LUIGI CARLO ROSSI e FRANCO NURZIA

Metodo semplificato per la determinazione della distribuzione spettrale della densità di ampiezza per segnali aperiodici di durata limitata (*)

Riassunto: I metodi attualmente in uso per l'analisi spettrale di funzioni aperiodiche note solo graficamente o di forma analitica complessa sono in genere assai laboriosi. Il metodo semplificato proposto trae origine dalla definizione di integrale di Fourier come limite di una serie di Fourier. Richiamati brevemente i concetti analitici su cui esso è basato, viene descritto un procedimento che consente di applicare uno qualsiasi dei metodi noti di analisi spettrale di funzioni periodiche al caso di funzioni aperiodiche limitate nel tempo.

Résumé: Les méthodes que l'on emploie actuellement pour l'analyse spectrale des fonctions apériodiques qui sont connues seulement graphiquement, sont en général très laborieuses. La méthode simplifiée que l'on propose est basée sur la définition d'intégrale de Fourier comme limite de séries de Fourier. Après une brève revue des considérations analytiques de base, on présente un procédé qui rend possible l'application des méthodes de l'analyse spectrale des fonctions périodiques au cas des fonctions apériodiques limitées dans le temps.

Summary: The methods currently used for the spectral analysis of aperiodic functions given only graphically or by a complicated analytical expression, are generally very intriguing. The simplified method proposed here is straightly originated from the definition of Fourier integral as a limit of the Fourier series. After a brief summary of the basic concepts on which it is derived, a procedure is described which allows the application of any of the known methods for the spectral analysis of periodic functions to the care of time limited aperiodic functions.

Lo studio dei mezzi di indagine analitica dei fenomeni dinamici nel campo frequenziale — oltre che in quello temporale — ha trovato, ormai da diversi anni, sempre più larga diffusione parallelamente al diffondersi e all'approfondirsi di tecniche sempre più avanzate sia nel campo dell'ingegneria elettrotecnica ed elettro-

(*) Memoria presentata dall'Accademico AGOSTINO ANTONIO CAPOCACCIA.

nica, sia in quello dell'ingegneria meccanica. Particolare impulso, ad es., alla diffusione tra gli ingegneri della conoscenza dei metodi di calcolo operazionale, dell'analisi di Fourier e di Laplace, della analisi delle variabili aleatorie, e così via, è stato determinato dall'estendersi delle applicazioni dei sistemi automatici di misura, di calcolo e di regolazione.

Mezzi relativamente semplici per il calcolo della distribuzione spettrale delle funzioni periodiche sono stati assai diffusamente presentati e discussi nella letteratura specializzata [1-5].

Meno semplice e meno diffusamente trattato dalle riviste di ingegneria è il problema della determinazione della distribuzione spettrale di ampiezza delle variabili aperiodiche.

Per una funzione $f(t)$ di tal genere la densità spettrale di ampiezza può venire, come noto, espressa mediante l'integrale di Fourier:

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \tag{1}$$

La calcolazione rigorosa della (1) è possibile solo per funzioni note analiticamente e per le quali sia agevole l'integrazione [1]. Per funzioni note graficamente o di forma analitica troppo complessa si ricorre a procedimenti approssimati, resi in genere laboriosi dalla presenza del termine $e^{-j\omega t}$. Molto spesso si ricorre all'artificio di sostituire alla funzione data un'altra che la approssimi sufficientemente e per cui sia noto l'integrale (1).

Per la valutazione della $g(\omega)$, nel caso di funzioni aperiodiche non nulle per un intervallo limitato di tempo, si propone nella presente nota un metodo che si richiama alla definizione di integrale di Fourier come limite di una serie di Fourier.

Esso consiste nel determinare la $g(\omega)$ con sufficiente approssimazione, riducendo le difficoltà a quelle di una normale scomposizione in armoniche.

Consideriamo quindi anzitutto la definizione suddetta.

