LEONIDA EUGENIO KRIVOCHEINE (1), KIN-VINGH LEUNG (2),
MEHMET NAMIK OĞUZTÖRELI (3) (4) e DANA SALANDI (5)

Analisi matematica. - Sur l'extension du probleme de Goursat pour une classe d'equations integro-differentielles d'Urysohn-Mangeron (*)

A Monsieur le Professeur J. L. Geronimus
pour son 75^e anniversaire.

Riassunto: Gli autori, illuminati dall'indelebile opera matematica dell'Illustre Accademico Linceo Mauro Picone e prendendo le mosse dai lavori del compianto P. S. Urysohn e dalla ricca messa dei risultati concernenti le equazioni polivibranti introdotti dal Prof. D. Mangeron e chiamati poscià da vari scienziati «equazioni di Mangeron», espongono in ciò che segue alcuni teoremi pertinenti ad una larga estensione del problema di Goursat per una classe di equazioni integro-differenziali non lineari di Urysohn-Mangeron, mentre in una delle loro Note susseguenti ne daranno alcune interpretazioni fisiche e, in corrispondenza a certi sistemi concreti, il compendio proveniente dalle calcolatrici elettroniche.

1. - Les auteurs, illuminés par l'oeuvre indélébile de M.M. Picone, Maitre à nous tous [1], tout en tenant compte des travaux initiés il y a un demi-siècle par le très prématurément disparu P.S. Urysohn concernant un certain type d'équations intégrales non linéaires [2] et bien également des recherches de M.D. Mangeron sur les systèmes mathématiques aux opérateurs polyvibrants [3], appelés ensuite par différents hommes de sciences «équations de Mangeron» [4] et dont les fruits ont surpassés de beaucoup la promesse des fleurs, étudient dans ce qui suit une assez large extension du problème de Goursat concernant une importante classe d'équations intégro-différentielles non linéaires de type d'Urysohn-Mangeron.

---

(1) Università di Stato della R.S.S. Kirgizia, Frunze, U.R.S.S.
(2) Department of Computer Science, Sir George Williams University, Montreal, P.Q., Canada.
(3) Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada. In present: Department of Mathematics, University of Western Australia, Nedlands, W.A., Australia.
(4) The research reported in this paper was supported in part by the National Research Council of Canada.
(5) Facoltà di Matematica dell'Università di Perugia.
(*) Memoria presentata dall'Accademico Mauro Picone il 8-2-1974.

2. - Soit le problème généralisé de Goursat

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
&u(x, \alpha) = \varphi\,[x, \int_{\alpha}^{\gamma} P(x, \tau, u)\, d\tau],\\
&u(a, t) = \psi\,[t, \int_{a}^{b} Q(t, \xi, u)\, d\xi],\\
&\varphi\,[\cdot]\,|_{x=a} = \psi\,[\cdot]\,|_{t=\alpha} = p = \text{const.}
\end{aligned}
$$

concernant la classe suivante d'équations intégro-différentielles non linéaires d'Urysohn-Mangeron.

$$
(2)\qquad u''_{xt} = f\,[x, t, u, \int_{a}^{x} M(x, t, \xi, u)\, d\xi, \int_{\alpha}^{t} N(x, t, \tau, u)\, d\tau],
$$

où $\varphi(x, v_1)$, $P(x, \tau, v_2)$, $\psi(t, v_3)$, $Q(t, \xi, v_4)$, $f(x, t, v_5, v_6, v_7)$, $M(x, t, \xi, v_4)$, $N(x, t, \tau, v_2)$ sont des fonctions définies et continues dans le domaine

$$
D = \{a \leqslant x, \xi \leqslant b, \alpha \leqslant t, \tau \leqslant \gamma, 0 \leqslant |v_i| \leqslant r_i, i = \overline{1, 7}, r_i = \text{const.}\}
$$

et y satisfont par rapport aux variables v_i les conditions de Lipschitz. Notons par

$$
L_{\varphi}(x)\,,\ L_{P}(x, \tau)\,,\ L_{\psi}(t)\,,\ L_{Q}(t, \xi)\,,\ L_{f_i}(x, t)\,,\ i = \overline{1,3}\,,\ L_{M}(x, t, \xi)\,,\ L_{N}(x, t, \tau)\,,
$$

respectivement, les coefficients lipschitziens que nous supposons en outre continues dans D.

