ROLAND GUY

Le calcul des jets non holonomes et certaines classes de connexions (*)

Introduction

Les prolongements non-holonomes des morphismes des variétés différentiables ont été envisagés et étudiés par M. Ch. Ehresmann dans une série de Notes aux Comptes Rendus à l'Académie des Sciences (1). C'est une extension naturelle de la notion de jet holonome — qui apparait de plus en plus être un concept fondamental de certaines recherches de géométrie différentielle et même de géométrie algébrique.

On constate immédiatement que si le calcul des jets holonomes devient très vite pénible il en est a fortiori du calcul des jets non holonomes.

De même que nous avons tenté de mettre un certain ordre dans le calcul des jets holonomes et que par là nous en avons facilité le maniement, nous avons poursuivi ici le même but pour les jets non holonomes en utilisant un calcul quasi-matriciel généralisant celui que nous avons introduit lors de notre première tentative (2). Ceci nous a permis de définir aisément certaines classes de connexions non holonomes.

La notion de jet non holonome n'est pas artificielle elle apparait dès la considération du deuxième fibré tangent d'une variété, qui est un espace de jets non holonomes : on pratique les jets non holonomes, un peu comme Monsieur Jourdain la prose...

La structure algébrique des fibres des espaces de jets non holonomes ainsi que leurs morphismes sont étudiés au premier chapitre de ce mémoire ; dans le deuxième, en utilisant les notions et les résultats introduits au premier, on écrit effectivement les changements de cartes de certaines familles de jets non holonomes et on définit certaines classes de connexions non holonomes.

(*) Memoria presentata dall'Accademico Enrico Bompiani.

(1) Voir [1].

(2) Voir [2].

CHAPITRE I

Amplifications triangulaires de modules et certaines de leurs applications

1. *Les espaces* $\overset{p}{\nabla}A$ *et* $\overset{p}{T}(A)$

Soit A un anneau unitaire commutatif, on désigne par $\overset{k}{D}A$ l'ensemble des matrices $k \times k$ à éléments dans A, triangulaires supérieures. L'ensemble peut être considéré comme une algèbre sur A. On note $\overset{p,k}{\nabla}A$, p fois le produit tensoriel de $\overset{k}{D}A$ sur A,

$$\overset{p,k}{\nabla}A = {}_{A}^{p}D \bigcirc^{k} A .$$

Posons $p = q + r$. On sait que $\overset{p,k}{\nabla}A$ et $\overset{q,k}{\nabla}A \bigcirc_A \overset{r,k}{\nabla}A$ sont isomorphes.

Considérons l'homorphisme d'anneau

$\rho_o^q : A \to \overset{q,k}{\nabla}A$ défini par

$a \in A \to \rho_o^q(a) = a \bigcirc 1_k \bigcirc \dots \bigcirc 1_k \in \overset{q,k}{\nabla}A$

où 1_k est la matrice unité de $D^k A$.

Ceci permet de définir sur $\overset{q,k}{\nabla}A$ une structure de A-module à droite par l'opération

$$((\overset{q,k}{\nabla}A)_d , A) \to \overset{q,k}{\nabla}A$$

$$(\overset{q}{x}, a) \to \overset{q}{x}.\rho_o^q(a) ,$$

on désigne cette structure par ${}^{\bullet}\rho_o^q(\overset{q,k}{\nabla}A)$. Sur $\overset{q,k}{\nabla}A$, on peut aussi définir une structure de module à gauche par rapport à lui-même qu'on désigne par $\overset{q,k}{\nabla}A_s$. Si alors E est un A-module à gauche, on peut définir sur le produit tensoriel ${}^{\bullet}\rho_o^q(\overset{q,k}{\nabla}A)_d \bigcirc_A E$ une structure de $\overset{q,k}{\nabla}$-module à gauche telle que $\beta'(\beta \bigcirc x) = (\beta'\beta) \bigcirc x$ pour β et β' dans $\overset{q,k}{\nabla}A$ et $x \in E$.

On dira que ce $\overset{q,k}{\nabla}A$-module à gauche déduit de E par extension [1] de A à $\overset{q,k}{\nabla}A$ de l'anneau des scalaires au moyen de ρ_o^q est *l'amplification triangulaire* du A-module E par l'anneau $\overset{q,k}{\nabla}A$.

---

(1) Voir N. Bourbaki, livre II, chap. 2, p. 116 et sq. 3e edition.

Posons alors $E = \overset{r,k}{\nabla} A$, ce que nous venons de dire permet, en considérant $\rho_0^s(\overset{q,k}{\nabla} A) \bigcirc_A \overset{r,k}{\nabla} A$, de définir, sur ce produit, une structure de $\overset{q,k}{\nabla} A$-module à gauche. On peut faire l'analogue pour définir sur $\overset{p-q+r,k}{\nabla} A$ une structure de $\overset{r,k}{\nabla} A$-module à droite, et en *particulier de* $\overset{p-1,k}{\nabla} A$-*module.*

On peut aussi définir dans $\overset{p,k}{\nabla} A$ diverses structures de $\overset{0 \leq \alpha \leq p,k}{A}$-module à droite ou à gauche. En utilisant l'algorithme bien connu du produit tensoriel des matrices, on peut représenter les éléments de $\overset{1,2}{\nabla} A$, $\overset{2,2}{\nabla} A$, $\overset{3,2}{\nabla} A$ de la manière suivante (nous nous restreindrons par la suite au cas $k = 2$).

I.1 $\overset{1}{x} \in \overset{1,2}{\nabla} A$, $\overset{2}{x} \in \overset{2,2}{\nabla} A$, $\overset{3}{x} \in \overset{3,2}{\nabla} A$ s'écrira respectivement

$$x^1 = \left[\begin{array}{c|c} x_a & x_b \\ \hline 0 & x_c \end{array}\right], \quad \overset{2}{x} = \left[\begin{array}{c|c} x_a^1 & x_b^1 \\ \hline 0 & x_c^1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} x_a^{1_1} & x_a^{1_2} & x_b^{1_1} & x_b^{1_2} \\ 0 & x_a^{1_3} & 0 & x_b^{1_3} \\ \hline 0 & 0 & x_c^{1_1} & x_c^{1_2} \\ 0 & 0 & 0 & x_c^{1_3} \end{array}\right]$$

où $x_a, x_b, x_c, \in A$ et

où $\quad x_a^1, x_b^1, x_c^1 \in \overset{1,2}{\nabla} A, x_a^{1_1}, \ldots, x_c^{1_3} \in A,$

$$x^3 = \left[\begin{array}{c|c} x_a^2 & x_b^2 \\ \hline 0 & x_c^2 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc|cc|c} x_a^{2_1} & x_a^{2_2} & x_a^{2_4} & x_a^{2_5} & x_b^{2_1} & x_b^{2_2} & x_b^{2_5} \\ 0 & x_a^{2_3} & 0 & x_a^{2_6} & 0 & x_b^{2_3} & 0 \quad x_b^{2_6} \\ \hline 0 & 0 & x_a^{2_7} & x_a^{2_8} & & & \\ 0 & 0 & 0 & x_a^{2_9} & & & x_b^{2_9} \\ \hline & & & & x_c^{2_1} & & x_c^{2_5} \\ 0 & & 0 & & & & \\ \hline 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & & & & & x_c^{2_9} \end{array}\right]$$

où $\quad x_a^2, x_b^2, x_c^2 \in \overset{2,2}{\nabla} A, x_a^{2_1}, \ldots, x_c^{2_9} \in A.$

On remarque facilement sur ces tableaux les diverses structures de modules qu'on peut envisager pour $\overset{1.2}{\nabla} A, \overset{2.2}{\nabla} A, \overset{3.2}{\nabla} A$.

Faisons une remarque qui nous sera utile pour des calculs ultérieurs. Si l'on a $\overset{q-1}{\alpha} \in \overset{q-1.2}{\nabla} A$, $\overset{q}{X} \in \overset{q.2}{\nabla} A$, avec

$$\overset{q}{X} = \begin{bmatrix} \overset{q-1}{X_a} & \overset{q-1}{X_b} \\ 0 & \overset{q-1}{X_c} \end{bmatrix},$$

de l'homomorphisme canonique

$$\rho^{q-1} : \overset{q-1.2}{\nabla} A \to \overset{q.2}{\nabla} A \quad \text{tel que} \quad \rho^{q-1}(\alpha) = \begin{bmatrix} \overset{q-1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \overset{q-1}{\alpha} \end{bmatrix} = \overset{q-1}{\alpha} \bigcirc I,$$

on a

$$(1,2) \qquad \overset{q-1}{\alpha} \cdot \overset{q-1}{X} = \begin{bmatrix} \overset{q-1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \overset{q-1}{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{q-1}{X_a} & \overset{q-1}{X_b} \\ 0 & \overset{q-1}{X_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{q-1}{\alpha} \cdot \overset{q-1}{X} & \overset{q-1}{\alpha} \cdot \overset{q-1}{X} \\ 0 & \overset{q-1}{\alpha} \cdot \overset{q-1}{X} \end{bmatrix}.$$

Considérons alors le produit fini d'anneaux

$$\overset{p}{T}(A) = A \bigcirc \overset{1.2}{\nabla} A \bigcirc \dots \bigcirc \overset{p.2}{\nabla} A .$$

D'après les définitions données plus haut, relativement aux structures d'anneaux et de $\overset{\alpha-1}{\nabla} A$-modules à gauche (ou à droite) de $\overset{\alpha}{\nabla} A$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant p)$, on peut définir sur $\overset{p}{T}(A)$ une structure de $A \bigcirc \overset{p-1}{T}(A)$-module à gauche (ou à droite). Nous allons au cours des paragraphes suivants étudier des sous-ensembles distingués de $\overset{p}{T}(A)$, dont certains seront utilisés dans la suite de ce travail.

2. *L'ensemble* $\overset{(p)}{T}_0(A)$ [1]

On désigne par $\overset{\alpha}{\nabla}_0 A$ le sous-ensemble des éléments de $\overset{\alpha}{\nabla} A$ tels que, considérés comme matrices à coefficients dans $\overset{\alpha-1}{\nabla} A$, ils aient leurs éléments diagonaux égaux,

(1) Ne considérant que $\overset{\alpha.2}{\nabla} A$ dans ce qui suit, on n'écrira plus que $\overset{\alpha}{\nabla} A$, sauf avis contraire.

c'est-à-dire qui s'écrivent

$$(1,3)\qquad \overset{\alpha}{a} = \begin{bmatrix} \overset{\alpha-1}{a} & \overset{\alpha-1}{b} \\ 0 & \overset{\alpha-1}{a} \end{bmatrix} \quad \text{où } \overset{\alpha-1}{a}\ ,\ \overset{\alpha-1}{b} \in \overset{\alpha-1}{\nabla} A.$$

Propriétés. On vérifie facilement à l'aide des définitions que $\overset{\alpha}{\nabla}_0 A$ est un sous-anneau de $\overset{\alpha}{\nabla} A$, mais n'est ni un idéal à gauche ni un idéal à droite. Ceci entraine que $\overset{\alpha}{\nabla}_0 A$ n'est pas un sous-module de $\overset{\alpha}{\nabla} A$ (muni de sa structure de $\overset{\alpha}{\nabla} A$-module), $\overset{\alpha-1}{\nabla}_0 A$ n'est pas non plus un $\overset{\alpha-1}{\nabla} A$-sous-module, car alors, d'après la remarque faite plus haut si $\overset{\alpha-1}{c} \in \overset{\alpha-1}{\nabla} A$, on a

$$\overset{\alpha-1}{c} \cdot \overset{\alpha}{a} = \begin{bmatrix} \overset{\alpha-1}{c} \cdot \overset{\alpha-1}{a} & \overset{\alpha-1}{c} \cdot \overset{\alpha-1}{b} \\ 0 & \overset{\alpha-1}{c} \cdot \overset{\alpha-1}{a} \end{bmatrix}.$$

Or $\overset{\alpha-1}{c}\ \overset{\alpha-1}{a}$, ..., ne peuvent pas être des éléments de $\overset{\alpha-1}{\nabla}_0 A$, puisque $\overset{\alpha-1}{\nabla}_0 A$ n'est pas un idéal de $\overset{\alpha-1}{\nabla} A$. Par contre $\overset{\alpha}{\nabla}_0 A$ est un A-sous-module de $\overset{\alpha}{\nabla} A$ muni de cette structure. De même on peut définir sur $\overset{\alpha}{\nabla}_0 A$ une structure de $\overset{0 \leq \beta \leq \alpha}{\nabla}_0$ A-module à gauche ou à droite, ce qui entraine que

$$\overset{p}{T}_0 (A) = A \bigcirc \overset{1}{\nabla}_0 A \bigcirc \dots \bigcirc \overset{p}{\nabla}_0 A$$

est un $A \bigcirc \overset{p-1}{T}_0 (A)$-module, il en est de même de $\overset{p}{T} (A)$, si bien que $\overset{p}{T}_0 (A)$ est un $A \bigcirc \overset{p-1}{T}_0 (A)$-sous-module de $\overset{p}{T} (A)$.

3. *L'ensemble* $\overset{p}{T}_{0_1} (A)$.

On désigne par $\overset{1}{\nabla}_0 (A) = \overset{1}{\nabla}_0 A$, par

$$\overset{2}{\nabla}_{0_1} A = \{ \overset{2}{a} = \begin{bmatrix} \overset{1}{a'} & \overset{1}{b'} \\ 0 & \overset{1}{a'} \end{bmatrix} \in \overset{2}{\nabla}_0 A \mid \overset{1}{a'}\ ,\ \overset{1}{b'} \in \overset{1}{\nabla}_0 A \}$$

.....

$$\overset{\alpha}{\nabla}_{0_1} A = \{ \overset{\alpha}{a} = \begin{bmatrix} \overset{\alpha-1}{a'} & \overset{\alpha-1}{b'} \\ 0 & \overset{\alpha-1}{a'} \end{bmatrix} \in \overset{\alpha-1}{\nabla}_0 A \mid \overset{\alpha-1}{a'}\ ,\ \overset{\alpha-1}{b'} \in \overset{\alpha-1}{\nabla}_{0_1} A \}$$

$$2 \leqslant \alpha \leqslant p.$$

Propriétés. $\overset{\alpha}{\nabla}_{0_1} A$ est un sous-anneau *commutatif* de $\overset{\alpha}{\nabla}_0 A$, mais n'est pas un idéal d'où

$$\overset{p}{T}_{0_1}(A) = A \bigcirc \overset{1}{\nabla}_{0_1} A \bigcirc \ldots \bigcirc \overset{p}{\nabla}_{0_1} A$$

est un sous-anneau commutatif de $\overset{p}{T}_0(A)$.

