A. M. PASTORE

Connessioni per campi vettoriali 2-Osculatori (*)

Introduzione

In questa nota si considerano, su una varietà C^∞-differenziabile, i campi vettoriali r-osculatori (4), (5); si munisce l'insieme D dei campi vettoriali r-osculatori, con $r \in N^*$, di una struttura di algebra di Lie e, per ogni $r \in N^*$, si munisce l'insieme D^r dei campi vettoriali p-osculatori $(1 \leq p \leq r)$ di una struttura di modulo sull'anello delle funzioni C^∞-differenziabili.

Si definisce su D e su D^r la nozione di connessione, con diverse proprietà di localizzabilità, determinandone i parametri nel caso $r = 2$.

Ad ogni connessione su D^2 si associano una connessione vettoriale ed una connessione per campi tensoriali doppi simmetrici controvarianti.

Si dà poi l'esempio di una connessione su D^2 dedotta da una assegnata connessione vettoriale.

Si determinano diverse proprietà inerenti al confronto di due connessioni su D^2 e si definisce, infine, la curvatura di una connessione su D^2, ponendone in evidenza le relazioni con le curvature delle connessioni associate.

Prime definizioni e proprietà

Si indicano con V una varietà C^∞-differenziabile, n-dimensionale, con F l'algebra delle funzioni C^∞-differenziabili su V, con A l'insieme degli aperti di V e con $F(U)$ l'algebra delle funzioni C^∞-differenziabili sulla sottovarietà aperta U.

Def. 1 - Sia X un R-endomorfismo di F. Si dice *applicazione* $(s+1)$ *-lineare associata ad* X, l'applicazione $\overset{(s)}{X}$ di F^{s+1} in F così definita:

per $s = 0$: $\qquad \overset{(0)}{X} = X$

per ogni intero $s \geq 1$:

(*) Memoria presentata dall'Accademico Enrico Bompiani. Il lavoro è stato eseguito con un contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per le strutture Algebriche e Geometriche e loro Applicazioni.

N. B. Per ragioni tipografiche il simbolo di prodotto tensoriale è stato sostituito con il simbolo *.

$$\overset{(s)}{X}(f_1, \ldots, f_{s+1}) = X(f_1 \cdot f_2 \ldots f_{s+1}) - \tag{1.1}$$
$$- \sum_{k=1}^{s} \frac{\sum}{\sigma \in G_{s+1}} \frac{(-1)^{s-k}}{k!\,(s+1-k)!} f_{\sigma(k+1)} \ldots f_{\sigma(s+1)} \cdot X(f_{\sigma(1)} \ldots f_{\sigma(k)}),$$

ove G_{s+1} indica il gruppo delle permutazioni σ dell'insieme

$$\{1, 2, \ldots, s+1\}.$$

Def. 2 - Un R-endomorfismo X non nullo di F si dice un *campo vettoriale r-osculatore* su V ($r \in N^*$) se, considerata la successione $(\overset{(i)}{X})_{i \in N}$ delle applicazioni multilineari associate a X secondo la Def. 1, esiste $r \in N^*$ tale che per ogni $s \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ le applicazioni $\overset{(s)}{X}$ sono tutte non nulle, mentre è nulla l'applicazione $(r+1)$- lineare $\overset{(r)}{X}$.

È ovvio allora che per ogni intero $t > r$ si ha $\overset{(t)}{X} = 0$.

Si conviene d'ora in avanti di considerare l'endomorfismo nullo di F come campo vettoriale 1-osculatore.

Si osservi che per $r = 1$ la nozione di campo vettoriale 1-osculatore coincide con l'ordinaria nozione di campo vettoriale differenziabile sulla varietà V.

Si riportano le seguenti proposizioni dimostrate in [4].

Prop. 1. - *Sia* X *un R-endomorfismo non nullo di F.* X *è un campo vettoriale r-osculatore su* V *con* $r > 1$, *se e solo se, per ogni* $s \in \{1, \ldots, r-1\}$ *e quali che siano le funzioni* $g_1, \ldots, g_s$ *di F, l'R-endomorfismo di F,*

$$\overset{(s)}{X}_{g_1 \ldots g_s} : f \longrightarrow \overset{(s)}{X}(f, g_1, g_2, \ldots, g_s)$$

è un campo vettoriale $(r-s)$*-osculatore.*

Prop. 2. - *Ogni campo vettoriale* r*-osculatore è localizzabile.*

Prop. 3. - *Sia* X *un campo vettoriale* r*-osculatore su* V *e sia* $f \in F$. *Allora per ogni carta* (U, φ), *di coordinate locali* (x^i), *posto* $F = f \circ \varphi^{-1}$, *risulta:*

$$(X f)_{|U} = X^i \partial_i F + \frac{1}{2} X^{i_1 i_2} \partial_{i_1 i_2} F + \ldots + \frac{1}{k!} X^{i_1 i_2 \ldots i_k} \partial_{i_1 i_2 \ldots i_k} F + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{r!} X^{i_1 i_2 \ldots i_r} \partial_{i_1 i_2 \ldots i_r} F,$$

ove

$$\partial_{i_1 i_2 \ldots i_k} F = \frac{\partial^k F}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2} \ldots \partial x^{i_k}}, \quad X^{i_1 i_2 \ldots i_k} = \overset{(k-1)}{X}_{|U}(x^{i_1}, x^{i_2}, \ldots, x^{i_k})$$

Le funzioni $X^i, X^{i_1 i_2}, \ldots, X^{i_1 i_2 \ldots i_r}$ si dicono *componenti* del campo vettoriale r-osculatore X rispetto alla carta (U, φ) e sono ovviamente funzioni differenziabili su U.

