ANGELO ALVINO e GUIDO TROMBETTI (*)

Alcune osservazioni su una classe di equazioni integrali non lineari (**)

In un recente lavoro Ambrosetti e Prodi [1] hanno stabilito un importante risultato relativo all'inversione di una trasformazione non lineare e ne hanno fatto applicazione al problema di Dirichlet per un'equazione del tipo

$$\Delta u + f[u] = g .$$

In questa nota vogliamo far vedere che, in opportune ipotesi, si possono svolgere considerazioni analoghe per lo studio di equazioni integrali non lineari del tipo:

$$u(x) = \int_T K(x, y) f(u(y)) \, dy + g(x) . \tag{0}$$

Il risultato ottenuto può essere utile talvolta nello studio di problemi al contorno relativi ad equazioni ellittiche anche di ordine superiore.

Il n. 1 è dedicato al richiamo di alcune nozioni relative ad una classe di equazioni integrali lineari; il n. 2 all'applicazione del teorema di Ambrosetti e Prodi allo studio dell'equazione (0); il n. 3 alle possibili applicazioni ai problemi al contorno.

1. Richiami di nozioni sulle equazioni integrali lineari

Sia $K(x, y)$ un nucleo reale definito in $T \times T$, con T aperto limitato di R^n. Consideriamo la trasformazione:

$$A\psi = \int_T K(x, y) \psi(y) \, dy \tag{1.1}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni presso l'Istituto di Matematica dell'Università di Napoli.

(**) Memoria presentata dal Vice-Presidente dell'Accademia Carlo Miranda il 20 dicembre 1978.

e sia

i) $K \in N^{\alpha}$ (1);

ii) K è simmetrico e definito positivo;

iii) la (1.1) è completamente continua da L^2 in sè.

Vogliamo fornire alcuni esempi di classi di equazioni del tipo (1.1) che verificano la *iii*).

Si ha

TEOREMA 1.1. *Se* $\alpha > n/4$ *e* $K \in N^{\alpha}$ *è verificata la iii*).

Osserviamo che se $\alpha > n/2$ si ha $K \in L^2(T \times T)$ e quindi la (1.1) è completamente continua per noti risultati. Per completare la dimostrazione del teorema premettiamo il seguente

LEMMA 1.1. *Nelle ipotesi del teorema* 1.1, *se* $\{\psi_n\}$ *è una successione limitata in* $L^2(T)$ *si può estrarre da essa una successione* $\{\psi_{n_k}\}$ *tale* $\{A(\psi_{n_k})\}$ *converga in misura.*

Se $\{\psi_n\}$ è limitata in L^2 si potrà estrarre da essa una successione $\{\psi_{n_k}\}$ debolmente convergente. Supponiamo per comodità, ciò che non lede ovviamente le generalità,

$$\psi_{n_k} \rightharpoonup 0 . \tag{1.2}$$

Se la successione $\{A\psi_{n_k}\}$ non convergesse in misura esisterebbero un $\varepsilon > 0$ ed un $\sigma > 0$ e una successione estratta dalla precedente, che indicheremo ancora con $\{\psi_{n_k}\}$ tale che

$$\operatorname{mis}\left\{ x \in T : \left| \int_T K(x,y)\,\psi_{n_k}(y)\,dy \right| \geq \varepsilon \right\} > \sigma \qquad \forall k \in N .$$

Posto:

$$E_{n_k} = \left\{ x \in T : \left| \int_T K(x,y)\,\psi_{n_k}(y)\,dy \right| \geq \varepsilon \right\}$$

si ha

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \sigma &< \int_{E_{n_k}} dx \left(\int_T K(x,y)\,\psi_{n_k}(y)\,dy \right)^2 \leq \\ &\leq \int_T \psi_{n_k}(t)\,dt \int_T \psi_{n_k}(y)\,dy \int_T K(x,y)\,K(x,t)\,dx . \end{aligned} \tag{1.3}$$

D'altro canto riesce: $U(y,t) = \int_T K(x,y)\,K(x,t)\,dx \in N^{2\alpha}$ e quindi, poiché $\alpha > n/4$, $U(y,t) \in L^2(T \times T)$.

(1) Per la definizione e le principali proprietà dei nuclei N^{α} cfr. [2].