$\overset{2}{\nabla}_{0_1} A$ est un $\overset{1}{\nabla}_0 A$-sous-module de $\overset{2}{\nabla}_0 A$. $\overset{3}{\nabla}_{0_1} A$ n'est pas un $\overset{2}{\nabla}_0 A$-sous-module de $\overset{3}{\nabla}_0 A$, mais c'est un $\overset{1}{\nabla}_0 A$-sous-module de $\overset{3}{\nabla}_0 A$. De même $\overset{\alpha}{\nabla}_{0_1} A$ n'est pas un $\overset{\beta}{\nabla}_0 A$-sous-module de $\overset{\alpha}{\nabla}_0 A$ pour $\beta > 1$. Ces propriétés entraînent que $\overset{p}{T}_{0_1}(A)$ n'est pas un $A \bigcirc \overset{p-1}{T}_0(A)$-sous-module de $\overset{p}{T}_0(A)$.

Par contre $\overset{\alpha}{\nabla}_{0_1}(A)$ possède une structure de $\overset{\alpha \leq \beta}{\nabla}_{0_1} A$-algèbre si bien que $\overset{p}{T}_{0_1}(A)$ est une $A \bigcirc \overset{p-1}{T}_{0_1}(A)$ algèbre.

Les matrices $\overset{\alpha}{a} \varepsilon \overset{\alpha}{\nabla}_{0_1} A$, *où* $\overset{\alpha}{\nabla}_{0_1} A$ *est considéré comme un A-module, ont tous les éléments sur la diagonale principale égaux, il en est même pour les éléments non nuls des diagonales parallèles à la diagonale principale, si bien que* $\overset{\alpha}{a}$ *possède au plus* 2^α *éléments distincts.* On en déduit que tout *A-module libre de dimension* 2^α *peut être plongé dans l'anneau commutatif* $\overset{\alpha}{\nabla}_{0_1} A$. (1)

4. *L'ensemble* $\overset{p}{T}_{0_2}(A)$. Considérons les éléments de $\overset{2}{\nabla} A$, $\overset{3}{\nabla} A$, ... les ensembles étant munis de leur structure de A-module.

La première ligne de $\overset{2}{a} \varepsilon \overset{2}{\nabla} A$ s'écrit (2)

$$a_{11}^{11}, \ a_{11}^{12}, \ a_{11}^{21}, \ a_{11}^{22}.$$

La première ligne de $\overset{3}{a} \varepsilon \overset{3}{\nabla} A$ s'écrit

$$a_{111}^{111} \ a_{111}^{112} \ a_{111}^{121} \ a_{111}^{122} \ a_{111}^{211} \ a_{111}^{212} \ a_{111}^{221} \ a_{111}^{222}$$

etc.

On constate sans peine que les indices supérieurs de ces éléments sont des permutations P_{p_1, p_2} des indices 1 et 2, 1 étant répété p_1 fois, 2 étant répété $p_2 = \alpha - p_1$ fois, où $\alpha = 2, 3, \ldots$ on sait qu'il y a

$$C_{p_2}^{p_2 + p_1 = \alpha} = \frac{\alpha !}{p_1 ! (\alpha - p_1) !}$$

telles permutations P_{p_1, p_2}.

---

(1) C'est une propriété analogue à celle bien connue des physiciens que R^3 peut être plongé isomorphiquement dans l'ensemble des matrices 2×2 hermitiennes, muni d'une structure R-espace vectoriel.

(2) On utiliser la technique du produit tensoriel des matrices, et la notation s'ensuit.

Il y a donc $C^{\alpha}_{p_1}$ éléments dans $\overset{\alpha}{a} \varepsilon \overset{\alpha}{\nabla} A$ dont l'indice supérieur de la première ligne sont des permutations P_{p_1, p_2}. Supposons que ces éléments soient tous égaux. Le nombre d'éléments qui, au plus, seront différents dans la première ligne de $\overset{\alpha}{a}$ est égal au nombre de p_1 qui sont différents, ce nombre étant égal à la somme des fois où 1 apparait $\alpha, \alpha - 1, \ldots, \alpha - \alpha = 0$, fois, c'est-à-dire $\alpha + 1$ fois. Ainsi parmi les $\sum_{i=0}^{\alpha} C^{\alpha}_{i} = 2^{\alpha}$ éléments que peut contenir cette ligne, il y en aura $\alpha + 1$ au plus qui pourront être différents (1), il en sera de même des éléments de la matrice $\overset{\alpha}{a}$ (parmi ceux qui ne sont pas nuls par définition). Désignons par $\overset{\alpha}{\nabla}_{O_2} A$ le sous-ensemble des matrices de $\overset{\alpha}{\nabla}_{O_1} A$ ainsi définies et par

$$\overset{p}{T}_{O_2}(A) = A \bigcirc \overset{1}{\nabla}_{O_2} A \bigcirc \ldots \bigcirc \overset{p}{\nabla}_{O_2} A .$$

Propriétés. $\overset{p}{T}_{O_2}(A)$ est un sous-anneau de $\overset{(p)}{T}_{O_1}(A)$ mais pas un idéal, ni un $A \bigcirc \overset{p-1}{T}_{O_1}(A)$-module, ni un $A \bigcirc \overset{p-1}{T}_{O_2}(A)$-module, seulement un A-module.

5. *Les ensembles* $\overset{(p)}{T}_{O_1}{}'(A)$ *et* $\overset{(p)}{T}_{O_2}{}'(A)$.

Un élément $\overset{(p)}{a}$ de $\overset{(p)}{T}_{O_1}(A)$, considéré comme un produit cartésien de matrices à éléments successivement dans A, A, $\overset{1}{\nabla} A, \ldots, \overset{p-1}{\nabla} A$, c'est-à-dire muni de sa structure de $A \bigcirc \overset{p-1}{T}_{O}(A)$-module s'écrit

$$\overset{(p)}{a} = \left\{ \overset{0}{a}, \overset{1}{a} = \begin{bmatrix} \overset{0}{a'} & \overset{0}{b'} \\ 0 & \overset{0}{a'} \end{bmatrix}, \overset{2}{a} = \begin{bmatrix} \overset{1}{a'} & \overset{1}{b'} \\ 0 & \overset{1}{a'} \end{bmatrix}, \ldots, \overset{p}{a} = \begin{bmatrix} \overset{p-1}{a'} & \overset{p-1}{b'} \\ 0 & \overset{p-1}{a'} \end{bmatrix} \right\},$$

avec $\overset{0}{a}, \overset{0}{a'}, \overset{0}{b'} \varepsilon A, \overset{\alpha}{a}, \overset{\alpha}{b} \varepsilon \overset{\alpha}{\nabla}_{O_1} A, 0 < \alpha < p$

Posons alors

$$\overset{0}{a'} = \overset{0}{a}, \overset{1}{a'} = \overset{1}{a}, \overset{2}{a'} = \overset{2}{a}, \ldots, \overset{p-1}{a'} = \overset{p-1}{a}; \overset{0}{b'} \in A, \ldots, \overset{p-1}{b'} \in \overset{p-1}{\nabla}_{O_1} A .$$

$\overset{(p)}{a}$ devient

$$\overset{(p)}{a} = \left\{ \overset{0}{a}, \begin{bmatrix} \overset{0}{a} & \overset{0}{b'} \\ 0 & \overset{0}{a} \end{bmatrix} = \overset{1}{a}, \overset{2}{a} = \begin{bmatrix} \overset{1}{a} & \overset{1}{b'} \\ 0 & \overset{1}{a} \end{bmatrix}, \ldots, \overset{p}{a} = \begin{bmatrix} \overset{p-1}{a} & \overset{p-1}{b'} \\ 0 & \overset{p-1}{a} \end{bmatrix} \right\}.$$

Désignons par $\overset{p}{T}'_{O_1}(A)$ cet ensemble d'éléments de $\overset{p}{T}_{O_1}(A)$ ainsi définis.

---

(1) Ainsi on aura $a^{\frac{122}{111}} = a^{\frac{221}{111}} = a^{\frac{212}{111}}$; $a^{\frac{112}{111}} = a^{\frac{121}{111}} = a^{\frac{211}{111}}$, etc.

Propriétés. $\overset{p}{T}_{O_1}{}'(A)$ est un sous-anneau de $\overset{p}{T}_{O_1}(A)$ mais pas un idéal, on ne peut y définir ni une structure de $A \bigcirc \overset{p-1}{T}(A)$-module ni une structure de $A \bigcirc \overset{p-1}{T}_{O_1}(A)$-module, seulement de A-module.

$\overset{p}{\nabla}_{O_1} A$ peut être considéré comme $\overset{0 \leq \alpha \leq p-1}{\nabla}_{O_1}$ A-algèbre. Soit alors $\overset{p}{a} \varepsilon \overset{p}{\nabla}_{O_1} A$, considéré comme matrice à éléments dans $\overset{p-1}{\nabla}_{O_1} A$, sa diagonale principale est de la forme $\overset{p-1}{a} \cdot \overset{(p-1)}{I_p}$, où $\overset{(p-1)}{I_p}$ est l'élément unité de $\overset{p}{\nabla}_{O_1} A$ muni de sa structure de $\overset{p-1}{\nabla}_{O_1}$ A-module. De même, $\overset{p}{a}$ considéré comme matrices à éléments dans $\overset{p-2}{\nabla}_{O_1} A$, a sa diagonale principale de la forme $\overset{p-2}{a} \cdot \overset{(p-2)}{I_p}$, où $\overset{(p-2)}{I_p}$ est l'élément unité de $\overset{p}{\nabla}_{O_1} A$ muni de sa structure de $\overset{p-2}{\nabla}_{O_1}$ A-module. On peut procéder de même jusqu'à $p - p = 0$. On a mis ainsi en évidence que $\overset{(p)}{a}$ est de la forme :

$$\overset{(p)}{a} = (\overset{0}{a}, \overset{1}{a}, \ldots, \overset{p-1}{a}, \overset{p}{a}) = R_p^{(p)}(\overset{p}{a}) \varepsilon \overset{p}{T}_{O_1}(A)$$

ceci définit un homomorphisme $R_p^{(p)} : \overset{p}{\nabla}_{O_1} A \to \overset{p}{T}_{O_1}(A)$, c'est une fonction clairement injective et surjective, $R_p^{(p)}$ est donc un isomorphisme, désignons par $R_{(p)}^p$ l'isomorphisme réciproque.

Nous avons vu que $\overset{\alpha}{a} \varepsilon \overset{\alpha, \alpha}{\nabla}_{O_2} A$ avait, en tant que matrice à éléments dans A, $\alpha + 1$ éléments distincts au plus (non identiquement nuls par définition). Faisons alors correspondre à $\overset{\alpha}{a}$ caractérisé par sa première ligne (on se restreint à $\alpha = 3$)

$$(a^0\ a^1\ a^1\ a^2\ a^1\ a^2\ a^2\ a^3)\ (1)$$

la matrice suivante élément de $\overset{\alpha+1}{D}$

$$\begin{bmatrix} a^0 & a^1 & a^2 & a^3 \\ 0 & a^0 & a^1 & a^2 \\ 0 & 0 & a^0 & a^1 \\ 0 & 0 & 0 & a^0 \end{bmatrix} = \xi^{\alpha+1}(a)$$

Désignons par $\overset{\alpha}{\delta} A$ l'ensemble des matrices de $\overset{\alpha}{D} A$ ayant les éléments de la diagonale principale égaux ainsi que les éléments de chacune des diagonales parallèles à la diagonale principale. On vérifie que c'est un *sous-anneau commutatif* de $\overset{\alpha}{D} A$. On constate que $\xi^{\alpha+1}$ est un homomorphisme d'anneau qui est d'ailleurs une bijection. Ainsi par l'application $\xi^{\alpha+1} \circ R_{(p)}^p : \overset{p}{T}_{O_2}{}'(A) \to \overset{p+1}{\delta} A$ on définit un isomorphisme. On peut donc identifier ces deux anneaux.

On a donc montré: $\overset{p}{T}_{O_1}{}'(A)$ *est isomorphe en tant qu'anneau à* $\overset{p}{\nabla}_{O_1}(A)$ *tandis que* $\overset{p}{T}_{O_2}{}'(A)$ *est isomorphe à* $\overset{p+1}{\delta} A$.

(1) Contient les 4 elèments distincts $(a^0\ a^1\ a^2\ a^3)$.

6. *Amplifications triangulaires d'un A-module.*

Nous avons vu au § 1 comment à partir d'un A-module E, on peut définir son amplifié triangulaire par l'anneau $\overset{2}{\nabla}\mathrm{A}$. On peut faire de même avec les différents sous-anneaux définis dans les paragraphes précédents.

Si $(x^1, \ldots, x^n)$ désignent les composantes de $x \in E$, A-module libre de dimension n, dans une base fixe et si $\overset{1}{a}_a$, $\overset{1}{a}_b$, $\overset{1}{a}_c \in \overset{1}{\nabla}\mathrm{A}$, on peut écrire le produit tensoriel $\overset{1}{a} \bigcirc x$, où $\overset{1}{a} \in \overset{1}{\triangle}\mathrm{A}$

$$\overset{1}{a} \bigcirc x = \begin{bmatrix} \overset{1}{a}_a & \overset{1}{a}_b \\ 0 & \overset{1}{a}_c \end{bmatrix} \bigcirc_A (x^1, \ldots x^n)$$

de deux manières différentes — on suppose $\overset{1}{\nabla}\mathrm{A}$ muni de sa structure de A-module mais on écrit avec éléments dans $\overset{1}{\nabla}\mathrm{A}$ pour simplifier l'écriture — :

$$(\mathrm{I},\ 4) \qquad \begin{bmatrix} \overset{1}{a}_a(x^1, \ldots, x^n) , & \overset{1}{a}_a(x^1, \ldots, x^n) \\ 0 & \overset{1}{a}_c(x^1, \ldots, x^n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1_a, \ldots, x^n_a & : & x^1_b, \ldots, x^n_b \\ 0 & & x^1_c, \ldots, x^n_c \end{bmatrix},$$

$$(1,5) \qquad \left[\begin{pmatrix} \overset{1}{a}_a & \overset{1}{a}_b \\ 0 & \overset{1}{a}_c \end{pmatrix} x^1, \ldots, \begin{pmatrix} \overset{1}{a}_a & \overset{1}{a}_b \\ 0 & \overset{1}{a}_c \end{pmatrix} x^n \right] = \left[\begin{pmatrix} \overset{1}{x}{}^1_a & \overset{1}{x}{}^1_b \\ 0 & \overset{1}{x}{}^1_c \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \overset{1}{x}{}^b_a & \overset{1}{x}{}^n_b \\ 0 & \overset{1}{x}{}^n_c \end{pmatrix} \right].$$

Dans (1, 4) on peut distinguer que $\overset{2}{E} = \overset{2}{\nabla}\mathrm{A} \bigcirc_A E$ est produit de trois $\overset{1}{\nabla}$A-modules $\overset{1}{E}_a$, $\overset{1}{E}_b$, $\overset{1}{E}_c$. Dans (1, 5) on peut distinguer la structure de $\overset{2}{\nabla}$A-module de $\overset{2}{E}$.