Si danno senza dimostrazione le seguenti proposizioni.

Prop. 4. - *Se* X *è un campo vettoriale* r*-osculatore su* V, *per ogni aperto non vuoto* U *esiste un unico campo vettoriale* $X_{|U}$ s*-osculatore* $(1 \leqslant s \leqslant r)$ *sulla sottovarietà* U *tale che*

$$\forall f \in F \ : \ X_{|U}(f_{|U}) = X(f)_{|U} \ .$$

$X_{|U}$ *si chiama restrizione di* X *ad* U.

Prop. 5. - *Sia* X *un campo vettoriale* r*-osculatore sulla sottovarietà aperta* A *di* V. *Per ogni* $p \in A$ *esistono un intorno aperto* W *di* p, *incluso in* A *ed un campo vettoriale* s*-osculatore* $(1 \leqslant s \leqslant r)$ $\overline{X}$ *su* V, *tali che* $\overline{X}_{|W} = X_{|W}$.

Nel seguito si indicherà con D^r $(r \in N^*)$ l'insieme dei campi vettoriali p-osculatori su V con $p \in \{1, 2, ...r\}$. Tale insieme può essere munito naturalmente di una struttura di spazio vettoriale su R e di F-modulo.

Di conseguenza l'insieme $D = \bigcup_{r \in N^*} D^r$ ha una struttura di spazio vettoriale reale e di F-modulo e può inoltre essere munito di struttura di algebra di Lie.

Infatti si dimostra che, se X ed Y sono campi vettoriali osculatori rispettivamente di ordine r ed s su V, l'R-endomorfismo di F, $X \circ Y$ è un campo vettoriale t-osculatore su V con $t \leqslant r + s$;
e l'R-endomorfismo di F, $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$ è un campo vettoriale t-osculatore con $t \leqslant r + s - 1$.

In particolare sussiste la seguente

Prop. 6. - *Se* $X_1, X_2, ...X_r$ *sono* r *campi vettoriali* 1*-osculatori non nulli su* V, *l'R-endomorfismo di F,* $X_1 \circ X_2 \circ ... \circ X_r$ *è un campo vettoriale* r*-osculatore su* V *e l'applicazione* r*-lineare ad esso associata è il campo tensoriale simmetrico di specie* (r, o), $r!\, S(X_1 * X_2 * ... * X_r)$, *ove* S indica l'operatore di simmetrizzazione.

Dalla proposizione precedente si deduce subito che per ogni carta (U, φ) gli R-endomorfismi di $F(U)$,

$$e_i = \partial_i,\ e_{i_1 i_2} = \partial_{i_1 i_2} = e_{i_1} \circ e_{i_2},\ ...,\ e_{i_1 i_2 ... i_r} = \partial_{i_1 i_2 ... i_r} = e_{i_1} \circ e_{i_2} \circ \cdots \circ e_{i_r}\ ,$$

sono rispettivamente campi vettoriali 1-osculatori, 2-osculatori, ..., r-osculatori sulla sottovarietà U.

Segue facilmente la dimostrazione della seguente

Prop. 7. - *Se* X *è un campo vettoriale* r*-osculatore di componenti* $X^i, X^{i_1 i_2}, ..., X^{i_1 i_2 ... i_r}$ *rispetto ad una carta* (U, φ), *l'*R*-endomorfismo* X' *di* F (U) *tale che*

$$\forall f' \in F(U) \ : \ X'(f') = X^i \partial_i F + \frac{1}{2} X^{i_1 i_2} \partial_{i_1 i_2} F + ... + \frac{1}{r!} X^{i_1 i_2 ... i_r} \partial_{i_1 i_2 ... i_r} F\ ,$$

ove $F = f' \circ \varphi^{-1}$, *è un campo vettoriale* s*-osculatore* $(1 \leqslant s \leqslant r)$ *sulla sottovarietà* U, *ed è* $X' = X_{|U}$.

Ne consegue che

$$X_{|U} = X^i e_i + \frac{1}{2} X^{i_1 i_2} e_{i_1 i_2} + ... + \frac{1}{r!} X^{i_1 i_2 ... i_r} e_{i_1 i_2 ... i_r}$$

e quindi $\left(e_i \ , \ \frac{1}{2} e_{i_1 i_2}, \dots, \frac{1}{r!} e_{i_1 i_2 \dots i_r}\right)$ $(1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots \leqslant i_r \leqslant n)$ rappresenta una base dell'F (U)-modulo D^r (U) (³).

In particolare, se X è un campo vettoriale 2-osculatore di componenti $X^i, X^{i_1 i_2}$ rispetto ad una carta (U, φ), per ogni carta (U', φ') con $U \cap U' \neq \emptyset$, con ovvio significato dei simboli, risulta:

$$e_i = \vartheta_i^{i'} e_{i'} \quad ; \quad e_{i_1 i_2} = \vartheta_{i_1}^{i'_1} \vartheta_{i_2}^{i'_2} e_{i'_1 i'_2} + \vartheta_{i_1 i_2}^{i'} e_{i'}$$

$$X^i = X^{i'} \vartheta_{i'}^{i} + \frac{1}{2} X^{i'_1 i'_2} \vartheta_{i'_1 i'_2}^{i} \ ;$$

$$X^{i_1 i_2} = X^{i'_1 i'_2} \vartheta_{i'_1}^{i_1} \vartheta_{i'_2}^{i_2}$$

ove $$\vartheta_{i'}^{i} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \quad , \quad \vartheta_{i'_1 i'_2}^{i} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'_1} \partial x^{i'_2}} \ .$$

2. Connessioni per campi vettoriali osculatori

Def. 3. - Chiamasi *connessione* su D (o per campi vettoriali osculatori) ogni F-omomorfismo.