Allora, essendo per quasi tutti i t, $\mathrm{U}(y, t) \in \mathrm{L}^2(\mathrm{T})$ si ha dalla (1.2)

$$\lim_k \int_{\mathrm{T}} \psi_{n_k}(y)\, \mathrm{U}(y, t)\, \mathrm{d}y = 0 \qquad \text{q.o. in T}.$$

Osserviamo che

$$\int_{\mathrm{E}} \mathrm{d}t \left(\int_{\mathrm{T}} \psi_{n_k}(y)\, \mathrm{U}(y, t)\, \mathrm{d}y \right)^2 \leq \int_{\mathrm{E}} \left[\int_{\mathrm{T}} \psi_{n_k}^2\, \mathrm{d}y \cdot \int_{\mathrm{T}} \mathrm{U}^2(y, t)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}t$$

$$\leq \mathrm{C} \int_{\mathrm{E}} \left[\int_{\mathrm{T}} \frac{\mathrm{M}}{|y - t|^{2(n-\alpha)}}\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}t \leq \mathrm{MC} \text{ mis E} \sup_t \int \frac{\mathrm{d}y}{|y - t|^{2(n-\alpha)}}$$

dove

$$\| \psi_{n_k} \|_{\mathrm{L}^2}^2 \leq \mathrm{M}$$

e quindi si ha l'equiassoluta continuità degli integrali di

$$\left(\int_{\mathrm{T}} \psi_{n_k}(y)\ \mathrm{U}(y, t)\ \mathrm{d}y \right)^2.$$

Quindi:

$$\mathrm{L}^2 - \lim_k \int_{\mathrm{T}} \psi_{n_k}(y)\ \mathrm{U}(y, t)\, \mathrm{d}y = 0 . \tag{1.4}$$

Dalla (1.3) intanto si ha:

$$\varepsilon^2 \sigma < \left(\int_{\mathrm{T}} \psi_{n_k}^2(t)\, \mathrm{d}t \right)^{1/2} \left(\int_{\mathrm{T}} [\psi_{n_k}(y)\ \mathrm{U}(y, t)]^2\, \mathrm{d}y \right)^{1/2}.$$

Da qui e dalla (1.4) segue l'asserto.

Dimostrazione del teorema 1.1. Sia adesso $\{\psi_n\}$ una successione limitata in L^2. Per quanto visto sopra possiamo supporre che $\{\mathrm{A}\psi_n\}$ stessa converge in misura.

Poiché $\mathrm{K} \in \mathrm{N}^\alpha$, per noti risultati, la (1.1) è continua da L^2 in L^r con

$$\begin{cases} 1/r = 1/2 - \alpha/n & \text{se } \alpha < n/2 \\ r \text{ qualsiasi} & \text{se } \alpha = n/2 ; \end{cases}$$

si ha

$$\| \mathrm{A}\psi_n \|_{\mathrm{L}^r} \leq \mathrm{M} \| \mathrm{A} \| .$$

Si ha

$$\int_E |A\psi_n|^2 \, dx \leq (M \| A \|)^r (\text{mis } E)^{(r-2)/r} \quad \text{con} \quad E \subset T$$

e da qui l'equiassoluta continuità di $\left\{ \int_E |A\psi_n|^2 \, dx \right\}$.

Quindi $\{A\psi_n\}$ converge in L^2.

Si ha ancora

TEOREMA 1.2. *Se* $K \in N^\alpha$ *e* $\dfrac{\partial K}{\partial x_i} \in N^{\alpha-1}$ *con* $\alpha > 1$ *la iii) è verificata.*

Poiché A è continua da $L^2(T)$ in sè si ha:

$$\| \psi_n \|_{L^2} \leq M \Rightarrow \| A\psi_n \|_{L^2} \leq M \| A \| .$$

D'altro canto, posto

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} A \right) \psi_n = \int_T \frac{\partial K}{\partial x_i} (x, y) \, \psi_n(y) \, dy$$

tale trasformazione è lineare e continua da $L^2(T)$ in sè. Quindi:

$$\left\| \left(\frac{\partial}{\partial x_i} A \right) \psi_n \right\|_{L^2} \leq M \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} A \right\|$$

ed allora $\{A\psi_n\}$ è limitata in $H^{1,2}(T)$; dal teorema di Rellich segue che la trasformazione è compatta in L^2.

Sia adesso $\rho(y)$ una funzione definita in T e tale che esistano due costanti c_1 e c_2 positive per cui si abbia:

$$0 < c_1 < \rho(y) < c_2 . \tag{1.5}$$

Osserviamo che la trasformazione

$$A_\rho \psi = \int_T K(x, y) \, \rho(y) \, \psi(y) \, dy \tag{1.6}$$

è ancora completamente continua da L^2 in sè.

Consideriamo nelle ipotesi *i*), *ii*), *iii*) l'equazione

$$\psi(x) = \lambda \int_T K(x, y) \, \rho(y) \, \psi(y) \, dy . \tag{1.7}$$

Questa è equivalente a

$$\sqrt{\rho(x)} \, \psi(x) = \lambda \int_T K_1(x, y) \sqrt{\rho(y)} \, \psi(y) \, dy \tag{1.8}$$

con $K_1(x, y) = \sqrt{\rho(x)} \sqrt{\rho(y)} \, K(x, y)$.