On désignera par $\overset{(p)}{E}$ le produit

$$\overset{(n)}{E} = \overset{0}{E} \bigcirc \overset{1}{E} \bigcirc \ldots \bigcirc \overset{n}{E} \qquad (\overset{0}{E} = E)$$

qui est égal à $\overset{n}{T}(A) \bigcirc_A E$.

Nous allons dans ce qui suit définir certaines familles d'applications de cette classe d'espaces.

7. *L'ensemble des applications* $\overset{(p)}{F}(\overset{(p)}{E} . \overset{(p)}{F})$.

Soit $\overset{(p)}{E}$ (resp $\overset{(p)}{F}$) l'amplification du A-module E (resp F) par l'anneau $\overset{p}{T}(A)$.

On désignera par $\overset{\lambda}{x}$ un élément de $\overset{\lambda}{\nabla}\mathrm{A}$ et par $\overset{\lambda}{X}$ (resp $\overset{(\lambda)}{X}$) un élément de $\overset{\lambda}{E}$ (resp. $\overset{(\lambda)}{E}$). Les majuscules seront réservées en principe aux éléments des modules $\overset{\lambda}{E}$, $\overset{\mu}{F}$ etc et les minuscules aux éléments des anneaux.

Nous allons définir certaines classes d'applications non linéaires de $\overset{(p)}{E} \to \overset{(p)}{F}$ (qu'on rencontre dans la théorie des jets non holonomes) respectant la structure de produit direct de $\overset{(p)}{E}$ et de $\overset{(n)}{F}$, permettant en outre un prolongement du calcul matriciel. Nous allons procéder par récurrence.

(0) *Applications de type zéro*

i) les homothéties de $A \to A$ peuvent s'écrire $\overset{o}{y} = \overset{o}{\lambda}\,\overset{o}{x}$, où $\overset{o}{y}, \overset{o}{\lambda}, \overset{o}{x} \in A$. On désigne leur ensemble par

$$\overset{o}{A}(A, A) = L(A, A) ,$$

ii) les formes liniaires sur E, c'est-à-dire l'ensemble des applications L (E, A), s'expriment, une base de E étant donnée, E étant de dimension n sur A, par des expressions de la forme

$$(II, 6) \qquad f(x) = \Sigma\, \overset{o}{a_i}\,\overset{o}{x^i} \quad , \quad x \in E \quad , \quad f \in L(E, A) , = \Sigma\, \overset{o}{a_i}\,\overset{o}{x^i}$$

iii) Les applications linéaires de $\overset{o}{E} = E \to \overset{o}{F} = F$, sont données, F étant de dimension m sur A et une base étant donnée sur F, par m.n homothéties de $A \to A$, ou m formes sur E, qu'on peut écrire

$$(1, 7) \qquad \overset{o}{y^s} = \Sigma\, \overset{o}{\lambda_i^s}\,\overset{o}{x^i}$$

définissant ainsi une matrice $n \times m$ à coefficients dans A. On posera par définition pour les applications de type zéro

$$\overset{o}{F}(\overset{o}{E}, \overset{o}{F}) = L(E, F) .$$

1) *Applications de type un.*

i) Les homothéties de $\overset{1}{\triangledown} A \to \overset{1}{\triangledown} A$ sont données par des expressions du type $\overset{1}{y} = \overset{1}{\lambda} \cdot \overset{1}{x}$ où $\overset{1}{y}, \overset{1}{\lambda}, \overset{1}{x} \in \overset{1}{\triangledown} A$, si $\overset{1}{\triangledown} A$ est muni de la structure de $\overset{1}{\triangledown} A$-module. Mais si on munit $\overset{1}{\triangledown} A$ de sa structure de A-module une telle homothétie s'écrira:

$$(1, 8) \qquad \begin{bmatrix} \overset{o}{y_a} & \overset{o}{y_b} \\ 0 & \overset{o}{y_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{o}{\lambda_a} & \overset{o}{\lambda_b} \\ 0 & \overset{o}{\lambda_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{o}{x_a} & \overset{o}{x_b} \\ 0 & \overset{o}{x_c} \end{bmatrix} ,$$

où $\overset{o}{y_a}, \ldots, \overset{o}{x_a}, \ldots, \overset{o}{x_c}$ sont des éléments de A.

ii) On définit alors des formes *non linéaires* sur $\overset{(1)}{E}$ muni de sa structure de $\overset{1}{\triangledown}$ A-module de la manière suivante :

On se donne tout d'abord des applications $(\overset{o}{E}, \overset{1}{\triangledown} A) \to \overset{1}{\triangledown} A$ en utilisant une matrice $\overset{1}{\lambda}$ où $\overset{o}{\lambda_a}$ et $\overset{o}{\lambda_c} \in \overset{o}{A}(A, A)$ et où $\overset{o}{\lambda_b}$ est une forme linéaire sur $\overset{o}{E}$, c'est-à-dire

(I, 9) $\overset{0}{\lambda}_b(\overset{0}{X}) = \Sigma\, \overset{0}{\lambda}_{bj}\, \overset{0}{x}^j$, où $\overset{0}{X} \in \overset{0}{E}$. On désigne l'ensemble de ces fonctions par $\overset{1}{A}(\overset{0}{E}, \bigtriangledown A\ ;\ \bigtriangledown A)$.

iii) Les applications non linéaires de $\overset{(1)}{E} \to \overset{1}{\bigtriangledown} A$ s'obtiennent comme des combinaisons linéaires à coefficients dans $\overset{1}{A}$, c'est-à-dire de la forme

(I, 10) $$\overset{1}{y} = \sum_i \overset{1}{\lambda}_i\, \overset{1}{x}^i$$

où $\overset{1}{\lambda}_i \in \overset{1}{A}$, pour $i = 1, \ldots, n$.

On peut écrire, en utilisant les structures de A-module des espaces en question

(I, 11) $$\begin{bmatrix} \overset{0}{y}_a & \overset{0}{y}_b \\ & \overset{0}{y}_c \\ 0 & \end{bmatrix} = \sum_i \begin{bmatrix} \overset{0}{\lambda}_a & \sum_j \overset{0}{\lambda}_{bj}\, \overset{0}{x}^j \\ 0 & \overset{0}{\lambda}_c \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \overset{0}{x}_a & \overset{0}{x}_b \\ 0 & \overset{0}{x}_c \end{bmatrix}^i$$

ou encore

(I, 12) $$\begin{bmatrix} \overset{0}{y}_a & \overset{0}{y}_b \\ & \overset{0}{y}_c \\ 0 & \end{bmatrix} = \sum_i \begin{bmatrix} \overset{0}{\lambda}_{ai} & \overset{0}{\lambda}_{bji}\, \overset{0}{x}^j \\ 0 & \overset{0}{\lambda}_{bi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{0}{x}^i_a & \overset{0}{x}^i_b \\ 0 & \overset{0}{x}^i_c \end{bmatrix}.$$

Désignons par $\overset{1}{A}(\overset{1}{E}, \bigtriangledown A)$ l'ensemble de telles applications.

iv) On définit ensuite des applications de $\overset{(1)}{E}$ dans $\overset{1}{F}$ par la donnée de m applications de type $\overset{1}{A}(\overset{1}{E}, \overset{1}{\bigtriangledown} A)$ ou par la donnée de $m \cdot n$ éléments $\overset{1}{\lambda}^s_i \in \overset{1}{A}$, ce qui définit une matrice $m \times n$ à coefficients dans $\overset{1}{A}$. On peut écrire de telles applications, en utilisant successivement les structures de $\overset{1}{\bigtriangledown}$ A-module et de A-module des espaces utilisés :

(I, 13) $$\overset{1}{y}^s = \sum_a^m \overset{1}{\lambda}^s_i\, \overset{1}{x}^i = \sum_a^m \sum_i^n \begin{bmatrix} \overset{0}{\lambda}_a & \Sigma\, \overset{s}{\lambda}_{jb}\, \overset{0}{x}^j \\ & \overset{0}{\lambda}_b \\ 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{0}{x}^i_a & \overset{0}{x}^j_b \\ 0 & \overset{0}{x}^i_c \end{bmatrix}$$

qu'on peut écrire symboliquement

(I, 14) $$\overset{1}{Y} = \overset{1}{A}(\overset{0}{X})\, \overset{1}{X}$$

iv) Alors $\overset{(1)}{X} \longrightarrow \overset{(1)}{Y}$; $\overset{(1)}{E} \to \overset{(1)}{F}$ sera l'application produit

(I, 15) $$\overset{(1)}{Y} = \overset{(1)}{A}(\overset{(1)}{X}) = \{\, \overset{0}{Y} = \overset{0}{A}\, \overset{0}{X},\ \overset{1}{Y} = \overset{1}{A}(\overset{0}{X})\, \overset{1}{X}\,\}$$

Soit $\overset{(1)}{F}(\overset{1}{E}, \overset{1}{F})$ leur ensemble.

2) *Applications de type deux.*

i) Les homothéties de $\overset{2}{\nabla}A \to \overset{2}{\nabla}A$ sont données par des expressions du type $\overset{2}{y} = \overset{2}{\lambda}\,\overset{2}{x}$, où $\overset{2}{y}, \overset{2}{\lambda}, \overset{2}{x}$ sont des éléments de $\overset{2}{\nabla}A$. Mais muni de sa structure de $\overset{2\cdot 1}{\nabla}A$-module elles s'écrivent :

$$\text{(I, 8')} \qquad \begin{bmatrix} \overset{1}{y}_a & \overset{1}{y}_b \\ 0 & \overset{1}{y}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{1}{\lambda}_a & \overset{1}{\lambda}_b \\ 0 & \overset{1}{\lambda}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{1}{x}_c & \overset{1}{x}_b \\ 0 & x_c \end{bmatrix}$$

où $\overset{1}{y}_a, \ldots, \overset{1}{\lambda}_a, \ldots, \overset{1}{x}_c$ sont des éléments de $\overset{1}{\nabla}A$.

ii) On obtient des formes non linéaires, sur $\overset{(2)}{E}$ muni de sa structure de $\overset{2}{\nabla}A$ module, de la manière suivante :

On définit tout d'abord les applications

$(\overset{1}{E}, \overset{2}{E}, \overset{2}{\triangle}A) \to \overset{2}{\nabla}A$ par une matrice $\overset{2}{\lambda}$ avec $\overset{1}{\lambda}_a, \overset{1}{\lambda}_c$ éléments de $\overset{1}{A}$ et où $\overset{1}{\lambda}_b$ est une plication de type $\overset{1}{A}(\overset{1}{E}, \overset{1}{\nabla}A)$ de la forme

$$\text{(I, 9')} \qquad \overset{1}{\lambda}_b(\overset{(1)}{X}) = \sum_i \overset{1}{\lambda}_{bi}\,\overset{1}{x}^i \ , \ (\overset{1}{\lambda}_{bi} \in \overset{1}{A}) \ .$$

Désignons par $\overset{2}{A}(\overset{1}{E}, \overset{2}{E}, \overset{2}{\nabla}A \ ; \ \overset{2}{\nabla}A)$ l'ensemble de telles applications.

iii) Les applications non linéaires $\overset{(2)}{E} \to \overset{2}{\nabla}A$ s'obtiennent comme combinaisons linéaires à coefficients dans $\overset{2}{A}$, c'est-à-dire de la forme

$$\text{(I, 10')} \qquad \overset{2}{y} = \sum \overset{2}{\lambda}_i\,\overset{2}{x}^i$$

où $\overset{1}{\lambda}_i \in \overset{2}{A}$, pour $i = 1, \ldots, n$, $\overset{2}{x}^i \in \overset{2}{\nabla}A$,

ce qu'on peut écrire en utilisant les structures de $\overset{1}{\nabla}A$-module des espaces en question

$$\text{(I, 11')} \qquad \begin{bmatrix} \overset{1}{y}_a & \overset{1}{y}_b \\ 0 & \overset{1}{y}_c \end{bmatrix} = \sum_i \begin{bmatrix} \overset{1}{\lambda}^i_a & \sum_j \overset{1}{\lambda}_{bji} & \overset{1}{x}^j \\ 0 & \overset{1}{\lambda}_{bi} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{1}{x}^i_a & \overset{1}{x}^i_b \\ 0 & \overset{1}{x}^i_c \end{bmatrix} .$$

Désignons l'ensemble de telles applications par $\overset{2}{A}(\overset{(2)}{E}, \overset{2}{\nabla}A)$.

iv) On définit ensuite les applications de $\overset{(2)}{E} \to \overset{2}{F}$ par la donnée de m applications de type $\overset{2}{A}(\overset{(2)}{E}, \overset{2}{\nabla}A)$, ou de manière équivalente, par la donnée de $m \cdot n$ éléments dans $\overset{2}{A}$. $\overset{(2)}{X} \to \overset{2}{A}(\overset{(2)}{X})$ est alors de la forme