Data una funzione $f(t)$ periodica di periodo T_0, essa può essere espressa in serie di Fourier nella forma classica:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} [a_n \cos n\,\omega_0 t + b_n \,\mathrm{sen}\, n\,\omega_0 t] \tag{2}$$

(dove ω_0 è la pulsazione della funzione) oppure come serie bilatera introducendo gli operatori complessi nella forma:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n\, e^{jn\omega_0 t} \tag{3}$$

essendo

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \qquad \text{e} \qquad c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt \tag{4}$$

I legami che intercorrono tra i coefficienti della (2) e della (3), indicando con $-n$ i valori negativi di n, sono:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad ; \quad c_n = \frac{a_n - j\, b_n}{2} \quad ; \quad c_{-n} = \frac{a_n + j\, b_n}{2} \tag{5}$$

Le c_n sono quindi ricavabili in modulo dalle ampiezze a_n e b_n della (2) con la relazione

$$c_n = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\,.$$

Si consideri ora una funzione periodica definita nel suo periodo k T come segue (Fig. 1):

$$F(t) \begin{cases} = 0 & \text{per} \quad -\dfrac{T}{2} \cdot k < t < -\dfrac{T}{2} \\[2ex] = f(t) & \text{per} \quad -\dfrac{T}{2} < t < \dfrac{T}{2} \\[2ex] = 0 & \text{per} \quad \dfrac{T}{2} < t < \dfrac{T}{2} \cdot k \end{cases}$$

essendo k un qualunque numero naturale.

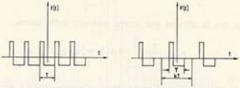

Fig. 1. - Funzione F(t).

Essa per $k = 1$ coincide con la $f(t)$ mentre per $k \neq 1$ è nulla in tutto il suo periodo tranne che per un intervallo di tempo T, nel quale coincide con la $f(t)$. Per $k = \infty$ la funzione [che indicheremo con $F_1(t)$] si riduce ad un segnale isolato di durata T ed è nulla per tutto il tempo rimanente: essa diviene quindi una funzione aperiodica non nulla per un intervallo limitato di tempo.

Introducendo la $F(t)$ nella (4) e ponendo

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{k\,T}$$

si ottiene:

$$c_n = \frac{\omega_1}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_1}^{\pi/\omega_1} F(t)\, e^{-jn\omega_1 t}\, d\,t$$

Poiché ω_1 rappresenta, oltre che la pulsazione fondamentale, anche l'incremento della pulsazione nel passaggio da una armonica a quella di ordine immediatamente superiore, poniamo

$$\omega_1 = \Delta\,\omega\,.$$

Si ottiene

$$c_n = \frac{\Delta\,\omega}{2\,\pi}\int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} F\,(t)\,e^{-jn\Delta\omega t}\,d\,t \tag{6}$$

e quindi, utilizzando la formula (3) della serie di Fourier si ha:

$$F\,(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=-\infty}\left[\frac{\Delta\,\omega}{2\,\pi}\int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} F\,(t)\,e^{-jn\Delta\omega t}\,d\,t\right]\cdot e^{jn\Delta\omega t}$$

Facendo tendere k all'infinito (*), $\Delta\omega$ tende a $d\,\omega$ e la grandezza $n\,\Delta\,\omega$ assume il significato di variabile continua ω ([5]), onde:

$$F_1\,(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\,\omega}{2\,\pi}\,e^{j\omega t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} F_1\,(t)\,e^{-j\omega t}\,d\,t\right]$$

ossia:

$$\left.\begin{aligned} F_1\,(t) &= \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g\,(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\,\omega \\ g\,(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} F_1\,(t)\,e^{-j\omega t}\,d\,t = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f\,(t)\,e^{-j\omega t}\,d\,t \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Esaminiamo ora la (6) che può anche scriversi nella forma:

$$c_n = \frac{1}{k\,T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f\,(t)\,e^{-jn\frac{2\pi}{kT}t}\,d\,t$$

Considerando l'integrale si osserva che la sua espressione è periodica con pulsazione $\frac{n}{k}\cdot\frac{2\,\pi}{T}$: quindi, facendo percorrere a k ordinatamente l'insieme dei numeri naturali, e facendo (per ciascun valore di k) variare n da 1 a ∞, si trovano valori eguali dell'integrale per valori eguali di $\frac{n}{k}$ e si ottengono altri valori per $\frac{n}{k}$ intermedi.

Ovviamente la stessa considerazione non si applica a c_n data la presenza del coefficiente $\frac{1}{k\,T}$ che ne fa diminuire il valore al crescere di k.