È immediato osservare che K_1 è reale, simmetrico, definito positivo. Osservato ciò si ha (cfr. [6]) che gli autovalori della (1.7) sono dati da:

$$(1.9)\qquad \frac{1}{\lambda_k} = \min_{\substack{(h_1,\cdots,h_{k-1})\\ h_i\in L^2}} \; \max_{\substack{\psi/\sqrt{\rho}\in L^2\\ \psi/\sqrt{\rho}\perp(h_1,\cdots,h_{k-1})}} \frac{\int_T\int_T K(x,y)\,\psi(x)\,\psi(y)\,dx\,dy}{\int_T \frac{\psi^2(x)}{\rho(x)}\,dx}.$$

Si hanno le seguenti proprietà (cfr. [6]):

1) $\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\cdots$ sono reali, positivi e formano una successione non decrescente tendente a $+\infty$;

2) λ_ν è funzione non crescente di $\rho(x)$; se $\rho_1(x)<\rho_2(x)$ q.o. in T, $\lambda_\nu^{(1)}>\lambda_\nu^{(2)}$, dove $\lambda_\nu^{(i)}$ è l'ennesimo autovalore relativo a $\rho_i(x)$;

3) se $\rho_n(x)\to\rho_0(x)$ q.o. si ha $\lim\limits_n \lambda_1^{(n)}=\lambda_1$ dove $\lambda_1^{(n)}$ è il primo autovalore relativo a $\rho_n(x)$ e λ_1 il primo autovalore relativo a $\rho_0(x)$.

La dimostrazione della 2) si consegue utilizzando la caratterizzazione (1.9) degli autovalori; la dimostrazione della 3) si ottiene osservando che, per il teorema di Lebesgue, posto

$$\Phi_n(v) = \frac{\int_T\int_T K(x,y)\,v(x)\,v(y)\,dx\,dy}{\int_T \frac{v^2(x)}{\rho_n(x)}\,dx}$$

si ha per ogni $v\in L^2$

$$\lim_n \Phi_n(v) = \Phi_0(v).$$

Se non fosse

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_1^{(n)}} = \lim_n \max_{L^2} \Phi_n(v) \neq \frac{1}{\lambda_1} = \max_{L^2} \Phi_0(v)$$

esisterebbe una successione $\{\lambda_{n_k}\}$ estratta da $\{\lambda_n\}$ tale che

$$\lim_k \lambda_{n_k} = l < \lambda_1.$$

Quindi è

$$(1.10)\qquad \int_T K(x,y)\,v_{n_k}(x)\,dx = \frac{1}{\lambda_{n_k}}\,\frac{v_{n_k}(y)}{\rho_{n_k}(y)}$$

con

$$\int_T \frac{v_{n_k}^2}{\rho_{n_k}}\, dy = 1 .$$

Osservato che:

$$c_1 \leq \int_T [v_{n_k}(y)]^2\, dy \leq c_2 \tag{1.11}$$

con c_1 e c_2 definite in (1.5), dalla completa continuità del nucleo segue che $\{v_{n_k}\}$ è compatta in L^2; si potrà quindi estrarre una successione che converge ad un limite, non nullo per la (1.11), in L^2. Passando al limite nella (1.10) si ha un assurdo.

Facciamo adesso sul nucleo la seguente ipotesi:

iv) $K(x, y) > 0$ q.o. in $T \times T$.

Si ha:

PROPOSIZIONE 1.1. *Nelle ipotesi ii), iii), iv) la prima autosoluzione di* (1.1) *è positiva q.o.*

Sia u_1 la prima autosoluzione della (1.1). Si ha:

$$\frac{1}{\lambda_1} = \max \frac{\int_T\int_T K(x, y)\, u(x)\, u(y)\, dx\, dy}{\int_T u^2\, dx} = \frac{\int_T\int_T K(x, y)\, u_1(x)\, u_1(y)\, dx\, dy}{\int_T u_1^2\, dx} . \tag{1.12}$$

Posto:

$$u_1^+(x) = \max(u_1(x), 0) \qquad u_1^-(x) = \min(u_1(x), 0)$$

riesce dalla (1.12)

$$\int_T\int_T K(x, y)\, u_1(x)\, u_1(y)\, dx\, dy = \frac{1}{\lambda_1}\int_T [u_1^+(x)]^2\, dx + \frac{1}{\lambda_1}\int_T [u_1^-(x)]^2\, dx ;$$

essendo:

$$\int_T\int_T K(x, y)\, u_1(x)\, u_1(y)\, dx\, dy = \int_T\int_T K(x, y)\, u_1^+(x)\, u_1^+(y)\, dx\, dy$$

$$+ \int_T\int_T K(x, y)\, u_1^-(x)\, u_1^-(y)\, dx\, dy + 2\int_T\int_T K(x, y)\, u_1^+(x)\, u_1^-(y)\, dx\, dy$$

ricordando che:

