, $\forall n \geq \nu$, l'applicazione $\Psi = Q_n$ soddisfa, in corrispondenza dell'intorno V fissato e dell'insieme compatto (e quindi debolmente compatto $T(S_r)$), le proprietà (1), (2), (3) del lemma 1 dell'introduzione.

Ma allora, poiché in [10] il grado topologico $d(I-T ; S_r ; 0)$ è definito uguale a $d(I - \Psi \circ T/S_r^n ; S_r^n ; 0)$ [e risulta indipendente da V, Ψ e $C \supseteq T(S_r)$: vedi introduzione], in particolare si ha:

$$d(I-T ; S_r ; 0) = d(I - Q_n T/S_r^n ; S_r^n ; 0) \ \forall n \geq \nu .$$

Da ciò consegue ovviamente:

$$d(I-T ; S_r ; 0) = d^*(I-T ; S_r ; 0) = d(I-T ; S_r ; 0)$$

come si voleva dimostrare.

In conclusione diamo un esempio di operatore T compatto verificante le ipotesi del teorema 2.2.

Siano X uno spazio di Hilbert reale separabile, $\{e_n\}$ un sistema ortonormale completo ed S_1 la sfera con centro nell'origine e raggio 1.

Consideriamo il seguente operatore:

$$T : S_1 \to X \quad , \quad T(x) = -\rho(x)(x, e_1)e_1$$

dove

$$\rho(x) = \begin{cases} 1-(x, e_1)^2 & \text{se } |(x, e_1)| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |(x, e_1)| > 1 . \end{cases}$$

T è fortemente continuo [5] in quanto se $\{x_n\} \subseteq S_1$ è una successione convergente debolmente a un punto $x \in S_1$, si ha:

$$(x_n , e_1) \to (x , e_1) ,$$

quindi

$$\rho(x_n) \to \rho(x)$$

e da ciò segue che $\{T(x_n)\}$ converge a $T(x)$ in norma.

Essendo fortemente continuo T è anche compatto (cfr. [7], pag. 48) e debolmente continuo.

Inoltre si ha:

$$(x , T(x)) = -\rho(x)(x, e_1)^2 \leq 0 \ \forall x \in \partial S_1 ,$$

e quindi tutte le ipotesi del teorema 2.2 risultano verificate.

(5) Un operatore $F : M \subset X \to Y$ (X e Y spazi di Banach) si dice fortemente continuo se per ogni successione $\{x_n\} \subset M$ convergente debolmente a $x_0 \in M$ si ha che $\{F(x_n)\}$ converge a $F(x_0)$ secondo la norma dello spazio Y.

Bibliografia

[1] A. Canfora – *La teoria del grado topologico per una classe di operatori non compatti in spazi di Hilbert*, in corso di stampa su «Ricerche di Matematica».

[2] F. E. Browder e W. V. Petryshyn (1969) – *Approximation methods and the generalized topological degree for nonlinear mappings in Banach spaces*, «J. Functional Analysis», 3, 217–245.

[3] F. E. Browder e W. V. Petryshyn (1968) – *The topological degree and Galerkin approximations for non compact operators in Banach spaces*, «Bull. Amer. Math. Soc.», 74, 641–656.

[4] R. D. Nussbaum (1971) – *The fixed point index for local condensing maps*, «Ann. Mat. Pura Appl.», IV Ser., 89, 217–258.

[5] R. D. Nussbaum (1974) – *On the uniquenes of the topological degree for k-set contraction*, «Math. Z.», 137, 1–6.

[6] J. R. L. Webb (1971) – *Remarks on k-set contractions*, «Bollettino U.M.I.» (4) 4, 614–629.

[7] S. Fucik, J. Necas e J. Soucek (1973) – *Spectral Analysis of nonlinear operators*, Springer Berlin.

[8] C. Miranda (1975) – *Problemi di esistenza in Analisi Funzionale*, Scuola Normale Superiore, Pisa.

[9] M. Schechter (1971) – *Principles of Functional Analysis*, Academic Press, New York.

[10] G. Muni e M. Mininni – *A degree tehory with respect to a pseudo inner product in a locally convex vector space*, di prossima pubblicazione su «Ricerche di Matematica».