$$\nabla : D^1 \longrightarrow \mathrm{End}_R(D) \text{ tale che,}$$

posto $\nabla(X) = \nabla_X$ per ogni $X \in D^1$, risulti:

a) $\forall\, r \in N^*, \forall\, X \in D^1 : \nabla_X (D^r) \subset D^r$

b) $\forall\, f \in F, \forall\, X \in D^1, \forall\, F \in D : \nabla_X (f F) = X(f) F + f \nabla_X F.$

Def. 4. - Chiamasi *connessione* su D^r $(r \in N^*)$ ogni F-omomorfismo
$\nabla^r : D^1 \longrightarrow \mathrm{End}_R (D^r)$ tale che:

a) $\forall\, X \in D^1, \forall\, p \in N^*, 1 \leqslant p \leqslant r \ : \ \nabla_X^r (D^p) \subset D^p.$

b) $\forall\, X \in D^1, \forall\, f \in F \ , \forall\, F \in D^r \ : \ \nabla_X^r (f F) = X(f) F + f \nabla^r_X F.$

Si provano facilmente le seguenti proposizioni:

Prop. 8. - *Ogni connessione ∇^r su D^r determina in modo naturale una connessione ∇^p su D^p, $p \in \{1, \dots r\}$, che prende il nome di connessione canonicamente indotta da ∇^r su D^p.*

Ogni connessione su D determina in modo canonico una connessione su D^r, per ogni $r \in N^*$.

Corollario 1. - Se ∇ è una connessione su D e se ∇^r è la connessione canonicamente indotta da ∇ su D^r, per ogni intero $p \in \{1, 2, \dots r\}$, le connessioni canonicamente indotte su D^p da ∇ e ∇^r coincidono.

Prop. 9. - *Ogni connessione su* D (o su D^r, $r \in N^*$) *è localizzabile.*

La dimostrazione è analoga a quella per le connessioni lineari (2), (3).

Nel seguito si considerano solo connessioni su D^2, che si indicano semplicemente con ∇.

Prop. 10. *Ogni connessione* ∇ *su* D^2 *determina in modo unico una connessione vettoriale* $\nabla^{(1)}$ *ed una connessione tensoriale* ∇^* *per campi tensoriali simmetrici controvarianti di specie* (2,0), *che si dicono connessioni associate alla connessione data.*

L'esistenza e l'unicità di $\nabla^{(1)}$ sono assicurate dalla Prop. 8. Si osservi, inoltre, che ogni connessione su σ^2_0 (ove σ^2_0 indica l'F-modulo dei campi tensoriali simmetrici controvarianti di specie (2,0) è localizzabile e quindi essa è nota se è noto come opera su elementi di σ^2_0 del tipo $Y * Z + Z * Y$, con Y e Z campi vettoriali.

Si indichi, per ogni $F \in D^2$, con $B(F)$ l'applicazione bilineare associata ad F, cioè $\overset{(1)}{F} = B(F) \in \sigma^2_0$.

Ne consegue, per la Prop. 6, che, quali che siano i campi vettoriali Y e Z, risulta $B(Y \circ Z) = Y * Z + Z * Y$.

Se si pone $\nabla^*_X (B(Y \circ Z)) = \nabla^*_X (Y * Z + Z * Y) = B(\nabla_X (Y \circ Z))$, si ha, con ovvio significato dei simboli:

$$\nabla^*_{fX+gX'} (B(Y \circ Z)) = f\,\nabla^*_X (B(Y \circ Z)) + g\,\nabla^*_{X'} (B(Y \circ Z)),$$

$$\nabla^*_X f(B(Y \circ Z)) = X(f)\, B(Y \circ Z) + f\,\nabla^*_X (B(Y \circ Z)).$$

Quindi si può affermare, per la localizzabilità di ∇, che esiste una ed una sola connessione tensoriale ∇^* su σ^2_0 tale che:

$$\forall (X, Y, Z) \in (D^1)^3 : \nabla^*_X (Y * Z + Z * Y) = B(\nabla_X (Y \circ Z)).$$

Prop. 11. *Se* ∇ *e* $\overline{\nabla}$ *sono due connessioni su* D^2, *tali che per ogni* $(X, Y, Z) \in (D^1)^3$ *sia* $\nabla_X (Y \circ Z) = \overline{\nabla}_X (Y \circ Z)$, *si ha* $\nabla = \overline{\nabla}$.

Si osservi che, per ogni $(X, Y, Z) \in (D^1)^3$, risulta:

$$\nabla_X [Y, Z] = \nabla_X (Y \circ Z) - \nabla_X (Z \circ Y) = \overline{\nabla}_X [Y, Z],$$

e quindi, per ogni carta (U, φ), se $X_{|U} = X^t e_t$, $Y_{|U} = Y^i e_i$, $Z_{|U} = Z^j e_j$, si ha:

$$0 = (\nabla_X [Y, Z] - \overline{\nabla}_X [Y, Z])_{|U} = X^t (Y^i \partial_i Z^j - Z^i \partial_i Y^j)(\nabla_{e_t} e_j - \overline{\nabla}_{e_t} e_j),$$

da cui, per l'arbitrarietà di X, Y e Z segue

$$\nabla_{e_t} e_j = \overline{\nabla}_{e_t} e_j, \text{ quali che siano } t, j.$$

