

Scattering nelle cinture di radiazione di Van Allen (*)

1. — Una accurata discussione dei risultati sperimentali (1) ha portato alla seguente distribuzione della energia fra gli elettroni della cintura esterna di VAN ALLEN:

Per energie comprese fra	45 e 60 kev	il flusso omnidirezionale è	$= 9 \cdot 10^7$	$\frac{\text{part.}}{\text{cm.}^2 \text{sec.}}$
» » » »	80 e 110 » »	»	è	$= 8 \cdot 10^7$ »
» » » »	110 e 1600 » »	»	è	$< 10^8$ »
» » » »	1,6 e 5 Mev »	»	è	$= 2 \cdot 10^8$ »
» » » »	superiori a circa 5 Mev »	»	è	$< 10^8$ »

Indagini sono state fatte anche circa la distribuzione della energia (2) per gli elettroni situati ad un'altezza di 1000 km ed il tentativo di rappresentare lo stato di cose con una legge del tipo

$$dN = \text{costante } E^{-\gamma} dE$$

porta a concludere che γ dipende in maniera notevole dalla latitudine.

Si tratta di particelle con energie così elevate che un calcolo dello scattering non si può fare senza tener conto del moto delle particelle diffondenti. In un precedente lavoro (5) è stata calcolata la modificazione da apportare alla formula di KLEIN-NISHINA per il caso di un elettrone in movimento. Per frequenze originarie non troppo elevate e più precisamente se:

$$\frac{k_0 (1 - \cos \theta) \sqrt{1 - \beta^2}}{(1 - \beta a)} \ll mc^2 \quad (1,1)$$

la formula di KLEIN-NISHINA può venire sostituita dalla seguente:

$$I = \frac{e^4 I_0 (1 + \cos^2 \theta) (1 - \beta^2)^2}{m^2 c^4 r^2 2 (1 - \beta^2 \sin^2 \alpha) (1 - \beta a)^4} \quad (1,2)$$

(*) Memoria presentata dall'Accademico GUGLIELMO RIGHINI.

uniforme, ma non certamente rettilineo. Tuttavia i raggi delle spirali sono per le energie considerate sufficientemente grandi per ritenere giustificato l'uso della (1,2). Ad una distanza geocentrica di 22000 km ed all'equatore magnetico si trova per il raggio di girazione ρ un ordine di grandezza dato dalla formula:

$$\rho = \frac{cmv}{eH} = 1,2 \text{ km} \quad (1,3)$$

con

$$H_{eq} = 0,761 \cdot 10^{-2} \text{ gauss} ; \beta = 0,9 ; v_{\perp} \approx \beta v \sin 35^{\circ}$$

2. — Cominceremo dal considerare lo scattering prodotto da un solo elettrone. Le direzioni di cui si deve tener conto per fare uso della (1,2) e dell'altra formula

$$k = k_0 \frac{(1 - \beta a_0)}{(1 - \beta a)} \quad k = h v ; (v = \text{frequenza di scattering}) \quad (2,1)$$

k = vettore con modulo $=k$, nella direzione di propagazione della radiazione diffusa.

che dà la frequenza ν di scattering (formula (6,2) del lavoro citato in (5)) sono varie ed una posizione particolare spetta al campo magnetico H , che ha una funzione dominante nel determinare il moto dell'elettrone. Ad un conveniente sistema di riferimento si arriva colle seguenti definizioni:

χ	=	angolo fra la direzione di v e quella di H
γ_0	=	» » » » » k_0 » » » H
γ	=	» » » » » k » » » H
α_0	=	» » » » » v » » » E_0
α	=	» » » » » v » » » k
ψ_0	=	» » » giacitura (H, k_0) » » (H, v)
ψ	=	» » » » (H, k) » » (H, v)
ζ	=	» » » » (H, k_0) » » (H, k)

Queste direzioni ed i relativi angoli (oltre θ) sono riportati su una sfera (in fig. 1) col centro nell'elettrone. Si ricavano subito le relazioni:

$$\psi_0 = \psi + \zeta \quad (2,2)$$

$$a_0 = \cos \alpha_0 = \cos \gamma_0 \cos \chi + \sin \gamma_0 \sin \chi \cos (\psi + \zeta) \quad (2,3)$$

$$a = \cos \alpha = \cos \gamma \cos \chi + \sin \gamma \sin \chi \cos \psi \quad (2,4)$$

$$\cos \theta = \cos \gamma_0 \cos \gamma + \sin \gamma_0 \sin \gamma \cos \zeta \quad (2,5)$$