Tout en soulignant le fait qu'on n'a pas abordé jusqu'aujourd'hui, d'après ce que nous savons, des problèmes tels que (1), (2) dans cette forme assez générale, on procède à l'intégration de l'équation intégro-différentielle d'Urysohn-Mangeron (2) tout en y tenant compte des conditions (1). On aboutit à l'équation intégrale non linéaire suivante

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
u(x, t) ={}& \\
&\varphi\,[x, \int_{\alpha}^{\gamma} P(x, \tau, u(x, \tau))\, d\tau] + \psi\,[t, \int_{a}^{b} Q(t, \xi, u(\xi, t))\, d\xi] - p\, + \\
&\int_{a}^{x}\!\int_{\alpha}^{t} f\,[\eta, \theta, u(\eta, \theta), \int_{a}^{\eta} M(\eta, \theta, \xi, u(\xi, \theta))\, d\xi, \int_{\alpha}^{\theta} N(\eta, \theta, \tau, u(\eta, \tau))\, d\tau]\, d\theta\, d\eta \equiv \\
&A\,[u]\,.
\end{aligned}
$$

On en conclut, d'après le fait qu'on remonte sans difficulté de l'équation intégrale (3) au système intégro-différentiel (1), (2), que *le problème de l'intégration de l'équation intégrale* (3) *est équivalent à celui de la résolution du système intégro-différentiel non linéaire aux opérateurs hyperboliques* (1), (2).

Après avoir choisi pour norme la définition

$$\| \cdot \| = \max_{D} | \cdot |$$

et avoir pris deux fonctions arbitraires $u_1, u_2, \in D$, on en déduit de l'équation intégrale non linéaire (3) l'inégalité qui suit

$$\| A[u_2] - A[u_1] \| \leqslant$$

$$(4) \qquad \begin{gathered} \| L_{\varphi}(x) \int_{\alpha}^{\gamma} L_{P}(x, \tau)\, d\tau + L_{\psi}(t) \int_{a}^{b} L_{Q}(t, \xi)\, d\xi + \\ \int_{a}^{x}\int_{\alpha}^{t} [L_{1f}(\eta, \theta) + L_{2f}(\eta, \theta) \int_{a}^{\eta} L_{M}(\eta, \theta)\, d\theta + L_{3f}(\eta, \theta) \int_{\alpha}^{\theta} L_{N}(\eta, \theta, \tau)\, d\tau]\, d\theta\, d\eta \| \cdot \\ \| u_2 - u_1 \| \equiv \| v(x, t) \| \cdot \| u_2 - u_1 \| \equiv v \cdot \| u_2 - u_1 \| \cdot \end{gathered}$$

D'où le suivant

Théorème 1. — *Si, dans (4), on a $v < 1$, l'opérateur A réalise la condensation des représentations et applique par suite l'ensemble des fonctions continues du domaine* D *dans l'une de ses parties et par conséquent l'équation* (3) *et donc le problème* (1), (2) *possèdent, d'après le principe du point fixe de Banach, dorénavant classique, une solution continue, ayant les dérivées* $u'_x(x, t)$, $u'_t(x, t)$, $u''_{xt}(x, t)$, $(x, t) \in D$, *elles aussi continues dans* D.

On aboutit à la construction effective de la solution du problème (1), (2) *à la suite de l'application de la méthode des approximations successives, définie par les formules de récurrence*

$$(5) \qquad u_n(x, t) = A[u_{n-1}(x, t)] \; , \; n = 1, 2, \ldots$$

et le processus des approximations est convergente, c'est-à-dire l'on a

$$(6) \qquad \lim_{n \to \infty} u_n(x, t) = u(x, t) \,.$$

3. - Soit

$$(7) \qquad r_n(x, t) \equiv u_n(x, t) - A[u_n]$$

la déviation entre la fonction u_n que l'on obtient à la suite de l'application de la n-ième formule de récurrence (5) et la fonction $A[u_n]$, correspondante à la n-ième approximation u_n, que l'on en déduit de l'équation intégrale non linéaire (3).