Dalla ipotesi, inoltre, si ha immediatamente $\nabla_{e_t} e_{i_1 i_2} = \overline{\nabla}_{e_t} e_{i_1 i_2}$, e quindi $\forall\, X \in D^1$ e $\forall\, F \in D^2$, di componenti rispettivamente X^t; F^i, $F^{i_1 i_2}$ rispetto ad (U, φ), risulta:

$$(\nabla_X F)_{|U} = X^t \{ \partial_t F^i e_i + F^i \nabla_{e_t} e_i + \frac{1}{2} \partial_t F^{i_1 i_2} e_{i_1 i_2} +$$

$$+ \frac{1}{2} F^{i_1 i_2} \nabla_{e_t} e_{i_1 i_2} \} = (\overline{\nabla}_X F)_{|U} .$$

3. Parametri di una connessione

Prop. 12. *Se ∇ è una connessione su D^2, allora per ogni sottovarietà aperta U esiste una ed una sola connessione ∇^U su D^2 (U) tale che:*

$$\forall\, X \in D^1, \forall\, F \in D^2 : \nabla^U_{X_{|U}} (F_{|U}) = (\nabla_X F)_{|U} .$$

In particolare se (U, φ) è una carta di V, si ponga:

$$\nabla_{e_t} e_i = \overset{U}{\nabla}_{e_t} e_i = \Gamma^p_{ti}\, e_p \ , \ \nabla_{e_t} e_{i_1 i_2} = \overset{U}{\nabla}_{e_t} e_{i_1 i_2} = \Gamma^p_{t i_1 i_2} e_p + \frac{1}{2} \Gamma^{pq}_{t i_1 i_2} e_{pq} .$$

Le funzioni Γ^p_{ti} , $\Gamma^p_{t i_1 i_2}$, $\Gamma^{pq}_{t i_1 i_2}$, con i, p, q, t, i_1, i_2 elementi di $\{1, 2, \ldots, n\}$ sono C^∞-differenziabili su U, simmetriche rispetto alle coppie di indici (i_1, i_2) e (p, q) e si dicono i *parametri* della connessione ∇.

Segue immediatamente la

Prop. 13. - *Per ogni $X \in D^1$, di componenti X^t rispetto alla carta (U, φ) e per ogni $F \in D^2$, di componenti $(F^i, F^{i_1 i_2})$ rispetto alla stessa carta, risulta:*

$$(\nabla_X F)_{|U} = X^t \Big\{ \partial_t F^i e_i + F^i \Gamma^p_{ti} e_p + \frac{1}{2} \partial_t F^{i_1 i_2} e_{i_1 i_2} + \tag{3.1}$$

$$+ \frac{1}{2} F^{i_1 i_2} \Big[\Gamma^p_{t i_1 i_2} e_p + \frac{1}{2} \Gamma^{pq}_{t i_1 i_2} e_{pq} \Big] \Big\} .$$

Se inoltre (U', φ') è una carta di V ad intersezione non vuota con (U, φ) e se $\Gamma^{p'}_{t' i'}$, $\Gamma^{p'}_{t' i'_1 i'_2}$, $\Gamma^{p' q'}_{t' i'_1 i'_2}$ sono i parametri di ∇ rispetto a (U', φ'), risulta in $U \cap U'$:

$$\Gamma^{p'}_{t' i'} = \Gamma^p_{ti}\, \vartheta^{p'}_p\, \vartheta^t_{t'}\, \vartheta^i_{i'} + \vartheta^{p'}_p\, \vartheta^p_{t' i'} . \tag{3.2}$$

$$\Gamma^{p'}_{t' i'_1 i'_2} = \vartheta^{p}_{t' i'_1 i'_2}\, \vartheta^{p'}_{p} + \vartheta^{i}_{i'_1 i'_2}\, \vartheta^{p'}_{p}\, \vartheta^{t}_{t'}\, \Gamma^{p}_{ti} + \tag{3.3}$$
$$+ \vartheta^{p'}_{pq}\, \partial_{t'} (\vartheta^{p}_{i'_1}\, \vartheta^{q}_{i'_2}) + \vartheta^{p'}_{p}\, \vartheta^{i_1}_{i'_1}\, \vartheta^{i_2}_{i'_2}\, \vartheta^{t}_{t'}\, \Gamma^{p}_{t i_1 i_2} +$$
$$+ \frac{1}{2}\, \vartheta^{p'}_{pq}\, \vartheta^{i_1}_{i'_1}\, \vartheta^{i_2}_{i'_2}\, \vartheta^{t}_{t'}\, \Gamma^{pq}_{t i_1 i_2} .$$

$$\frac{1}{2}\, \Gamma^{p'q'}_{t' i'_1 i'_2} = \vartheta^{p'}_{p}\, \vartheta^{q'}_{q}\, \partial_{t'} (\vartheta^{(p}_{i'_1}\, \vartheta^{q)}_{i'_2}) + \frac{1}{2}\, \Gamma^{pq}_{t i_1 i_2}\, \vartheta^{p'}_{p}\, \vartheta^{q'}_{q}\, \vartheta^{t}_{t'}\, \vartheta^{i_1}_{i'_1}\, \vartheta^{i_2}_{i'_2} . \tag{3.4}$$

Osservazione 1. Per la (3.2) le Γ^{p}_{ti} variano secondo la legge di variazione dei parametri di una connessione vettoriale e precisamente sono i parametri della $\nabla^{(1)}$ associata alla ∇.

Analogamente per la (3.4)) le $\left(\frac{1}{2}\, \Gamma^{pq}_{t i_1 i_2}\right)$ sono i parametri di una connessione per campi tensoriali doppi controvarianti simmetrici e precisamente sono i parametri della connessione ∇^{*} associata alla ∇.

Osservazione 2. La (3.4) permette di affermare che

esiste $X \in D^1$ tale che $\nabla_X (D^2)$ non è contenuto in D^1.