(I, 13′)
$$\overset{2}{y}{}^{x} = \begin{bmatrix} \overset{1_1}{y}{}^{x}_{a} & \overset{1_2}{y}{}^{x}_{a} & \overset{1_2}{y}{}^{x}_{b} & \overset{1_2}{y}{}^{x}_{b} \\ 0 & \overset{1_2}{y}{}^{x}_{a} & 0 & \overset{1_2}{y}{}^{x}_{b} \\ 0 & 0 & \overset{1_1}{y}{}^{x}_{c} & \overset{1_2}{y}{}^{x}_{c} \\ 0 & 0 & 0 & \overset{1_2}{y}{}^{x}_{c} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \overset{1_1}{\lambda}{}^{x}_{ai} & \overset{2_2}{\lambda}{}^{x}_{aji}\,\overset{0}{x}{}^{j} & \overset{1_1}{\lambda}{}^{x}_{bji} & \overset{1_2}{\lambda}{}^{x}_{bkji}\,\overset{0}{x}{}^{k} \\ 0 & \overset{1_2}{\lambda}{}^{x}_{ai} & 0 & \overset{1_2}{\lambda}{}^{x}_{bji} \\ 0 & 0 & \overset{1_1}{\lambda}{}^{x}_{ci} & \overset{2_2}{\lambda}{}^{x}_{cji}\,\overset{0}{x}{}^{j} \\ 0 & 0 & 0 & \overset{1_2}{\lambda}{}^{x}_{cji} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{1}{x}_{aj} & \overset{1}{x}{}^{j}_{b} \\ 0 & \overset{1}{x}{}^{j}_{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{1_2}{x}{}^{i}_{a} & \overset{1_2}{x}{}^{i}_{a} & \overset{1_2}{x}{}^{i}_{b} & \overset{1_2}{x}{}^{i}_{b} \\ 0 & \overset{1_2}{x}{}^{i}_{a} & 0 & \overset{1_2}{x}{}^{i}_{b} \\ 0 & 0 & \overset{1_2}{x}{}^{i}_{c} & \overset{1_2}{x}{}^{i}_{c} \\ 0 & 0 & 0 & \overset{1_2}{x}{}^{i}_{c} \end{bmatrix},$$

qu'on peut écrire symboliquement

(I, 14′)
$$\overset{2}{Y} = \overset{2}{A}\,\overset{(1)}{(X)}\,\overset{2}{X}\ .$$

iv) Alors $\overset{(2)}{X} \rightsquigarrow \overset{(2)}{Y} : \overset{(2)}{E} \to \overset{(2)}{F}$ sera l'application produit

(I, 15′)
$$\overset{(2)}{Y} = \overset{(2)}{A}\,\overset{(2)}{(X)} = \{\, \overset{0}{Y} = \overset{0}{A}\,\overset{0}{X}, \overset{1}{Y} = \overset{1}{A}\,\overset{0}{(X)}\,\overset{1}{X}, \overset{2}{Y} = \overset{2}{A}\,\overset{(1)}{(X)}\,\overset{2}{X} \,\}\ ,$$

ou encore

(I, 16)
$$\overset{(2)}{Y} = \overset{(2)}{A}\,\overset{(2)}{X} = \left\{ \overset{0}{Y} = \overset{0}{A}\,\overset{0}{X}, \overset{1}{Y} = \begin{bmatrix} \overset{0}{\lambda}_{a} & \overset{0}{\lambda}_{b}\ \overset{(1)}{(X)} \\ 0 & \overset{0}{\lambda}_{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{0}{X}_{a} & \overset{0}{X}_{b} \\ 0 & \overset{0}{X}_{c} \end{bmatrix} \overset{2}{Y} = \begin{bmatrix} \overset{1}{\lambda}_{a} & \overset{1}{\lambda}_{b}\ \overset{(2)}{(X)} \\ 0 & \overset{1}{\lambda}_{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{1}{X}_{a} & \overset{1}{X}_{b} \\ 0 & \overset{1}{X}_{c} \end{bmatrix} \right\}.$$

Nous désignerons par $\overset{(2)}{F}\,\overset{(2)}{(E}\,\overset{2}{F)}$ l'ensemble de telles applications.

On peut procéder jusqu'à l'ordre p exactement de la même manière, et il est évident que les matrices deviennent de plus en plus complexes, mais elles ont toujours la même structure. L'ensemble de telles applications sera noté $\overset{(p)}{F}\,\overset{(p)}{(E,}\,\overset{(p)}{F)}$.

Nous allons voir s'il est possible d'exprimer le produit de telles applications par un produit matriciel.

8. *Formes particulières des applications pour les diverses amplifications.*

Nous avons défini les applications de type p précédentes, pour des modules obtenus par amplification de A-modules, au moyen de l'anneau $\overset{p}{T}(A)$. Pour que l'on puisse définir de telles fonctions pour des amplifiés obtenus avec les différents sous-anneaux de $\overset{p}{T}(A)$ que nous avons définis, les diverses matrices $\overset{0}{A}, \overset{1}{A}, \overset{2}{A}, \ldots, \overset{p}{A}$ rencontrées, doivent présenter les mêmes types de particularités que les matrices représentant les éléments de ces amplifiés.

Par exemple pour $\overset{p}{E} = \overset{p}{T}(A) \bigcirc E$, il faut et il suffit que $\overset{1}{\lambda}_a = \overset{1}{\lambda}_c$, $\overset{2}{\lambda}_a = \overset{2}{\lambda}_c$, $\ldots$, $\overset{p}{\lambda}_a = \overset{p}{\lambda}_c$.

9. *Produits et inverses d'applications de type p*

Considérons un espace $\overset{(p)}{G} = \overset{0}{G} \bigcirc \ldots \bigcirc \overset{p}{G}$ avec application $\overset{(p)}{B} : \overset{(p)}{F} \to \overset{(p)}{G}$. Nous voulons examiner la possibilité de définir $\overset{(p)}{C} : \overset{(p)}{E} \to \overset{(p)}{G}$ à l'aide de chacune des applications $\overset{(p)}{A}$ et $\overset{(p)}{B}$. Autrement dit nous voulons voir quand le produit de deux telles applications est encore une application de même type, ou si la composition de telles application a un sens.

Nous devons continuer à procéder par récurrence sur le type.

i) *Type 0* (Pour $\overset{(0)}{E}, \overset{(0)}{F}, \overset{(0)}{G}$) le produit est fermé comme produit d'applications linéaires. L'application inverse, si elle existe est définie par la matrice inverse.

ii) *Type 1* (Pour $\overset{(1)}{E}, \overset{(1)}{F}, \overset{(1)}{G}$), L'application $\overset{1}{B} : \overset{(1)}{F} \to \overset{1}{G}$ s'écrira, une base de $\overset{1}{G}$ étant donnée et $\overset{1}{G}$ (de même que $\overset{2}{G}, \ldots, \overset{p}{G}$) étant de dimension q sur A, par

$$(I,\ 17)\qquad \overset{1\,A}{z} = \begin{bmatrix} \overset{0}{z}_a & \overset{0}{z}_b \\ 0 & \overset{0}{z}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{0}{\mu}_a & \overset{0}{\mu}_b \\ 0 & \overset{0}{\mu}_c \end{bmatrix}^{A}_{z} \begin{bmatrix} \overset{0}{y}_a & \overset{0}{y}_b \\ 0 & \overset{0}{y}_c \end{bmatrix}^{z} \quad (\bar{A}, B = 1, \ldots, q)$$

d'où en introduisant les y^0 par leur expression donnée en (I, 13)

$$(I,\ 17')\qquad \overset{1\,A}{z} = \begin{bmatrix} \overset{0}{\mu}^{A}_{ax} & \overset{0}{\mu}^{A}_{b\beta x} & \overset{0}{y}^{\beta} \\ 0 & \overset{0}{\mu}^{A}_{cx} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{0}{\lambda}^{x}_{al} & \overset{0}{\lambda}^{x}_{b\beta} & \overset{0}{x}^{l} \\ 0 & \overset{0}{\lambda}^{x}_{cl} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{0}{x}^{l}_{a} & \overset{0}{x}^{l}_{b} \\ 0 & \overset{0}{x}^{l}_{c} \end{bmatrix}$$

$$(\mathrm{I},\ 17'')\quad \overset{1}{z}{}^{A} = \begin{bmatrix} \overset{0}{\underset{a\alpha}{\mu}}{}^{A}\ \overset{0}{\underset{ai}{\lambda}}{}^{\alpha}\ , & \overset{0}{\underset{b\beta\alpha}{\mu}}{}^{A}\ \overset{0}{y}{}^{\beta}\ \overset{0}{\underset{ai}{\lambda}}{}^{\alpha} + \overset{0}{\underset{a\alpha}{\mu}}{}^{A}\ \overset{0}{\underset{bji}{\lambda}}{}^{\alpha}\ \overset{0}{x}{}^{j} = \overset{0}{\underset{b}{z}}{}^{A} \\ 0\ , & \overset{0}{\underset{c\alpha}{\mu}}{}^{A}\ \overset{0}{\underset{ci}{\lambda}}{}^{\alpha} \end{bmatrix}$$

Mais y^0 est donné (voir I, 7) par $\overset{0}{y}{}^{\beta} = \overset{0}{\lambda}{}^{\beta}_{j}\,\overset{0}{x}{}^{j}$, en l'introduisant dans $\overset{0}{z}{}^{A}_{b}$ il s'écrit :

$$(\mathrm{I},\ 18)\qquad \overset{0}{z}{}^{A}_{b} = \overset{0}{\underset{b\beta\alpha}{\mu}}{}^{A}\ \overset{0}{\lambda}{}^{\beta}_{j}\ \overset{0}{x}{}^{j}\ \overset{0}{\underset{ai}{\lambda}}{}^{\alpha} + \overset{0}{\underset{a\alpha}{\mu}}{}^{A}\ \overset{0}{\underset{bji}{\lambda}}{}^{\alpha}\ \overset{0}{x}{}^{j}.$$

On peut intervertir dans le premier terme de (I,18), $\overset{0}{x}{}^{j}$ et $\overset{0}{\underset{ai}{\lambda}}{}^{j}$ puisque ces éléments appartiennent à A, supposé commutatif. On peut ainsi mettre $\overset{0}{x}{}^{j}$ en évidence, ce qui permet d'être assuré que *le produit de deux applications de type 1 est encore de type 1 et s'exprime par un produit quasi matriciel.*

Inverse d'une application de type 1. Le produit étant fermé pour la loi de composition, on peut examiner l'existence et les conditions d'existence de l'inverse d'une application de type 1. Pour cela posons E = F = G. L'application identique s'écrit

$$\overset{1}{I}\,d = \begin{bmatrix} \overset{0}{I}\,d & 0 \\ 0 & I\,\overset{0}{d} \end{bmatrix}.$$

D'après l'expression ci-dessus, pour que $\overset{1}{\lambda}$ ait un inverse, il faut et il suffit que l'on ait

$$(\mathrm{I},\ 19)\quad \begin{cases} \overset{0}{\underset{a}{\mu}}{}^{A}_{\alpha}\ \overset{0}{\underset{\alpha}{\lambda}}{}^{\alpha}_{i} = \delta^{A}_{i}\ ,\ \overset{0}{\underset{c}{\mu}}{}^{A}_{\alpha}\ \overset{0}{\underset{c}{\lambda}}{}^{\alpha}_{i} = \delta^{A}_{i} : A\ ,\ \alpha = 1, \ldots, n \\ (\overset{0}{\underset{a}{\mu}}{}^{A}_{\beta\alpha}\ \overset{0}{\lambda}{}^{\beta}_{\alpha}\ \overset{0}{\underset{a}{\lambda}}{}^{\alpha}_{i} + \overset{0}{\underset{a}{\mu}}{}^{A}_{\alpha}\ \overset{0}{\underset{b}{\lambda}}_{ji})\ \overset{0}{x}{}^{j} = 0\quad (\forall\ \overset{0}{x}{}^{j}). \end{cases}$$

On en déduit facilement que pour que $\overset{1}{A}$ soit inversible, il faut et il suffit que $\overset{0}{\underset{a}{\lambda}}$ le soit, ainsi que $\overset{0}{\underset{c}{\lambda}}$ mais qu'aucune condition n'est requise pour $\overset{0}{\underset{b}{\lambda}}$. Si alors $\overset{0}{A}$ est inversible il s'ensuit que $\overset{(1)}{A}$ l'est, et il est facile de calculer $(\overset{(1)}{A})^{-1}$.

Type 2. (Pour $\overset{(2)}{E}, \overset{(2)}{F}, \overset{(2)}{G}$). On écrit les applications $\overset{2}{A}$ et $\overset{2}{B}$ munies de leur structure de $\overset{1}{\nabla}$ A-module, comme le cas de type 1, mais en remplaçant $\overset{0}{\mu}, \overset{0}{\lambda}, \overset{0}{y}, \overset{0}{x}$ par $\overset{1}{\mu}, \overset{1}{\lambda}, \overset{1}{y}, \overset{1}{x}$.

Les éléments placés sur la diagonale de la matrice analogue à celle de (I, 17″) ne causent pas de difficultés, puisque ce sont des applications de type 1 et que pour ce type le produit est fermé. Mais l'analogue de $\overset{0}{z}{}^{A}_{b}$ soit $\overset{1}{z}{}^{A}_{b}$ présente une difficulté

insurmontable pour la structure de $\overset{1}{\nabla}$A-module, on ne peut plus intervertir $\overset{s}{\lambda}_{ij}$ et $\overset{1}{x}^j$, car $\overset{1}{\nabla}$A n'est pas commutatif, ainsi *si* $\overset{(2)}{E}$, $\overset{(2)}{F}$, $\overset{(2)}{G}$ *sont extensions par* $\overset{1}{\nabla}$A, *le produit de deux applications de type deux n'est pas fermé.*

Cependant on se rappelle que si $\overset{s}{\nabla}$ A n'est pas commutatif $\overset{\alpha}{\nabla}_{01}$A l'est, alors on peut intervertir $\overset{1}{\lambda}^s_j$ et $\overset{1}{x}^s$ et on en déduit que le produit est fermé pour $\overset{(2)}{E}$ extension par $\overset{(2)}{T}_{0_1}$(A).

L'existence d'un inverse pour $\overset{\alpha}{A}$ est assuré par des conditions analogues à (I, 19) ; si l'existence de $\overset{1}{A}$ et de $\overset{0}{A}$ sont assurées, on en déduit l'existence de l'inverse de $\overset{(2)}{A}$ dans ce cas aussi.