Secondo la teoria di STÖRMER-ALFVEN, χ per un determinato elettrone varia colla latitudine magnetica φ , dall'equatore alla latitudine del punto di inversione (mirror point), dove assume il valore 90° . Ma se si considera una regione limitata del cielo, quale può essere quella oggetto di una osservazione astronomica, potremo ritenere costanti tanto χ quanto la direzione di H . Fissate anche le direzioni di k_0 e k , risultano determinati e costanti gli angoli θ , γ_0 , γ e ζ . Nel moto di un elettrone su

una spirale varia invece la direzione di r e quindi variano col tempo gli angoli α , α_0 e ψ . La variazione di ψ è proporzionale alla velocità angolare

$$\omega = \frac{eH}{mc} \quad (2,6)$$

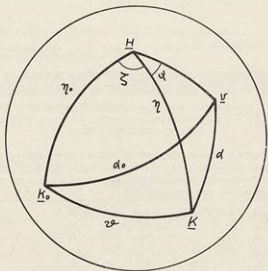


Fig. 1

Poiché la emissione di scattering è limitata ad un cono di piccola apertura attorno alla direzione della velocità, il fenomeno, nella schematizzazione data, dovrebbe essere osservato in una conveniente direzione come una serie di flash. Naturalmente in pratica le cose vanno diversamente per la presenza di molti elettroni

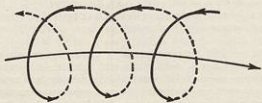


Fig. 2

e per la rapidità della rotazione. Per dare tuttavia un'idea del fenomeno elementare, abbiamo eseguito alcuni calcoli corrispondenti ad una osservazione in direzione normale alle linee di forza ($\gamma = 90^\circ$) e per i valori di χ : 0° , 45° , 90° . Per questi si è calcolato il fattore f :

$$f = \frac{(1 - \beta^2)^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \alpha)(1 - \beta \cos \alpha)^2} \quad (2,6)$$

proporzionale alla intensità diffusa e rappresentante la correzione apportata dal moto allo scattering dell'elettrone in quiete. I valori di f sono dati, in funzione di ψ (che è l'unica variabile del problema), nella tabella III e nei grafici (figg. 3 e 4). I calcoli sono stati ripetuti per i due valori di β : 0,5 e 0,9. Per $\beta = 0,5$ si vede che lo scattering ha un massimo ben pronunciato nella direzione $\chi = 90^\circ$ e $\psi = 0$ (cioè quando l'elettrone si muove verso l'osservatore). Ma per $\beta = 0,9$ si può dire che lo scattering è concentrato attorno alla direzione $\chi = 90^\circ$, $\psi = 0$, il contributo dato alle altre direzioni essendo trascurabile.

TABELLA II

$\beta = 0,5$

$\psi \backslash \chi$	0°	45°	90°
0°	0,5625	2,7608	6,7500
45°	0,5625	1,6410	2,7609
90°	0,5625	0,5625	0,5625
135°	0,5625	0,2127	0,1430
180°	0,5625	0,1436	0,0833
225°	0,5625	0,2127	0,1430
270°	0,5625	0,5625	0,5625
315°	0,5625	1,6410	2,7609
360°	0,5625	2,7608	6,7500

$\beta = 0,9$

$\psi \backslash \chi$	0°	45°	90°
0°	0,0361	0,6595	68,59
45°	0,0361	0,1910	0,6595
90°	0,0361	0,0361	0,0361
135°	0,0361	0,003953	0,001608
180°	0,0361	0,001608	0,0005263
225°	0,0361	0,003953	0,001608
270°	0,0361	0,0361	0,0361
315°	0,0361	0,1910	0,6595
360°	0,0361	0,6595	68,59