Si supponga per assurdo che: $\forall\, X \in D^1 : \nabla_X (D^2) \subset D^1$
Se (U, φ) è una carta di V si ha: $e_{i_1 i_2} \in D^2 (U) - D^1 (U)$.
Quindi esiste un aperto $W \subset U$ ed esiste $F \in D^2 - D^1$ tale che $F_{|W} = e_{i_1 i_2 |W}$.
Di conseguenza in W risulta:

$$\nabla_X F = \nabla_X e_{i_1 i_2} = X^t \nabla_{e_t} e_{i_1 i_2} = X^t \left\{ \Gamma^{p}_{t i_1 i_2}\, e_p + \frac{1}{2}\, \Gamma^{pq}_{t i_1 i_2}\, e_{pq} \right\} .$$

Se $\quad \nabla_X F \in D^1$, si ha $\Gamma^{pq}_{t i_1 i_2} = 0$.

Operando in modo analogo per una qualunque altra carta avente dominio ad intersezione non vuota con W, esiste un aperto W′ in cui $\Gamma^{p'q'}_{t' i'_1 i'_2} = 0$.

Per la (3.4) si ha allora in $W \cap W'$:

$$\vartheta^{p'}_{p}\, \vartheta^{q'}_{q}\, \partial_{t'} (\vartheta^{(p}_{i'_1}\, \vartheta^{q)}_{i'_2}) = 0. \tag{3.5}$$

In definitiva, per ogni coppia di carte i cui dominii hanno intersezione non vuota dovrebbe aversi la (3.5), il che è manifestamente assurdo.

Prop. 14. *Per ogni carta* (U, φ) *di* V *siano assegnate le funzioni* Γ^{p}_{ti} , $\Gamma^{p}_{t i_1 i_2}$, $\Gamma^{pq}_{t i_1 i_2}$ C^{∞}*— differenziabili in* U, *simmetriche rispetto alle coppie di indici* (i_1, i_2) e (p, q), *la cui legge di variazione per un cambiamento di coordinate locali, relative a carte ad* *intersezione non vuota, sia data dalle* (3.2) (3.3) e (3.4). *Esiste allora ed è unica la connessione* $\overline{\nabla}$ *su* D^2 *avente come parametri rispetto a* (U, φ) *le funzioni assegnate.* La dimostrazione è analoga a quella per le connessioni vettoriali ([2]).

4. Connessione dedotta da una connessione vettoriale.

Prop. 15. *Sia* ∇ *una connessione vettoriale. Esiste una ed una sola connessione* $\overline{\nabla}$ *su* D^2 *tale che*

$$\text{(4.1)} \qquad \forall\, (X, Y) \in D^1 \times D^1 \;:\; \overline{\nabla}_X (Y) = \nabla_X (Y).$$

$$\text{(4.2)} \qquad \forall\, (X, Y, Z) \in D^1 \times D^1 \times D^1 :$$

$$2\,\overline{\nabla}_X (Y \circ Z) = (\nabla_X Y) \circ Z + Y \circ \nabla_X Z + (\nabla_X Z) \circ Y + Z \circ \nabla_X Y -$$
$$- \nabla_{[Y,X]} Z - \nabla_{[Z,X]} Y - \nabla_{\nabla_X Y} Z - \nabla_{\nabla_X Z} Y + \nabla_X [Y, Z].$$

La $\overline{\nabla}$ *si dice connessione su* D^2 *dedotta dalla connessione vettoriale* ∇.

Si osserva che l'unicità di $\overline{\nabla}$ è conseguenza della Prop. 11.

Si pone, per ogni $(X, Y, Z) \in (D^1)^3$:

$$\overline{\nabla}_X (Y \circ Z) = \frac{1}{2} \Big\{ (\nabla_X Y) \circ Z + Y \circ \nabla_X Z + (\nabla_X Z) \circ Y + Z \circ \nabla_X Y -$$
$$- \nabla_{[Y,X]} Z - \nabla_{[Z,X]} Y - \nabla_{\nabla_X Y} Z - \nabla_{\nabla_X Z} Y + \nabla_X [Y, Z] \Big\}.$$

e si prova dapprima che sussistono le seguenti relazioni:

a′) $\forall\, (f, g) \in F \times F,\ \forall\, (X, X', Y, Z) \in (D^1)^4 : \overline{\nabla}_{fX + gX'} (Y \circ Z) = f\, \overline{\nabla}_X (Y \circ Z) + g\, \overline{\nabla}_{X'} (Y \circ Z).$

b′) $\forall\, f \in F,\ \forall\, (X, Y, Z) \in (D^1)^3 : \overline{\nabla}_X (f\, Y \circ Z) = X(f)\, Y \circ Z + f\, \overline{\nabla}_X (Y \circ Z).$

Sia ora: $X \in D^1$ ed $F \in D^2$.

Se (U, φ) è una carta tale che $F_{|U} = F^p e_p + \frac{1}{2} F^{ij} e_{ij}$, è noto che per ogni $\overline{p} \in U$ esistono un intorno aperto W di $\overline{p}$, contenuto in U, un campo vettoriale $\xi \in D^1$, e per ogni $j \in \{1, 2, \ldots n\}$ esistono $X_j \in D^1, Y_j \in D^1$ tali che $\xi_{|W} = (F^p e_p)_{|W}$,

$$X_{j|W} = \frac{1}{2} F^{ij} e_{i|W} \quad \text{e} \quad Y_{j|W} = e_{j|W}\ ,$$