Type p. On peut toujours écrire une application $\overset{(\lambda)}{A} : \overset{(\lambda)}{E} \to \overset{\lambda}{F}$ $1 \leqslant \lambda \leqslant p$ en utilisant sa structure de $\overset{\lambda-1}{\nabla}_{0_1}$ A-module de manière analogue à (I,17′) et les raisonnements que nous avons faits pour $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$ se prolongent par récurrence à un λ quelconque.

Ainsi pour avoir un produit fermé, il faut et il suffit que les espaces envisagés soient des amplifiés de A-modules par l'anneau $\overset{p}{T}_{0_1}$(A), ce qui assure les mêmes propriétés pour les espaces amplifiés par les sous-anneaux $\overset{p}{T}_{0_2}$, $\overset{p}{T'}_{0_1}$(A), $\overset{p}{T'}_{0_2}$(A).

Remarquons enfin que pour un A-module E amplifié par l'un des sous anneaux $\overset{p}{T'}_{0_1}$(A) ou $\overset{p}{T'}_{0_2}$(A), l'existence d'un inverse à $\overset{(p)}{A}$ est assuré par la seule inversibilité de $\overset{1}{\lambda}_a$, alors qu'il faut la postuler pour chacun des $\overset{1}{\lambda}_a$, ... $\overset{p}{\lambda}_a$, pour les autres amplifiés.

CHAPITRE II

Les jets non holonomes. Connexions non holonomes d'ordre supérieur

L'utilité de la notation matricielle des jets non holonomes apparait clairement lorsqu'on utilise leur représentation dans des systèmes de coordonnées.

Plutôt que de donner a priori une telle notation nous avons préféré, — ce qui allonge cet exposé — donner quelques détails sur la définition de tels jets. Les difficultés que l'on rencontre n'étant pas d'ordre conceptuel mais plutôt algorithmique, nous avons pensé que ces détails étaient presque essentiels à notre but.

1 — *Les jets non holonomes* (1) *définition par récurrence*

Soient V_n et V_m deux variétés différentiables de classe C^∞. (U, φ), (W, ψ) deux cartes respectivement en $p \in V_n$ et $q = \overset{o}{f}(p) \in V_m$, $f^o : V_n \to V_m$ de classe C^∞, $A_p(V_n, V_m)$ l'ensemble des germes de telles applications définies au voisinage de $p \in V_n$.

a) *Jets du premier ordre.* Soient $\overset{o}{f}, \overset{o}{f'} \in A_p(V_n, V_m)$ et $\overset{\overline{o}}{f} = \psi \overset{o}{f} \varphi^{-1}$, $f' = \psi \overset{o}{f'} \varphi^{-1}$ leurs représentants dans les cartes envisagées, nous dirons que $\overset{o}{f}$ et $\overset{o}{f'}$ sont dans le même jet d'ordre 1 en p si

$$\{\overset{\overline{o}}{f}(x) = \overset{\overline{o}}{f'}(x) \ , \ D\overset{\overline{o}}{f}(x) = D\overset{\overline{o}}{f'}(x)\} \tag{II-1}$$

où $x = \varphi(p)$, et D désigne la première différentielle des fonctions $\overset{\overline{o}}{f}$ et $\overset{\overline{o}}{f'}$.

Ceci est une relation d'équivalence dans $A_p(V_n, V_m)$, on peut s'assurer que cette définition ne dépend pas des cartes choisies, c'est ce que nous vérifierons lorsque nous étudierons les changements de cartes dans les espaces de jets.

On désigne la classe d'équivalence de f par $j^1_p f$ et l'ensemble de telles classes d'équivalence par $J^1_p(V_n, V_m)_q$.

A $q = \overset{o}{f}(p)$, on peut faire correspondre :

$p = \alpha(\overset{o}{f}(p)) \ , \ q = \beta(\overset{o}{f}(p)), \ (p, q) = (\alpha \times \beta)(\overset{o}{f}(p))$.

p est dit la source du jet et α est dite application source, q est dit le but du jet, β l'application but.

---

(1) Nous reprenons les définitions contenues dans [1].

On notera de la même façon les applications quotients

$$\alpha : j^1_p \overset{0}{f} \to p \ , \ \beta : j^1_p f \to \overset{0}{f}(p) = q$$

et nous ferons de même dans la suite dans tout les quotients envisagés.

$j^1_p \overset{0}{f}$ *est dit jet holonome du premier ordre de* $\overset{0}{f}$ en p.

Dans le système de cartes envisagé, alors $j^1_p \overset{0}{f}$ est représenté par les familles de réels

$$\text{(II-2)} \qquad \left\{ \{(x^i)\} = \varphi(p) \ , \ y^\alpha = \overset{0}{\overline{f}}{}^\alpha (x^i) \ , \ \frac{\partial \overset{0}{\overline{f}}{}^\alpha (x)}{\partial x^i} \right\} \begin{matrix} (1) \\ \alpha = 1 \dots m \\ i = 1 \dots n \end{matrix} .$$

Si on envisage la réunion $J^1(V_n, V_m) = \bigcup_{p \in V_n} \bigcup_{q \in V_m} J^1_p (V_n, V_m)_q$, (2) (II, 2) définit une carte de $J^1(V_n, V_m)$ au voisinage de $j^1_p f$. On peut ainsi symboliser $j^1_p f$ par

$$\text{(II, 2')} \qquad \{ p, \overset{0}{f}(p) \, D f^0_{(p)} \} ,$$

étant entendu que la différentielle D n'a pas de sens intrinsèque dans une variété mais seulement relativement à un système de cartes.

b) *Jets non holonomes d'ordre deux.* (Premier prolongement non holonome)
Soit σ une section de $J^1(V_n, V_m)$ relativement à la projection α.

On note σ^1 la fonction $p \to (\overset{0}{f}, f^1) : V_n \to J^1(V_n, V_m)$ et on envisage dans l'ensemble $a^1_{p_0}(V_n, J^1(V_n, V_m))$ des germes de telles sections le 1-jet de σ^1 en $p_0 \in V_n$.

Si $\sigma^1_1 = (f^0_1 \, f^1_1) \in a^1_{p_0}$

$$\sigma^1 \succeq \sigma^1_1 \Leftrightarrow \{ \sigma^1(p_0) = \sigma^1_1(p_0) \ , \ D\sigma^1(p_0) = D\sigma^1_1(p_0) \} \ (3)$$

cela entraîne

$f^0(p) = f^0_1(p)$, $D f^0(p) = D f^0_1(p)$, $\overset{1}{f}(p) = \overset{1}{f}_1(p)$, $D f^1(p) = D f^1_1(p)$ et $j^1_p \sigma_1$ sera représenté par les familles de réels.

$$\text{(II, 3)} \qquad \left\{ x^i \ , \ \overset{0\alpha}{f}(x) \ , \ \frac{\partial \overset{0\alpha}{f}(x)}{\partial x^i} \ , \ \overset{1\alpha}{f}_1(x) \ , \ \frac{\partial \overset{1\alpha}{f}_1(x)}{\partial x^i} \right\}$$

On peut symboliser un tel jet par

$$\text{(II, 3')} \qquad \{ x = \varphi(p), \overset{0}{f}, D\overset{0}{f}, \overset{1}{f}, D\overset{1}{f} \}$$

---

(1) Par simplicité nous omettrons les barres et écrirons f^α pour $\overline{f}^\alpha$.

(2) On sent aussi envisager $J^1(V_n, V_m)_q = \bigcup_{p \in V_n} J^r_1(V_n, V_m)_q$ et $J^1_p(V_n, V_m) = \bigcup_{q \in V_m} J^1_p(V_n, V_m)_q$.

(3) Nous utiliserons la même convention que plus haut D ici est symbolique.

On posera

$$\widetilde{j}^{2}_{p}\overset{0}{f} = j^{1}_{p}\sigma^{1}$$

et $\widetilde{j}^{2}_{p}f$ *sera dit jet non holonome du deuxième ordre* de l'application $\overset{0}{f}: V_n \to V_m$, leur ensemble sera désigné par $\widetilde{J}^{2}_{p}(V_n, V_m)_q$ et on notera

$$\widetilde{J}^{2}(V_n, V_m) = \bigcup_{p \in V_n} \bigcup_{q \in V_m} \widetilde{J}^{2}_{p}(V_n, V_m)_q$$

(II, 3) définit une carte de $\widetilde{J}^{2}(V_n, V_m)$, relativement aux cartes (V, φ) en p et (V, ψ) en q, sur $\widetilde{J}^{2}(R^n, R^m)$.

c) *Jets non-holonomes d'ordre trois et quatre.* (Deuxième et troisième prolongement non holonome). (Nous procédons de même que dans a, et b) et omettons les détails).

Une section de $\widetilde{J}^{2}(V_n, V_m)$ relativement à α s'écrira

(II, 4) $$\sigma^{2}(p) = (f^{0}, f^{1} f^{1}_{i}, f^{1}_{i}{}^{2})$$

alors

(II, 5) $$j^{1}_{p}\sigma^{2} = (p, f^{0}, D f^{0}, f^{1}, D f^{1}, \ldots, D f^{1}_{i}{}^{2})$$

et par définition

$$\widetilde{j}^{3}_{p}\overset{0}{f} = j^{1}_{p}\sigma^{2}$$

est dit jet non holonome d'ordre 3 de f en p et on désigne leur ensemble par

$$\widetilde{J}^{3}_{p}(V_n, V_m) = J^{1}_{p}(V_n, \widetilde{J}^{2}(V_n, V_m))$$

Une section de $\widetilde{J}^{3}_{p}$ s'écrira

(II, 6) $$\sigma^{3} = (f^{0}, f^{1}, f^{1}_{i}, f^{1}_{i}{}^{2}, f^{1}_{i\,i}, f^{1}_{i}{}^{3}, f^{1}_{i\,i}, f^{1}_{i}{}^{2}{}_{i}, f^{1}_{i}{}^{2}{}_{i}{}^{3}),$$

d'où pour un jet d'ordre 4 ;

(II, 7) $$j^{1}_{p}\sigma^{3} = (f^{0}, D f^{0}, \ldots\ldots, f^{1}_{i}{}^{2}{}_{i}{}^{3} D f^{1}_{i}{}^{2}{}_{i}{}^{3}).$$

2. *Représentation matricielle des jets non-holonomes.*

On peut faire correspondre, biunivoquement, aux représentations (II 3') (II, 5), (II, 7) des jets non holonomes d'ordre 2, 3 et 4, un ensemble convenable de matrices,

$j\sigma^{1} \varepsilon \widetilde{J}^{2}(V_n, V_m)$ s'écrira

(II, 3'') $$\left\{ \varphi(p), f^{0}, D f^{0}, \begin{bmatrix} f^{1} & D f^{1} \\ 0 & f^{1} \end{bmatrix} \right\}$$

$j\sigma^2 \varepsilon \widetilde{J}^2(V_n, V_m)$ s'écrira

$$(II, 5') \qquad \left\{ \varphi(p),\ f^0,\ D f^0,\ \begin{bmatrix} f^1 & D f^1 \\ 0 & f^1 \end{bmatrix},\ \left[\begin{array}{cc:cc} f_1 & D f_1 & f_1^2 & D f_1^2 \\ 0 & f_1 & 0 & f_1^2 \\ \hdashline 0 & 0 & f_1 & D f_1 \\ 0 & 0 & 0 & f_1 \end{array}\right] \right\}.$$

$j\sigma^2 \varepsilon \widetilde{J}^4(V_n, V_m)$ s'écrira

$$(II, 7') \quad j\sigma^2 U \left[\begin{array}{cccc:cccc} f_2 & D f_2 & f_2^2 & D f_2^2 & f_2 f_1 & D f_2 f_1 & f_2 f_1^2 & D f_2 f_1^2 \\ 0 & f_2 & 0 & f_2^2 & 0 & f_2 f_1 & 0 & f_2 f_1^2 \\ 0 & 0 & f_2 & D f_2 & 0 & 0 & f_2 f_1 & D f_2 f_1 \\ 0 & 0 & 0 & f_2 & 0 & 0 & 0 & f_2 f_1 \\ \hdashline & & & & f_1 & D f_1 & f_1^2 & D f_1^2 \\ & & & & 0 & f_1 & 0 & f_1^2 \\ & & 0 & & 0 & 0 & f_1 & D f_1 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & f_1 \end{array}\right].$$

σ^4 sera noté

$\sigma^3 U (f^2, f^2 f_1, f^2 f_1^2, f^2 f_1^3, f^2 f_2, f^2 f_2 f_1, f^2 f_2 f_1^2, f^2 f_2^2 f_1, f^2 f_2^2 f_1^2)$

et la forme matricielle s'ensuit.

On remarque facilement sur (II, 3°), (II, 5'), (II, 7') (1) que $\widetilde{J}_p^2(V_n, V_m)$ est l'amplification de $\widetilde{J}_p^1(V_n, V_m)_q$ par l'anneau $T^2_{O_1}(R)$, que $\widetilde{J}_p^3(V_n, V_m)_q$ est l'amplification de $\widetilde{J}_p^1(V_n, V_m)_q$ par l'anneau $T^2_{O_1}(R)$, que $J_p^r(V_n, V_m)_q$ est l'amplification de $J_p^1(V_n, V_m)_q$ par l'anneau $T^r_{O_1}(R)$, (à l'exception de $\varphi(p)$ et $\overset{0}{f}$ qui n'apparaissent pas dans l'amplification).

(1) Voir (I, 1) où les éléments de $\overset{3}{\nabla} A$ sont écrits.

A la composition des fonctions correspond la composition des jets et à ceux-ci, dans leur représentation matricielle un produit matriciel que nous allons étudier.