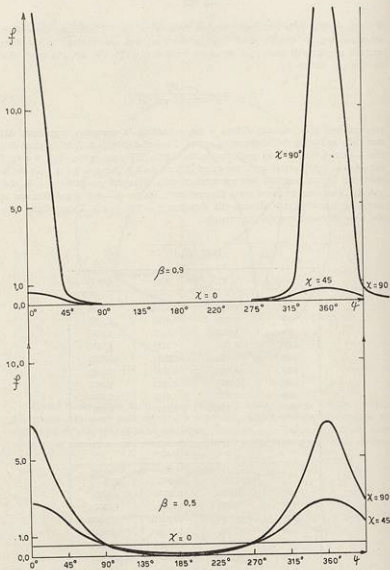


Fig. 3 e 4

3. — Il risultato trovato e cioè in sostanza che un osservatore può ricevere la radiazione di scattering di un elettrone relativistico, solo se osserva in direzione all'incirca opposta a quella della velocità dell'elettrone stesso, dà luogo ad una specie di effetto magnetico, che è una conseguenza di questa anisotropia e del moto delle particelle catturate nel campo. Un elettrone che oscilla fra i due punti di inversione nella cintura di radiazione sarebbe in grado, qualora lo scattering fosse isotropo, di inviare radiazione diffuse sulla superficie della terra, qualunque fosse la latitudine magnetica a cui venisse a trovarsi. Non è invece così quando si tenga conto della anisotropia dello scattering ed i raggi diffusi arrivano alla superficie della terra solo quando l'elettrone si trova in un ben determinato (e ristretto) intervallo di latitudine magnetica, mentre per le latitudini esterne a questo intervallo la radiazione si disperde nello spazio. Quando poi questa condizione relativa alla latitudine è verificata, l'elettrone diffonde nella direzione dell'osservatore soltanto quando si trova su determinati elementi della sua traiettoria.

Per trattare la questione quantitativamente si può far uso di alcuni risultati ottenuti applicando il metodo delle perturbazioni di ALFVEN (6), (7) alla teoria di STÖRMER (8), (9), (10) sul moto degli elettroni in campo magnetico. Questo metodo è applicabile nel caso in cui il raggio di curvatura delle spirali, su cui si muovono gli elettroni, è piccolo rispetto alla distanza geocentrica degli elettroni stessi, e questa condizione è nel caso presente certamente verificata (v. 1,3).

Nella teoria di STÖRMER il campo magnetico è assai correttamente approssimato mediante un dipolo situato nel centro magnetico della terra (a 342 km dal centro geometrico) e possedente un momento magnetico a , per il quale CHAPMAN e BARTELS (13) hanno proposto il valore

$$a = 8,1 \cdot 10^{23} \text{ gauss cm}^3 \quad (3,1)$$

Le linee di forza hanno in tale ipotesi la equazione

$$R = R_0 \cos \varphi \quad (3,2)$$

(R = distanza del punto dal dipolo; φ = latitudine magnetica; R_0 = parametro che individua una particolare linea e il cui significato risulta dalla formula stessa).

L'angolo ψ che la tangente alla linea di forza forma colla intersezione fra equatore e meridiano su cui si trova la linea, si ricava immediatamente dalla (3,2):

$$\text{tang } \psi = \frac{1}{3} (2 \text{ tang } \varphi - \text{cotg } \varphi) \quad (3,3)$$

Come si vede esso dipende soltanto dalla latitudine e non dal parametro R_0 .

Dalle equazioni del moto di una particella in un campo magnetico, risulta subito un integrale primo, quello della energia, il quale ci assicura la costanza della velocità della particella. Un altro integrale, trovato da STÖRMER, si riferisce essenzialmente alla componente secondo l'asse bipolare del momento della quantità di moto, ed in base ad esso rimangono ben determinate le due zone di cattura. In queste zone gli elettroni si muovono su spirali e l'angolo χ , che la direzione della

velocità forma colla direzione del campo, varia da un valore χ_e all'equatore fino al valore $\chi = 90^\circ$ che assume nel punto di inversione; qui il moto si inverte e la par-

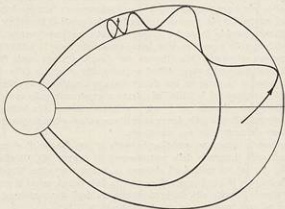


Fig. 5

ticella torna ad attraversare l'equatore magnetico con una velocità inclinata di $180^\circ - \chi_e$ sulle linee di forza, per procedere poi verso il secondo punto di inversione e ricominciare il ciclo. Il moto delle particelle catturate entro le cinture di radiazione è quindi determinato principalmente dal modulo della velocità e dall'angolo χ_e . Non abbiamo considerato in questa schematizzazione il « drift » in azimuth (dovuto alla inomogeneità del campo) che è invece lo scopo principale dei calcoli di molti Autori rivolti a dimostrare la esistenza di una corrente ad anello attorno all'asse magnetico necessaria per la spiegazione delle aurore boreali.