Allora risulta:

$$F_{|W} = \xi_{|W} + \sum_{j=1}^{n} (X_j \circ Y_j)_{|W}.$$

Si pone $(\overline{\nabla}_X F)_{|W} = (\nabla_X \xi)_{|W} + \sum_{j=1}^{n} \left(\overline{\nabla}_X (X_j \circ Y_j)\right)_{|W}$ e si prova che tale definizione, che non dipende da ξ, X_j, Y_j per la localizzabilità di ∇, non dipende neppure dalla carta (U, φ). Considerata infatti una carta (U', φ') con $U \cap U' \neq \varnothing$, si ha, con ovvio significato dei simboli:

$$(\overline{\nabla}_X F)_{|W \cap W'} = (\nabla_X \xi')_{|W \cap W'} + \sum_{j=1}^{n} \left(\overline{\nabla}_X (X'_j \circ Y'_j)\right)_{|W \cap W'} =$$
$$= (\nabla_X \xi)_{|W \cap W'} + \sum_{j=1}^{n} \left(\overline{\nabla}_X (X_j \circ Y_j)\right)_{|W \cap W'} .$$

Quindi:

$$\forall\, X \in D^1 \ , \ \forall\, F \in D^2 \ : \ \overline{\nabla}_X F \in D^2.$$

Si prova immediatamente che $\forall\, X \in D^1$ $\overline{\nabla}_X$ è un R - endomorfismo di D^2 e quindi per a') e b') l'applicazione

$$\overline{\nabla} : D^1 \longrightarrow \mathrm{End}_R(D^2)$$

tale che

$$\forall\, X \in D^1 : \overline{\nabla}(X) = \overline{\nabla}_X$$

è una connessione.

È ovvio infine che $\overline{\nabla}$ verifichi le proprietà (4.1) e (4.2).

Osservazione 3. La connessione vettoriale associata a $\overline{\nabla}$ è la connessione ∇, e la connessione $\overline{\nabla}^*$ su σ^2_0 associata a $\overline{\nabla}$ è la connessione su σ^2_0 canonicamente dedotta dalla ∇. Inoltre se (U, φ) è una carta di V e se Γ^p_{ti} sono i parametri di ∇ rispetto alla (U, φ), i parametri di $\overline{\nabla}$ rispetto alla stessa carta (U, φ) sono:

$$\overline{\Gamma}^p_{ti} = \Gamma^p_{ti}$$

$$\overline{\Gamma}^p_{t i_1 i_2} = \partial_{(i_1} \Gamma^p_{|t| i_2)} - \Gamma^r_{t (i_1} \Gamma^p_{|r| i_2)}$$

$$\overline{\Gamma}^{pq}_{t i_1 i_2} = 4\, \Gamma^{(p}_{t (i_1} \delta^{q)}_{i_2)} \ .$$

5. Relazioni tra due connessioni su D^2.

Sono di immediata verifica le seguenti proprietà:

Prop. 16. - *Siano* ∇ *e* $\overline{\nabla}$ *due connessioni su* D^2; *l'applicazione* $T : D^1 \times D^2 \to D^2$ *così definita*:

$$\forall\, X \in D^1 \ , \ \forall\, F \in D^2 \ : \ T(X, F) = \nabla_X F - \overline{\nabla}_X F \ ,$$

è F - bilineare. La ridotta a D^1 della restrizione di T *a $D^1 \times D^1$ è un campo tensoriale di specie* (1, 2) *tale che*

$$\forall (X, Y) \in (D^1)^2 \ : \ T(X, Y) = \nabla^{(1)}_X Y - \overline{\nabla}^{(1)}_X Y .$$

Prop. 17. - *Siano ∇ una connessione su D^2 e* T *un'applicazione F - bilineare di $D^1 \times D^2$ in D^2 tale che $T(D^1 \times D^1) \subset D^1$. L'applicazione $\overline{\nabla} : D^1 \longrightarrow \mathrm{End}_R(D^2)$ definita da $\overline{\nabla}_X F = \nabla_X F + T(X, F)$ è una connessione su D^2.*

Prop. 18. - *Indicata con $T^{(1)}$ la ridotta a D^1 di $T_{|D^1 \times D^1}$, risulta:*

a) $T^{(1)}$ *è un campo tensoriale di specie* (1, 2) *simmetrico rispetto agli indici di covarianza se e solo se le connessioni vettoriali associate a ∇ e $\overline{\nabla}$ hanno la stessa torsione.*

b) $T^{(1)}$ *è alternante rispetto agli indici di covarianza se e solo se le connessioni senza torsione associate alle connessioni vettoriali $\nabla^{(1)}$ e $\overline{\nabla}^{(1)}$ coincidono, ed in tal caso si ha:*

$T^{(1)} = \frac{1}{2}(S - \overline{S})$, *ove* S *e* $\overline{S}$ *sono rispettivamente i campi tensoriali di torsione di $\nabla^{(1)}$ e $\overline{\nabla}^{(1)}$.*

Considerata l'applicazione F - bilineare T di $D^1 \times D^2$ in D^2, relativa a ∇ e $\overline{\nabla}$ sia $T' : D^1 \times D^1 \times D^1 \longrightarrow D^2$ l'applicazione così definita:

$$\forall (X, Y, Z) \in (D^1)^3 \ : \ T'(X, Y, Z) = T(X, Y \circ Z). \tag{5.1}$$

T' è ovviamente F-lineare rispetto alla prima e alla seconda coordinata, ma non lo è, in generale, rispetto alla terza coordinata, anzi sussiste la seguente proposizione.

