PAOLO CRAGNOLINI (*)

Il teorema delle matrici olomorfe invertibili nel caso non ridotto (**)

SUMMARY. — In this paper we generalize to the case of non reduced complex structures the "Heftungslemmas" proved by H. Grauert [2] and A. Andreotti - R. Narasimhan in [4]. To prove this result we define a sheaf of C^∞ germs associated to a non reduced complex structure, and prove in this case the aproximation Theorem of Grauert [1].

INTRODUZIONE

Fra le generalizzazioni del teorema delle matrici olomorfe invertibili sono particolarmente interessanti quella di A. Andreotti-R. Narasimhan (vedi [3]) e quella di H. Grauert (vedi [2]).

In questo lavoro si dà una versione del teorema delle matrici olomorfe invertibili che, oltre ad unire le suddette generalizzazioni, è valida anche per gli spazi analitici non necessariamente ridotti.

Per quest'ultimo risultato è stato necessario definire il fascio delle funzioni C^∞ associato ad uno spazio analitico non necessariamente ridotto e provare per le sezioni di questo fascio i teoremi di approssimazione di H. Grauert (vedi [1]).

In un lavoro di prossima pubblicazione, unendo a questi risultati quelli ottenuti dal dott. V. Ancona, si darà una versione del teorema di classificazione di H. Grauert (vedi [2] e [3]) che è valida anche per spazi di Stein non ridotti.

§ 1. UN FASCIO NON RIDOTTO DI GERMI DI FUNZIONI C^∞ SU UNO SPAZIO COMPLESSO NON RIDOTTO

Dato uno spazio complesso ridotto $(X, \mathcal{O}_X)$, si può definire su X un fascio D_X di germi di funzioni C^∞ in modo che sia esatta:

$$O \to \mathcal{O}_X \to D_X$$

(*) Istituto di Matematica, Università di Pisa.

(**) Memoria presentata dall'Accademico dei XL BENIAMINO SEGRE l'8 settembre 1974.

Sia infatti $x \in X$ e V_X un intorno di X realizzato nello spazio tangente di Zariski τ_X tale che $(V_X, \mathcal{O}_X|_{V_X}) \simeq (A, \mathcal{O}_A)$ con A insieme analitico di un aperto U di $\mathbf{C}^l = \tau_X$. Il fascio D_X è allora definito su A da:

$$O \to N_A \to D_U \to D_A \to O$$

dove D_U = fascio dei germi C^∞ su U

N_A = ideale dei germi nulli su A

Come risulterà in seguito, la definizione non dipende dal fatto che V_X sia realizzato nello spazio τ_X.

Dato ora uno spazio complesso non necessariamente ridotto $(X, \mathcal{O}_X)$ vogliamo definire su X un fascio non ridotto di funzioni C^∞, $\mathcal{D}_X$, in modo che siano esatte le righe e le colonne di:

(i)
$$\begin{tikzcd} O \arrow[r] & \mathcal{O}_X \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{D}_X \arrow[d] \\ & \mathcal{O}_X \text{ rid} \arrow[r] \arrow[d] & D_X \arrow[d] \\ & O & O \end{tikzcd}$$

(ii) ogni morfismo

$$(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{(\varphi, \varphi')} (Y, \mathcal{O}_Y)$$

si può estendere a

$$(X, \mathcal{D}_X) \xrightarrow{(\varphi, \varphi')} (Y, \mathcal{D}_Y).$$

Si vedrà che vale anche la seguente proprietà:

se lo spazio reale soggiacente a $(X, \mathcal{O}_X)$ è coerente (e quindi per esempio se X è normale) allora

$$\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X \text{ rid} \Rightarrow \mathcal{D}_X = D_X$$

Costruiamo il fascio $\mathcal{D}_X$.

Dato $x \in X$, sia V_X un intorno di X realizzato nello spazio tangente τ_X tale che

$$(V_X, \mathcal{O}_X|_{V_X}) \cong (A, \mathcal{O}_A)$$

con A insieme analitico dell'aperto U di τ_X; supponiamo che $\mathcal{O}_A$ sia definito dalla successione esatta:

$$O \to \mathcal{F} \to \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_A \to O,$$

dove

$$\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_{\tau_X}|_U \quad \text{e} \quad \mathcal{F} = (f_1, \cdots, f_s).$$

Sia D_U il fascio dei germi C^∞ su U. Tensorizzando per D_U su $\mathcal{O}_U$ e notando che D_U è un $\mathcal{O}_U$ modulo piatto (vedi [7]) si ha:

$$O \to \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_U} D_U \to \mathcal{O}_U \otimes_{\mathcal{O}_U} D_U \to \mathcal{O}_A \otimes_{\mathcal{O}_U} D_U \to 0$$

cioè

$$0 \to \mathcal{F} D_U \to D_U \to \mathcal{O}_A \otimes_{\mathcal{O}_U} D_U \to 0$$

Definiamo su A il fascio

$$\mathcal{D}_A = \mathcal{O}_A \otimes_{\mathcal{O}_W} D_U \cong D_U / \mathcal{F} D_U$$

Si vede innanzitutto che il fascio così definito su V_X non dipende dalla realizzazione locale. Sia infatti

$$(V_X, \mathcal{O}_X|_{V_X}) \cong (A, \mathcal{O}_A) \cong (B, \mathcal{O}_B),$$

con B insieme analitico di un aperto T di $\mathbf{C}^m$; esiste allora un isomorfismo $U \to f(U) = W$, dove W è una varietà analitica di $\mathbf{C}^m$ contenente B.

Supponiamo che $(B, \mathcal{O}_B)$ sia definito nell'aperto T di $\mathbf{C}^m$ dalla successione esatta:

$$0 \to (g_1, \cdots, g_q) \to \mathcal{O}_T \to \mathcal{O}_B \to 0$$

Sarà:

$$\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_U/(f_1, \cdots, f_p) \quad \text{e} \quad \mathcal{O}_B = \mathcal{O}_T/(g_1 \cdots g_q)$$

intanto si può scrivere

$$\mathcal{O}_A \cong \mathcal{O}_W/(f'_1 \cdots f'_p)$$

dove f'_i è f_i riportata su W; si ha poi

$$(g_1 \cdots g_q)|_W = (f'_1 \cdots f'_p),$$

perché

$$\mathcal{O}_B = \mathcal{O}_T/(g_1 \cdots g_q) \cong \mathcal{O}_W/(g_1 \cdots g_q)|\mathcal{O}_W \cong \mathcal{O}_A \cong \mathcal{O}_W/(f'_1 \cdots f'_p).$$

Pertanto:

$$D_T/(g_1 \cdots g_q) D_T \cong \frac{D_T/N_W}{(g_1 \cdots g_q) D_T/N_W} \cong D_W/(f'_1 \cdots f'_p) D_W \cong D_U/(f_1 \cdots f_p) D_U$$

dove N_W sono i germi di funzioni C^∞ su T che sono nulli su W.

Quindi i fasci $\mathcal{D}_A$ si incollano e danno un fascio $\mathcal{D}_X$ su X.

Per il fascio $\mathcal{D}_X$ valgono le proprietà (i) e (ii) seguenti:

(i) localmente si ha:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_U/\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & D_U/\mathcal{F} D_U \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_U/\sqrt{\mathcal{F}} \arrow[r] \arrow[d] & D_U/N_A \arrow[d] \\
 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

(ii) supponiamo che sia dato un morfismo $(\varphi, \varphi') : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$; siano $x \in X$, $y = \varphi(x)$, V_X un intorno di x tale che

$$(V_X, \mathcal{O}_X|_{V_X}) \cong (A, \mathcal{O}_A),$$

con A insieme analitico in un aperto U di $\mathbf{C}^n$, W_y intorno di y tale che

$$\varphi(V_X) \subset W_y \quad , \quad (W_y, \mathcal{O}_Y|_{W_y}) \cong (B, \mathcal{O}_B),$$

B insieme analitico in un aperto S di $\mathbf{C}^m$. Si abbia:

$$0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_A \to 0 \quad , \quad 0 \to J \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_B \to 0 ;$$

$$\mathcal{D}_A = \mathcal{O}_A \otimes_{\mathcal{O}_U} D_U \quad , \quad \mathcal{D}_B = \mathcal{O}_B \otimes_{\mathcal{O}_S} D_S .$$

φ' dà il morfismo $\mathbf{C}$-algebre $\varphi'_y : \mathcal{O}_{B_y} \to \mathcal{O}_{A_x}$,

φ da un morfismo di $\mathbf{C}$-algebre $\varphi^*_y : D_{S_y} \to D_{U_x}$

con la composizione.

È definito il morfismo di $\mathbf{C}$-algebre:

$$\varphi''_y : \mathcal{O}_{B_y} \otimes_{\mathcal{O}_{S_y}} D_{S_y} \to \mathcal{O}_{A_x} \otimes_{\mathcal{O}_{U_x}} D_{U_x}$$

L'insieme dei φ''_y per $y \in B$ manda sezioni in sezioni, dato che questo è vero per φ' e φ^*.

φ'' inoltre estende φ'.

Se infine il reale associato a $(X, \mathcal{O}_X)$ è coerente ed $\mathcal{O}_X$ è ridotto, allora localmente si ha

$$\mathcal{I} D_U = N_A$$

e quindi

$$\mathcal{D}_A = D_A \quad \text{e} \quad \mathcal{D}_X = D_X .$$

§ 2. Fibrati in gruppi su uno spazio di Stein non ridotto e (d, h) sezioni

Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio di Stein non ridotto, $\mathcal{D}_X$ il fascio dei germi di funzioni C^∞ tale che $0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{D}_X$.

Sia dato su $(X, \mathcal{O}_X)$ un fibrato olomorfo in gruppi $(\pi, \pi') : (W, \mathcal{O}_W) \to (X, \mathcal{O}_X)$ con fibra e gruppo strutturale i gruppi di Lie G e G^*. Il fibrato è individuato da un ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$ di X e da una collezione di morfismi di spazi complessi:

$$(g_{ij}, g'_{ij}) : (U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X|_{U_i \cap U_j}) \to (G^*, \mathcal{O}_{G^*})$$

che verificano la relazione

$$g_{ij}(x) g_{jk}(x) = g_{ik}(x) \qquad \text{su} \quad U_i \cap U_j \cap U_k .$$

Se U è un aperto di X, su U ha senso parlare di sezioni olomorfe e di sezioni C^∞; indichiamo le prime con $\Gamma_h(U, W)$ e le seconde con $\Gamma_d(U, W)$. Posto infatti

$U_i = U_i \cap U$, una sezione olomorfa h sarà data da una collezione di morfismi $(h_i, h_i') : (U_i', \mathcal{O}_{\pi} |_{U_i'}) \to (G, \mathcal{O}_G)$ tali che su $U_i' \cap U_j'$ sia $h_i = g_{ij} h_j$. Una sezione C^∞ sarà data da una collezione di morfismi

$$(f_i, f_i') : (U_i', \mathcal{D}_X |_{U_i'}) \to (G, \mathcal{D}_G)$$

tali che su $U_i' \cap U_j'$ si abbia $f_j = g_{ji} f_i$.

Notiamo che per la varietà complessa G il fascio $\mathcal{D}_G$ coincide con il fascio ridotto D_G.

Per la proprietà (ii) del fascio $\mathcal{D}_X$ si ha:

$$\Gamma_h (U, W) \subset \Gamma_d (U, W).$$

Se il fibrato è vettoriale con $G = \mathbf{C}^n$ e $G^* = GL(n, \mathbf{C})$, allora i morfismi h_i e f_i sono

$$h_i \in \Gamma (U_i', \mathcal{O}_X^n) \quad ; \quad f_i \in \Gamma (U_i', \mathcal{D}_X^n)$$

* * *

Dato ora il fibrato in gruppi $(\pi, \pi') : (W, \mathcal{O}_X) \to (X, \mathcal{O}_X)$, vogliamo definire le (d, h) sezioni a valori in W, cioè sezioni dipendenti con continuità da un parametro che sono C^∞ oppure olomorfe a seconda dei valori assunti dal parametro stesso.

LEMMA 2.1. *Se* U *è un aperto* X*-convesso in* $(X, \mathcal{O}_X)$ (*), *allora* $\Gamma (U, \mathcal{D}_X)$ *e* $\Gamma (U, \mathcal{O}_X)$ *hanno una struttura di spazi di Fréchet.*

Dimostrazione. Sia $(A, \mathcal{O}_A)$ una realizzazione di $(U, \mathcal{O}_X |_U)$ dove A è un insieme analitico di un aperto di olomorfia V di $\mathbf{C}^k$ ed $\mathcal{O}_A$ è definito da $O \to \mathcal{I} \to \mathcal{O}_V \to \mathcal{O}_A \to O$.

Per come è stato definito il fascio $\mathcal{D}_X$ abbiamo:

$$(U, \mathcal{D}_X |_U) \cong (A, \mathcal{D}_A)$$

dove $\mathcal{D}_A$ è definito da

$$O \to \mathcal{I} D_V \to D_V \to \mathcal{D}_A \to O$$

essendo D_V il fascio dei germi C^∞ su V.

Il fascio $\mathcal{I} D_V$ ha una partizione dell'unità, quindi passando alla successione esatta si ha:

$$O \to \Gamma (V, \mathcal{I} D_V) \to \Gamma (V, D_V) \to \Gamma (A, \mathcal{D}_A) \to O.$$

Ora, $\Gamma(V, D_V)$ è uno spazio di Fréchet con la topologia della convergenza uniforme dei compatti e $\Gamma (V, \mathcal{I} D_V)$ è un sottospazio chiuso perché $\mathcal{I} D_V$ è un fascio di ideali localmente finitamente generato da funzioni olomorfe (vedi [7]); pertanto $\Gamma (A, \mathcal{D}_A)$ con la topologia quoziente è di Fréchet; in modo analogo si dimostra che $\Gamma (U, \mathcal{O}_X)$ è uno spazio di Fréchet.