3. *Composition des jets non holonomes.*

I. *Le produit* $\widetilde{J}^r(R, V_n) \cdot \widetilde{J}^r(V_n, V_m) = \widetilde{J}^r(R, V_n)$ (1).

Nous allons d'abord étudier le prolongement de fonctions $\overset{o}{\lambda} : R \to V_n$, $\overset{o}{f} : V_n \to V_m$ pour l'étendre au cas général $\overset{o}{f} : V_n \to V_m$, $\overset{o}{g} : V_m \to V_l$.

i) *Jets du premier ordre.* (Applications de type 0)

On considère la suite d'applications

$$R \xrightarrow[\lambda^o]{} V_n \xrightarrow[f^o]{} V_m$$

$$t_o \rightsquigarrow \overset{\to o}{p} \rightsquigarrow \overset{\to o}{q}$$

$$t_o \overset{o}{\underset{\gamma}{\rightsquigarrow}} q$$

Dans les cartes (canonique pour R) (U, φ) en $p \in V_n$, (W, ψ) en $q \in V_m$, on a les jets correspondants

$$j^1_{t_o} \lambda^o = \left(t_o, \lambda^{oi}, \frac{d\lambda^{oi}}{dt}\right) \text{ et } j^1_{x_o} f^o = \left(\lambda^i_o, f^{oz}, \frac{\partial f^{oz}}{\partial x^{oi}}\right).$$

On a évidemment les relations suivantes

$$\overset{o}{\gamma}{}^z = f^{oz}(\lambda^{oi}(t))_{t_o}, \quad \frac{d\overset{o}{\gamma}{}^z}{dt} = \frac{\partial f^{oz}}{\partial x^{oi}} \frac{d\lambda^{oi}}{dt}\bigg|_{t_o},$$

ce qui entraine la composition entre jets définie par la composition $\gamma = f \cdot \lambda$

$$(II, 8) \qquad \left(t_o, \overset{o}{\gamma}{}^z = f^{oz}(\lambda^{oi}(t)), \frac{d\gamma^z}{dt} = \frac{\partial f^{oz}}{\partial x^{oi}} \frac{d\lambda^{oi}}{dt}\right)$$

qui peut se symboliser par

$$j^1_{t_o}(\overset{o}{f} \cdot \overset{o}{\lambda}) = j^1_{\lambda(t_o)} \overset{o}{f} \cdot j^1_{t_o} \overset{o}{\lambda}$$

ou matriciellement sans les coordonnées

$$(II, 8') \qquad \{t_o, \gamma^o(t_o) = f^o(\overset{o}{\lambda}(t_o)), d\gamma^o = \partial f^o \cdot d\lambda^o\}.$$

(1) Nous utilisons la méthode indiquée par Ehresmann [1].

(1) (II, 8') exprime la loi quotient de celle de $\overset{o}{f} \cdot \overset{o}{\lambda}$.

Les symboles ∂, ∂^2, ..., qui apparaitront dans la suite de l'exposé indiqueront des dérivations partielles et si la fonction à laquelle on applique ∂^i (ou D) est définie dans R, on notera d, d^2, ...

ii) *Jets d'ordre deux.* (Applications de type 1, premier prolongement non holonome).

Les sections de $J^1(R, V_n)$, $J^1(V_n, V_m)$, $J^1(R, V_m)$ s'écrivent respectivement

$$(t, \lambda^{0i}(t), \lambda^{1i}(t)) \; ; \; (x^i, f^{0\alpha}, f_i^{1\alpha}) \; ; \; (t, \gamma^{0\alpha}, \gamma^{1\alpha})$$

d'où pour le produit des sections, d'après (II, 8)

$$(t, \gamma^{0\alpha} = f^{0\alpha}(\lambda^{0i}(t)), \gamma^{1\alpha}(t) = f_i^{1\alpha}\lambda^{1i})$$

On a alors

$$\frac{d\gamma^{0\alpha}}{dt} = \frac{\partial f^{0\alpha}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}, \quad \frac{d\gamma^{1\alpha}}{dt} = \frac{\partial f_i^{1\alpha}}{\partial x^j}\frac{dx^j}{dt}\lambda^{1i} + f_i^{1\alpha}\frac{d\lambda^{1i}}{dt}$$

et comme $\frac{dx^j}{dt} = \frac{d\lambda^j}{dt}$, la loi de composition des jets d'ordre deux s'écrit

$$\text{(II, 9)} \quad \left\{ t_0, \gamma^{0\alpha} = f^{0\alpha}(\lambda^{0i}), \frac{d\gamma^{0\alpha}}{dt} = \frac{\partial f^{0\alpha}}{\partial x^i}\frac{d\lambda^{0i}}{dt}\Big|_{t_0}, \gamma^{1\alpha}(t) = f_i^{1\alpha}\lambda^{1i}(t_0), \right.$$
$$\left. \frac{d\gamma^{1}(t_0)}{dt} = \frac{\partial f_i^{1\alpha}}{\partial x^j}\frac{d\lambda^{0j}}{dt} + f_i^{1\alpha}\frac{d\gamma^{i}}{dt}\Big|_{t_0} \right\},$$

ce qui exprime la loi

$$\widetilde{j}^2(\overset{0}{f} \circ \overset{0}{\lambda}) = \widetilde{j}^2\overset{0}{f} \cdot \widetilde{j}^2\overset{0}{\lambda}.$$

On peut écrire matriciellement (à l'aide de blocs de matrices)

$$\text{II, 9)} \quad \left\{ t_0, \gamma^{0\alpha} = f^{0\alpha}(\lambda^{0i}), \frac{d\gamma^{0\alpha}}{dt} = \frac{\partial f^{0\alpha}}{\partial x^i}\frac{d\lambda^{0i}}{dt} \; ; \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} \gamma^{1\alpha} & \frac{d\gamma^{1\alpha}}{dt} \\ 0 & \gamma^{1\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i^{1\alpha} & \frac{\partial f_i^{1\alpha}}{\partial x^i}\frac{d\lambda^{0i}}{dt} \\ 0 & f_i^{1\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^{1i} & \frac{d\lambda^{1i}}{dt} \\ 0 & \lambda^{1i} \end{bmatrix} \right\}_{t_0},$$

ce qu'on peut encore exprimer sans les coordonnées et qui raccourcit beaucoup l'écriture

$$\text{(II, 9'')} \quad \{t^0, \gamma^0 = f^0 \cdot \lambda^0(t_0), d\gamma^0 = \partial\overset{0}{f}\, d\overset{0}{\lambda}, \begin{bmatrix} \gamma^1 & d\lambda^1 \\ 0 & \gamma^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^1 & \partial f^1 \; d\lambda^0 \\ 0 & f^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^1 & d\lambda^1 \\ 0 & \lambda^1 \end{bmatrix}.$$

c) *Jets du troisième ordre.* (Applications de type 2, deuxième prolongement non holonome).

On écrira alors le produit de sections de jets du deuxième ordre d'après (II, 9″)

$$(\text{II, 10}) \quad \{ t \ , \ \gamma^0 = \overset{0}{f} \cdot \lambda^0(t) \ , \ \gamma^1 = f^2 \ \lambda^1 \ , \ \begin{bmatrix} \gamma^{1_1} & \gamma^{1_1 2} \\ 0 & \gamma^{1_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^{1_1} & f^{1_1 2} & \lambda^1 \\ 0 & & f^{1_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^{1_1} & \lambda^{1_1 2} \\ 0 & \gamma^{1_1} \end{bmatrix},$$

d'où, en faisant les mêmes calculs que dans b), le jet du produit des sections.

$$(\text{II, 11}) \quad (\text{II, 9}'') \cup \left\{ \begin{bmatrix} \gamma^1 & d\gamma^1 & \gamma^{1_1 2} & d\gamma^{1_1 2} \\ 0 & \gamma^{1_1} & 0 & \gamma^{1_1 2} \\ 0 & 0 & \gamma^{1_1} & d\gamma^{1_1} \\ 0 & 0 & 0 & \gamma^{1_1} \end{bmatrix} = \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} f^1 & \partial f^{1_1} & d\lambda^0 & \begin{bmatrix} f^{1_1 2} & \partial f^{1_1 2} & d\lambda^0 \\ 0 & f^{1_1} & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \lambda^1 & d\lambda^1 \\ 0 & \lambda^1 \end{bmatrix} \\ 0 & f^{1_1} & & & \\ 0 & 0 & f^{1_1} & \lambda f^{1_1} & d\lambda^0 \\ 0 & 0 & 0 & f^{1_1} & \end{bmatrix} \right] 0 \begin{bmatrix} \lambda^{1_1} & d\lambda^{1_1} & \lambda^{1_1 2} & d\lambda^{1_1 2} \\ 0 & \lambda^{1_1} & 0 & \lambda^{1_1 2} \\ 0 & 0 & \lambda^{1_1} & d\lambda^{1_1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{1_1} \end{bmatrix} \right\};$$

on a encore

$$(\text{II, 11}) \qquad \widetilde{j}^2 (\overset{0}{f} \circ \overset{0}{\lambda}) = \widetilde{j}^2 \ \overset{0}{f} \circ \widetilde{j}^2 \ \overset{0}{\lambda} .$$

On procède de même pour les ordres supérieurs. En utilisant les résultats du

premier chapitre, on voit qu'on peut écrire la dernière relation qui exprime la loi de composition de fonctions de type deux (1) :

$$\text{(III, 11'')} \qquad \{ t_0 , \overset{0}{f} \cdot \overset{0}{\lambda} , \overset{(2)}{\Gamma} = \overset{(2)}{F}(\Lambda) = \left[\overset{0}{\Gamma} = \overset{0}{F}\overset{0}{\Lambda} , \overset{1}{\Gamma} = \right.$$

$$= \begin{bmatrix} \overset{0}{F}_a & \overset{0}{F}_b & \overset{0}{(\Lambda)} \\ 0 & & \overset{0}{F}_a \end{bmatrix} \overset{1}{\Lambda} , \overset{2}{\Gamma} = \left. \begin{bmatrix} \overset{1}{F}_a & \overset{1}{F}_b & \overset{1}{(\Lambda)} \\ 0 & & \overset{1}{F}_a \end{bmatrix} \overset{2}{\Lambda} \right] \} .$$

II. Le produit $\widetilde{J}^r(V_n V_m) 0 \widetilde{J}^r(V_m , V_e) = \widetilde{J}^r(V_n , V_e)$.

Nous pouvons alors envisager le cas général du prolongement du produit de de composition de deux fonctions

$$f^0 : V_n \to V_m \quad , \quad g^0 : V_m \to V_l .$$

Pour cela, il suffit d'appliquer à $\overset{0}{\gamma}$ la fonction $\overset{0}{g}$ et d'écrire le prolongement, on en déduit alors le prolongement de la loi $\overset{0}{g} \cdot \overset{0}{f}$. On arrive aux résultats déjà obtenus en I paragraphe 8, et que nous n'écrivons pas.

L'existence de l'inverse du r^{me} prolongement non holonome d'une application $\overset{0}{f} : V_n \to V_m$ est liée, d'après le résultat du chapitre I (in fine) à l'existence de l'inverse des matrices f^1 , f^1_1 , f^1_2 , . . . , f^1_r .

Il nous faut maintenant étudier les changements de cartes pour les variétés de jets non holonomes. Nous procéderons de la même manière que dans la recherche du produit de composition en partant du produit $\overset{0}{f} \cdot \overset{0}{\lambda}(t) : R \to V_n \to V_m$.

4. *Changements de cartes dans les variétés de jets non holonomes*

Soient $(U, \varphi) \leftrightarrow (U', \varphi')$ (resp $(W, \psi) \leftrightarrow (W' \psi')$ un changement de cartes au voisinage de $p_0 \in V_n$ (resp $q_0 \in V_m$) ; $\widetilde{J}^r(V_n , V_m)$, d'après ce que nous avons vu en II § 1, a pour domaine de cartes $\widetilde{J}^r(R^n , R^m)$.

i) *Jets du premier ordre.* Soit $\overset{0}{f} : V_n \to V_m$. Dans les systèmes de cartes indiqués $j^1_{p_0} \overset{0}{f}$ a pour représentants

$$\text{(II, 12)} \qquad \left(x^i , \lambda^s = \overset{0}{f}{}^s(p_0) , \frac{\partial \overset{0}{f}{}^s(p_0)}{\partial x^i} \right) = \overset{0}{\Lambda} \text{ et } \left(x^i , \overset{0}{q}{}^{s'} = \overset{0}{f}{}^{s'}(x_0) , \frac{\partial \overset{0}{f}{}^{s'}}{\partial x^i} \right) = \overset{0}{\Lambda}{}'$$

$$\text{(II, 13)} \qquad \begin{cases} \overline{f}^{\,0} = \overset{0}{\psi} \overset{0}{f}{}^0 \varphi^{-1}(x) : R^n \to R^m \text{ est coordonné par } \overset{0}{f}{}^s(x^i) \\ \overline{f}^{\,0'} = \psi' \overset{0}{f} \varphi'^{-1}(x') : R^n \to R^m \text{ est coordonné par } \overset{0}{f}{}^{s'}(x^i) \end{cases}$$

(1) Voir (I, 16).