Prop. 19. - Siano ∇ e $\overline{\nabla}$ *due connessioni su D^2. Le due connessioni vettoriali associate $\nabla^{(1)}$ e $\overline{\nabla}^{(1)}$ coincidono se e solo se* T' *è F - trilineare.*

Se $\nabla^{(1)} = \overline{\nabla}^{(1)}$, si ha:

$$\forall (X, Y, Z) \in (D^1)^3 : T(X, [Y, Z]) = 0 ,$$

cioè

$$T(X, Y \circ Z) = T(X, Z \circ Y) .$$

Allora:

$$\forall f \in F : T'(X, Y, f Z) = T(X, Y \circ f Z) = T(X, f Z \circ Y) =$$
$$= f T(X, Z \circ Y) = f T(X, Y \circ Z) = f T'(X, Y, Z) .$$

Viceversa se T' è F-trilineare si ha:

$$\forall f \in F \ , \ \forall (X, Y, Z) \in (D^1)^3 \ :$$
$$f T'(X, Y, Z) = T'(X, Y, f Z) = T(X, Y \circ (f Z)) =$$
$$= T(X, Y(f) Z) + T(X, f Y \circ Z) = Y(f) T(X, Z) + f T'(X, Y, Z) ;$$

quindi $Y(f)\, T(X, Z) = 0$ e di conseguenza:

$$\forall (X, Z) \in (D^1)^2 \ : \ T(X, Z) = 0, \text{ cioè } \nabla^{(1)} = \overline{\nabla}^{(1)}$$

Segue immediatamente:

Prop. 20 - *Affinché sia $\nabla^{(1)} = \overline{\nabla}^{(1)}$, occorre e basta che T' sia simmetrica rispetto due ultime coordinate.*

Prop. 21. - *Se ∇ e $\overline{\nabla}$ sono due connessioni su D^2, tali che le connessioni tensoriali simmetriche su σ_0^2 associate, coincidono, allora:*

$$\forall X \in D^1, \ \forall F \in D^2 \ : \ T(X, F) = \nabla_X F - \overline{\nabla}_X F \in D^1 .$$

Infatti si ha:

$$\forall X \in D^1 \ , \ \forall F \in D^2 \ : \ B(T(X, F)) = B(\nabla_X F) - B(\overline{\nabla}_X F) =$$
$$= \nabla^*_X (B(F)) - \overline{\nabla}^*_X (B(F)) = 0 \ ,$$

quindi $T(X, F) \in D^1$.

Prop. 22. - *Sia ∇ una connessione su D^2 e sia $T : D^1 \times D^2 \longrightarrow D^1$ una applicazione F-bilineare. Allora l'applicazione $\overline{\nabla} : D^1 \longrightarrow \mathrm{End}_R(D^2)$ così definita:*

$$\forall X \in D^1 \ , \ \forall F \in D^2 \ : \ \overline{\nabla}_X F = \nabla_X F + T(X, F) \ ,$$

è una connessione su D^2 tale che $\overline{\nabla}^* = \nabla^*$.

È immediato verificare che $\overline{\nabla}$ è una connessione.

Risulta inoltre che:

$$\forall (X, Y, Z) \in (D^1)^3 : \overline{\nabla}^*_X (Y * Z + Z * Y) = B(\overline{\nabla}_X (Y \circ Z)) =$$
$$= B(\nabla_X (Y \circ Z) + T(X, Y \circ Z)) = B(\nabla_X (Y \circ Z)) = \nabla^*_X (Y * Z + Z * Y) \ ,$$

e quindi $\overline{\nabla}^* = \nabla^*$.

Dalle proposizioni 19, 20, 21, 22 si ottengono immediatamente i seguenti corollari.

Corollario 2. Se ∇ e $\overline{\nabla}$ sono due connessioni su D^2 tali che $\nabla^{(1)} = \overline{\nabla}^{(1)}$ e $\nabla^* = \overline{\nabla}^*$, la ridotta a D^1 di T' è un campo tensoriale di specie (1, 3) simmetrico rispetto agli ultimi due indici di covarianza.

Corollario 3. - Se ∇ è una connessione su D^2 e se $T : D^1 \times D^2 \longrightarrow D^2$ è una applicazione F-bilineare tale che la T' ad essa relativa secondo la (5.1) è un campo tensoriale di specie (1.3) simmetrico rispetto agli ultimi due indici di covarianza, allora l'applicazione $\overline{\nabla} : D^1 \longrightarrow \mathrm{End}_R\,(D^2)$ così definita:

$$\forall\, X \in D^1 \quad , \quad \forall\, F \in D^2 \ : \ \overline{\nabla}_X F = \nabla_X F + T(X, F)$$

è una connessione su D^2 che ha le stesse connessioni vettoriali e tensoriali associate di ∇.

Prop. 23 - *Sia ∇ la connessione su D^2 dedotta canonicamente da una connessione vettoriale $\nabla^{(1)}$ tramite le (4.1) e (4.2), e sia $\overline{\nabla}$ una connessione su D^2.*

$\overline{\nabla}$ è canonicamente dedotta da una connessione vettoriale se e solo se esiste $T^{(1)}$ campo tensoriale di specie (1, 2) *tale che:*

$$\forall\,(X, Y, Z) \in (D^1)^3 \ : \ \overline{\nabla}_X (Y \circ Z) = \nabla_X (Y \circ Z) + \tag{5.2}$$
$$+ \frac{1}{2} \{ T^{(1)}(X, Y) \circ Z + Z \circ T^{(1)}(X, Y) + Y \circ T^{(1)}(X, Z) +$$
$$+ T^{(1)}(X, Z) \circ Y + T^{(1)}([X, Y], Z) + T^{(1)}(X, Z], Y) +$$
$$+ T^{(1)}(X, [Y, Z]) - T^{(1)}(T^{(1)}(X, Y), Z) -$$
$$- T^{(1)}(T^{(1)}(X, Z), Y) - T^{(1)}(\nabla^{(1)}_X Y, Z) -$$
$$- T^{(1)}(\nabla^{(1)}_X Z, Y) - \nabla^{(1)}_{T^{(1)}(X, Y)} Z - \nabla^{(1)}_{T^{(1)}(X, Z)} Y \,.$$

Allora risulta:

$$\overline{\nabla}^{(1)}_X Y = \nabla^{(1)}_X Y + T^{(1)}(X, Y) \,.$$

Infatti se $\overline{\nabla}$ è canonicamente dedotta da una connessione vettoriale $\overline{\nabla}^{(1)}$, posto $T^{(1)}(X, Y) = \overline{\nabla}^{(1)}_X Y - \nabla^{(1)}_X Y$ per ogni $(X, Y) \in D^1 \times D^1$, per la prop. 15 l'asserto è di immediata dimostrazione.