C. V. D.

(*) Cioè un aperto X-convesso per la struttura ridotta.

COROLLARIO 2.2. *Se* U *è un aperto di* X *e* $(V, \mathcal{O}_V)$ *è un fibrato vettoriale su* $(X, \mathcal{O}_X)$, $\Gamma_d(U, V)$ *e* $\Gamma_h(U, V)$ *sono spazi di Fréchet.*

Dimostrazione. Basta infatti ricoprire U con una famiglia di aperti $\{U_i\}$ che siano X-convessi e contenuti ciascuno in una banalizzazione locale: si avrà allora: $\Gamma_d(U_i, V) \simeq \Gamma(U, \mathcal{F}_i^n)$ e quindi ogni $\Gamma_d(U_i, V)$ è uno spazio di Fréchet; poniamo allora su $\Gamma_d(U, V)$ la topologia di limite proiettivo dei $\Gamma_d(U_i, V)$. È immediato verificare che la definizione non dipende dal ricoprimento scelto e che $\Gamma_h(U, V)$ è chiuso in $\Gamma_d(U, V)$.

C. V. D.

Se su $(X, \mathcal{O}_X)$ è dato il fibrato in gruppi $(W, \mathcal{O}_W)$ possiamo dare una topologia a $\Gamma_d(U, W)$, con U aperto di X. A questo scopo usiamo il fibrato vettoriale $(V_W, \mathcal{O}_{V_W})$ associato a $(W, \mathcal{O}_W)$. Ricordiamo che se la fibra G di W è un gruppo di Lie complesso di dimensione n, allora $(V_W, \mathcal{O}_{V_W})$ ha come fibra l'algebra di Lie, isomorfa a $\mathbf{C}^n$, $A(G)$ di G, e come gruppo strutturale $GL(n, \mathbf{C})$; inoltre fra $(V_W, \mathcal{O}_{V_W})$ e $(W, \mathcal{O}_W)$ è definita l'applicazione esponenziale $(\bar{\rho}, \bar{\rho}')$ che conserva le fibre e che induce su ogni fibra l'applicazione esponenziale $\rho : A(G) \to G$. $(\bar{\rho}, \bar{\rho}')$ è inoltre un isomorfismo biolomorfo fra un intorno $U(O(x))$ della sezione nulla $O(x)$ in V_W e un intorno $U(E(x))$ della sezione identica in W.

Definiamo la topologia di $\Gamma_d(U, W)$ in questo modo:

$$F_n, F \in F_d(U, W), F_n \to F \Longleftrightarrow \bar{\rho}^{-1}(F_n * F^{-1}) \to O \quad \text{in} \quad \Gamma_d(U, W).$$

Sia ora I uno spazio topologico compatto, $H \supset E$ chiusi di I, U un aperto di X. Per (d, h) sezione $F(x, t) : U \times I \to W$ si intende una funzione continua $t \to F_t(x) = F(x, t) : I \to \Gamma_d(U, W)$ tale che

$$F(H) \subset \Gamma_h(U, W) \quad \text{e} \quad F(E) = \{0\}.$$

Notiamo che nel caso ridotto questa definizione coincide con la seguente: $F : U \times I \to W$ sia una funzione continua tale che: $\pi F(x, t) = x \ \forall t$ essendo (π, π') la proiezione: $(W, \mathcal{O}_W) \to (X, \mathcal{O}_X)$; $x \to F(x, t) \in \Gamma_d(U, W)$; $x \to F(x, t) \in \Gamma_h(U, W)$ per $t \in H$; $F(x, t) = 0$ per $t \in E$.

Indichiamo con $\Gamma_{(d,h)}(U, W)$ l'insieme delle (d, h) sezioni definite su U. Nel caso in cui W sia il fibrato vettoriale banale si parlerà di (d, h) funzioni e di $\Gamma_{(d,h)}(U, \mathcal{D}_X)$.

* * *

Vogliamo ora dare una topologia a $\Gamma_{(d,h)}(U, W)$, e a questo scopo consideriamo prima il caso del fibrato vettoriale.

PROPOSIZIONE 2.3. *Fissato in* X *un aperto* X-*convesso* U, *se* $(V, \mathcal{O}_V)$ *è un fibrato vettoriale su* X, *allora* $\Gamma_{(d,h)}(U, V)$ *ha una struttura naturale di spazio di Fréchet.*

Premettiamo alla dimostrazione di questa proposizione due lemmi.

LEMMA 2.4. *Sia* $(X, \mathcal{O}_X)$ *uno spazio di Stein non ridotto,* $(V, \mathcal{O}_V)$ *un fibrato vettoriale su* $(X, \mathcal{O}_X)$, Y *un aperto* X*-convesso e relativamente compatto. Esistono allora un numero finito di sezioni globali* $H_i(z) \in \Gamma_h(X, V)$, $i = 1, \cdots, q$, *tali che per ogni sezione olomorfa* $f \in \Gamma_h(Y, V)$ *si possa scrivere* $f(z) = \sum_{i=1}^{q} f_i(z) H_i(z)$ *con* $f_i \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_X)$. *Se inoltre* $f \in \Gamma_d(Y, V)$, *allora vale la stessa relazione con* $f_i \in \Gamma(Y, \mathcal{D}_X)$.

Dimostrazione. Supponiamo innanzitutto $f \in \Gamma_h(Y, V)$. Sia $\mathcal{F}$ il fascio associato al prefascio canonico $\Gamma_h(U, V)$ con U aperto di X. $\mathcal{F}$ è localmente isomorfo a $\mathcal{O}_X^q$ e quindi è coerente su $\mathcal{O}_X$.

Dato $x \in Y$, troviamo per il Teorema A un numero finito di sezioni globali $H_{i_1}, \cdots, H_{i_q} \in \Gamma(X, \mathcal{F}) = \Gamma_h(X, V)$ che generano su $\mathcal{O}_{X_y}$ le spighe $\mathcal{F}_y$ per y appartenente ad un intorno di x. Poiché Y è relativamente compatto, esistono un numero finito di sezioni globali $H_1(z), \cdots, H_q(z) \in \Gamma_h(X, V)$ tali che si abbia la surgettività:

$$\mathcal{O}_X^q|_V \to \mathcal{F}|_V \to O, \qquad \text{dove} \quad (\alpha_1 \cdots \alpha_q)_x \to \Sigma \alpha_i H_i(x).$$

Dato allora che Y è di Stein, abbiamo

$$\Gamma(Y, \mathcal{O}_X^q) \to \Gamma(Y, \mathcal{F}) \to \Gamma_h(Y, V) \to O$$

e questo prova l'asserto.

Sia ora $f \in \Gamma_d(Y, V)$ ed $\mathcal{F}'$ il fascio dei germi di sezioni C^∞ di V. Abbiamo ancora la surgettività di fasci:

$$O \to \ker \to \mathcal{D}_X^q|_V \to \mathcal{F}'|_V \to O$$

basta quindi far vedere che $H^1(Y, \ker) = 0$.

Ora, $\mathcal{D}_X^q$ ha una partizione dell'unità, che è anche una partizione per ker; quindi ker è un fascio fine e $H^1(Y, \ker) = 0$. C. V. D.

LEMMA 2.5. *Nelle ipotesi del Lemma 2.4, se* $H_1(z), \cdots, H_q(z)$ *sono le sezioni globali determinate, ogni* (d, h) *sezione* $f(z, t) : Y \times I \to V$ *si può scrivere nella forma* $f(z, t) = \sum_{i=1}^{q} f_i(z, t) H_i(z)$ *dove le* $f_i(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(Y, \mathcal{D}_X)$, *cioè sono* (d, h) *sezioni del fibrato banale.*

Dimostrazione. Ricordiamo intanto che $\Gamma_h(Y, V)$ e $\Gamma_d(Y, V)$ sono spazi di Fréchet.

Definiamo

$$\varphi_1 : \quad \Gamma(Y, \mathcal{O}_X)^q \to \Gamma_h(Y, V),$$

$$(f_1(z), \cdots, f_q(z)) \to \sum_{i=1}^{q} f_i(z) H_i(z);$$

$$\varphi_2 : \quad \Gamma(Y, \mathcal{D}_X)^q \to \Gamma_d(Y, V)$$

$$(f_1(z), \cdots, f_q(z)) \to \sum_{i=1}^{q} f_i(z) H_i(z)$$

φ_1 e φ_2 sono lineari, continue e surgettive.

Consideriamo la situazione del diagramma seguente:

$$\begin{tikzcd}
 & \{0\} \arrow[dr] & \\
E \arrow[ur, "\tau"] \arrow[rr, "\tau"] \arrow[d, hook] & & \{0\} \arrow[d, hook] \\
 & \Gamma(Y, \mathcal{O}_X)^q \arrow[dl, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"] & \\
H \arrow[rr, "\tau"] \arrow[d, hook] & & \Gamma_k(Y,V) \arrow[d, hook] \\
 & \Gamma(Y, \mathcal{D}_X)^q \arrow[dl, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"] & \\
I \arrow[rr, "\tau"] & & \Gamma_d(Y,V)
\end{tikzcd}$$

La (d, h) sezione data $f(z, t)$ definisce una funzione continua

$$\tau : \quad I \to \Gamma_d(Y,V) \qquad \text{tale che} \quad \tau(H) \subset \Gamma_k(Y,V) \qquad \text{e} \quad \tau(E) = \{0\}.$$

Estendiamo con il Lemma di Cartan sugli spazi di Fréchet (vedi [1])

$$\tau_1 : \quad E \to \{O\} \subset \Gamma(Y, \mathcal{O}_X)^q \qquad \text{a} \quad \tau_1 : \quad H \to \Gamma(Y, \mathcal{O}_X)^q$$

in modo che sia $\varphi_1 \tau_1 = \tau$.

Estendiamo ora

$$\tau_2 : \quad H \to \Gamma(Y, \mathcal{O}_X)^q \subset \Gamma(Y, \mathcal{D}_X)^q \qquad \text{a} \quad \tau_1 : \quad I \to \Gamma(Y, \mathcal{D}_X)^q$$

in modo che sia $\varphi_2 \tau_1 = \tau$.

La $\tau_1 : \ I \to \Gamma(Y, \mathcal{D}_X)^q$ dà la soluzione cercata:

$$\text{se} \qquad \tau_1(t) = (f_1(z, t), \cdots, f_q(z, t))$$

allora $f(z, t) = \sum_{i=1}^{q} f_i(z, t) H_i(z)$ perché $\varphi_2 \tau_1 = \tau_1$ e le $f_i(z, t)$ sono (d, h) sezioni. C. V. D.

Dimostrazione della proposizione 2.3: consideriamo prima il caso del fibrato vettoriale banale, cioè delle (d, h) funzioni di $\Gamma_{(d,h)}(Y, \mathcal{D}_X)$ e supponiamo che Y sia un aperto relativamente compatto ed X-convesso.

Sia $(A, \mathcal{O}_A)$ una realizzazione di $(Y, \mathcal{O}_X|_Y)$ in $\mathbf{C}^n$, con A insieme analitico definito in un aperto di olomorfia U ed $\mathcal{O}_A$ definito da

$$O \to \mathcal{I} \to \mathcal{O}_U = \mathcal{O}_{\mathbf{C}^n}|_U \to \mathcal{O}_A \to O .$$

Per la definizione che si è data di $\mathcal{D}_X$, si ha un isomorfismo:

$$(Y, \mathcal{D}_X|_Y) \simeq (A, \mathcal{D}_A),$$

essendo $\mathcal{D}_A$ definito da:

$$O \to \mathcal{I} D_U \to D_U \to \mathcal{D}_A \to O$$

dove D_U è il fascio dei germi C^∞ su U.

Dato che $\mathscr{F}D_U$ ha una partizione dell'unità, vale:

$$
\begin{tikzcd}
 & O \arrow[d] & O \arrow[d] & \\
(1) \quad & \Gamma(U, \mathcal{O}_U) \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & \Gamma(A, \mathcal{O}_A) \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & O \\
 & \Gamma(U, D_U) \arrow[r, "\vartheta"] & \Gamma(A, \mathscr{D}_A) \arrow[r] & O
\end{tikzcd}
$$

Consideriamo ora

$$\Gamma_{(\mathcal{U},A)}(Y, \mathscr{D}_X) \cong \Gamma_{(\mathcal{U},A)}(A, \mathscr{D}_A).$$

Per il diagramma (1), ϑ induce:

$\vartheta^*: \Gamma_{(\mathcal{U},A)}(U, D_U) \to \Gamma_{(\mathcal{U},A)}(A, \mathscr{D}_A)$. ϑ^* è surgettiva, perché per il Lemma di Cartan (vedi [1]), ogni funzione continua $\upsilon: I \to \Gamma(A, \mathscr{D}_A)$ si può sollevare a una funzione continua $\hat{\upsilon}: I \to \Gamma(U, D_U)$ in modo che $\vartheta\hat{\upsilon} = \upsilon$.

Valgono i seguenti fatti:

(i) $\Gamma_{(\mathcal{U},A)}(U, D_U)$ ha una struttura naturale di spazio di Fréchet con la topologia della convergenza uniforme sui compatti.