Il en résulte le théorème qui suit concernant l'évaluation de l'erreur commise $\| u_n - u \|$.

THÉORÈME 2. — *Dans les conditions ci-dessus a lieu l'inégalité*

$$\| u_n - u \| \leqslant \| r_n (x, t) \| : (1 - \nu) = \rho_n \,, \tag{8}$$

ou bien cette autre plus élastique

$$| u_n (x, t) - u (x, t) | \leqslant | r_n (x, t) | + | v (x, t) | \rho_n, (x, t) \in D \,. \tag{9}$$

4. - Passons maintenant à l'étude d'une variante du problème (1), (2), à savoir, considérons ce problème-ci correspondant au *cas linéaire*, c'est-à-dire soit

$$\begin{gathered} u (x, \alpha) = \varphi_1 (x) + \int_\alpha^\gamma R (x, \tau) u (x, \tau) d \tau \,, \\ u (a, t) = \psi_1 (t) + \int_a^b H (t, \xi) u (\xi, t) d \xi \,, \\ \varphi_1 (a) = \psi_1 (\alpha) \,, \; R (a, \tau) \equiv H (\alpha, \xi) \equiv 0 \end{gathered} \tag{10}$$

et

$$\begin{gathered} u''_{xt} = f_1 (x, t) + g (x, t) u (x, t) + \\ \int_a^x S (x, t, \xi) u (\xi, t) d \xi + \int_\alpha^t T (x, t, \tau) u (x, \tau) d \tau \end{gathered} \tag{11}$$

une extension linéaire du problème de Goursat concernant une classe d'équations intégro-différentielles linéaires d'Uryson-Mangeron, où les fonctions $\varphi_1 (.)$, $R (.)$, $\psi_1 (.)$, $H (.)$, $f_1 (.)$, $g (.)$, $S (.)$, $T (.)$ sont des fonctions définies et continues dans le domaine

$$D_1 = \{a \leqslant x, \xi \leqslant b, \alpha \leqslant t, \tau \leqslant \gamma\} \,.$$

A la suite de l'intégration de l'équation (11), on obtient, tout en tenant compte des conditions (1), l'équation intégrale linéaire

$$\begin{gathered} u (x, t) = \lambda (x, t) + \int_\alpha^\gamma R (x, \tau) u (x, \tau) d \tau + \\ \int_a^b H (t, \xi) u (\xi, t) d \xi + \int_a^x \int_\alpha^t W (x, t, \xi, \tau) u (\xi, \tau) d \tau d \xi \,, \end{gathered} \tag{12}$$

où les fonctions $\lambda (.)$, $R (.)$, $H (.)$, $W (.)$ doivent être considérées connues et continues dans le domaine D_1.

De l'examen de l'équation intégrale (12) ou bien du système (10), (11) il en résulte l'existence d'un nombre de différences qui séparent le problème classique de Goursat de nos résultats. À savoir, le problème (10), (11) peut avoir une solution unique dans la classe des fonctions $C^{1,1} \in [a, b] \times [\alpha, \gamma]$, ou bien ce problème n'a pas de solutions, ou bien encore ce problème ne possède pas une solution unique.

Bornons nous dans cette Note au cas où le problème (10), (11) possède une solution unique et construisons la suite des solutions approchées de ce problème en utilisant les formules de récurrence

$$u_n(x, t) = \lambda(x, t) + \int_\alpha^\gamma R(x, \tau)\,[u_{n-1}(x, \tau) + \alpha_n]\,d\tau +$$

$$\int_a^b H(t, \xi)\,[u_{n-1}(\xi, t) + \alpha_n]\,d\xi + \int_a^x\!\!\int_\alpha^t W(x, t, \xi, \tau)\,[u_{n-1}(\xi, \tau) + \alpha_n]\,d\tau\,d\xi\,, \tag{13}$$

$$(n = 1, 2, \ldots)\,,$$

où l'on a mis

$$\alpha_n = \int_a^b\!\!\int_\alpha^\gamma [u_n(x, t) - u_{n-1}(x, t)]\,r(x, t)\,d t\,d x \tag{14}$$

et où en outre $r(.)$ est une fonction donnée, intégrable dans le domaine D_1.