$$\frac{1}{\lambda_1}\int_T [u_1^+(x)]^2\,dx \geq \int_T\int_T K(x,y)\,u_1^+(x)\,u_1^+(y)\,dx\,dy$$

$$\frac{1}{\lambda_1}\int_T [u_1^-(x)]^2\,dx \geq \int_T\int_T K(x,y)\,u_1^-(x)\,u_1^-(y)\,dx\,dy$$

si ha:

$$\int_T\int_T K(x,y)\,u_1^+(x)\,u_1^-(y)\,dx\,dy \geq 0\,.$$

D'altro canto è anche per la *iii*):

$$\int_T\int_T K(x,y)\,u^+(y)\,u^-(x)\,dx\,dy \leq 0\,.$$

Quindi dovrà aversi q.o. in T:

$$u_1^-(x) = 0 \qquad \text{oppure} \qquad u_1^+(x) = 0\,;$$

ne segue che $u(x) \geq 0$ (≤ 0) q.o. in T.

D'altro canto si ha che:

$$\text{mis}\,\{x \in T : u(x) = 0\} = 0\,;$$

infatti per quasi tutti gli $x \in T$, $K(x,y) > 0$ q.o. (come funziona di y); dovendo aversi:

$$u_1(x) = \lambda_1 \int_T K(x,y)\,u_1(y)\,dy$$

sarà $u_1(x) > 0$ q.o. in T.

Osservazione I. Osservato che se K verifica le ipotesi *ii*), *iii*), *iv*) il nucleo K_1 nella (1.8) le verifica anch'esso si ricava che la prima autosoluzione della (1.7) è positiva q.o. in T.

Osservazione II. Dalla positività della prima autosoluzione discende che il primo autovalore della (1.7) è semplice.

Osservazione III. Nell'ipotesi $\alpha > n/p$ la trasformazione (1.1), e quindi la (1.6), risulta completamente continua da L^p in sè; infatti riesce $K \in L^q(T \times T)$ con $1/p + 1/q = 1$ e per il teorema 72.XI di [2] la (1.1) è completamente continua da L^p in L^q. Quindi se $\{\psi_n\}$ è una successione limitata in L^p si può da essa estrarre una successione $\{\psi_{n_k}\}$ tale che $\varphi_{n_k} = \int_T K(x,y)\,\psi_{n_k}(y)\,dy$ converga in misura. D'altro canto, per il teorema 72.I di [2] la (1.1) è continua da L^p in C^0 e si ha che

$$\sup_T |\varphi_{n_k}| \leq M\,.$$

Quindi:

$$\int_E |\varphi_{n_k}|^p \, dx \leq (M)^p \operatorname{mis} E \quad , \quad \forall E \subset T$$

e da qui l'equiassoluta continuità degli integrali

$$\int_E |\varphi_{n_k}|^p \, dx \, ;$$

ne segue che la successione $\{\varphi_{n_k}\}$ converge in L^p.

Osservazione IV. È facile verificare che le autosoluzioni della (1.1) sono funzioni continue (cfr. teorema 72.1 [2]); ne segue che se, ad esempio nella ipotesi $\alpha > n/p$, *i*), *ii*), *iii*), *iv*) si considera la (1.1) (o la (1.6)) con una trasformazione da L^p in sè le proprietà degli autovalori e delle autosoluzioni da noi precedentemente dimostrate continuano a sussistere.

2. Un teorema su una equazione integrale non lineare

Sia $f(t)$ una funzione reale di classe $C^2(R)$ soddisfacente le seguenti ipotesi:

1) $f(0) = 0$;
2) $f''(t) > 0 \quad \forall t$;
3) $\lim_{t \to +\infty} f'(t) = l'$, $\lim_{t \to -\infty} f'(t) = l''$ con $0 < l' < \lambda_1 < l'' < \lambda_2$;
4) $f''(t)$ è limitata in R.

λ_1 e λ_2 sono il primo e il secondo autovalore dell'equazione

$$u(x) = \lambda \int_T K(x, y)\, u(y)\, dy \, . \tag{2.0}$$

Consideriamo la trasformazione

$$u(x) = \int_T K(x, y)\, f[u(y)]\, dy + g(x) \, . \tag{2.1}$$

Si dimostra il seguente

Teorema 2.1. *Sia* T *un aperto di* R^n *limitato e connesso; nelle ipotesi* 1), 2), 3), 4) *e se* $K(x, y)$ *verifica le ipotesi* i), ii), iii), iv) *del n.* 1 *per ogni* $p > n/\alpha$ *e* ≥ 2 *la trasformazione* (2.1) *considerata da* L^p *in sé, è tale che esiste in* L^p *una varietà* (2) M *di classe* C^1, *per cui si verifica che* $L^p - M$ *si divide in due com-*

(2) Un insieme M contenuto in uno spazio di Banach X è detto « varietà di classe C^k » se per ogni $u_0 \in M$ esiste un intorno U di u_0 e un funzionale (di classe C^k) $\Gamma : U \to R$ tale che
- $\Gamma'(u_0) \neq 0$
- $M \cap U = \{u : u \in U, \Gamma(u) = 0\}$.