(ii) $\ker \vartheta^*$ è chiuso. Infatti:

$$\ker \vartheta^* = \{(t \to F_t(z)) \in \Gamma_{(\mathcal{U},A)}(U, D_U) : F_t(z) \in \Gamma(U, \mathscr{F}D_U)\}$$

e $\Gamma(U, \mathscr{F}D_U)$ è chiuso in $\Gamma(U, D_U)$.

Pertanto su $\Gamma_{(\mathcal{U},A)}(A, \mathscr{D}_A)$ è definita una topologia quoziente di Fréchet.

Osserviamo che la topologia così introdotta è naturale, nel senso che coincide con la topologia indotta dalla topologia della convergenza uniforme dello spazio delle funzioni continue $I \to \Gamma(A, \mathscr{D}_A)$ sul sottospazio $\Gamma_{(\mathcal{U},A)}(A, \mathscr{D}_A)$.

Diamo ora una topologia di Fréchet a $\Gamma(Y,V)$, dove $(V, \mathcal{O}_V)$ è un fibrato vettoriale su $(X, \mathcal{O}_X)$.

Per il Lemma 2.5 esiste una funzione $\mathbf{C}$ lineare ψ tale che:

$$\Gamma_{(\mathcal{U},A)}(Y, \mathscr{D}_X)^q \xrightarrow{\psi} \Gamma_{(\mathcal{U},A)}(Y,V) \to O$$

Il ker di ψ è chiuso, poiché ψ opera nel seguente modo:

$$(f_1, \cdots, f_q) \to \sum_{i=1}^{q} f_i H_i$$

Pertanto su $\Gamma_{(\mathcal{U},A)}(Y,V)$ è definita una topologia quoziente di Fréchet.

Osserviamo che anche questa topologia coincide con quella indotta dalla topologia della convergenza uniforme dello spazio delle funzioni continue $I \to \Gamma_d(Y,V)$ sul sottospazio $\Gamma_{(\mathcal{U},A)}(Y,V)$.

Se U è un aperto di X, ricopriamo U con una famiglia $\{Y_i\}$ di aperti relativamente compatti e X-convessi; la topologia di Fréchet dei $\Gamma_{(\mathcal{U},A)}(Y_i, V)$ induce una topologia di Fréchet sul limite proiettivo $\Gamma_{(\mathcal{U},A)}(U, V)$; questa topologia non dipende dal ricoprimento scelto.

C. V. D.

Possiamo a questo punto dare una topologia a $\Gamma_{(d,h)}(U, W)$, essendo U un aperto di X e $(W, \mathcal{O}_W)$ un fibrato in gruppi. Se $(V_W, \mathcal{O}_{V_W})$ è il fibrato vettoriale associato, definiamo:

$$F_n, F \in \Gamma_{(d,h)}(U, W), F_n \to F \Longleftrightarrow \bar{\rho}^{-1}(F_n \cdot F^{-1}) \to 0 \quad \text{in} \quad \Gamma_{(d,h)}(U, V_W).$$

Ricordiamo infine che se $(V, \mathcal{O}_V)$ è un fibrato vettoriale su $(X, \mathcal{O}_X)$, si puo dare a V una norma C^∞ (vedi [1]); tramite $\bar{\rho}$ si puo trasferire questa norma su $U(E(t)) \subset W$, se $(V, \mathcal{O}_V)$ è il fibrato vettoriale associato a $(W, \mathcal{O}_W)$; in particolare, se G è un gruppo di Lie, A la sua algebra, $\rho : A \to G$ l'esponenziale, $U(0)$ ed $U(e)$ gli intorni di $O \in A$ e di $e \in G$ fra cui ρ è invertibile, possiamo dare questa norma a G:

$$x \in G \quad , \quad \| x \| = \delta \Longleftrightarrow x \in U(e) \quad , \quad \| \rho^{-1}(x) \| = \delta ,$$

dove $\| \ \|$ è una norma euclidea di $A \cong \mathbf{C}^n$.

§ 3. Il Teorema di approssimazione per le (d, h) sezioni

Sia X uno spazio di Stein non necessariamente ridotto e $(W, \mathcal{O}_W)$ un fibrato in gruppi su $(X, \mathcal{O}_X)$. Diciamo che $F(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(X, W)$ è (d, h) omotopa alla sezione identica $E(z)$ sui compatti se per ogni compatto K di X esiste una omotopia:

$$\mathcal{F} : \quad [0, 1] \to \Gamma_{(d,h)}(X, W)$$

$$s \to \mathcal{F}(z, t, s) \qquad \text{continua e tale che:}$$

$$\mathcal{F}(z, t, 1) = F(z, t) \qquad \text{e} \quad \mathcal{F}(z, t, 0) = E(z) \qquad \forall z \in K, t \in I.$$

Enunciato del Teorema.

Sia X uno spazio di Stein ed Y un aperto X-convesso di X. Dato allora un fibrato olomorfo in gruppi $(W, \mathcal{O}_W)$ su $(X, \mathcal{O}_X)$ e data una (d, h) sezione $F(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(Y, W)$ che sia (d, h) omotopa ad $E(z)$ sui compatti di Y, esiste una successione $F_n(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(X, W)$ tale che $F_n \to F$ nella topologia di Fréchet di $\Gamma_{(d,h)}(Y, W)$ e le F_n siano (d, h) omotope a $E(z)$.

Lemma 3.1. *(Il Teorema nel caso del fibrato vettoriale). Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio di Stein, $(V, \mathcal{O}_V)$ un fibrato vettoriale su $(X, \mathcal{O}_X)$ ed Y un aperto X-convesso.*

Data allora una (d, h) sezione $F(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(Y, V)$ esiste una successione $F_n(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(X, V)$ tale che $F_n \to F$ in $\Gamma_{(d,h)}(Y, V)$.

Dimostrazione. Per il Lemma 2.5, esistono $H_i \in \Gamma_h(X, V)$, $i = 1, \cdots, q$, tali che $F(z, t) = \sum_{i=1}^{q} f_i(z, t) H_i(z)$ con $f_i(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(Y, \mathcal{D}_X)$.

Per come è stata definita la topologia su $\Gamma_{(\mu,\lambda)}(Y, V)$, cioè per la continuità di ψ:

$$\Gamma_{(\mu,\lambda)}(Y, \mathscr{D}_X)^f \xrightarrow{\psi} \Gamma_{(\mu,\lambda)}(Y, V) \to 0$$

basta risolvere l'approssimazione per le $f_i(z, t)$: data cioè $f(z, t) \in \Gamma_{(\mu,\lambda)}(Y, \mathscr{D}_X)$ basta trovare $f_n \in \Gamma_{(\mu,\lambda)}(X, \mathscr{D}_X)$ tale che $f_n \to f$ in $\Gamma_{(\mu,\lambda)}(Y, \mathscr{D}_X)$.

Possiamo inoltre supporre Y relativamente compatto; diversamente infatti si invade Y con una successione di aperti X-convessi e relativamente compatti Y_n, si determina per ogni n una successione di approssimanti e si diagonalizza.

Sia $(\varphi, \varphi') : (X, \mathscr{O}_X) \to (\mathbf{C}^m, \mathscr{O}_{\mathbf{C}^m})$ un morfismo che sia un isomorfismo fra $(Y, \mathscr{O}_X|_Y)$ e $(A, \mathscr{O}_A)$ con A insieme analitico definito in un aperto di Stein U di $\mathbf{C}^m$ ed $\mathscr{O}_A$ definito da

$$0 \to \mathscr{T} \to \mathscr{O}_U = \mathscr{O}_{\mathbf{C}^m}|_U \to \mathscr{O}_A \to 0 .$$

Per come è stato definito il fascio $\mathscr{D}_X$ su X, si avrà un isomorfismo $(Y, \mathscr{D}_X|_Y) \to (A, \mathscr{D}_A)$, dove $\mathscr{D}_A$ è definito da

$$0 \to \mathscr{T} D_U \to D_U \to \mathscr{D}_A \to 0 .$$

Si ha la seguente situazione, come visto in precedenza:

$$\begin{array}{ccccc}
0 & & 0 & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\Gamma(U, \mathscr{O}_U) & \longrightarrow & \Gamma(A, \mathscr{O}_A) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\Gamma(U, D_U) & \xrightarrow{\varphi} & \Gamma(A, \mathscr{D}_A) & \longrightarrow & 0 \\
\Gamma_{(\mu,\lambda)}(U, D_U) & \xrightarrow{\psi'} & \Gamma_{(\mu,\lambda)}(A, \mathscr{D}_A) & \longrightarrow & 0 .
\end{array}$$

Data allora $f(z, t) \in \Gamma_{(\mu,\lambda)}(Y, \mathscr{D}_X) \simeq \Gamma_{(\mu,\lambda)}(A, \mathscr{D}_A)$, sia $g(z, t) \in \psi'^{-1}(f(z, t))$.

Approssimiamo ora $g(z, t)$ con una successione $g_n \in \Gamma_{(\mu,\lambda)}(\mathbf{C}^m, D_{\mathbf{C}^m})$ nel modo seguente:

fissiamo K compatto di U ed $\varepsilon > 0$; sia $U_1, \cdots, U_r$ un ricoprimento di I tale che

$$z \in K \quad , \quad t_1 \quad e \quad t_2 \in U_i \Rightarrow |g(z, t_1) - g(z, t_2)| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Sia $\{\varphi_i\}$ $i = 1, \cdots, r$ una partizione dell'unità associata ad $\{U_i\}$.
Scegliamo $t_i \in U_i$ in modo tale che:

se $U_i \cap E \neq \Phi$ allora $t_i \in U_i \cap E$;

se $U_i \cap E = \Phi$ e $U_i \cap H \neq \Phi$ allora $t_i \in U_i \cap H$.

Approssimiamo $g(z, t_i)$ con $g_i(z)$ in modo che $|g(z, t_i) - g_i(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$ su K:

se $t_i \in E$, prolunghiamo $g(z, t_i) = 0$ con 0;

se $t_i \in H$, usiamo il Teorema di Runge;

se $t_i \in I$, estendiamo $g(z, t_i)|K$ a una funzione C^∞ globale.

Allora

$$\sum_{i=1}^{r} \varphi_i(t) g_i(z) \in \Gamma_{(d,h)}(\mathbf{C}^n, D_{\mathbf{C}^n})$$

ed inoltre

$$|g(z, t) - \sum_i \varphi_i(t) g_i(z)| < \varepsilon \qquad \text{per} \quad z \in K.$$

Per ottenere la successione g_n delle approssimanti, basterà prendere una successione di compatti K_n che invada U e una successione $\varepsilon_n \to 0$.

Il morfismo $(\varphi, \varphi'): (X, \mathcal{O}_X) \to (\mathbf{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{C}^n})$ si può estendere a $(\varphi, \varphi''): (X, \mathcal{D}_X) \to (\mathbf{C}^n, \mathcal{D}_{\mathbf{C}^n})$; dato che $(\mathbf{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{C}^n})$ è normale e ridotto, $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n}$ sarà proprio il fascio ridotto $D_{\mathbf{C}^n}$ di funzioni C^∞ su $\mathbf{C}^n$. Rimontiamo con φ'' le $g_n \in \Gamma_{(d,h)}(\mathbf{C}^n, D_{\mathbf{C}^n})$ a $f_n \in \Gamma_{(d,h)}(X, \mathcal{D}_X)$ (in modo che si avrà $f_n|_Y = \vartheta^*(g_n)$). Allora in $\Gamma_{(d,h)}(Y, \mathcal{D}_X)$, per la continuità di ϑ^*, si avrà $f_n \to f$.

C. V. D.

Dimostrazione del teorema di approssimazione (3.2).

Siano dati un fibrato in gruppi $(W, \mathcal{O}_W)$ su uno spazio non ridotto $(X, \mathcal{O}_X)$, un aperto X-convesso Y, ed una (d, h) sezione $F(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(Y, W)$ che sia (d, h) omotopa ed $E(z)$; dobbiamo costruire una successione di approssimanti $F_n \in \Gamma_{(d,h)}(X, W)$ tale che $F_n \to F$ in $\Gamma_{(d,h)}(Y, W)$.

Sia $\{Y_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ una successione di aperti X-convessi e relativamente compatti tali che $\bigcup_{j \in \mathbf{N}} Y_j = Y$ e $\overline{Y}_j \subset Y_{j+1}$. Fissiamo j e cerchiamo una successione $F_n^{(j)} \in \Gamma_{(d,h)}(X, W)$ tale che $F_n^{(j)} \to F$ in $\Gamma_{(d,h)}(Y_j, W)$; una volta ottenuto questo risultato basta definire per induzione $F_n^{(0)'} = F_n^{(0)}$, $F_n^{(j)'}$ = sottosuccessione di $F_n^{(j)}$ tale che $F_n^{(j)'}|_{Y_{j-1}}$ converge ad F rapidamente quanto $F_n^{(j-1)'}$, e ponendo $F_n = F_n^{(n)'}$ si ottiene la successione cercata.

Fissato dunque j, dimostriamo intanto questo fatto:

esiste un numero finito di sezioni $F_i(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(Y, W)$ $i = 1, \cdots, r$ tali che $F_i(z, t) \in U(E)$ e $F(z, t) = \prod_{i=1}^{r} F_i(z, t)$ per $z \in Y_j$; dove per $U(E)$ si intende l'intorno della sezione identica $E(z)$ definito in modo canonico.

Sia infatti $s \to \mathcal{F}(z, t, s)$ una (d, h) omotopia di $F(z, t)$ ad $E(z)$ su Y_j, cioè $\mathcal{F}: [0, 1] \to \Gamma_{(d,h)}(Y, W)$ continua e tale che $\mathcal{F}(z, t, 0) = E(z)$ e $\mathcal{F}(z, t, 1) = F(z, t)$ per $z \in Y_j$. Fissato $s_0 \in [0, 1]$, sia $\mathcal{G}(z, t, s) = \mathcal{F}(z, t, s_0) \circ \mathcal{F}(z, t, s)^{-1}$.

