GIOVANNI BATTISTA RIZZA

Deviazione caratteristica e proprietà locali delle 2q-faccette di una V_{2n} a struttura complessa (*)

1. — In un precedente lavoro (1) si è mostrato come nello studio locale di una varietà a struttura complessa V_{2n} sia utile introdurre la nozione di deviazione caratteristica di una faccetta piana E_2. Si tratta precisamente di un angolo associato ad E_2, che ne misura, in certo modo, il divario dell'essere una faccetta caratteristica.

La presente ricerca estende al caso di una faccetta 2q-dimensionale E_{2q} $(q = 1, \dots, n)$ tutti i risultati del lavoro indicato relativi alle faccette piane $(q = 1)$ (2). L'elemento essenziale è naturalmente la nozione, qui introdotta al n. 10, di *deviazione caratteristica* di una faccetta E_{2q}.

Una prima parte del lavoro (nn. 2-7) consiste in uno studio locale della V_{2n} con particolare riguardo alle faccette E_{2q} caratteristiche ed alle faccette E_{2q} a prodotto hermitiano reale (brevemente: p.h.r.), che vengono geometricamente caratterizzate in più modi in relazione alla trasformazione J dei vettori contravarianti di V_{2n} (proprietà P_1, P_2 (n. 4); teoremi T_1, T_2 (n. 6).

In questo tipo di ricerche le faccette p.h.r. hanno un ruolo assai più importante di quello che lasciavano prevedere i risultati del lavoro [7] relativi al caso $q = 1$. Ciò appare ad es. nei lemmi L_1, L_2 che, per $q = 1$, si riducono risp. ad una proposizione ben nota e ad una ovvia (n. 7).

La seconda parte è invece dedicata alla deviazione caratteristica delle faccette E_{2q}.

La definizione si può porre seguendo l'idea geometrica accennata per il caso $q = 1$ (teorema T_3), o anche guardando alle faccette p.h.r. di dimensione q contenute nella faccetta E_{2q} (teorema T_4) (n. 10).

Inoltre, la deviazione caratteristica di E_{2q} è strettamente legata ad un invariante, denotato con K, che si incontra mettendo in relazione E_{2q} con le 2q-faccette caratteristiche appartenenti ad un riferimento caratteristico (nn. 8, 10).

(*) Memoria presentata dal Presidente Francesco Severi.

(1) G. B. Rizza, [7] della bibliografia.

(2) Una comunicazione sull'argomento fu tenuta all'Int. Congress of Math. (Edinburgh, Aug. 1958). I risultati, in forma riassuntiva, sono pubblicati in [8].

I risultati ottenuti consentono anche di dare risposta al problema del significato geometrico delle potenze della forma esterna ω, associata alla metrica, considerate sulle faccette E_{2q}. Precisamente, $\frac{1}{q!}\,\omega^q$ è prodotto dell'elemento di volume per il coseno della deviazione caratteristica di E_{2q} (n. 12).

Lo studio delle faccette E_{2q}, per le quali la deviazione caratteristica diviene minima o massima, conduce poi rispettivamente alle E_{2q} caratteristiche ed alle E_{2q} di una famiglia, più ampia di quella delle E_{2q} p.h.r., che viene geometricamente caratterizzata dal teorema T_6 (n. 13).

Infine, al n. 14 alcuni teoremi di W. Wirtinger sono ottenuti come casi particolari.

2. — Generalità. — Siano V_{2n} una varietà a struttura complessa dotata di metrica hermitiana definita positiva [3], $\bar{O}$ un punto di V_{2n}, E_{2n} lo spazio centro-affine tangente relativo al punto $\bar{O}$ [4].

Indicate con x^j $(j = 1, \dots, 2n)$ e con $z^p = x^p + i\,x^{n+p}$ $(p = 1, \dots, n)$ coordinate locali risp. reali e complesse in un intorno U di $\bar{O}$ su V_{2n}, sia:

$$ds^2 = 2\,g_{p\bar{q}}\,dz^p\,d\bar{z}^q \tag{1}$$

la forma quadratica, che definisce la metrica in U [5].

Nel seguito, i vettori di V_{2n}, denotati con M, N, ... sono sempre considerati nel punto $\bar{O}$. Essi vengono rappresentati in E_{2n} e si intendono applicati nell'origine O di E_{2n}.

Indicate con M^p, $M^{\bar{p}}$, N^p, $N^{\bar{p}}$ le componenti contravarianti complesse dei vettori M, N [6], le uguaglianze:

$$M \times N = g_{p\bar{q}}\,(M^p N^q + N^p M^q)\,, \tag{2}$$

$$M \cdot N = g_{p\bar{q}}\,M^p N^{\bar{q}}\,, \tag{3}$$

definiscono risp. il *prodotto scalare* ed il *prodotto hermitiano* di M ed N.

---

[3] Ved. p. es. B. Eckmann, [2], I, III, VI; A. Lichnerowicz, [3], ch. V; I, II, III; K. Yano-S. Bochner, [11], VIII. Più in generale si possono considerare varietà quasi-complesse. Ved. E. Martinelli, [6], n. 8.

[4] V_{2n}, O, E_{2n} sono risp. immagini reali di una varietà complessa $\mathcal{V}_n$ di dimensione complessa n, di un punto O^* di $\mathcal{V}_n$, dello spazio complesso centro-affine tangente $\mathcal{E}_n$ relativo al punto O^* di $\mathcal{V}_n$. Per la geometria nello spazio E_{2n} (con la metrica euclidea ordinaria) ved. B. Segre [9], IV, I.