Qui per « applicazione di classe C^k (fra due spazi di Banach X e Y) » si intende un'applicazione di $A \subset X$ in Y tale che la sua r-ma derivata $(1 \leq r \leq k)$ sia un'applicazione continua da A nell'insieme delle applicazioni r-lineari di X in Y.

ponenti connesse A_1 *ed* A_2 *con le seguenti proprietà:*

se $g(x) \in A_1$ *la* (2.1) *ha due soluzioni;*

se $g(x) \in A_2$ *la* (2.1) *non ha soluzioni;*

se $g(x) \in M$ *la* (2.1) *ha un'unica soluzione.*

La dimostrazione si ottiene da un teorema di Ambrosetti e Prodi (cfr. [1], teorema 2.11) (3) quando si sia dimostrato che l'applicazione

$$\Phi : u \in L^p \to u - \int_T K(x, y) f[u(y)] \, dy$$

è di classe C^2 (4) e

A) Φ è propria;

B) l'insieme dei punti singolari W di Φ è non vuoto, chiuso e connesso ed inoltre ogni suo punto è singolare ordinario (5);

C) se $g \in \Phi(W)$ il problema ha un'unica soluzione.

La dimostrazione di queste proprietà si ottiene procedendo come in [1] salvo alcune modifiche; ne daremo perciò solo un rapido cenno.

Per dimostrare la A) cominciamo a far vedere che se la successione $g_n = \Phi(u_n)$ è limitata in L^p tale è anche u_n.

Supponiamo per assurdo che esiste una successione estratta da u_n che indicheremo ancora con u_n, tale che

$$\lim_n \| u_n \|_{L^p} = +\infty .$$

Posto

$$z_n = \frac{u_n}{\| u_n \|_{L^p}} \quad \text{e} \quad h(t) = \begin{cases} f(t)/t & \text{se} \quad t \neq 0 \\ f'(0) & \text{se} \quad t = 0 \end{cases}$$

si ha

$$g_n / \| u_n \|_{L^p} = z_n - \int_T K(x, y) \, h(u_n) \, z_n(y) \, dy . \tag{2.2}$$

(3) Data un'applicazione $\Phi : A \subset X \to Y$ di classe C^k con $k \geq 2$, diremo che u_0 è un *punto singolare ordinario* se:

I) $\Phi'(u_0)$ ha nucleo di dimensione 1 e immagine di codimensione 1;

II) Se $v_0 \in X$ è un vettore non nullo tale che $\Phi'(u_0) v_0 = 0$ e γ_0 è un funzionale su Y tale che $\mathrm{Im}(\Phi'(u_0)) = \{z : \langle z, \gamma_0 \rangle = 0\}$ allora

$$\langle \Phi''(u_0)[v_0][v_0], \gamma_0 \rangle \neq 0 .$$

Sussiste il seguente risultato (cfr. [1] Teorema 2.11): Sia $\Phi : A \to Y$ un'applicazione di classe C^k con $k \geq 2$ ed $u_0 \in A$ un punto singolare ordinario. Allora detto z un vettore trasversale a $\Phi(w)$ in $y_0 = \Phi(u_0)$ esiste un intorno U di u_0 ed un $\varepsilon \in R$ tali che:

a) $\forall y \in]y_0, y_0 + \varepsilon z]$ l'equazione $\Phi(u) = y$ ha due soluzioni in U;

b) $\forall y \in]y_0, y_0 - \varepsilon z]$ l'equazione $\Phi(u) = y$ non ha soluzioni in U.

(4) Cfr. nota (2).

(5) Cfr. nota (3).

Essendo $\{h(u_n) z_n\}$ limitata in L^p la successione

$$\int_T K(x, y) h(u_n) z_n(y) dy$$

è compatta in L^p in forza dell'osservazione III; ne segue che da $\{z_n\}$ si potrebbe estrarre una successione – e sia ancora $\{z_n\}$ – convergente verso un elemento z^* di L^p, con $\|z^*\|_{L^p} = 1$. Quindi $z_n \to z^*$ (a meno di successioni estratte) in $T - T_0$ con mis $T_0 = 0$; ne consegue

$$u_n(x) \to +\infty \quad \text{se} \quad z^*(x) > 0$$
$$u_n(x) \to -\infty \quad \text{se} \quad z^*(x) < 0$$

per cui posto

$$a(x) = \begin{cases} l' & x \in T - T_0 \quad \text{e} \quad z^*(x) < 0 \\ l'' & x \in T - T_0 \quad \text{e} \quad z^*(x) > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