Si ha $\mathscr{F}(z, t, s_0) = E(z)$ e quindi $\mathscr{F}(z, t, s) \in U(E)$ e $\mathscr{F}(z, t, s) \in U^{-1}(E)$ per $z \in Y_j$ ed $s \in U(s_0)$.

Ricopriamo $[0, 1]$ con un numero finito di aperti del tipo $U(s_0)$:

$$U(s_0), U(s_2), U(s_4), \cdots, U(s_{2n}) \quad \text{con } 0 = s_0 < s_2 < s_4 < \cdots < s_{2n} = 1.$$

Prendiamo

$$s_1 \in U(s_0) \cap U(s_2), s_3 \in U(s_2) \cap U(s_4), \cdots, s_{2n-1} \in U(s_{2n-2}) \cap U(s_{2n}).$$

Basterà allora porre

$$F_i(z, t) = \mathscr{F}(z, t, s_{i-1})^{-1} + \mathscr{F}(z, t, s_i) \qquad i = 1, \cdots, 2n.$$

Scritto dunque

$$F(z, t) = \prod_{i=1}^{r} F_i(z, t) \quad , \quad F_i(z, t) \in U(E) \quad \text{per } z \in Y_j,$$

sia

$$G_i = \bar{\rho}^{-1}(F_i) \, ; \, G_i \in \Gamma_{(d,h)}(Y_j, V_W),$$

dove V_W è il fibrato vettoriale associato e $\bar{\rho}$ è l'applicazione esponenziale $\bar{\rho} : V_W \to W$.

Per il Teorema di approssimazione nel caso del fibrato vettoriale, esistono delle successioni $G_n^{(i)} \in \Gamma_{(d,h)}(X, V_W)$ tali che $G_n^{(i)} \to G_i$ in $\Gamma_{(d,h)}(Y_j, V_W)$; basterà allora porre $F_n^{(i)} = \prod_{i=1}^{r} \bar{\rho}(G_n^{(i)})$ per ottenere la successione di (d, h) sezioni globali che approssima $F(z, t)$ in $\Gamma_{(d,h)}(Y_j, W)$.

Infine le $F_n^{(i)}$ e quindi le F_n sono (d, h) omotope ad $E(z)$.

C. V. D.

§ 4. Il Teorema delle matrici olomorfe invertibili per il fibrato banale

Enunciato del Teorema nel caso generale:

Teorema 4.1. *Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio di Stein non ridotto; $g(x), h_1(x), \cdots, h_k(x) \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ con $g(x)$ non nilpotente; $\alpha > 0$.*

Poniamo per $0 \leq \delta < e^{-\alpha}$:

$$D^{(\delta)} = \{x \in X \; : \; |h_i(x)| < 1 + \delta\}$$

$$D_1^{(\delta)} = \{x \in D^{(\delta)} : \; |g(x)| < e^{\alpha} + \delta\}$$

$$D_2^{(\delta)} = \{x \in D^{(\delta)} : \; |g(x)| > e^{-\alpha} - \delta\}$$

$$D_3^{(\delta)} = D_1^{(\delta)} \cap D_2^{(\delta)} \, ; D = D^{(0)} \, ; D_1 = D_1^{(0)} \, ; D_2 = D_2^{(0)} \, ; D_3 = D_3^{(0)}.$$

Supponiamo che $g(x), h_1(x), \cdots, h_k(x)$ diano una realizzazione di $D_3^{(\delta)}$ in un modello locale definito in C^{d+1} e che $D_3^{(\delta)}$ sia relativamente compatto.

Su $D^{(\delta)}$ *sia dato un fibrato in gruppi* $(W, \mathcal{O}_W)$. *Data allora una* (d, h) *sezione* $f(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(D_2^{(\delta)}, W)$, *che sia* (d, h) *omotopa ad* $E(z)$ *sui compatti, esistono due* (d, h) *sezioni* $f_i(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(D_i, W)$ $i = 1, 2$, (d, h) *omotope a* $E(z)$ *e tali che* $f = f_2 \circ f_2^{-1}$ in $D_2 \times I$.

Notiamo che da questo enunciato segue quello analogo per un insieme analitico definito in un cubo di $\mathbf{C}^n$.

Corollario 4.2. *Sia* P *il parallelepipedo*

$$P = \{(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n : |\operatorname{Re} z_i| \leq a_i, \ |\operatorname{Im} z_i| \leq b_i \ ; i = 1, \cdots, n \ ; a_i, b_i > 0\}$$

$$P_1 = \{z \in P : \operatorname{Re} z_1 \leq 0\} \quad P_2 = \{z \in P : \operatorname{Re} z_1 \geq 0\} \qquad P_3 = P_1 \cap P_2$$

Sia $(A, \mathcal{O}_A)$ *un modello locale dotato di struttura non necessariamente ridotta, dove* A *è un insieme analitico definito in un intorno di* P.

Su A *sia dato un fibrato in gruppi* $(W, \mathcal{O}_W)$. *Posto allora* $A_i = A \cap P_i$, $i = 1, 2, 3$, *e data su un intorno* $U(A_3)$ *di* A_3 *in* A *una* (d, h) *sezione* $f(z, t) : U(A_3) \times I \to W$ (d, h) *omotopa ad* $E(z)$ *sui compatti, esistono due* (d, h) *sezioni* $f_i(z, t) : A_i \times I \to W$, $i = 1, 2$, (d, h) *omotope ad* $E(z)$ *e tali che* $f(z, t) = f_1(z, t) \circ f_2^{-1}(z, t)$ *su* $A_3 \times I$.

Dimostrazione. Dato che P ha un sistema fondamentale di intorni costituito da aperti di olomorfia, possiamo supporre che $(A, \mathcal{O}_A)$ sia di Stein.

Scegliamo $g(z) = e^z$, $h_i(z) = z_i k_i$, $i = 1, \cdots, n$, dove le $k_i \in \mathbf{R}$ sono tali che il poliedro analitico $D^{(\delta)}$ coincide con tutto A; allora la condizione di realizzazione locale di P è soddisfatta e la tesi segue dal fatto che $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z_1}$; infatti

$$D_1^{(\delta)} = \{z \in A : \ |e^z| < e^{\alpha} + \delta\} = \{z \in A : \ \operatorname{Re} z_1 < \alpha', \alpha' > \alpha\}$$

$$D_2^{(\delta)} = \{z \in A : \ \operatorname{Re} z_1 \geq -\alpha'', \alpha'' > \alpha\} \text{ ecc.}$$

C. V. D.

Il Teorema di approssimazione per le (d, h) sezioni permette di ridurre la dimostrazione del Teorema 4.1 al caso di $f(z, t)$ « vicina all'identità », cioè a valori in U(E) e piccola in modulo.

Teorema 4.3. *Nelle ipotesi del Teorema 4.1, data* $f(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(D_2^{(\delta)}, W)$, *con* $f(z, t) \in U(E)$, *dove* U(E) *è l'intorno di* E(z) *in* W *definito in modo canonico, ed* $\|f\|_{D_2^{(\delta)} \times I}$ (*) $< \varepsilon$, ε *abbastanza piccolo, esistono due* (d, h) *sezioni* (d, h) *omotope ed* $E(z)$, $f_i(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(D_i, W)$, $i = 1, 2$, *tali che* $f(z, t) = f_1(z, t) \circ f_2^{-1}(z, t)$ *in* $D_2 \times I$.

Supponendo per il momento dimostrato questo teorema, vediamo come da questo segue immediatamente il Teorema 4.1:

data $f(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(D_2^{(\delta)}, W)$, (d, h) omotopa ad E(z), dato che $D_2^{(\delta)}$ è relativamente compatto, fissato $\delta_1 : 0 < \delta_1 < \delta$, esiste una (d, h) sezione

(*) Per definizione si intende: $|f|_{D_2^{(\delta)} \times I} = \sup_{D_2^{(\delta)} \times I} |f(z, t)|$.

globale $g(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(D^{(h_1)}, W)$ tale che $f \circ g^{-1} \in \Gamma_{(d,h)}(D_1^{(h_1)}, W)$; e $\|f \circ g^{-1}\|_{D_1^{(h_1)} \times I} < \varepsilon$; $g(z, t)$ è inoltre (d, h) omotopa ad $E(z)$. Applichiamo ora il Teorema 4.3 a $f \circ g^{-1}$; esisteranno due (d, h) sezioni globali, (d, h) omotope ad $E(z)$, $f_i(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(D_i, W)$, $i = 1, 2$, tali che $f \circ g^{-1} = f_1 \circ f_2^{-1}$ in $D_1 \times I$. Basterà allora porre $f_1(z, t) = f_1(z, t)$, $f_2(z, t) = g(z, t)^{-1} f_2 \circ (z, t)$; f_1 ed f_2 sono le (d, h) sezioni (d, h) omotope ad $E(z)$ cercate.

C. V. D.

* * *

Resta quindi da dimostrare il Teorema 4.3; questo verrà dimostrato prima per il fibrato banale, poi per il fibrato vettoriale associato ed infine nel caso generale.

LEMMA 4.4. *Sia* U *un aperto di* $\mathbf{C}^n$; *fissato uno spazio topologico compatto* I *e* H *chiuso di* I, *ogni funzione* $F(x, t)$: $U \times H \to \mathbf{C}$ *continua e* C^∞ *in* x *si può estendere a una* $F(x, t)$: $U \times I \to \mathbf{C}$ *continua e* C^∞ *in* x.

Dimostrazione. Sia $\mathscr{A}$ il fascio su $U \times I$ dei germi di funzioni a valori in $\mathbf{C}$ $f(x, t)$ continue e C^∞ in x, fissato t. Dobbiamo dimostrare che $\mathscr{A}$ è fine, cioè che le sezioni definite su un chiuso si estendono; basta dimostrare che $\mathscr{A}$ ha una partizione dell'unità.

A tale scopo è sufficiente far vedere che, dato in $U \times I$ un aperto del tipo $W \times B$, con W sfera di centro $x_0 \in U$ e raggio ε e B aperto di I, esiste allora una funzione continua e C^∞ in x, $g(x, t)$: $U \times I \to \mathbf{C}$ a supporto in $B \times W$ tale che $f(x_0, t_0) > 0$, dove $t_0 \in B$.

Sia $C_0^\infty(W)$ lo spazio delle funzioni C^∞: $U \to \mathbf{R}$ a supporto contenuto in W; $C_0^\infty(W)$ è di Fréchet.

Scegliamo $\varphi(x) \in C_0^\infty(W)$, $\varphi(x_0) > 0$. Consideriamo il chiuso di I $F = (I - B) \cup \{t_0\}$; sia $f(t)$ la funzione $F \to C_0^\infty(W)$ che manda $I - B$ in 0 e t_0 in $\varphi(x)$; dato che $C_0^\infty(W)$ è di Fréchet, per il Lemma di Cartan possiamo estendere $f(t)$ a una funzione continua $\tilde{f}(t)$: $I \to C_0^\infty(W)$. Allora se $\tilde{f}(t)$ è la funzione $x \to g(x, t)$, $g(x, t)$ è la funzione cercata.

C. V. D.

PROPOSIZIONE 4.5. *(Il Teorema nel caso del fibrato banale). Siano* $X, g, h_1, \cdots, h_k, D_i^{(h)}$ *come nel Teorema 4.1.*

Sia g *un gruppo di Lie di dimensione* n *ed* $U(\varepsilon)$ *l'intorno dell'identità dotato di coordinate canoniche. Data allora* $f(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(D_k^{(h)}, \mathscr{V})$ *dove* $\mathscr{V}$ *è il fibrato banale avente per fibra* G, $\|f(z, t)\| < \varepsilon$, ε *abbastanza piccolo, esistono due sezioni* $f_i(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(D_i, \mathscr{V})$ *tali che* $f(z, t) = f_1(z, t) \circ f_2(z, t)^{-1}$ *in* $D_k \times I$.

Dimostrazione. Poniamo:

$$^{(\delta)}P_1^{(n)} = \left\{ (z, w) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^l : \ |z| < e^{z} + \frac{\delta}{2^n}, \ |w_i| < 1 + \frac{\delta}{2^n} \right\}$$

$$^{(\delta)}P_2^{(n)} = \left\{ (z, w) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^l : \ e^{-z} - \frac{\delta}{2^n} < |z|, \ |w_i| < 1 + \frac{\delta}{2^n} \right\}$$

$$^{(\delta)}P_3^{(n)} = {}^{(\delta)}P_1^{(n)} \cap {}^{(\delta)}P_2^{(n)}$$

Poniamo

$$(\varphi, \varphi') : (X, \mathcal{O}_X) \to (\mathbf{C}^{l+1}, \mathcal{O}_{\mathbf{C}^{l+1}})$$

definito dalle sezioni $g, h_1, \cdots, h_l \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Per ipotesi allora si avrà un isomorfismo $(D_3^{(\delta)}, \mathcal{O}_X|_{D_3^{(\delta)}}) \simeq (A, \mathcal{O}_A)$, dove A è un insieme analitico definito sull'aperto di olomorfia $^{(\delta)}P_3^{(n)}$ ed $\mathcal{O}_A$ ha struttura non ridotta su A:

$$0 \to \mathcal{J} \to \mathcal{O}_{(\delta)_{P_3^{(n)}}} \to \mathcal{O}_A \to 0 .$$

Consideriamo ora il fascio non ridotto $\mathcal{D}_X$ su X; per come è definito, si avrà un isomorfismo $(D_3^{(\delta)}, \mathcal{D}_X|_{D_3^{(\delta)}}) \simeq (A, \mathcal{D}_A)$, con:

$$0 \to \mathcal{J} D_{(\delta)_{P_3^{(n)}}} \to D_{(\delta)_{P_3^{(n)}}} \to \mathcal{D}_A \to 0$$

$D_{(\delta)_{P_3^{(n)}}}$ = fascio dei germi C^∞ su $^{(\delta)}P_3^{(n)}$.