Viceversa se esiste un campo tensoriale $T^{(1)}$ di specie (1, 2) che verifichi la (5.2), posto $\overline{\nabla}^{(1)}_X Y = \nabla^{(1)}_X Y + T^{(1)}(X, Y)$, $\overline{\nabla}^{(1)}$ risulta una connessione vettoriale.

Allora la connessione su D^2 canonicamente dedotta da $\overline{\nabla}^{(1)}$ verifica la relazione (5.2) e quindi la proposizione 11, coincide con $\overline{\nabla}$.

6. - Curvatura

Def. 5. - Sia ∇ una connessione su D^2. Si dice *curvatura* della connessione ∇ l'applicazione $R : D^1 \times D^1 \times D^2 \longrightarrow D^2$, così definita:

$$\forall\,(X, Y) \in D^1 \times D^1 \quad , \quad \forall\, F \in D^2 :$$
$$R(X, Y, F) = \nabla_X \nabla_Y F - \nabla_Y \nabla_X F - \nabla_{[X, Y]} F \,.$$

È di immediata dimostrazione la seguente proposizione

Prop. 24. - R *è F-trilineare ed inoltre si ha*:

$$\forall (X, Y) \in D^1 \times D^1 \quad , \quad \forall F \in D^2 \quad : \quad R(X, Y, F) = -R(Y, X, F) \ .$$

Prop. 25. - *Se* R *è la curvatura di una connessione* ∇ *su* D^2, *si ha*:

a) *la ridotta a* D^1 *della restrizione di* R *a* $D^1 \times D^1 \times D^1$ *è il tensore di curvatura della connessione vettoriale* $\nabla^{(1)}$ *associata a* ∇.

b) *L'applicazione* $R^* : D^1 \times D^1 \times \sigma_0^2 \longrightarrow \sigma_0^2$ *tale che*:

$$\forall (X, Y, Z, Z') \in (D^1)^4 \quad : \quad R^*(X, Y, Z * Z' + Z' * Z) = B(R(X, Y, Z \circ Z')) \ ,$$

è la curvatura della connessione ∇^* *su* σ_0^2 *associata alla* ∇.

Per la a) si ha infatti:

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z =$$
$$= \nabla^{(1)}_X \nabla^{(1)}_Y Z - \nabla^{(1)}_Y \nabla^{(1)}_X Z - \nabla^{(1)}_{[X,Y]} Z = R^{(1)}(X, Y, Z) \ ,$$

ove $R^{(1)}$ è la curvatura della connessione vettoriale $\nabla^{(1)}$.

Per la b) si ha:

$$R^*(X, Y, Z * Z' + Z' * Z) = B(R(X, Y, Z \circ Z')) =$$
$$= B(\nabla_X \nabla_Y (Z \circ Z')) - B(\nabla_Y \nabla_X (Z \circ Z')) - B(\nabla_{[X,Y]} (Z \circ Z')) =$$
$$= \nabla^*_X (B(\nabla_Y (Z \circ Z'))) - \nabla^*_Y (B(\nabla_X (Z \circ Z'))) - \nabla^*_{[X,Y]} B(Z \circ Z') =$$
$$= \nabla^*_X (\nabla^*_Y (B(Z \circ Z'))) - \nabla^*_Y (\nabla^*_X (B(Z \circ Z'))) - \nabla^*_{[X,Y]} B(Z \circ Z') =$$
$$= \nabla^*_X \nabla^*_Y (Z * Z' + Z' * Z) - \nabla^*_Y \nabla^*_X (Z * Z' + Z' * Z) -$$
$$- \nabla^*_{[X,Y]} (Z * Z' + Z' * Z) \ .$$

Dalla osservazione 3 e dalla proposizione precedente si deduce il seguente

Corollario 4. - Se ∇ è una connessione su D^2 canonicamente dedotta dalla connessione vettoriale $\nabla^{(1)}$, si ha, con ovvio significato dei simboli:

$$R^*(X, Y, S(Z * Z')) = S(R^{(1)}(X, Y, Z) * Z') +$$
$$+ S(R^{(1)}(X, Y, Z') * Z) \ .$$

Bari - Istituto di Geometria, Facoltà di Scienze dell'Università - Luglio 1972.

BIBLIOGRAFIA

(1) A. Cossu: «Alcune osservazioni sulle connessioni tensoriali», (Rend. di Mat., Serie V, Vol. XIII, fasc. 3-4 Roma 1955).

(2) S. Helgason: «Differential geometry and symmetric spaces», Academic Press, New York, London 1962.

(3) S. Kobayashi e K. Nomizu: «Foundations of differential geometry», Interscience Publishers, New York, London 1963.

(4) P. Mastrogiacomo: «Derivazioni di ordine superiore», Rend. Acc. di Scienze Fisiche e Matem., serie 4, vol. XXXIV, Napoli 1967.

(5) F. W. Warner: «Foundations of differentiable manifolds and Lie groups» I.M. Singer, Massachusetts 1970.