(*) Il passaggio al limite, non rigoroso, è giustificato solo per la rapidità con cui ci permette di ottenere un risultato corretto. Per una trattazione più rigorosa rimandiamo a: « Fourier Series and Boundary Value Problems » di R. V. Churchill, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., pp. 88-90, New York 1941.

Portando in ordinate la quantità $k\,T \cdot c_n$ (cioè il valore dell'integrale) ed in ascisse la pulsazione $n\,\dfrac{2\,\pi}{k\,T}$ si ottiene il diagramma spettrale di Fig. 2 che pone in evidenza quanto sopra esposto: all'aumentare di k si osserva che i valori assunti in precedenza (righe dello spettro a tratto continuo) vengono ripetuti per valori eguali del rapporto $\dfrac{k}{n}$ (e quindi per valori diversi di n) e che tra essi se ne inse-

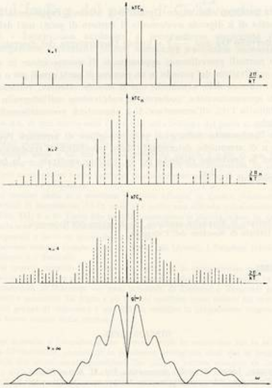

Fig. 2. - Diagramma spettrale di F(t) per diversi valori di k.

riscono via via dei nuovi (righe spettrali tratteggiate). Al tendere di k all'infinito l'intervallo fra le due righe tende a zero: l'insieme dei punti di ordinata $k\,T \cdot c_n = 2\,\pi\,c_n / \Delta\,\omega$ tende a dar luogo ad una curva continua che rappresenta, in base a quanto sopra esposto, la funzione $g\,(\omega)$.

Da queste osservazioni scaturisce il seguente metodo semplificato per calcolare l'integrale di Fourier per punti: data una funzione aperiodica, che assuma sempre valori nulli al di fuori di un certo intervallo di tempo di ampiezza T, e scelto un numero k, si consideri tale funzione periodica con periodo k T e se ne esegua l'analisi armonica; calcolate così le c_n per mezzo delle serie dei seni e dei coseni [mediante le (5)] si può costruire il diagramma spettrale portando in ordinate la quantità $k\,T \cdot c_n$ ed in ascisse $n \dfrac{2\pi}{k\,T}$ (che fornisce i valori delle ω).

La curva continua che unisce i punti così ottenuti rappresenta la $g(\omega)$.

Dalla scelta di k dipende ovviamente il numero di punti noti del diagramma $\left(\text{essendo l'intervallo tra essi } \dfrac{2\pi}{k\,T}\right)$ e quindi l'accuratezza del diagramma.

Poiché i normali procedimenti approssimati di scomposizione in armoniche si basano sulla suddivisione del periodo in un numero di parti eguali più o meno grande a seconda del numero delle armoniche che si intende ottenere, volendo mantenere, per motivi di approssimazione, inalterata la suddivisione nell'intervallo di ampiezza T ove è definita la $f(t)$, all'aumentare di k aumenterà necessariamente il numero delle armoniche.

Peraltro l'andamento della $g(\omega)$ può consigliare di arrestare l'analisi ad un certo ordine $\bar{n}$ di armoniche determinato dalla possibilità di trascurare — compatibilmente con la precisione richiesta per la funzione spettrale — la banda di pulsazioni maggiori di $\bar{n} \cdot \dfrac{2\pi}{k\,T}$.

Genova - Istituto di Meccanica applicata alle Macchine dell'Università.
Cagliari - Istituto di Macchine dell'Università.

Febbraio 1968.

BIBLIOGRAFIA

(1) A. Ghizzetti, Lezioni di analisi matematica, Vol. II, Roma, Veschi.

(2) C. R. Wylie, Jr., Advanced Engineering Mathematics. Mc Graw-Hill Book Company, Inc.

(3) Charles K. Hager, Operational Calculus, Electro-Technology, June 1962.

(4) Draper - Mac Kay-Lees, Instruments Engineering, Vol. II, pp. 655-665. Mathematics.

(5) R. B. Dow, Fundamentals of Advanced Missiles, pp. 274-275, Wiley.