Pertanto la (d, h) sezione data $f(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(D_3^{(\delta)}, \mathcal{F})$ definisce $\tilde{f}(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(A, \tilde{\mathcal{F}})$, dove $\tilde{\mathcal{F}}$ è il fibrato beriale di fibra G su $\mathbf{C}^{l+1}$.

Vogliamo mostrare che, fissato δ_1, $0 < \delta_1 < \delta$, $\tilde{f}$ si può estendere a $F(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(^{(\delta_1)}P_3^{(n)}, \tilde{\mathcal{F}})$ piccola in modulo.

Infatti abbiamo:

$H^1(^{(\delta)}P_3^{(n)}, \mathcal{J}) = 0$ perché $^{(\delta)}P_3^{(n)}$ è di olomorfia e $\mathcal{J}$ è coerente;

$H^1(^{(\delta)}P_3^{(n)}, \mathcal{J} D_{(\delta)_{P_3^{(n)}}}) = 0$ perché $\mathcal{J} D_{(\delta)_{P_3^{(n)}}}$ ha una partizione dell'unità.

Quindi vale:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Gamma(^{(\delta)}P_3^{(n)}, D_{(\delta)_{P_3^{(n)}}}) & \longrightarrow & \Gamma(A, \mathcal{D}_A) \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \Gamma(^{(\delta)}P_3^{(n)}, \mathcal{O}_{(\delta)_{P_3^{(n)}}}) & \xrightarrow{\varphi} & \Gamma(A, \mathcal{O}_A) \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & 0 & & 0
\end{array}$$

ed inoltre, analogamente a quanto visto nel § 2:

$$\Gamma_{(d,h)}(^{(\delta)}P_3^{(n)}, D_{(\delta)_{P_3^{(n)}}}) \xrightarrow{\varphi^*} \Gamma_{(d,h)}(A, \mathcal{D}_A) \to 0$$

e per ϑ^* vale il teorema dell'immagine aperta: cioè dato K compatto di ${}^{(\theta)}P_2^{(\theta)}$ esiste una costante β tale che, data $f \in \Gamma_{(d,h)}(A, \mathscr{G}_A)$ con $\sup_{A \times I} |f| \leq \varepsilon$, f si possa rimontare ad F con $\sup_{K \times I} |F| \leq \beta\varepsilon$.

Consideriamo ora la $\tilde{f}(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(A, \tilde{\mathscr{G}})$; dato che $\tilde{f}(z, t) \in U(e)$, si ha $\rho^{-1}\tilde{f} \in \Gamma_{(d,h)}(A, \mathscr{G}_A)^n$; basta allora estendere $\rho^{-1}\tilde{f}$ a

$$\rho^{-1} F \in \Gamma_{(d,h)}({}^{(\theta_1)}P_2^{(\theta)}, D_{(\theta_1)_{P_2^{(\theta)}}}(\infty))^n \quad \text{con} \quad \sup_{({}^{\theta_1})_{P_2^{(\theta)}} \times I} |\rho^{-1} F| \leq \beta\varepsilon;$$

allora $F \in \Gamma_{(d,h)}({}^{(\theta_1)}P_2^{(\theta)}, \tilde{\mathscr{G}})$ ed è piccola in modulo.

Indichiamo d'ora in poi ${}^{(\theta_1)}P_i^{(\theta)}$ con $P_i^{(\theta)}$, $i = 1, 2, 3$. Vogliamo dimostrare il fatto seguente:

data $f(z, t): P_2^{(\theta)} \times H \to \mathbf{C}$, continua ed olomorfa in z, esiste una costante γ, non dipendente da f, tale che si possano trovare due funzioni $f_i(z, t): P_1^{(n+1)} \times H \to \mathbf{C}$, $i = 1, 2$, continue ed olomorfe in z, tali che $f = f_1 - f_2$ in $P_2^{(n+1)} \times H$.

Se inoltre $\sup_{P_2^{(n)} \times H} |f| \leq \varepsilon$, allora $\sup_{P_2^{(n+1)} \times H} |f_i| \leq \gamma\varepsilon \dfrac{2^{(n+1)(K+1)}}{\delta_1^{K+1}}$, $i = 1, 2$.

Se infine $f(z, t_0) = 0$, allora anche $f_i(z, t_0) = 0$.

A tale scopo poniamo:

$$\Gamma_1^{(n+1)} = \left\{(\xi, \eta_i) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^k : |\xi| = e^{\pi} + \frac{\delta_1}{2^{n+1}} + \frac{\delta_1}{2^{n+2}}, |\eta_i| = 1 + \frac{\delta_1}{2^{n+1}} + \frac{\delta_1}{2^{n+2}}\right\}$$

$$\Gamma_2^{(n+1)} = \left\{(\xi, \eta_i) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^k : |\xi| = e^{-\pi} - \frac{\delta_1}{2^{n+1}} - \frac{\delta_1}{2^{n+2}}, |\eta_i| = 1 + \frac{\delta_1}{2^{n+1}} + \frac{\delta_1}{2^{n+2}}\right\}$$

$$f_1(z, w, t) = \frac{1}{(2\pi i)^{k+1}} \int_{\Gamma_1^{(n+1)}} \frac{f(\xi, \eta_i, t)}{(\xi - z) \prod_i (\eta_i - w_i)} d\xi\, d\eta$$

$$f_2(z, w, t) = \frac{1}{(2\pi i)^{k+1}} \int_{\Gamma_2^{(n+1)}} \frac{f(\xi, \eta_i, t)}{(\xi - z) \prod_i (\eta_i - w_i)} d\xi\, d\eta$$

$f_1(z, w, t)$ è una funzione continua, olomorfa in (z, w), definita su $P_1^{(n+1)} \times H$ che verifica:

$$\|f_1\|_{P_1^{(n+1)} \times H} \leq \gamma\varepsilon \left(\frac{2^{n+2}}{\delta_1}\right)^{k+1} \quad \text{dove:} \quad \gamma = \int_{\Gamma_1^{(n)}} d\xi\, d\eta;$$

lo stesso vale per $f_2(z, w, t)$; infine $f = f_1 - f_2$ in $P_2^{(n+1)} \times H$.

Consideriamo ora la $F(z, t) \in \Gamma_{(r,h)}(P_2^{(0)}, \mathscr{F})$, dato che su $P_2^{(0)}$ abbiamo una struttura ridotta, F sarà:

$$\begin{array}{ll} F(z, t): & P_2^{(0)} \times I \to U(e) \quad \text{continua} \\ \text{fissato } t, & z \to F(z, t) \quad \text{è } C^\infty \\ \text{per } t \in H & z \to F(z, t) \quad \text{è olomorfa} \\ \text{per } t \in E & F(z, t) = 0. \end{array}$$

Consideriamo $F|_{P_2^{(0)} \times H}$, che è una funzione continua ed olomorfa in z, e risolviamo per prima cosa la decomposizione per questa funzione ristretta; cerchiamo cioè due funzioni continue ed olomorfe in z

$$F_i(z, t): \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} P_i^{(n)}\right) \times H \to U(e)$$

tali che su

$$\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} P_2^{(n)}\right) \times H \qquad \text{si abbia} \quad F = F_1 \circ F_2^{-1}.$$

Prendiamo la $F(z, t): P_2^{(0)} \times H \to U(e)$ con

$$\| F \|_{P_2^{(0)} \times H} \leq \beta\varepsilon = \varepsilon_2 .$$

Per quanto visto prima, esistono due funzioni continue ed olomorfe in z, $F_i^{(1)}(z, t): P_i^{(1)} \times H \to U(e)$ tali che:

$$\rho^{-1} F = \rho^{-1} F_1^{(1)} - \rho^{-1} F_2^{(1)} \qquad \text{in} \quad P_2^{(1)} \times H$$

$$\| F_i^{(1)} \|_{P_i^{(1)} \times H} \leq \gamma\varepsilon_1 \frac{2^{2(j+1)}}{\delta_1^{j+1}}$$

per ε abbastanza piccolo le F_i sono a valori in $U(e)$. Poniamo:

$$F^{(1)}(z, t): P_2^{(1)} \times H \to G;$$

$$F^{(1)}(z, t) = F_1^{(1)}(z, t)^{-1} \circ F(z, t) \circ F_2^{(1)}(z, t);$$

$F^{(1)}$ è continua ed olomorfa in z e la sua norma è (vedi [1]):

$$\| \rho^{-1} F^{(1)} \|_{P_2^{(1)} \times H} = \| \rho^{-1} F^{(1)} + \rho^{-1} F_1^{(1)} - \rho^{-1} F - \rho^{-1} F_2^{(1)} \|_{P_2^{(1)} \times H} \leq$$

$$\leq R \left[\max\left(\| \rho^{-1} F_1^{(1)} \|_{P_2^{(1)} \times H}, \| \rho^{-1} F \|_{P_2^{(1)} \times H} \right)\right]^2 \leq R \frac{\gamma^2 \varepsilon_1^2 2^{4(j+1)}}{\delta_1^{2(j+1)}}$$

dove R è una costante che dipende da G.

Prendiamo ε in modo che:

$$\frac{R\gamma^2 \varepsilon_1 2^{4(j+1)}}{\delta_1^{2(j+1)}} \leq \frac{1}{4^{j+1}}$$

e che $F_i^{(1)}$ ed $F^{(1)}$ siano a valori in $U(e)$; allora

$$\| F^{(1)} \|_{P_2^{(1)} \times H} \leq \frac{\varepsilon_1}{4^{k+1}} .$$

Ripetiamo il procedimento a partire da $F^{(1)}$.

Esistono due funzioni $F_i^{(2)}$: $P_i^{(2)} \times H \to U(e)$, $i = 1, 2$ continue ed olomorfe in z, tali che:

$$\rho^{-1} F^{(1)} = \rho^{-1} F_1^{(2)} - \rho^{-1} F_2^{(2)} \quad \text{in} \quad P_2^{(2)} \times H$$

$$\| \rho^{-1} F_i^{(2)} \|_{P_i^{(2)} \times H} \leq \gamma \frac{\varepsilon_1}{4^{k+1}} \frac{2^{2(k+1)}}{\delta_1^{k+1}} = \frac{\varepsilon_1 \gamma 2^{k+1}}{\delta_1^{k+1}} .$$

Posto:

$$F^{(2)} : P_2^{(2)} \times H \to U(e) \quad , \quad F^{(2)} = F_1^{(2)-1} * F^{(1)} * F_2^{(2)}$$

$F^{(2)}$ è continua ed olomorfa in z e

$$\| \rho^{-1} F^{(2)} \|_{P_2^{(2)} \times H} = \| \rho^{-1} F_1^{(2)} + \rho^{-1} F^{(1)} - \rho^{-1} F^{(1)} - \rho^{-1} F_2^{(2)} \|_{P_2^{(2)} \times H} \leq$$

$$\leq R \frac{\varepsilon_1^2 \gamma^2 2^{2(k+1)}}{\delta_1^{2(k+1)}} = \frac{\varepsilon_1}{4^{2(k+1)}} .$$

In generale otteniamo

$$F^{(n)} : \; P_2^{(n)} \times H \to U(e) \qquad \| F^{(n)} \|_{P_2^{(n)} \times H} \leq \frac{\varepsilon_1}{4^{n(k+1)}}$$

$$F_i^{(n+1)} : \; P_i^{(n+1)} \times H \to U(e) \qquad \text{continue ed olomorfe in } z \, , \, i = 1, 2,$$

$$\| F_i^{(n+1)} \|_{P_i^{(n+1)} \times H} \leq \frac{\varepsilon_1 \gamma}{\delta_1^{k+1}} \frac{2^{2(k+1)}}{2^{n(k+1)}}$$

$$F^{(n+1)} = F_1^{(n+1)-1} * F^{(n)} * F_2^{(n+1)} .$$

Sia

$$F_1 = \mathop{O}_{i=1}^{\infty} F_1^{(i)} : \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} P_1^{(i)} \times H \to G .$$

La serie converge perché la serie delle norme è convergente:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \| \rho^{-1} F_1^{(i)} \|_{P_1^{(i)} \times H} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma \varepsilon_1 2^{2(k+1)}}{\delta_1^{k+1} 2^{i(k+1)}} .$$

Per z abbastanza piccolo, F_1 è a valori in $U(e)$; se $F(z, t_0) = e$ allora anche $F_1^{(i)}(z, t_0) = e$ ed $F_1(z, t_0) = e$.

Analogamente si costruisce

$$F_2(z, t): \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} P_2^{(i)}\right) \times H \to U(e).$$

Infine in

$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} P_3^{(i)}\right) \times H \quad \text{si ha} \quad F_1^{-1} \circ F \circ F_2 = \lim_{n \to \infty} F^{(n)} = e$$

e quindi $F = F_1 \circ F_2^{-1}$.

Facciamo ora vedere che la decomposizione vale per le (d, h) funzioni.