si ha

$$\lim_n h(u_n(x)) z_n(x) = a(x) z^*(x) \qquad \text{in} \quad T - T_0 .$$

Passando al limite nella (2.2) si ricava

$$0 = z^* - \int_T K(x, y) a(y) z^*(y) dy . \tag{2.3}$$

Confrontando la (2.3) con l'equazione

$$z(x) - \mu\lambda_2 \int_T K(x, y) z(y) dy = 0$$

che ha $\mu = 1$ come secondo autovalore e giacché $a(y) < \lambda_2$ si ha, dalla 2) del n. 1, che $\mu = 1$ è il primo autovalore di

$$z(x) - \mu \int_T K(x, y) a(y) z(y) dy . \tag{2.4}$$

Dalla proposizione 1.1 si ha che z^* non cambia segno e quindi $a(x)$ è q.o. uguale ad l' o ad l'' e ciò è assurdo perché né l' né l'' sono autovalori della (2.0).

Sia ora $g_n = \Phi(u_n)$ una successione convergente in L^p; per quanto visto prima $\{u_n\}$ è limitata in L^p; dalla (2.1) per la compattezza di K discende la compattezza di $\{u_n\}$ e con ciò l'asserto.

Che la trasformazione sia di classe C^2 si ottiene osservando che

$$\Phi'(u)[v] = v - \int_T K(x, y) f'[u(y)] v(y) \, dy$$

$$\Phi''(u)[v, w] = - \int_T K(x, y) f''[u(y)] v(y) w(y) \, dy .$$

La $\Phi'(u)$ è una trasformazione lineare in $v(x)$ da L^p in sè in forza del teorema 72.I di [2]; si ha poi la continuità della trasformazione

$$u \in L^p \to \Phi'[u] \in \mathscr{L}(L^p, L^p)$$

osservando che se la trasformazione non fosse continua esisterebbe una successione (u_n), convergente ad u_0 in L^p, da cui non è possibile estrarre alcuna successione $\{u_{n_k}\}$ tale che $\Phi'(u_{n_k}) \to \Phi'(u_0)$. D'altro canto dalla $\{u_n\}$ è possibile estrarre una successione $\{u_{n_k}\}$ convergente q.o. ad u_0 e si ha, applicando il teorema 72.I di [2] nel caso $\alpha > n/p$:

$$\| \Phi'(u_{n_k}) - \Phi'(u_0) \|_{\mathscr{L}(L^p, L^p)} =$$

$$= \sup_{\|v\|_{L^p} = 1} \left(\int_T \left| \int_T K(x, y) [f'(u_{n_k}) - f'(u_0)] v \, dx \right|^p dy \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq (\text{mis } T) \sup_{y \in T} \left| \int_T K(x, y) [f'(u_{n_k}) - f'(u_0)] v(x) \, dy \right| \leq$$

$$\leq C \left(\int_T | [f'(u_{n_k}) - f'(u_0)] v(x) |^p \, dx \right)^{1/p} .$$

Per il teorema di Lebesgue, si ha

$$\| \Phi'(u_{n_k}) - \Phi'(u_0) \|_{\mathscr{L}(L^p, L^p)} \to 0$$

e quindi un assurdo.

La $\Phi''(u)$ è una trasformazione bilineare di $L^p \times L^p$ in L^p in forza del teorema 72.I di [2] e della limitatezza di f'' quando si osservi che:

$$\left| \int_T K(x, y) f''[u(y)] v(y) w(y) \, dy \right| \leq C \left| \int_T K(x, y) v(y) w(y) \, dy \right| \in L^r$$

$$\text{con} \quad \begin{cases} r & \text{qualsiasi} \quad \text{se} \quad p/2 \geq n/\alpha \\ 1/r = 2/p - \alpha/n & \text{se} \quad p/2 < n/\alpha \end{cases}$$

e riesce $r > p$ se $\alpha > n/p$.

La dipendenza continua da u di $\Phi''(u)$ si ottiene ragionando in modo analogo al caso di $\Phi'(u)$.

Dimostriamo adesso B); intanto osserviamo che u_0 è un punto singolare se e solo se ammette soluzioni proprie l'equazione:

$$0 = z(x) - \int_T K(x,y) f'[u_0(y)] z(y) \, dy ;$$

d'altro canto essendo $\mu = 1$ il primo autovalore dell'equazione:

$$0 = z(x) - \mu \int_T K(x,y) f'[u_0(y)] z(y) \, dy$$

(cosa che si ricava dalla 2) del n. 1 e dalla ipotesi 3) e 2) come già in [1]), giacché il primo autovalore è semplice, il nucleo di $\Phi'(u_0)$ è generato da una autosoluzione v_0. Adesso sappiamo che $\Phi'(u_0)$ è una trasformazione di tipo Riesz in forza dell'ipotesi $\alpha > n/p$ che implica la compattezza del nucleo (cfr. osservazione III); quindi $\operatorname{Im} \Phi'(u_0)$ è costituita dalle funzioni $g(x)$ per cui riesce:

$$(g(x), V) = 0$$

per ogni V autosoluzione di

$$V - K^*(V) = 0$$

dove

$$K^*(V) = f'[u_0(x)] \int_T K(x,y) V(y) \, dy$$

è l'aggiunto di

$$K(v) = \int_T K(x,y) f'[u_0(y)] v(y) \, dy .$$

D'altro canto si ha

$$v_0(x) - \int_T K(x,y) f'[u_0(y)] v_0(y) \, dy = 0$$

e quindi, posto:

$$v_0(y) f'[u_0(y)] = W_0(y)$$

riesce:

$$W_0(x) - f'[u_0(x)] \int_T K(x,y) W_0(y) \, dy = 0$$

cioè W_0 è l'autosoluzione che genera il nucleo di $V - K^*(V)$.

Quindi in definitiva si ha:

$$g(x) \in \operatorname{Im} \Phi'[u_0] \Rightarrow \int_T g(x) f'[u_0(x)]\, v_0(x)\, dx = 0 .$$

A tal punto per concludere che u_0 è un punto singolare ordinario basta osservare che:

$$\iint_{T \times T} K(x, y) f''[u_0(y)]\, v_0^2(y)\, v_0(x) f'[u_0(x)]\, dx\, dy \neq 0$$

e ciò è evidente essendo $v_0 > 0$ in forza della proposizione 1.1 ed f' ed f'' positivi per ipotesi. Il resto della dimostrazione si ottiene come in [1]. Infatti basterà dimostrare che W ha una rappresentazione cartesiana: scelto, cioè, $s(x) > 0$ q.o. in T ($s \in L^p$) e detto Z un sottospazio lineare di codimensione 1 di L^p tale che $s \in Z$, bisogna fa vedere che, per ogni $z \in Z$, la retta $z + \nu s$ ($\nu \in R$) incontra W in un unico punto. Infatti ogni elemento $u \in L^p$ si può rappresentare in un unico modo nella forma $z + \nu s$ con $\nu \in R$ e $z \in Z$; consideriamo il problema

$$u(x) - \mu \int_T K(x, y) f'[z + \nu s]\, u(y)\, dy$$

con z e ν fissati. Sia $\mu(\nu)$ il primo autovalore; per la 3) del n. 1 $\mu(\nu)$ dipende con continuità da ν. Giacché $s(x)$ è positivo q.o. si ha per l'ipotesi 3)

$$\lim_{\nu \to -\infty} f'[z + \nu s] = l'$$

$$\lim_{\nu \to +\infty} f'[z + \nu s] = l''.$$

Dalla asserita continuità di $\mu(\nu)$ segue

$$\lim_{\nu \to -\infty} \mu(\nu) = \frac{\lambda_1}{l'} > 1$$

$$\lim_{\nu \to +\infty} \mu(\nu) = \frac{\lambda_1}{l''} < 1 .$$

Quindi esiste un $\bar{\nu}$, che è unico in forza della stretta crescenza di μ (cfr. 2) del n. 1) tale che $\mu(\bar{\nu}) = 1$. Ciò completa la dimostrazione del punto B).

Per dimostrare C) osserviamo che se $g_0 = \Phi(u_0)$, $u_0 \in W$ e se riesce $\Phi(\bar{u}) = g$ con $u_0 \neq \bar{u}$, posto:

$$\omega(x) = \begin{cases} \dfrac{f(\bar{u}(x)) - f(u_0(x))}{\bar{u}(x) - u_0(x)} & \text{se } \bar{u}(x) \neq u_0(x) \\ f'(u_0(x)) & \text{se } \bar{u}(x) = u_0(x) \end{cases}$$

si ha che $u - u_0$ è soluzione propria del problema:

$$v(x) - \mu \int_T K(x, y)\, \omega(y)\, v(y)\, dy = 0$$

con $\mu = 1$; è facile verificare che $\mu = 1$ è il primo autovalore essendo $\omega(x) < \lambda_0$, in forza della 2) del n. 1. Quindi, in forza della proposizione 1.1, $u - u_0$ ha lo stesso segno in T; da qui essendo $f''(t) > 0$ segue $\omega(x) > f'(u_0(x))$ q.o.; ciò implica che il primo autovalore della equazione

$$v(x) - \mu \int_T K(x, y)\, f'(u_0(y))\, v(y)\, dy = 0 \tag{2.5}$$

deve essere > 1 per la 2) del n. 1 e ciò è assurdo giacché $\mu = 1$ è il primo autovalore della (2.5).