On en déduit le suivant

Théorème 3. — *La succession* $\{u_n(x, t)\}_0^\infty$ *converge absolument et uniformément vers la solution exacte* $u(x, t)$ *du problème* (10), (11) *si a lieu l'inégalité*

$$\nu_1 = \| \int_\alpha^\gamma | R(x, \tau) |\,d\tau + \int_a^b | H(\xi, t) |\,d\xi + \int_a^x\!\!\int_\alpha^t | W(x, t, \xi, \tau) |\,d\tau\,d\xi \| \,.$$

(15)

$$(1 + \int_a^b\!\!\int_\alpha^\gamma | r(x, t) |\,d t\,d x) < \frac{1}{2}\,.$$

Remarques. - 1°) Les auteurs, tout en réservant l'une de leurs prochaines Notes pour la discussion des cas où l'unicité de la solution du problème (10), (11) n'en est pas plus assurée, se proposent d'exposer certains résultats acquis concernant les critères d'être « bien posés » de différents problèmes généralisés de Goursat ou bien de problèmes à la frontière pour diverses classes d'équations intégro-différentielles non linéaires de type de Mangeron, aux opérateurs polyvibrants, tandis que, dans une autre Note on tachera de donner quelques interprétations physiques des problèmes étudiés et tant que bien compendieusement les résultats obtenus pour certains modèles concrets à la suite des programmations adéquates aux ordinateurs.

2°) Nombre de détails algorithmiques et quelques-uns des résultats nouveaux dans l'ordre d'idées ci-dessus seront insérés dans le *Bulletin de l'Institut Polytechnique de Jassy*.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Picone : *a*) *La mia vita*. Tip. Eredi Dott. G. Bardi, Roma, 1972 ; *b*) Mauro Picone, dans le Volume « Duodecim Doctorum Virorum Vitae et Operum Notitia ». Pontificia Academia Scientiarum A.D. MCMLXX, pp. 117-146.

[2] P. S. Urysohn : *a*) *Ob odnom tipe nelineinykh integral' nykh uravnenii*. « Matem. Sb. », **31**, 236-255 (1924) ; *b*) *Trudy po topologii i drugim oblastiam matematiki*, vols. 1, 2. Moscou et Leningrad, pp. 1-992 (1951).

[3] D. Mangeron : *a*) *Problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali con caratteristiche reali multiple*. « Rend. Accad. sci fis., mat., Napoli », (4), II, 28-40 (1932) ; *b*) *Problèmes à la frontière pour les équations polyvibrantes d'ordre supérieur*. « C.r. Acad. Sci. Paris », **204**, 94-96, 544-546, 1022-1024 (1937) ; **266**, 976-978, 1050-1053, 870-873, 1103-1106, 1121-1124 (1968) et d'autres encore.

[4] *a*) L. E. Krivochène, dans le volume « Trudy Tretiei Sibirskoi Konferentsii po Matematike i Mehanike », Tomski Politehniceskii institut, Tomsk, 1964.

b) Ju M. Berezanskii, *Expansion in Eingefunctions of Selfadjoint Operators*. American Mathematical Society Translations of Mathematical Monographs, Vol. 17, Providence, R.I., 1968. Voir, en part. Chap. IV.

c) S. Easwaran, *A Study on certain higher order partial differential equations of Mangeron*. Doctoral Dissertation. Sci. Adviser Prof. Dr. M. N. Oguztoreli. Dept. of Mathematics, University of Alberta, 1972.

d) G. D. Birkhoff, W. Gordon, *On the draftsman's and related equations*. « J. Approx. Theory », 1, 199-208 (1968).

e) M. N. Oguztoreli, K. V. Leung, *Numerical solution of a Darboux problem for a polyvibrating equation of Mangeron*, I. « Bull. Soc. Roy. Sci. Liège », N° 5-6, pp. 269-275 (1973). et d'autres encore.