Poniamo:

$$P_1^{(\delta)} = \{(z, w) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^2 : \ |z| < e^{\delta} + \delta \ , |w_i| < 1 + \delta\};$$

$$P_2^{(\delta)} = \{(z, w) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^2 : \ |z| > e^{-\delta} - \delta, |w_i| < 1 + \delta\};$$

$$P_3^{(\delta)} = P_1^{(\delta)} \cap P_2^{(\delta)}; \qquad P_i = P_i^{(0)}, \ i = 1, 2, 3.$$

Prendiamo la $F(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(P_3^{(\delta_3)}, \mathscr{F})$ data; si avrà $F(z, t) \in U(e)$ e possiamo supporre $U(e) = B_\lambda = \{x \in G : \ \|x\| < \lambda\}$.

Sia $\xi > 0$ tale che $B_\xi \cdot B_\xi \subset B_\lambda$. Quanto dimostrato nel punto precedente vale per $U(e)$ arbitrariamente piccoli.

Applichiamolo a $F(z, t)$ assumendo $U(e) = B_\xi$. Fissato allora δ_2, $\delta_2 < \delta_3$, esiste ε tale che se $\|F(z, t)\|_{P_2^{(\delta_2)} \times H} < \varepsilon$ si possano trovare due funzioni $\tilde{F}_i(z, t): P_i^{(\delta_2)} \times H \to U(e) = B_\xi$, continue ed olomorfe in z, tali che $F = \tilde{F}_1 \circ \tilde{F}_2^{-1}$ in $P_2^{(\delta_2)} \times H$.

Tenendo presente i Lemma 4.4 estendiamo $\tilde{F}_2$ a $F_2: P_2^{(\delta_2)} \times I \to B_\xi$, (d, h) funzione; poniamo

$$\tilde{F}_1 = \begin{cases} \tilde{F}_1 & \text{in } P_1 \times H \\ F \circ F_2 & \text{in } (P_2 \cap P_1) \times I \end{cases}$$

Dato che $\|\tilde{F}_1\|_{P_1 \times H} < \xi$, $\|F_2\|_{P_2 \times H} < \xi$, $\|F\|_{P_2 \times H} < \xi$, abbiamo $\|\tilde{F}_1\| < \lambda$. Estendiamo ora $\tilde{F}_1$ a $F_1: P_1 \times I \to B_\lambda$, (d, h) funzione; allora F_1 ed F_2 sono le (d, h) funzioni $P_i \times I \to B_\lambda$, $i = 1, 2$, cercate: $F = F_1 \circ F_2^{-1}$ in $P_2 \times I$.

A questo punto basta estendere il morfismo:

$(\varphi, \varphi'): (X, \mathcal{O}_X) \to (\mathbf{C}^{k+1}, \mathcal{O}_{\mathbf{C}^{k+1}})$ a un morfismo

$(\varphi, \varphi''): (X, \mathscr{D}_X) \to (\mathbf{C}^{k+1}, D_{\mathbf{C}^{k+1}})$ dove $D_{\mathbf{C}^{k+1}}$ è il fascio ridotto dei germi C^∞ su $\mathbf{C}^{k+1}$.

Abbiamo: $F_1 \in \Gamma_{(d,h)}(P_1, \tilde{\mathscr{F}})$ dove $\tilde{\mathscr{F}}$ è il fibrato banale con fibra G; cioè F_1 è una funzione continua $t \to (z \to F_1(z, t))$ definita su I a valori nello

spazio delle funzioni C^∞ : $P_1 \to G$ che è uno spazio di Fréchet con la convergenza uniforme sui compatti; F inoltre manda H nelle funzioni olomorfe $P_1 \to G$ ed E nella funzione identica. L'applicazione che manda i morfismi C^∞ : $P_1 \to G$ nei morfismi C^∞ : $D_1 \to G$ definita da $(\zeta, \zeta'') \to (\zeta, \zeta'')\cdot(\varphi, \varphi'')$ è continua e manda morfismi olomorfi in morfismi olomorfi, e il morfismo identità in quello identità. Pertanto F_1 definisce la (d, h) funzione:

$f_1(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(D_1, \mathscr{G})$; analogamente è definita la (d, h) funzione $f_2(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(D_2, \mathscr{G})$; vale $f_1(z, t), f_2(z, t) \in U(e)$ ed $f_1(z, t) \cdot f_2^{-1}(z, t) = f(z, t)$ in $D_2 \times I$.

C. V. D.

§ 5. Il Teorema nel caso generale

Siano $(X, \mathscr{C}_X), g, h_1, \cdots, h_k, D^{(i)}, D_i^{(i)}$ $i = 1, 2, 3$ come nell'enunciato del Teorema 4.1; $(W, \mathscr{C}_W)$ un fibrato in gruppi su $D^{(1)}$; $(V_W, \mathscr{C}_{V_W})$ il fibrato vettoriale associato. Vogliamo in questo paragrafo dimostrare il Teorema 4.3 al quale abbiamo ridotto il Teorema 4.1.

È data quindi $f(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(D_2^{(2)}, W)$ « vicina all'identità », cioè piccola in modulo, e dobbiamo trovare $f_1(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(D_1, W)$, $f_2(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(D_2, W)$ tali che $f = f_1 \circ f_2^{-1}$ in $D_2 \times I$.

Dato che f è piccola in modulo, quindi a valori in $U(E(z))$, è definita $\bar{\rho}^{-1} f = F \in \Gamma_{(d,h)}(D_2^{(2)}, V_W)$. Non basta però trovare F_1 e F_2 tali che $F = F_1 - F_2$ e poi considerare $\bar{\rho} F_1$ e $\bar{\rho} F_2$, perché ρ è un omomorfismo solo al primo ordine. Vedremo che sarà sufficiente alterare $F_2(z, t)$ con un automorfismo $\lambda(z, t)$ della fibra di z dipendente da $f(z, t)$, che tenga conto del fatto che $\bar{\rho}$ non è un omomorfismo.

* * *

Vogliamo studiare la relazione $a = a_1 a_2^{-1}$ in G e riportarla a una relazione equivalente in A(G). A questo scopo l'idea è (vedi [5]) quella di collegare a, a_1, a_2 ad e (= id_G) con dei cammini.

Siano cioè $f(t), f_1(t), f_2(t)$ cammini: $[0, 1] \to G$ di classe C^1 tali che $f(0) = f_1(0) = f_2(0) = e$, $f(1) = a$, $f_1(1) = a_1$, $f_2(1) = a_2$; se riusciamo a stabilire la relazione $f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t)^{-1}$, ne seguirà per $t = 1$ la relazione che ci interessa.

Ora, dato il cammino $f(t)$ di classe C^1 con $f(0) = e$, ad esso è associato in modo naturale un cammino $F(t)$: $[0, 1] \to A(G)$ di Classe C^0 nel seguente modo:

fissato $t \in [0, 1]$, allora $h \to f(t + h) \cdot f(t)^{-1}$ è un cammino C^1 con punto iniziale e; esso percio darà un vettore tangente in e e quindi un elemento $F(t) \in A(G)$ (consideriamo la struttura reale soggiacente).

Se $\mathscr{A}_e$ è l'algebra delle funzioni analitiche reali in $e \in G$, $F(t)$ è definita da

$$F(t)(g) = \left[\frac{d}{dh} g(f(t+h) * f(t)^{-1})\right]_{h=0} \qquad \text{per} \quad g \in \mathscr{A}_e$$

cioè

$$F(t)(g) = \left[\frac{\partial g}{\partial x_i}\right]_e \left[\frac{\partial \Phi_i(x, f(t)^{-1})}{\partial x_j}\right]_{x=f(t)} \left[\frac{df_j(\tau)}{d\tau}\right]_{\tau=t}$$

dove $(x, y) \to \Phi(x, y)$ è la funzione analitica che dà il prodotto in G.

Si avrà quindi, fissata la carta $(x) = (x_1, \cdots, x_{2n})$ in un intorno di e, $F(t) = (F_1(t), \cdots, F_{2n}(t))$ con:

$$F_i(t) = \left[\frac{\partial \Phi_i(x, f(t)^{-1}}{\partial x_j}\right]_{f(t)} \left[\frac{df_j(\tau)}{d\tau}\right]_t .$$

Pertanto, dato il cammino $f(t)$ di classe C^1 con $f(0) = e$, resta individuato il cammino $F(t)$ di classe C^0; viceversa dato il cammino lipchitziano $F(t)$ risulta individuato il cammino $f(t)$ di classe C come unica soluzione di:

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} F_i(t) = \vartheta_{ij}(f(t)) \dfrac{df_j(t)}{dt} & i = 1, \ldots, 2n \\ (f_1(0), \cdots, f_{2n}(0)) = (0, \cdots, 0) \end{cases}$$

dove

$$\vartheta_{ij}(x) = \left[\frac{\partial \Phi_i(y, x^{-1})}{\partial y_j}\right]_{y=x}$$

Per la risolubilità di (A) notiamo che la matrice $\vartheta_{ij}(x)$ è invertibile per ogni x, infatti:

$$\left[\frac{\partial \Phi_i(y, x^{-1})}{\partial y_j}\right]_{y=x} \left[\frac{\partial \Phi_j(z, x)}{\partial z_k}\right]_{z=x} = \left[\frac{\partial \Phi_i(y, e)}{\partial y_k}\right]_{y=e} = \delta_{ik}$$

cioè $\vartheta_{ij}(x)\, \eta_{jk}(x) = \delta_{ik}$.

Quindi (A) si puo mettere nella forma:

$$\begin{cases} f'(t) = \eta_i(f(t))\, F(t) \\ f(0) = (0, \cdots, 0) \end{cases}$$

dove le $\eta_{ij}(x)$ sono analitiche.

Osservazione 5.1. Notiamo che fra $F(t)$ ed $f(t)$ intercorre la seguente relazione:

$$F(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \rho^{-1}(f(t+h) * f(t)^{-1})$$

consideriamo infatti le strutture reali soggiacenti a G e $A(G)$, e diamo ad $U(e)$ le coordinate canoniche, allora $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} \rho^{-1}(f(t+h) * f(t)^{-1})$ è lo sviluppo al primo ordine di $f(t+h) * f(t)^{-1}$, e cioè il vettore tangente $F(t)$ associato.

Osservazione 5.2. L'equazione (A) ha soluzione anche in questo caso più generale: sia U un aperto di C^l; allora, data $F(x, t, s): U \times I \times [0, 1] \to C^n$, continua e C^∞ in x, olomorfa in x per $t \in H$, esiste un'unica soluzione di:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x, t, s)}{\partial s} = \eta(f(x, t, s))\, F(x, t, s) \\ f(x, t, 0) = (0, \cdots, 0) \end{cases}$$

con $f: U \times I \times [0, 1] \to C^n$ continua, C^∞ in x, olomorfa in x per $t \in H$.

Il seguente lemma stabilisce in $\Lambda(G)$ una relazione fra $F(t), F'(t), F''(t)$ equivalente a $f(t) = f'(t) * f''(t)^{-1}$.

Lemma 5.3. *Siano $f(t), f'(t), f''(t): [0, 1] \to G$ cammini di classe C^1 con $f(0) = f'(0) = f''(0) = e$. Allora se $F(t), F'(t), F''(t)$ sono i cammini associati, sono equivalenti le relazioni:*

$$f(t) = f'(t) * f''(t)^{-1} \quad \text{e} \quad F(t) = F'(t) - \lambda(t) * F''(t)$$

dove $\lambda(t)$ è l'automorfismo di $\Lambda(G)$ associato all'automorfismo interno di G: $x \to f(t)\, x f(t)^{-1}$.

Dimostrazione. Supponiamo che valga $f(t) = f'(t) * f''(t)^{-1}$ cioè

$$f'(t) = f(t) * f''(t).$$

Sia $g \in \mathscr{A}_e$; allora:

$$\begin{aligned}
F'(t)(g) &= \left[\frac{d}{dh} g(f'(t+h) * f'(t)^{-1})\right]_{h=0} = \\
&= \left[\frac{\partial g}{\partial x_i}\right]_{x=e} \cdot \left[\frac{\partial \Phi_i(x, f'(t)^{-1})}{\partial x_j}\right]_{x=f'(t)} \cdot \left[\frac{df'_j(\tau)}{d\tau}\right]_{\tau=t} = \\
&= \left[\frac{d}{dh} g(f(t+h) * f''(t+h) * f''(t)^{-1} * f(t)^{-1})\right]_{h=0} = \\
&= \left[\frac{\partial g}{\partial x_i}\right]_e \cdot \left[\frac{\partial \Phi_i(x, f''(t)^{-1} * f(t)^{-1})}{\partial x_k}\right]_{x=f(t)f''(t)} \cdot \left(\left[\frac{\partial \Phi_k(x, f''(t))}{\partial x_s}\right]_{x=f(t)} \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \left[\frac{df_s(\tau)}{d\tau}\right]_{\tau=t} + \left[\frac{\partial \Phi_k(f(t), x)}{\partial x_r}\right]_{f''(t)} \cdot \left[\frac{df''_r(\tau)}{d\tau}\right]_{\tau=t}\right) = \\
&= \left[\frac{\partial g}{\partial x_i}\right]_e \left[\frac{\partial \Phi_i(x, f(t)^{-1})}{dx_s}\right]_{x=f(t)} \left[\frac{df_s(\tau)}{d\tau}\right]_{\tau=t} + \\
&\quad + \left[\frac{\partial g}{dx_i}\right]_e \left[\frac{\partial \Phi_i(f(t)\, x, f''(t)^{-1} f(t)^{-1})}{dx_r}\right]_{f''(t)} \left[\frac{df''_r(\tau)}{d\tau}\right]_{\tau=t} = \\
&= F(t)(g) + (\lambda(t) * F''(t))(g);
\end{aligned}$$

e cioè, dato che questo vale per ogni $g \in \mathscr{A}_e$,

$$F'(t) = F(t) + \lambda(t) * F''(t).$$

Supponiamo viceversa che valga quest'ultima relazione; vogliamo provare che i cammini $f'(t)$ e $f(t)f''(t)$ sono uguali.