et

$$(\text{II, } 13') \qquad x = \varphi(p)\,,\ x' = \varphi'(p)\,,\ y = \psi(q)\,,\ y' = \psi'(q)$$

d'où

$$(\text{II, } 13'') \begin{cases} x(x') = \varphi\varphi'^{-1}(x') = (\Phi')^{-1}(x') = \Phi(x')\,,\ x' = \varphi'\varphi^{-1}(x) = \Phi'(x)\,, \\ \quad y = \psi(\psi)^{-1}(y') = (\Psi')^{-1}(y') = \Psi'(y'(\psi')^{-1}\,,\ y' = \psi'\psi^{-1}(y) = \Psi'(y) \\ \overline{f}^{0} = \psi\psi'^{-1}\overline{f}^{0'}\varphi'\varphi^{-1}(x) \text{ et } \overline{f}^{0'} = \psi'\psi^{-1}\overline{f^{0}}\varphi\varphi'^{-1}(x') \\ \overline{f^{0}} = \Psi\overline{f}^{0'}\Phi'(x) \qquad\qquad \overline{f}^{0'} = \Psi'\overline{f}^{0}\Phi \end{cases}$$

et en coordonnées :

$$(\text{II, } 13''') \qquad f^{0x} = y^{x}(y^{x'}(x^{i'}(x^{i}))),\ f^{0x'} = y^{x'}(y^{x}(x^{i}(x^{i'})))$$

d'où

$$\frac{\partial f^{0x'}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial y^{x'}}{\partial y^{x}}\,\frac{\partial y^{x}}{\partial x^{i}}\,\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial y^{x'}}{\partial y^{i}}\,\frac{\partial f^{0x}}{\partial x^{i}}\,\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}$$

$$(\text{II, } 14) \qquad f^{0x'} = y^{x'}(y^{x}(x^{i}(x^{i'}))),\ \frac{\partial y^{x'}}{\partial y^{x}}\,\frac{\partial f^{0x}}{\partial x^{i}}\,\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial f^{0x}}{\partial x^{i'}}\,,$$

on en déduit le changement de cartes pour une section σ^{1} de $J^{1}(V_{n}, V_{m})$ $\sigma^{1} = (\overset{0}{p}, \overset{0}{f} = q, \overset{1}{f})$ (voir II 1 b) coordonné par $(x^{i}, \overset{0}{f}{}^{x}, \overset{1}{f}{}^{x}_{i})$ et $(x^{i'}, \overset{0}{f}{}^{x}, \overset{1}{f}{}^{x}_{i})'$,

$$(\text{II, } 14') \qquad \left\{ x^{i'} = x^{i'}(x),\ f^{0x'} = y^{x'}(\cdot),\ \overset{1}{f}{}^{x'}_{i'} = \frac{\partial y^{x'}}{\partial y^{x}}\,\overset{1}{f}{}^{x}_{i}\,\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}} \right\},$$

ce qu'on peut représenter symboliquement à l'aide de (II, 13″) [1]

$$(\text{II, } 14'') \qquad \{ x' = \Phi'(x)\,,\ \overset{0}{f}{}' = \Psi'\,f^{0}\,\Phi\,,\ \overset{1}{f}{}' = \partial\Psi'\,f^{1}\,\partial\Phi \}\,.$$

ii) *Jets du deuxième ordre.* $j^{1}_{0_m}\sigma'$ est coordonné par

$$\left(x^{i}, \overset{0}{f}{}^{x}, \frac{\partial \overset{0}{f}{}^{x}}{\partial x^{i}}\,,\ \overset{1}{f}{}^{x}_{i}\,,\ \frac{\partial \overset{1}{f}{}^{x}_{i}}{\partial x^{i}}\right) \text{ et } \left(x^{i'}\,\overset{0}{f}{}^{x'}\,\frac{\partial \overset{0}{f}{}^{x'}}{\partial x^{i'}}\,,\ \overset{1}{f}{}^{x'}_{i'}\,,\ \frac{\partial \overset{1}{f}{}^{x'}_{i'}}{\partial x^{i'}}\right),$$

pour obtenir le changement de cartes, il suffit de voir comment les derniers groupes de cordonnées sont liés en prenant la différentielle de

$$\overset{1}{f}{}^{x'}_{i'} = \frac{\partial y^{x'}}{\partial y^{x}}\,\overset{1}{f}{}^{x}_{i}\,\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}\,.$$

(1) Nous supprimons les barres sur $\overset{0}{f}$ etc., $\overset{0}{f}$ est mis pour $\overline{f}$.

On a

$$\text{(II, 15)} \qquad \partial_{j'} \overset{1}{f}{}^{\alpha'}_{i} \, d x^{j'} = \frac{\partial^2 y^{\alpha'}}{\partial y^\beta \partial x^\alpha} \, d y^\beta \, \overset{1}{f}{}^{\alpha}_{i} \, \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} + \frac{\partial y^{\alpha'}}{\partial y^\alpha} \, \frac{\partial \overset{1}{f}{}^{\alpha}_{i}}{\partial x^j} \, d x^j \, \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} +$$

$$+ \frac{\partial y^{\alpha'}}{\partial y^\alpha} \, \overset{1}{f}{}^{\alpha}_{i} \, \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}} \, d x^{j'}.$$

Ces deux derniers groupes de relations peuvent se mettre sous la forme

$$\text{(II, 16)} \qquad \begin{bmatrix} \overset{1}{f}{}^{\alpha'}_{i} & \dfrac{\partial \overset{1}{f}{}^{\alpha'}}{\partial x^{j'}} \, d x^{j'} \\ 0 & \overset{1}{f}{}^{\alpha'}_{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y^{\alpha'}}{\partial y^\alpha} & \dfrac{\partial^2 y^{\alpha'}}{\partial y^\beta \partial x^\alpha} \, d y^\beta \\ 0 & \dfrac{\partial y^{\alpha'}}{\partial y^{\alpha'}} \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} \overset{1}{f}{}^{\alpha}_{i} & \dfrac{\partial \overset{1}{f}{}^{\alpha}_{i}}{\partial x^j} \, d x^j \\ 0 & \overset{1}{f}{}^{\alpha}_{i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} & \dfrac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial y^{i'}} \, d x^{j'} \\ 0 & \dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \end{bmatrix}$$

qu'on peut mettre sous la forme symbolique

$$\text{(II, 16')} \qquad \begin{bmatrix} \overset{1}{f}{}' & \partial \overset{1}{f}{}' \, d x' \\ 0 & \overset{1}{f}{}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial \Psi'' & \partial^2 \Psi'' \, d y \\ 0 & \partial \Psi'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^1 & \partial f^1 \, d x \\ 0 & f^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial \Phi & \partial^2 \Phi \, d x' \\ & \partial \Phi \end{bmatrix}.$$

Alors les changements de cartes dans $\widetilde{J}^2 (V_n , V_m)$ sont données par la réunion de (II, 14') et (II, 16), ou (II, 14") et (II, 16').

Un section σ^2 de $\widetilde{J}^2 (V_n , V_m)$ s'écrit (II, 4) $(x, f^0, f^1, f^{1_1}, f^{1_1 2})$ et le changement de cartes pour deux représentations de $f^{1_1 2}$ par (II, 15) est

$$\text{(II, 15')} \qquad f^{1_1 2 \alpha'}_{j' i'} \, d x^{j'} = \frac{\partial^2 y^{\alpha'}}{\partial y^\beta \partial y^\beta} \, d y^\beta \, f^{1_1 \alpha}_{i} \, \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} +$$

$$+ \frac{\partial y^{\alpha'}}{\partial y^\alpha} \, f^{1_1 2 \alpha}_{j i} \, d x^j \, \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} + \frac{\partial y^{\alpha'}}{\partial y^\alpha} \, f^{1_1 \alpha}_{i} \, \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}} \, d x^{j'}.$$

En prenant à nouveau la différentielle de (II, 15') on obtiendra enfin la transformation des jets du 3e ordre, ce qui peut s'écrire symboliquement à l'aide de (II, 16') et de l'expression suivante (II, 17)

(II, 17)
$$\begin{bmatrix} f_2' & \partial f_2' & dx' & f_2'^2' & \partial f_2^2' & dx' \\ 0 & f_2' & & 0 & f_2^2' & \\ 0 & 0 & & f_2' & \partial f_2' & dx' \\ 0 & 0 & & 0 & f_2' & \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \partial\Psi' & \partial^2\Psi' & dy & \begin{bmatrix} \partial^2\Psi' & \partial^2\Psi' & dy \\ 0 & \partial^2\Psi' & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} dy & d^2y \\ 0 & dy \end{bmatrix} \\ 0 & \partial\Psi' & & \partial\Psi' & \partial^2\Psi' & dy \\ 0 & 0 & & 0 & \partial\Psi' & \end{bmatrix} 0$$

$$\begin{bmatrix} f_2 & \partial f_2 & dx & \begin{bmatrix} f_2^2 & \partial f_2^2 & dx \\ 0 & f_2^2 & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} dx & d^2x \\ 0 & dx \end{bmatrix} \\ 0 & f_2 & & f_2 & \partial f_2 & dx \\ 0 & 0 & & 0 & f_2 & \end{bmatrix} 0$$

$$0 \begin{bmatrix} \partial\Phi & \partial^2\Phi & dx' & \begin{bmatrix} \partial^2\Phi & \partial^2\Phi & dx' \\ 0 & \partial^2\Phi & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} dx' & d^2x' \\ 0 & dx' \end{bmatrix} \\ 0 & \partial\Phi & & \partial\Phi & \partial^2\Phi & dx' \\ 0 & 0 & & 0 & \partial\Phi & \end{bmatrix}.$$

Remarques

Faisons les remarques importantes suivantes que nous pouvons déduire des expressions qui précèdent

a) Les jets d'applications non holonomes se transforment *linéairement*,

b) Les éléments des matrices où Ψ'' et Φ apparaissent sont ceux du jet

d'ordre 1, 2, 3, ..., des changements de variables $x = \Phi(x'), y' = \Psi'(y)$, qui sont éléments de $\sqsubset^1_n$, $\sqsubset^2_n$, $\sqsubset^3_n$ ...

c) Dans les matrices envisagées, apparaissent des sous-matrices du type

$$(d\,x)\,,\quad \begin{pmatrix} d\,x & d^2\,x \\ 0 & d^2\,x \end{pmatrix},$$

si on procédait au 4e ordre, on verrait apparaitre les matrices du type

$$\begin{pmatrix} d\,x & d^2\,x & d^2\,x & d^3\,x \\ 0 & d\,x & 0 & d^2\,x \\ 0 & 0 & d\,x & d^2\,x \\ 0 & 0 & 0 & d\,x \end{pmatrix}.$$

L'ensemble de ces trois matrices par exemple est l'écriture non holonome du jet holonome $(d\,x\ ,\ d^2\,x\ ,\ d^3\,x) \in J^3_0(R\ ,\ V_n) = T^3_1(V_n)$

d) Si on pose $V_n = R$, c'est-à-dire que $f : (R \to V_m)$ et qu'on se restreint à $\widetilde{J}_0(R, V_m) = T^r_1(V_m)$ pour une classe de jets dits *1^r-vitesses dans* V_m, non holonomes, le changement de cartes au premier ordre s'écrit à partir de (II, 14')

$$(II,\ 18) \qquad (y' = \Psi'(y)\ \overset{0}{f}' = \Psi' \overset{0}{f},\ \overset{1}{f}' = \partial\,\Psi' \overset{1}{f})$$

à l'ordre supérieur, les matrices en Φ se réduisent à l'identité

e) Si on pose $V_n = R$ et $\overset{0}{f} : V_n \to R$ et qu'on se restreint à $J^r(V_n, R)_0 = T_1^{*r}(V_n)$ pour une classe de jets dit *1^r-covitesses non holonomes* de V_n, le changement de cartes s'écrit au premier ordre (toujours à partir de (II, 14')

$$(II,\ 19) \qquad \{x' = \Phi'(x)\,,\ \overset{0}{f}' = \overset{0}{f}\,\Phi\,,\ \overset{1}{f}' = \overset{1}{f}\,\partial\,\Phi\}$$

à l'ordre supérieur, les matrices déduites de Ψ' se réduisent à l'unité

5. *Connexions non holonomes dans* $T^r_1(V_n)$

L'espace $T^r_1(V_n) = \widetilde{J}^r_0(R, V)$ [1] des 1^r-vitesses non holonomes de V_n peut être muni d'une structure de variété différentiable (§ 1 où $V_n = R$, $V_m = V_n$) par la donnée de cartes sur $\widetilde{J}^r_0(R\ ,\ R^n) = R^n \times \widetilde{J}^r_0(R, R_n)_0 = R^n \times \widetilde{\sqsubset}^r_{n,1}$. Les changements de cartes ont été étudiés dans le § 4 (voir II, 15) ; $\widetilde{T}^r_1(V_n)$ peut être également muni d'une structure fibrée de base V_n pour la projection $\beta : \widetilde{T}^r_1(V_n) \to V_n$ (§ 1) de fibre $\widetilde{J}^r_0(R, R^n)_0 = \widetilde{\sqsubset}^r_{n,1}$, de groupe structural $\widetilde{\sqsubset}^r_n$ agissant à gauche (II, 11). On peut noter cette structure fibrée $\widetilde{T}^r_1(V_n\ ,\ \widetilde{\sqsubset}^r_{n,1}\ ,\ \widetilde{\sqsubset}^r_n)$ [2].

---

[1] Nous nous conformons aux notations de M. Ehresmann [1].

[2] L'espace fibré principal associé est l'espace des r-repères non holonomes $\widetilde{H}^r(V_n) \subset \widetilde{J}_0(R, V_n)$, de fibre isomorphe à $\widetilde{\sqsubset}^r_n$ de groupe structural $\widetilde{\sqsubset}^r_n$.

Pour définir sur $\widetilde{T}_1^r(V_n)$ des connexions infinitésimales nous procéderons comme nous l'avons fait dans le cas des connexions holonomes sur $T^r(V_n)$ [1] par la donnée d'applications de type r sur $\widetilde{T}_1^{r+1}$ que nous allons définir par récurrence

i) *1-vitesses.* Une section locale σ^1 de $\widetilde{T}_1^1(V_n)$ est définie au moyen d'une carte (U, Φ) en p_0 par

$$\sigma^1 = (\lambda^0(t)\ ,\ \lambda^1(t)) \text{ d'où } j_0^1\sigma^1 = \left\{\lambda^0\ ,\ \frac{d\lambda^0}{dt}\ ,\ \lambda^1\ ,\ \frac{d\lambda^1}{dt}\right\}_{t=0} \widetilde{\varepsilon}\, T_1^{1+1}(V_n).$$

On définit alors une application distinguée $\overset{(1)}{\Omega}_1$, de $\widetilde{T}_1^{1+1}(V_n)$ dans un espace $\overset{(1)}{F}$ par

$$(II,\ 20)\left\{\gamma^1 = I\, d\left(\frac{d\lambda^0}{dt}\right),\ \begin{bmatrix}\gamma^1 & \gamma^{1_1 2}\\ 0 & \gamma^1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda^1 & \nabla\lambda^1\\ 0^1 & \lambda^1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}I, & \Gamma^{1_1 2}\dfrac{d\lambda^0}{dt}\\ 0 & \lambda^1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda^1 & \dfrac{d\lambda^1}{dt}\\ 0 & \lambda^1\end{bmatrix}\right\}.$$

On peut imposer à $\overset{(1)}{F} = (F^0\, F^1) = \{\lambda^1, \triangle\lambda^1\}$ de se transformer, lors d'un changement de cartes $(U, \varphi) \leftrightarrow (U'\ \varphi')$ dans V_n, par la représentation $\rho_1^2 : \underset{n}{\overset{1}{\sqsubset}} \to \underset{n}{\overset{2}{\widetilde{\sqsubset}}}$, définie (voir remarque c) in fine § 4) par

$$\partial\Phi' \to \left\{\partial\Phi'\ ,\ \begin{bmatrix}\partial\Phi' & 0\\ 0 & \partial\Phi'\end{bmatrix}\right\},\ \text{de la manière suivante (II, 16')}$$

$$(II,\ 21)\quad \left\{\frac{d\lambda^{0'}}{dt} = \partial\Phi'\,\frac{d\lambda^0}{dt}\ ,\ \begin{bmatrix}\lambda^{1'} & \triangle\lambda^{1'}\\ 0 & \lambda^{1'}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\partial\Phi' & 0\\ 0 & \partial\Phi'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda^1 & \triangle\lambda^1\\ 0 & \lambda^1\end{bmatrix}\right\}.$$