Per il nostro scopo interessa invece calcolare i valori di χ alle diverse latitudini e le latitudini (simmetriche) dei punti di inversione. Ciò può farsi usando il metodo approssimato di ALFVEN (6) e (7). Posto

$$\eta = \frac{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \varphi}}{\cos^3 \varphi} \quad (3,4)$$

ed indicati con φ_1 ed φ_2 i valori relativi al punto di inversione:

$$\eta_1 = \frac{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \varphi_1}}{\cos^3 \varphi_1} \quad (3,5)$$

si ha:

$$\cotg \chi = \sqrt{\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1}} \quad (3,6)$$

Essendo all'equatore ($\varphi = 0$) $\tau_1 = 1$, si può anche scrivere :

$$\cotg \chi_e = \sqrt{\tau_1 - 1} \quad (3,7)$$

Dato quindi χ_e , si calcola τ_1 mediante la (3,7), φ_1 mediante la (3,5), τ_2 mediante la (3,4) e χ_2 mediante la (3,6). La risoluzione della (3,5) può farsi graficamente in maniera assai semplice, quando si sia (una volta per sempre) costruito il grafico della funzione τ_2 di φ . Il risultato di tutti i calcoli è quello di ottenere χ in funzione di φ . Dopo ciò si disegnano, in un piano meridiano, la sezione della terra e la linea di forza attorno a cui è spiralizzato l'elettone diffondente, che nella approssimazione $\varphi \ll R$, si considererà situato sulla linea stessa. Se ora in vari punti della linea si disegna il vettore velocità in quelle due posizioni in cui è contenuto nel piano stesso del disegno, ne risulta la possibilità di determinare, coll'approssimazione del graficismo, l'intervallo di latitudine, dal quale l'elettone può inviare una radiazione di scattering verso la superficie della terra.

Tuttavia questa maniera di procedere non è né rapida né comoda, perché si devono determinare molti valori di χ ed è difficile, a meno di una fortunata combinazione, che fra questi valori siano compresi anche quelli estremi (relativi cioè alle direzioni tangenti alla superficie terrestre; li chiameremo limiti), mentre sono proprio queste direzioni limiti che più interessano.

Si può invece procedere osservando che per le due suddette direzioni limiti sono verificate le equazioni:

$$\sin(\varphi - \psi - \chi) = \frac{r}{R} \quad (3,8)$$

$$\sin(\chi + \psi - \varphi) = \frac{r}{R} \quad (3,9)$$

(r = raggio terrestre) come risulta subito dalle figg. 6 e 7.

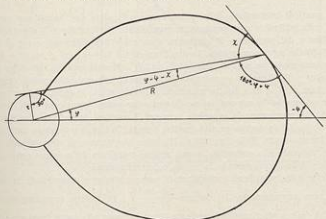


Fig. 6

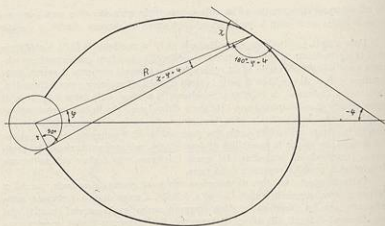


Fig. 7

La risoluzione delle equazioni (3,8) e (3,9) può farsi graficamente, riportando in uno stesso diagramma, in funzione della latitudine magnetica, le tre funzioni :

$$\frac{r}{R} ; \sin(\varphi - \psi - \gamma) ; \sin(\chi + \psi - \varphi).$$

I punti di intersezione della prima curva colle altre due hanno per ascisse i valori della latitudine corrispondenti ai raggi limiti. La funzione r/R dipende dalla latitudine e dal parametro R_e (distanza equatoriale dell'elettrone), come si vede dalla (3,2) che serve a calcolarla. Le due funzioni $\sin(\varphi - \psi - \gamma)$ e $\sin(\chi + \psi - \varphi)$ si calcolano mediante le (3,3), (3,4), (3,6) e (3,7) e dipendono dalla latitudine e dal parametro χ_0 (inclinazione equatoriale della velocità). Si sono così potuti ottenere, in funzione di R_e e di χ_0 , i due valori delle latitudini fra le quali si deve trovare l'elettrone, perché la sua radiazione di scattering possa (almeno in certi determinati istanti) raggiungere la superficie terrestre. I risultati dei calcoli sono riportati nella tabella III (a doppia entrata, mentre i grafici in figg. 8 e 9 danno un'idea del procedimento usato. Nelle fig. (10) e (11) infine si è cercato di riprodurre lo stato di cose, riguardo allo scattering, in una sezione meridiana dello spazio attorno alla superficie della terra, secondo la nostra schematizzazione.