Per l'unicità della soluzione dell'equazione (A), basta far vedere che

$$\left[\frac{\partial\Phi_i(x, f'(t)^{-1})}{\partial x_j}\right]_{x=f'(t)} \cdot \left[\frac{df'_i(\tau)}{d\tau}\right]_{\tau=t} =$$

$$= \left[\frac{\partial\Phi_i(x, f''(t)^{-1} f(t)^{-1})}{\partial x_j}\right]_{x=f(t)f''(t)} \cdot \left[\frac{d(f(t)f''(\tau))}{d\tau}\right]_{\tau=t};$$

e questa è proprio la relazione a cui si perviene ripercorrendo gli stessi passaggi in senso inverso.

C. V. D.

* * *

Per ridurre il Teorema 4.3, cioè il teorema per $f(z, t)$ vicina all'identità, ad un teorema sul fibrato vettoriale associato, abbiamo bisogno di un lemma e di una definizione. Il lemma è la generalizzazione alle (d, h) sezioni della costruzione di $f(t)$ a partire da $F(t)$.

LEMMA 5.4. *Nelle ipotesi del Teorema 4.3, se* $(W, \mathcal{O}_W)$ *è un fibrato su* $D^{(h)}$ *in gruppi e se* V_W *è il fibrato vettoriale associato, posto* $I^* = I \times [0, 1]$, $H^* = H \times [0, 1]$, $E^* = E \times [0, 1]$, *indicando con* $\Gamma_{(d^*, h^*)}(D_i, V_W)$ *l'insieme delle* (d, h) *sezioni rispetto alla terna* I^*, H^*, E^*, *se* $F_i(z, t, s) \in \Gamma_{(d^*, h^*)}(D_i, V_W)$, $i = 1, 2$, *allora esiste una* (d^*, h^*) *sezione* $f_i(z, t, s) \in \Gamma_{(d^*, h^*)}(D_i W)$ *tale che fissato* (z, t) *il cammino* $s \to f_i(z, t, s)$ *di* G *sia associato al cammino* $s \to F_i(z, t, s)$ *di* A (G) *nel senso precisato prima.*

Dimostrazione. Ricopriamo D_i con una famiglia $\{U_\alpha\}$ di aperti di Stein in modo che su $D_i \cap U_\alpha$ W e V_W siano banali per ogni α.

Osserviamo intanto che il rimontamento non dipende dalla banalizzazione locale; infatti siano $z \in U_\alpha \cap U_\beta$, $t \in I$ fissati, $g_{\alpha\beta}(z)$ la funzione di transizione di W, $g^*_{\alpha\beta}(z)$ la funzioni di transizione di V_W associate alla coppia (α, β).

Ricordiamo che $g_{\alpha\beta}(z)$ è un automorfismo biolomorfo della fibra G e $g^*_{\alpha\beta}(z)$ è il corrispondente automorfismo di A (G).

Dato che fra $f_i(z, t, s)$ e $F_i(z, t, s)$ intercorre la relazione

$$(1) \qquad F_i(z, t, s) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \tilde{\rho}^{-1}(f_i(z, t, s+h) \cdot f_i(z, t, s)^{-1})$$

e dato che il diagramma a lato è commutativo,

$$\begin{array}{ccc} A(G) & \xrightarrow{\tilde{\rho}} & G \\ \downarrow g^*_{\alpha\beta}(z) & & \downarrow g_{\alpha\beta}(z) \\ A(G) & \xrightarrow{\tilde{\rho}} & G \end{array}$$

basta applicare $g^*_{\alpha\beta}(z)$ alla (1) e si ha:

$$g^*_{\alpha\beta}(z)\,F_i(z,t,s) = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{h}\, g^*_{\alpha\beta}(z)\,\bar{p}^{-1}\left(f_i(z,t,s+h)\cdot f_i(z,t,s)^{-1}\right) =$$

$$= \lim_{h\to\infty} \frac{1}{h}\,\bar{p}^{-1}\left((g_{\alpha\beta}(z)\,f_i(z,t,s+h))\cdot(g_{\alpha\beta}(z)\,f_i(z,t,s))^{-1}\right)$$

cioè $g_{\alpha\beta}(z)\,f_i(z,t,s)$ è associata a $g^*_{\alpha\beta}(z)\,F_i(z,t,s)$.

Possiamo pertanto ridurci a rimontare $F_i(z,t,s)$ su $D_i \cap U_\alpha$, dove il fibrato è banale.

Realizziamo $(D_i \cap U_\alpha, \mathcal{O}_X|_{D_i\cap U_\alpha})$ in un modello locale $(A, \mathcal{O}_A)$, con A insieme analitico in un aperto di olomorfia U di $\mathbf{C}^p$:

$$0 \to \mathcal{J} \to \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_A \to 0\,.$$

Su A consideriamo il fascio $\mathcal{D}_A$ tale che si abbia l'isomorfismo:

$$(D_i \cap U_\alpha, \mathcal{D}_X|_{D_i\cap U_\alpha}) \cong (A, \mathcal{D}_A)\,.$$

Sarà:

$$0 \to \mathcal{J}D_U \to D_U \to \mathcal{D}_A \to 0$$

dove D_U è il fascio dei germi C^∞ su U.

Sia $\mathcal{G}$ il fibrato banale con fibra G su A, le cui (d,h) sezioni sono gli elementi di $\Gamma_{(d,h)}(A,\mathcal{G})$. Se G ha dimensione n, il fibrato vettoriale associato avrà fibra $\mathbf{C}^n$ e le sue sezioni su A saranno gli elementi di $\Gamma_{(d,h)}(A,\mathcal{D}_A)^n$.

Sia $\tilde{\mathcal{G}}$ il fibrato banale con fibra G su U; abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma_{(d,h)}(U,\tilde{\mathcal{G}}) & \xrightarrow{\theta} & \Gamma_{(d,h)}(A,\mathcal{G}) \\
\uparrow \bar{\varepsilon} & & \uparrow \varepsilon \\
\Gamma(d,h)(U,D_U)^n & \xrightarrow{(\theta^*)^n} & \Gamma_{(d,h)}(A,\mathcal{D}_A)^n \to 0
\end{array}$$

Notiamo intanto che il problema è risolto per la coppia $(\tilde{\mathcal{G}}, V\bar{\varepsilon})$ di fibrati su U; cioè data la (d^*,h^*) sezione

$$F(z,t,s) \in \Gamma_{(d^*,h^*)}(U, V\bar{\varepsilon}) \simeq \Gamma_{(d^*,h^*)}(U, D_U)^n$$

esiste $f(z,t,s) \in \Gamma_{(d^*,h^*)}(U,\tilde{\mathcal{G}})$ tale che:

$$F(z,t,s) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\,\bar{p}^{-1}\left(f(z,t,s+h)\cdot f(z,t,s)^{-1}\right)$$

questa è infatti proprio l'Osservazione 5.2.

Ora è data la sezione $F(z,t,s) \in \Gamma_{(d^*,h^*)}(D_i \cap U_\alpha, V\bar{\varepsilon}) \simeq \Gamma_{(d,h)}(A,\mathcal{D}_A)^n$; sia $G(z,t,s) \in ((\theta^*)^n)^{-1}(F(z,t,s))$; a G è associata

$$g(z,t,s) \in \Gamma_{(d^*,h^*)}(U,\tilde{\mathcal{G}})$$

tale che

$$G(z, t, s) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \tilde{\rho}^{-1}(g(z, t, s+h) \cdot g(z, t, s)^{-1}).$$

Applicando ad ambo i membri $(\vartheta^*)^*$ che è continua e lineare, per la commutatività del diagramma si ottiene

$$F(z, t, s) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \tilde{\rho}^{-1}((\psi g(z, t, s+h)) \cdot (\psi g(z, t, s))^{-1})$$

e cioè $\psi(g(z, t, s))$ è la sezione associata ad F cercata.

C. V. D.

Diamo ora una definizione generale dell'azione che l'automorfismo interno $x \to f(z, t)\, x\, f(z, t)^{-1}$ induce sulle fibre del fibrato vettoriale associato.

Sia $(V, \mathcal{O}_V)$ un fibrato vettoriale su uno spazio complesso $(X, \mathcal{O}_X)$; supponiamo che $(V, \mathcal{O}_V)$ sia definito da un ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$ e da un sistema di funzioni $(g_{ij}, g_{ji}) : (U_i \cap U_j, \mathcal{O}\,|_{U_i \cap U_j}) \to (GL(n, \mathbf{C}), \mathcal{O}_{GL(n, \mathbf{C})})$.

Al fibrato $(V, \mathcal{O}_V)$ associamo un fibrato principale, sempre con gruppo strutturale $GL(n, \mathbf{C})$, individuato dallo stesso sistema (U_i, g_{ij}), dove però $GL(n, \mathbf{C})$ opera su se stesso nel seguente modo:

dato $x \in U_i \cap U_j$, $g_{ij}(x) \in GL(n, \mathbf{C})$ e data $m \in GL(n, \mathbf{C})$ poniamo $g_{ij}(x) \square m = g_{ij}(x) \cdot m \cdot g_{ji}(x)$. Indichiamo questo fibrato con $(P, \mathcal{O}_P)$. Le sue sezioni hanno la proprietà di operare sulle fibre del fibrato vettoriale dato.

Sia h una sezione olomorfa di P : $h \in \Gamma_h(X, P)$; h sarà data da

$$(h_i, h_i') : (U_i, \mathcal{O}_X\,|_{U_i}) \to (GL(n, \mathbf{C}), \mathcal{O}_{GL(n, \mathbf{C})})$$

con

$$h_i(x) = g_{ij}(x) \square h_j(x) = g_{ij}(x)\, h_j(x)\, g_{ji}(x)$$

su $U_i \cap U_j$.

Quindi $g_{ji}\, h_i = h_j\, g_{ji}$ e questo vuol dire che l'azione $v \to h_i(x)\, v$ è ben definita per gli elementi v della fibra di V su x.

Supponiamo ora che $(X, \mathcal{O}_X)$ sia di Stein in modo che abbia senso parlare di (d, h) sezioni. Definiamo allora (d, h) morfismo del fibrato $(V, \mathcal{O}_V)$ in sè una (d, h) sezione $\lambda(x, t) \in \Gamma_{(d,h)}(X, P)$.

Pertanto, fissato t, $\lambda(x, t)$ è una famiglia, al variare di x, di automorfismi della fibra di V su x, ed è continua in t come funzione: $I \to \Gamma d(X, P)$.

Se $(V, \mathcal{O}_V)$ è il fibrato vettoriale associato ad un fibrato in gruppi $(W, \mathcal{O}_W)$ su $(X, \mathcal{O}_X)$, allora si possono facilmente dare esempi di (d, h) morfismi, che corrispondono esattamente a ciò che cercavamo. Sia $f(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(X, W)$; ad $f(z, t)$ associamo un (d, h) morfismo $\varphi(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(X, P)$ in questo modo:

supponiamo che f sia data da una collezione $(f_i, f_i') : U_i \to G$ tale che su $U_i \cap U_j$ si abbia $f_j(x) = g_{ji}(x)\, f_i(x)$.

Ad ogni $a \in G$ è associato l'automorfismo interno $x \to a x a^{-1}$ e a questo è associato un automorfismo $\alpha(a)$ di $A(G)$; inoltre $\alpha : G \to GL(n, C)$ è analitica (è la rappresentazione aggiunta); pertanto si ha:

$$(\alpha * f_i, (\alpha * f_i)') : (U_i, \mathcal{O}_{U_i}) \to (GL(n, C), \mathcal{O}_{GL(n,C)})$$

e la collezione degli $\alpha * f_i$ da una (d, h) sezione di $\Gamma_{(d,h)}(X, P)$.

Infatti indichiamo con $*$ l'azione per cui ad un automorfismo di G si associa il corrispondente automorfismo di $A(G)$; cioè, per esempio, se g_{ij} sono le funzioni di transizione di W, allora le funzioni di transizione di V saranno g^*_{ij}. Dobbiamo far vedere che:

$$\alpha * f_i = g^*_{ij} (\alpha * f_j) g^*_{ji}$$

cioè $g^*_{ji} (\alpha * f_i) = (\alpha * f_j) g^*_{ji}$; si ha, tenendo presente che $\gamma^* \delta^* = (\gamma\delta)^*$:

$$(\alpha * f_j)(g^*_{ji}) = (x \to f_j x f_j^{-1})^* (g_{ji})^* = (x \to f_j g_{ji}(x) f_j^{-1})^*$$

$$(g^*_{ji})(\alpha * f_i) = g^*_{ji}(x \to f_i x f_i^{-1})^* = (x \to g_{ji}(f_i x f_i^{-1}))^* =$$

$$= (x \to f_j g_{ji}(x) f_j^{-1})^*.$$

Definiamo infine una norma sui (d, h) morfismi di V in sè.

Sia $\varphi(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(X, P)$, dove P è il fibrato principale associato al fibrato $(V, \mathcal{O}_V)$ su $(X, \mathcal{O}_X)$. Poniamo:

$$\| \varphi \| = \sup_{\substack{v \in V_x, \ \|v\| = 1 \\ x \in X \\ t \in I}} \| v - \varphi(x, t) * v \|.$$

Osserviamo che se φ è un (d, h) morfismo associato alla (d, h) sezione di un fibrato in gruppi f, allora $\|f\| \to 0 \Rightarrow \|\varphi\| \to 0$.