Or

$$(II,\ 22)\quad \frac{d\lambda^{0'}}{dt} = \partial\Phi'\,\frac{d\lambda^0}{dt}\ ,\ \begin{bmatrix}\lambda^{1'} & \dfrac{d\lambda^{1'}}{dt}\\ 0 & \lambda^{1'}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\partial\Phi' & \partial^2\Phi'\,dx\\ 0 & \partial\Phi'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda^1 & \dfrac{d\lambda^1}{dt}\\ 0 & \lambda^1\end{bmatrix}.$$

On utilise alors la représentation de $\overset{(1)}{\Omega}_1$, dans la carte $(U'\ \varphi')$ ainsi que (II, 21) et (II, 22) et on doit avoir

$$\frac{d\lambda^{0'}}{dt} = \partial\Phi'\frac{d\lambda^0}{dt},\ \begin{bmatrix}\partial\Phi' & 0\\ 0 & \partial\Phi'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda^1 & \triangle\lambda^1\\ 0 & \lambda^1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}I & \Gamma^{1_1 2'}\dfrac{d\lambda^{0'}}{dt}\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial\Phi' & \partial^2\Phi'\,dx\\ 0 & \partial\Phi'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda^1 & \dfrac{d\lambda^1}{dt}\\ 0 & \lambda^1\end{bmatrix}.$$

---

(1) R. Guy [2].

d'où en introduisant la représentation de $\overset{(1)}{\Omega}_1$, dans la carte (U, φ)

$$\begin{bmatrix} \partial\Phi' & 0 \\ 0 & \partial\Phi' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & \Gamma^{i_1}{}_{i^2}\dfrac{d\lambda^0}{dt} \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda^1 & \dfrac{d\lambda^1}{dt} \\ 0 & \lambda^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \Gamma^{i_1}{}_{i'}\dfrac{d\lambda}{dt} \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \partial\Phi' & \partial^2\Phi'\,dx \\ 0 & \partial\Phi' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda^1 & \dfrac{d\lambda^1}{dt} \\ 0 & \lambda^1 \end{bmatrix}.$$

En identifiant les deux membres et en observant que comme $\Phi\Phi' = I\,d$ on a

$$\begin{bmatrix} \partial\Phi' & 0 \\ 0 & \partial\Phi' \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \partial\Phi & 0 \\ 0 & \partial\Phi \end{bmatrix},$$

il vient

(II, 23)
$$\begin{cases} \dfrac{d\lambda^{0'}}{dt} = \partial\Phi'\dfrac{d\lambda^0}{dt}, \\ \begin{bmatrix} I & \Gamma^{i_1}{}_{i^2}\dfrac{d\lambda^0}{dt} \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial\Phi & 0 \\ 0 & \partial\Phi \end{bmatrix} 0 \begin{bmatrix} I & \Gamma^{i_1}{}_{i^{2'}}\dfrac{d\lambda^{0'}}{dt} \\ 0 & I \end{bmatrix} 0 \begin{bmatrix} \partial\Phi' & \partial^2\Phi'\,dx \\ 0 & \partial\Phi' \end{bmatrix} \end{cases}^{(1)}$$

ii) *I^2-vitesses.* Une section σ^2 de $\widetilde{T}^1_2(V_n)$ est définie par

$$\sigma^2 = (\overset{0}{\lambda}(t),\ \overset{1}{\lambda}(t),\ \overset{1_1}{\lambda}(t)\ \ \overset{1_1^2}{\lambda}(t))$$

d'où pour $\overset{1}{j}_0\sigma^2$ une expression analogue à (II, 5') où on remplace D par $\dfrac{d}{dt}$. On définit une application distinguée $\overset{(2)}{\Omega}$ de type 2 de $\overset{(2)}{E} = T^{2+1}(V_n)$ dans $\overset{(2)}{F}$ (que nous allons préciser) donnée par (II, 20) et par

(11, 20)
$$\begin{bmatrix} \lambda^{1_1}_1 & \gamma^{1_1 i^2} = \nabla\lambda^{1_1}, & \lambda^{1_1 i_2} & \gamma^{1_1 i_2 i^2} = \nabla\lambda^{1_1 i^2} \\ 0 & \gamma^{1_1} & 0 & \lambda^{1_1 i^2} \\ 0 & 0 & \lambda^{1_1} & \gamma^{1_1 i^2} = \nabla\lambda^{1_1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{1_1} \end{bmatrix} =$$

(1) Ceci est aussi la loi de transformation des connexions linéaire habituelles. Nous avons fait les détails de calculs au premier ordre, ceux d'ordre supérieur sont plus longs à écrire, mais l'ordre des calculs sera le même, c'est pourquoi nous ne les transcrivons pas.

$$\begin{bmatrix} I & \Gamma^{3}{}_{1}{}^{2} & \dfrac{d\lambda^{0}}{dt} & \begin{bmatrix} 0 & \Gamma^{3}{}_{1}{}^{3} & \dfrac{d\lambda^{0}}{dt} \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \lambda^{1} & \dfrac{d\lambda^{1}}{dt} \\ 0 & \lambda^{1} \end{bmatrix} \\ 0 & I & & & \\ 0 & 0 & I & \Gamma^{3}{}_{1}{}^{2} & \dfrac{d\lambda^{0}}{dt} \\ 0 & 0 & 0 & I & \end{bmatrix} 0$$

$$0 \begin{bmatrix} \lambda^{1}{}_{1} & \dfrac{d\lambda^{1}{}_{1}}{dt} & \lambda^{1}{}_{1}{}^{2} & \dfrac{d\lambda^{1}{}_{1}{}^{2}}{dt} \\ 0 & \lambda^{1}{}_{1} & 0 & \lambda^{1}{}_{1}{}^{2} \\ 0 & 0 & \lambda^{1}{}_{1} & \dfrac{d\lambda^{1}{}_{1}}{dt} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{1}{}_{1} \end{bmatrix}.$$

(II, 20 et II, 20′) définissent donc la fonction $\overset{(2)}{\Omega}$.

Or on peut injecter dans $\widetilde{L}^{3}_{0}$, soit L^{1}_{n}, soit L^{2}_{n}, soit aussi L^{3}_{n} par des représentations ρ^{3}_{1} , ρ^{3}_{2} , ρ^{3}_{3} définies par

$$\text{(II, 24)} \quad \rho^{3}_{1} : \partial\Phi \to \left\{ \partial\Phi \ , \ \begin{bmatrix} \partial\Phi & 0 \\ 0 & \partial\Phi \end{bmatrix} , \ \begin{bmatrix} \partial\Phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial\Phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial\Phi \end{bmatrix} \right\}.$$

$$\text{(II, 25)} \quad \rho^{3}_{2} : (\partial\Phi \ , \ \partial^{2}\Phi) \to \left\{ \partial\Phi \ , \ \begin{bmatrix} \partial\Phi & \partial^{2}\Phi dx' \\ 0 & \partial\Phi \end{bmatrix} , \ \begin{bmatrix} \partial\Phi & \partial^{2}\Phi dx' & 0 & 0 \\ 0 & \partial\Phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial\Phi & \partial^{2}\Phi dx' \\ 0 & 0 & 0 & \partial\Phi \end{bmatrix} \right\}.$$

etc.

On peut imposer à $\overset{(2)}{Y} = \overset{(2)}{\Omega}\, j^{1}_{0}\, \sigma^{2}$ de se transformer soit par $\rho^{3}_{2}(L^{1}_{n})$, soit par $\rho^{3}_{1}(L^{1}_{n})$, soit par $\rho^{3}_{2}(L^{2}_{n})$.

Par exemple pour $\rho_2^3(L_n)$, $\overset{2}{\Omega}$ se transforme de la manière suivante : (II, 23) et

$$\text{(II, 23')}\quad \begin{bmatrix} I & \Gamma^{1}_{12} & 0 & \Gamma^{1}_{12^2} \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \Gamma^{1}_{12} \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial\Phi & \partial^2\Phi\ dx' & 0 & 0 \\ \partial & \partial\Phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial\Phi & \partial^2\Phi\ dx' \\ 0 & 0 & 0 & \partial\Phi \end{bmatrix} 0$$

$$0 \begin{bmatrix} I & \Gamma^{1}_{12'} \dfrac{d\lambda^{0'}}{dt} & \begin{bmatrix} 0 & \Gamma^{1}_{12^2} \dfrac{d\lambda^{0'}}{dt} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \lambda^{1'} & d\lambda^{1'} \\ 0 & \lambda^{1'} \end{bmatrix} \\ 0 & I & 0 & \Gamma^{1}_{12'} \dfrac{d\lambda^{0'}}{dt} \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} 0$$

$$\begin{bmatrix} \partial\Phi' & \partial^2\Phi'\,dx & \begin{bmatrix} \partial^2\Phi' & \partial^3\Phi'\,dx \\ 0 & \partial^2\Phi' \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} dx & d^2x \\ 0 & dx \end{bmatrix} \\ 0 & \partial\Phi' & \partial^2\Phi'\,dx & \\ 0 & 0 & \partial\Phi' & \\ 0 & 0 & 0 & \partial\Phi' \end{bmatrix}.$$

On se rend compte sur ces formules que $\overset{(2)}{\Omega}$ ici se transforme suivant le groupe $\rho_2^3(L_n) \times \rho_2^3(L_n)$.

On obtient alors deux types d'applications distinctes que nous noterons $\overset{(2)}{\Omega}_1$, $\overset{(2)}{\Omega}_2$, ce qui précise $\overset{(2)}{F}$ (différents selon le type d'application).

En $p_0 \in V_n$ l'ensemble de telles applications $\overset{(2)}{\Omega}_1$ (resp $\overset{(2)}{\Omega}_2$) sera désigné par $\overset{(2)}{C}_{1\,p_0}(V_n)$ (resp $\overset{(2)}{C}_{2\,p_0}(V_n)$). Soit alors

$$\overset{(2)}{C}_1(V_n) = \bigcup_{p_0 \in V_n} \overset{(2)}{C}_{1\,p_0}(V_n) \quad (\text{resp } \overset{(2)}{C}_2(V_n) = \bigcup_{p_0 \in V_n} \overset{(2)}{C}_{2\,p_0}(V_n)).$$

Dans un système de cartes (U, Φ) de V_n, à $\overset{(2)}{\Omega}$ on peut faire correspondre $(\Gamma^{1}_{1}\ \Gamma^{1}_{12}\ \Gamma^{1}_{12^2})$ par (II, 20) et (II, 20'), ce qui détermine dans $\overset{(2)}{C}_i$ $(i = 1, 2)$ une structure de variété différentiable, dont le changement de cartes est décrit pour $\overset{(2)}{C}_2$ par (II,2 3) et (II, 23') (ou son analogue pour $\overset{(2)}{C}_1$). L'application $\pi_i : \overset{(2)}{C}_i(V_n^2) \to V_n$ permet de définir sur $\overset{(2)}{C}_i(V_n)$ une structure fibrée de groupe structural $\rho_i^3(\underline{\ }_n^{\,i}) \times \rho_5^3(\underline{\ }_n^{\,3})$, de base V_n.

On peut procéder de même pour tout ordre.

On peut définir ainsi les connexions sur $\widetilde{T}_1^r(V_n)$, r quelconque.

Définition: On appelle connexion de type i sur $T_1^r(V_n)$.
$(i = 1, ..., r-1)$ *une section de* $\overset{(r)}{C}_i(V_n)$.

6. *Connexions non holonomes sur* $\widetilde{T}^{*r}(V_n)$

$T_1^{r*}(V_n) = \widetilde{J}^r(V_n, R)_0$ espace *des l^r-covitesses* non holonomes sur V_n, peut être muni d'une structure fibrée de base V_n par rapport à la projection α, de groupe structural $\widetilde{\sqsubset}_n^r$ agissant à droite (voir II, 19), de fibre $\widetilde{\sqsubset}_{1,n}^r = \widetilde{J}^r(R^n, R)_0$. On peut noter cette structure fibrée $\widetilde{T}_1^{r*}(V_n, \widetilde{\sqsubset}_{1n}^r \widetilde{\sqsubset}_n^r)$. Son espace fibré associé est l'espace des corepères non holonomes sur V_n, $\widetilde{H}^{r*}(V_n) \subset \widetilde{J}^r(V_n, R^n)_0$ de groupe structural $\widetilde{\sqsubset}_n^r$.

On peut définir sur $\widetilde{T}_1^{r*}(V_n)$ des classes de connexions $\overset{(r)}{C}_1^*(V_n)$ de la même manière que sur $\widetilde{T}_1^r(V_n)$ il suffit de transformer l'action à gauche de $\widetilde{\sqsubset}_n^r$ dans $\widetilde{T}_1^r(V_n)$ dans l'action à droite de ce groupe dans $\widetilde{T}_1^{r*}(V_n)$. On obtient des éléments de connexions $(\Gamma^{*1}{}_i, \Gamma^{*1}{}_{i^2}, ...)$ qui se transforment de la même manière que les $(\Gamma^1{}_i, \Gamma^1{}_{i^2}, ...)$ mais en inversant l'ordre des matrices.

Conclusion. Ce qui précède montre que l'idée générale de la donnée d'une connexion sur $T(V_n)$ fibré tangent à V_n par la donnée de matrices de 1-formes ω sur V_n se généralise au cas des 1^r-vitesses (généralisation des champs de vecteurs) holonomes (1) et non holonomes par la donnée de certaines matrices, par un calcul quasi matriciel développé dans un chapitre préliminaire, ce qui montre une fois de plus la fécondité de la notion de jets et des définitions qui en découlent.

(1) R. Guy [2].

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ch. Ehresmann, CRAS, t. 239, p. 1762-1764.

[2] R. Guy, Algorithme matriciel et connexions d'ordre supérieur dans des fibrés non vectoriels, Ann, Math., P. ed. App., IV Vol. LXXXVI, (1970) p. 331-356.