Molte delle precedenti considerazioni possono svolgersi trascurando la debole anisotropia rappresentata dal fattore $\frac{1 + \cos^2 \theta}{2}$. In questa approssimazione la intensità dello scattering è indipendente (limitatamente alle basse frequenze) dalla direzione della radiazione incidente.

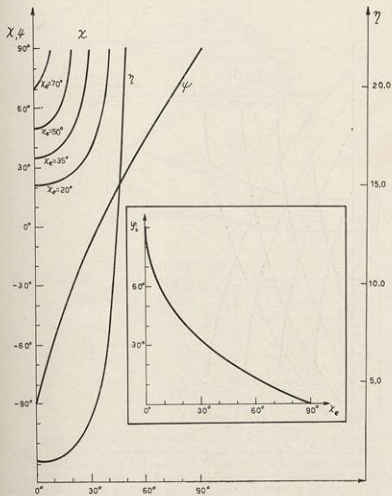


Fig. 9

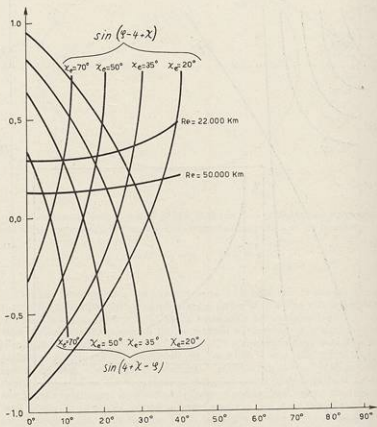


Fig. 9

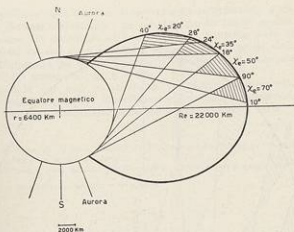


Fig. 10

TABELLA III.

λ_e	Limiti per la latitudine magnetica			
	$R_e = 22\ 000\ km$		$R_e = 50\ 000\ km$	
	$\varphi\ min$	$\varphi\ max$	$\varphi\ min$	$\varphi\ max$
20°	24°	40°	28°	35°
35°	18°	28°	21°	26°
50°	9°	18°	12°	17°
70°	1°	9°	4°	8°
90°	0°	0°	0°	0°

In conclusione si trova che gli intervalli di latitudine, entro i quali devono trovarsi gli elettroni di elevata energia per poter diffondere sulla superficie della terra, sono piuttosto piccoli e che la loro ampiezza diminuisce, come era prevedibile, all'aumentare della distanza degli elettroni diffondenti. Particolare interesse si deve attribuire all'intervallo relativo a $\lambda_e = 35^\circ$, perché C.Y. FAN, P. MEYER e J. A. SIMPSON (16) hanno potuto mostrare, in base ai risultati registrati dall'Explorer VI (7 Agosto - 6 Ottobre 1959), che la legge di distribuzione delle inclinazioni equatoriali λ_e presenta un massimo accentuato in prossimità del valore $\lambda_e = 35^\circ$. Risulta anzi che tale massimo possiede una notevole stabilità dinamica, in quanto che, sebbene esso possa spostarsi di vari gradi (fino a 48°) durante una tempesta magnetica,

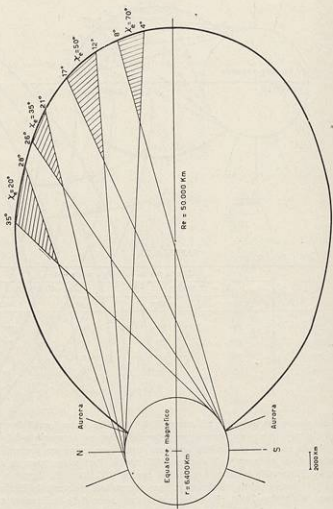


Fig. 11

il valore primitivo viene riassunto al cessare della perturbazione, e ciò anche se il numero di elettroni con velocità v ha cambiato per un fattore uguale circa a 3,8. Un osservatore, che sia situato ad una determinata latitudine e che osservi in diverse direzioni del suo piano meridiano, dovrebbe quindi grosso modo notare un massimo di intensità per quella direzione in cui riceve la radiazione di scattering di elettroni che posseggono un $z_p = 35^\circ$.