3. Applicazioni ai problemi al contorno

Consideriamo un problema ellittico reale

$$\begin{cases} Mu = f \\ B_j u = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

dove M è un operatore lineare di ordine $2r$; supponiamo che:

a) il problema (3.1) è autoaggiunto;

b) l'operatore M ammette una soluzione fondamentale $G(x, y)$; esiste allora una funzione di Green del problema (3.1):

$$F(x, y) = G(x, y) - g(x, y)$$

dove $g(x, y)$ è determinata per ogni y dalle seguenti condizioni:

$$\begin{cases} M_x g(x, y) = 0 \\ B_{jx} g(x, y) = B_{jx} G(x, y). \end{cases}$$

La soluzione del problema (3.1) può essere allora scritta nella forma:

$$u = -\int_T F(x, y) f(y)\, dy$$

Se ora consideriamo il problema al contorno

$$\begin{cases} Mu + g(u) = f \\ B_j u = 0 \end{cases}$$

esso si traduce nell'equazione integrale non lineare

$$u = -\int_T F(x, y) f(y)\, dy + \int_T F(x, y)\, g[u(y)]\, dy \tag{3.2}$$

e a tale equazione si potranno applicare i risultati del n. 2 sempre che

c) $F(x, y) \in N^{\alpha}$ con $\alpha > n/4$ oppure $F(x, y) \in N^{\alpha}$ e $\partial F/\partial x_i \in N^{\alpha-1}$ con $\alpha > 1$;

d) $F(x, y) > 0$ q.o. in $T \times T$.

A proposito delle ipotesi vi è da osservare quanto segue. La *a*) serve ad assicurare che $F(x, y)$ è simmetrica. La validità della *b*) è condizionata ad opportune ipotesi sull'operatore M; ad esempio De Lucia in [3] ha dimostrato che esiste la soluzione fondamentale per una equazione fortemente ellittica se vale il teorema di unicità per il problema di Cauchy; Browder in [4] dimostra l'esistenza della soluzione fondamentale nella sola ipotesi di ellitticità; per quanto riguarda l'ipotesi di unicità per il problema di Cauchy cfr. anche [5].

Per quanto concerne la *c*) è presumibile che riesca $F \in N^{\alpha}$, $\partial F/\partial x_i \in N^{\alpha-1}$ $\alpha > 1$ sempre che esista la funzione di Green $F(x, y)$, ma la dimostrazione non è stata mai data in modo esplicito per $r > 1$. Essa potrebbe certamente dedursi nel caso di due variabili con i procedimenti adoperati da E. E. Levi nella memoria [8]; tali procedimenti sono stati per altro adoperati nel caso delle equazioni in più variabili per il secondo ordine da Gevrey (cfr. [9]).

Infine l'ipotesi *d*) è verificata solo per domini di forma opportuna; nel caso del cerchio, della sfera e di altri domini speciali in due o tre dimensioni la cosa è stata dimostrata da Boggio in [10] per l'operatore $(\Delta)^k$ con i dati di Dirichlet. Altre considerazioni sulla questione sono state svolte da Nehari in [11], che poi la *d*) non sia vera in generale è stato mostrato tra gli altri da Garabedian in [7] che fornisce un controesempio relativo ad un dominio a forma ellissoidale.

Bibliografia

[1] A. Ambrosetti e G. Prodi (1973) – *On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces*, « Annali Mat. pura e appl. », 93, 231–247.

[2] C. Miranda (1978) – *Istituzioni di Analisi Funzionale Lineare*, vol. I, U.M.I.

[3] P. De Lucia (1967) – *Sull'esistenza in grande di una soluzione fondamentale per un'equazione fortemente ellittica*, « Rend. Acc. Sci. Fis. Mat. Napoli », 34, 133–144.

[4] F. E. Browder (1961–62) – *Functional analysis and partial differential equations*, II, « Math. Ann. », 145, 81–226.

[5] G. Trombetti (1973) – *Su un teorema di prolungamento univoco per le equazioni ellittiche*, « Ric. di Mat. », 22, 69–88.

[6] F. Riesz e B. Nagy (1952) – *Leçons d'analyse fonctionelle*, Budapest.

[7] P. R. Garabedian (1951) – *A partial differential equations arising in conformal mappings*, « Pacific J. Math. », 1, 485–524.

[8] E. E. Levi (1910) – *I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali*, « Mem. Soc. Ital. dei XL », 16, 1–112.

[9] M. Gevrey (1935) – *Les quasi fonctions de Green et les systèmes d'équations aux dérivées partielles du type elliptique*, « Ann. Ec. N. Sup. », 52, 39–108.

[10] T. Boggio (1905) – *Sulle funzioni di Green d'ordine m*, « Rend. Circolo Mat. Palermo », 20, 97–135.

[11] Z. Nehari (1954) – *On the biharmonic Green's function*, *Studies* in « Mat. and Mec. presented to R. Von Mises », 111–117.