* * *

A questo punto possiamo ridurre il Teorema 4.3 (per f vicina all'identità) ad una proposizione equivalente per il fibrato vettoriale associato. Supponiamo infatti di aver dimostrato la seguente:

PROPOSIZIONE 5.5. *Siano* $(X, \mathcal{O}_X)$, $D^{(\delta)}$, $D_i^{(\delta)}$ $i = 1, 2, 3$ *come nel Teorema 4.3 e sia* $(V, \mathcal{O}_V)$ *un fibrato vettoriale su* $D^{(\delta)}$. *Indicata con* $V(D_3^{(\delta)})$ *la restrizione di* V *a* $D_3^{(\delta)}$ *e dato il* (d, h) *morfismo* $\varphi(z, t)$ *di* $V(D_3^{(\delta)})$ *in sè, con* $\|\varphi\| < \varepsilon$, ε *abbastanza piccolo, allora data* $F(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(D_3^{(\delta)}, V)$ *esistono per* $i = 1, 2$ $F_i(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(D_i, V)$ *tali che*

$$F(z, t) = F_1(z, t) - \varphi(z, t) * F_2(z, t) \quad \text{in} \quad D_3 \times I.$$

Da questa proposizione segue allora facilmente il Teorema 4.3:

Dimostrazione del Teorema 4.3.

È data $f(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(D_\delta^{(\delta)}, W)$, con $f(z, t) \in U(E(z))$ e $\|f\|_{D_\delta^{(\delta)} \times I} < \varepsilon$. Aggiungiamo un parametro come nel Lemma 5.3: poniamo cioè $f(z, t, s) = \tilde{\rho}(\tilde{\varphi}^{-1}(f(z, t)) \cdot s)$, $s \in [0, 1]$.

Avremo $f(z, t, 1) = f(z, t)$, $f(z, t, 0) = e$; $f(z, t, s)$ è un a (d^*, h^*) sezione. Per le osservazioni precedenti sappiamo che a $f(z, t, s)$ è associato un (d^*, h^*) morfismo $\varphi(z, t, s)$ di $V_W(D_\delta^{(\delta)})$ in sè e che $\|\varphi(z, t, s)\|$ diventa piccola quanto si vuole al tendere di ε a 0.

Per la Proposizione 5.5 esistono $F_i(z, t, s) \in \Gamma_{(d^*, h^*)}(D_i, V_W)$, $i = 1, 2$, tali che

$$\tilde{\rho}^{-1} f(z, t, 1) = F_1(z, t, s) - \varphi(z, t, s) \circ F_2(z, t, s) \qquad \text{in} \quad D_\delta \times I .$$

Per il Lemma 5.4 alle $F_i(z, t, s)$ sono associate due (d^*, h^*) sezioni $f_i(z, t, s) \in \Gamma_{(d^*, h^*)}(D_i, W)$ in modo che, fissato (z, t), i cammini in s, $F_i(z, t, s)$ ed $f_i(z, t, s)$, siano associati nel senso precisato all'inizio di questo paragrafo.

Notiamo che $\tilde{\rho}^{-1} f(z, t, 1)$ e $f(z, t, s)$ sono pure associati, per costruzione. Il Lemma 5.3 assicura allora che per ogni (z, t) in $D_\delta \times I$ vale $f(z, t, s) = f_1(z, t, s) \circ f_2(z, t, s)^{-1}$.

Basta allora porre $s = 1$ e si ottiene la relazione cercata.

C. V. D.

Siamo pertanto ricondotti a dimostrare la Proposizione 5.4.

Dimostrazione. Usiamo per prima cosa il Lemma 2.5 per « fattorizzare » le (d, h) sezioni a valori in V definite su $D_\delta^{(\delta)}$ in (d, h) funzioni, cioè in sezioni del fibrato banale: esistono un numero finito di sezioni olomorfe globali $H_1(z), \cdots, H_g(z) \in \Gamma_\lambda(D^{(\delta)}, V)$ tali che ogni $F \in \Gamma_{(d,h)}(D_\delta^{(\delta)}, V)$ si possa scrivere come

$$F(z, t) = \sum_{i=1}^{g} f_i(z, t) H_i(z)$$

dove le $f_i(z, t)$ sono (d, h) funzioni, $f_i(z, t) \in \Gamma_{(d,h)}(D_\delta^{(\delta)}, \mathscr{O}_X)$.

Questa fattorizzazione suggerisce di cercare le due soluzioni dell'equazione

$$\text{(I)} \qquad F(z, t) = F_1(z, t) - \varphi(z, t) \circ F_2(z, t)$$

ponendo

$$F_1(z, t) = \sum_{i=1}^{g} f_i'(z, t) H_i(z)$$

$$F_2(z, t) = \sum_{i=1}^{g} f_i''(z, t) H_i(z)$$

dove

$$f_i \in \Gamma_{(d,h)}(D_1, \mathscr{P}_X) \quad \text{e} \quad f_i'' \in \Gamma_{(d,h)}(D_2, \mathscr{P}_X).$$

L'equazione (1) diventa:

$$\sum_{i=1}^{q} f_i(z,t)\, H_i(z) =$$
$$= \sum_i f_i(z,t)\, H_i(z) - \varphi(z,t) \cdot \sum_i f_i''(z,t)\, H_i(z) =$$
$$= \sum_i f_i(z,t)\, H_i(z) - f_i''(z,t)\, \varphi(z,t) \cdot H_i(z)$$

L'idea è (vedi [2]) quella di mostrare che l'azione di $\varphi(z,t)$ su $H_i(z)$ equivale a quella di una matrice $G(z,t) \in GL(q, \mathbf{C})$ su f_i'', di modo, che siamo ridotti a risolvere un problema del tipo:

$$(f_1, \cdots, f_q) = (f_1, \cdots, f_q) - G(f_1'', \cdots, f_q'')$$

e questo si risolverà applicando il teorema per il fibrato banale a G con $G = G_1 \cdot G_2^{-1}$.

A questo scopo poniamo

$$\tilde{H}_i(z,t) = \varphi(z,t) \cdot H_i(z) - H_i(z) \qquad i = 1, \cdots, q$$

e osserviamo che le $\tilde{H}_i$ sono (d,h) sezioni: $\tilde{H}_i \in \Gamma_{(d,h)}(D_2^{(\delta)}, V)$.

Dato che $D_2^{(\delta)}$ è relativamente compatto, preso $\delta_1 : 0 < \delta_1 < \delta$, si avrà:

$$\| H_i \|_{D_2^{(\delta_1)}} = M < +\infty \,;\; \| \tilde{H}_i(z,t) \|_{D_2^{(\delta_1)} \times I} < \varepsilon M, \qquad i = 1, \cdots, q.$$

Applichiamo di nuovo il Lemma 2.4, e questa volta alle $\tilde{H}_i$:

$$\tilde{H}_i(z,t) = \sum_{j=1}^{q} \tilde{g}_{ij}(z,t)\, H_j(z) \quad \text{in} \quad D_2^{(\delta)} \times I$$

dove

$$\tilde{g}(z,t) \in \Gamma_{(d,h)}(D_2^{(\delta)}, \mathscr{P}_X)$$

Applicando ora il teorema dell'immagine aperta, fissato $\delta_2, 0 < \delta_2 < \delta_1$, si vede che esiste una costante $k > 0$ non dipendente da $\varphi(z,t)$ tale che

$$\| \tilde{g}_{ij}(z,t) \|_{D_2^{(\delta_2)} \times I} < \varepsilon M k$$

Sia infatti $\mathscr{B}$ lo spazio di Fréchet delle (d,h) funzioni $\Gamma_{(d,h)}(D_2^{(\delta_2)}, \mathscr{P}_X)^q$ e $\mathscr{H}$ lo spazio di Fréchet delle (d,h) funzioni $\Gamma_{(d,h)}(D_2^{(\delta_2)}, V)$; allora $\xi : \mathscr{B} \to \mathscr{H}$ definita da $\xi(g_1(z,t), \cdots, g_q(z,t)) = \sum_{i=1}^{q} g_i(z,t)\, H_i(z)$ è lineare; continua e surgettiva; quindi è aperta. Pertanto l'intorno di $O \in \mathscr{B} : V_0 = \{(g_1, \cdots, g_q) : \| g \|_{D_2^{(\delta_2)} \times I} < 1\}$ viene mandato in un intorno di $O \in \mathscr{H}$ che per $k > 0$ abba-

stanza grande contiene $U_0 = \left\{ F \in \mathscr{H} : \| F \|_{D_2^{(\delta_2)} \times I} < \frac{1}{k} \right\}$. Dato allora che $\frac{1}{\varepsilon M k} \tilde{H}_i \in U_0$, si puo supporre che $\| \tilde{g}_{ij} \|_{D_2^{(\delta_2)} \times I} < \varepsilon M k$.

L'equazione (1) assume ora questo aspetto:

$$\sum_{i=1}^{q} f_i(z,t) H_i(z) = \sum_{i=1}^{q} f_i'(z,t) H_i(z) - f_i''(z,t)(\tilde{H}_i(z,t) + H_i(z))$$

$$= \sum_{i=1}^{q} f_i'(z,t) H_i(z) - f_i''(z,t)(\tilde{g}_{ji}(z,t) H_j + \delta_{ij} H_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{q} f_i'(z,t) H_i(z) - (\tilde{g}_{ij}(z,t) + \delta_{ij}) f_j''(z,t) H_i$$

$$= \sum_{i=1}^{q} [f_i'(z,t) - (\tilde{g}_{ij}(z,t) + \delta_{ij}) f_j''(z,t)] H_i(z)$$

Posto

$$g_{ij}(z,t) = \tilde{g}_{ij}(z,t) + \delta_{ij} \quad , \quad G(z,t) = (g_{ij}(z,t))_{i,j} ,$$

si ha

$$G \in \Gamma_{(d,h)}(D_2^{(\delta_2)}, \mathscr{GL}(q, \mathbf{C})) ,$$

dove $\mathscr{GL}(q, \mathbf{C})$ è il fibrato banale con fibra $GL(q, \mathbf{C})$, e la sua norma è piccola.

Dobbiamo quindi risolvere $f = f' - Gf''$ dove si intende:

$$f(z,t) = (f_1(z,t), \cdots, f_q(z,t)) \in \Gamma_{(d,h)}(D_2^{(\delta)}, \mathscr{O}_X)^q$$

$$f'(z,t) = (f_1'(z,t), \cdots, f_q'(z,t)) \in \Gamma_{(d,h)}(D_1, \mathscr{O}_X)^q$$

$$f''(z,t) = (f_1''(z,t), \cdots, f_q''(z,t)) \in \Gamma_{(d,h)}(D_2, \mathscr{O}_X)^q .$$

Dato che G è piccola in modulo possiamo applicare il teorema per il fibrato banale: per δ_3, $0 < \delta_3 < \delta_1$ si avrà:

$$G(z,t) = G_1(z,t) \circ G_2(z,t)^{-1} \quad \text{in} \quad D_2^{(\delta_3)} \times I$$

con

$$G_i(z,t) \in \Gamma_{(d,h)}(D_i^{(\delta_3)}, \mathscr{GL}(q, \mathbf{C})) .$$

Poniamo

$$h(z,t) = G_1^{-1} \circ f(z,t) \in \Gamma_{(d,h)}(D_2^{(\delta_3)}, \mathscr{O}_X)^q .$$

Applichiamo la decomposizione ad h (dato che il fibrato è vettoriale, non è necessaria la condizione di norma piccola):

$$h(z,t) = h_1(z,t) - h_2(z,t) \quad \text{in} \quad D_2 \times I$$

con

$$h_i \in \Gamma_{(d,h)}(D_i, \mathscr{O}_X)^q .$$

Abbiamo allora in $D_2 \times I$:

$$f(z, t) = G_1(z, t) * h(z, t) = G_1(z, t)\, h_1(z, t) - G_1(z, t)\, h_2(z, t) =$$

$$= G_1(z, t) * h_1(z, t) - G(z, t)\, G_2(z, t)\, h_2(z, t)\,.$$

Basterà allora porre:

$$f_1(z, t) = G_1(z, t) * h_1(z, t) \in \Gamma_{(L,K)}(D_1, \mathscr{O}_X)^q$$

$$f_2(z, t) = G_2(z, t) * h_2(z, t) \in \Gamma_{(L,K)}(D_2, \mathscr{O}_X)^q\,.$$

C. V. D.

Bibliografia

[1] H. Grauert (1957) – *Approximationssätze für holomorphen Funktionen mit Werten in komplexen Raumen*, « Math. Annalen », *133*.

[2] H. Grauert (1957) – *Holomorphen Funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen*, « Math. Ann. », *133*.

[3] H. Grauert (1958) – *Analytische Faserungen über holomorph vollständigen Räumen* « Math. Ann. », *135*.

[4] A. Andreotti and R. Narasimhan (1964) – *Oka's heftungs lemma and the Levi problem for complex spaces*, « Transactions of the Amer. Math. Soc. », *111*.

[5] H. Cartan (1958) – *Espaces fibrés analytiques*, Symposium internacional de topologia algebraica.

[6] H. Grauert (1955) – *Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räumen*, « Math. Ann. », *129*.

[7] B. Malgrange (1966) – *Ideals of differentiable functions*, Oxford Univ. Press and Tata Institute of Fundamental Research.

[8] C. Chevalley (1946) – *The theory of Lie groups*, Princeton.

[9] N. Steenrod (1951) – *The topology of fibre bundles*, Princeton.