In realtà le cose sono complicate da vari fattori ed in generale, quando si vogliono mettere in relazione le considerazioni svolte colle osservazioni, sorgono varie questioni non semplici che richiedono una trattazione a parte.

Ringrazio vivamente il prof. TORALDO DI FRANCIA per avermi suggerito l'idea di questa ricerca e per i consigli e le utili discussioni.

Ringrazio pure il prof. RIGHINI per il costante interessamento a questo lavoro.

Firenze — Osservatorio Astronomico di Arcetri.

BIBLIOGRAFIA

- (1) B. J. O'BRIEN, J. A. VAN ALLEN, C. D. LAUGHLIN e L. A. FRANK - Absolute electron intensities in the heart of the earth's outer radiation zone, *Journal of Geophysical Research* - Vol. 67, January 1962, N. 1.
- (2) B. J. O'BRIEN, C. D. LAUGHLIN, J. A. VAN ALLEN e L. A. FRANK - Measurements of intensity and spectrum of electrons at 1600 km altitude and high latitudes, Department of Physics and Astronomy - State University of Iowa, January 1962.
- (3) G. PIZZELLA, C. D. LAUGHLIN e B. J. O'BRIEN - Note on the electron energy spectrum in the inner Van Allen Belt, Department of Physics and Astronomy - State University of Iowa, May 1962.
- (5) G. CALAMAI - Scattering causato da elettroni veloci, *Rend. della Accademia Nazionale dei Lincei* (in corso di stampa).
- (6) H. ALFVÉN - On the motion of a charged particle in a magnetic field, *Ark. f. mat. astr. o. fysik*, 27 A, N° 22 (1940).
- (7) H. ALFVÉN - *Cosmical Electrodynamics*, Clarendon Press (1953), pag. 27 e segg.
- (8) C. STÖRMER - Sur les trajectoires des corpuscules électrisés dans l'espace sous l'action du magnétisme terrestre, *Arch. Sci. Phys.*, Genève, 24, 5, 113, 221, 317 (1907); 32, 117, 190, 277, 415, 501 (1911).
- (9) C. STÖRMER - Ein Fundamental problem der Bewegung einer elektrisch geladenen Korpusskel im kosmischen Raume, *Z. f. Astrophys.*, 3, 31, 227 (1931); 4, 290, (1932); 6, 333 (1933).
- (10) C. STÖRMER - On the Trajectories of electrical Particles in the Field of a Magnetic Dipole with Applications to the Theory of Cosmic Radiation, *Avh. Vid. Akad. Mat. - nat. Kl. Oslo*, 1933.
- (11) J. A. VAN ALLEN - Dynamics, Composition and Origin of the Geomagnetically-trapped Corpuscular Radiation, State University of Iowa - August 1961 (5).
- (12) A. SCHLUTER - On the Van Allen Radiation Belts, from the lectures given in Rome (March 21-30, 1962), C.N.R. Istituto Nazionale per le ricerche spaziali.
- (13) S. CHAPMAN e J. BARTELS - *Geomagnetism*, Oxford; Clarendon Press; 1940.
- (14) S. F. SINGER - A new model of magnetic storms and aurorae, *Trans. Am. Geophys. Union* 38 (1957) 175-190.
- (15) S. F. SINGER - On the nature and origin of the earth's radiation belts, *Space Research - Proceedings of the first international space science symposium* - Nice, January 11-16 (1960) 297. Edited by H. Kallman - North-Holland Publishing Company - Amsterdam.
- (16) C. Y. FAN, P. MEYER e J. A. SIMPSON - The equatorial pitch angle distribution of electrons in the outer radiation belt, *Space Research II - Proceedings of the second international space science symposium*, Florence, April 10-14, 1961. Edited by H. C. Van de Hulst, C. de Jager e A. F. Moore, 867. North-Holland Publishing Company - Amsterdam.