[5] Per le nozioni di calcolo tensoriale ved. K. Yano-S. Bochner, [11], VIII. I tensori che intervengono sono autoaggiunti. Gli indici j, h, k, ... percorrono gli interi 1, ..., 2n; gli indici p, q, r, ... gli interi 1, ..., n.

[6] Le componenti complesse di un vettore S di componenti reali s^j $(j = 1, \dots, 2n)$ sono $S^p = s^p + i\,s^{n+p}$, $S^{\bar{p}} = s^p - i\,s^{n+p}$ $(p = 1, \dots, n)$.

Una k-pla ordinata di vettori linearmente indipendenti dà luogo ad un *k-vettore* (7). Le componenti contravarianti complesse del k-vettore ρ determinato dai vettori $\underset{1}{R}, \ldots, \underset{k}{R}$ nell'ordine, sono:

$$\rho^{\alpha_1 \ldots \alpha_k} = \begin{vmatrix} \underset{1}{R}^{\alpha_1} & \ldots & \underset{1}{R}^{\alpha_k} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \underset{k}{R}^{\alpha_1} & \ldots & \underset{k}{R}^{\alpha_k} \end{vmatrix} \quad (\alpha_j = 1, \ldots, n, \bar{1}, \ldots, \bar{n}). \tag{4}$$

Anche per i k-vettori si definisce il *prodotto scalare* (8). Una espressione, utile nel seguito, del prodotto scalare dei k-vettori μ, ν è:

$$\mu \times \nu = \begin{vmatrix} \underset{1}{M} \times \underset{1}{N} & \ldots & \underset{1}{M} \times \underset{k}{N} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \underset{k}{M} \times \underset{1}{N} & \ldots & \underset{k}{M} \times \underset{k}{N} \end{vmatrix} \tag{5}$$

con ovvio significato per i simboli.

Le uguaglianze:

$$\mathrm{mis}^2 \rho = \rho \times \rho \tag{6}$$

$$\cos \mu\, \nu = \frac{\mu \times \nu}{\mathrm{mis}\, \mu \cdot \mathrm{mis}\, \nu} \tag{7}$$

definiscono risp. la *misura* di ρ e l'*angolo* $\mu\, \nu$ (9).

Dalle (6), (5) scende subito che k vettori unitari mutuamente ortogonali danno luogo ad un k-vettore di misura unitaria.

3. — Faccette caratteristiche e faccette p.h.r. — Le considerazioni del seguito si riferiscono alle *faccette k-dimensionali* ($k = 0, 1, \ldots, 2n$) di V_{2n} (10), aventi origine $\bar{O}$, vale a dire agli spazi lineari orientati di E_{2n} di dimensione k ed uscenti da O.

Hanno particolare interesse le *faccette caratteristiche* ($k = 2q$; $q = 0, 1, \ldots, n$) (11) e le *faccette a prodotto hermitiano reale* (brevemente: *faccette p.h.r.*) cioè rispettivamente gli spazi caratteristici di E_{2n} (12) e gli spazi di E_{2n}, entro i quali ogni coppia di vettori, uscenti da O, ha prodotto hermitiano reale.

---

(7) Ved. E. Cartan, [1], p. 14.

(8) Ved. E. Cartan, [1], p. 15. Per k = 1,2 la definizione si riduce risp. alle (2), (10) del lavoro [7].

(9) I k-vettori possono riguardarsi come vettori in uno spazio di dimensione opportuna (Ved. E. Cartan, [1], p. 8. Le definizioni poste derivano in modo naturale da questa osservazione.

(10) Elementi lineari k-dimensionali orientati di V_{2n}.

(11) Immagini reali di elementi q-dimensionali complessi di $\mathcal{V}_n$.

(12) Immagini reali in E_{2n} degli spazi lineari complessi di $\mathcal{E}_n$. Ved. p. es. B. Segre, [9], p. 352.

Gli spazi lineari E_k $(k = 0, 1, \dots, 2n)$ di E_{2n}, che intervengono nel seguito, passano per O e sono dotati di orientazione. Essi vengono definiti da k-ple ordinate di vettori indipendenti (da k-vettori) applicati in O. L'angolo di due E_k è, per definizione, l'angolo dei due k-vettori, che li individuano.

4. — La trasformazione J. — È ben noto che la struttura complessa di V_{2n} induce in V_{2n} una struttura quasi complessa, definita da una *trasformazione lineare* J dei vettori contravarianti di V_{2n} [13].

Esplicitamente, indicato con $\widetilde{M} = J(M)$ il vettore corrispondente ad M (*coniugato* di M) [14], si ha:

$$\widetilde{M}^p = i\,M^p \quad , \quad \widetilde{M^p} = -i\,M^p \qquad (p = 1, \dots, n) \tag{8}$$

La trasformazione J è anti-involutoria, cioè:

$$\widetilde{\widetilde{M}} = -M \tag{9}$$

e muta vettori autoaggiunti in vettori autoaggiunti.

Dalle (2), (8) deriva:

$$M \times N = \widetilde{M} \times \widetilde{N} \quad , \quad M \times \widetilde{N} + \widetilde{M} \times N = 0 \tag{10}$$

In particolare è:

$$R \times R = \widetilde{R} \times \widetilde{R} \quad , \quad R \times \widetilde{R} = 0\,. \tag{11}$$

La trasformazione J si estende in modo naturale ai k-vettori ρ e quindi agli spazi lineari E_k [15]. Si pone risp. $\widetilde{\rho} = J(\rho)$, $\widetilde{E}_k = J(E_k)$.

Ciò premesso, gli spazi caratteristici e gli spazi a prodotto hermitiano reale si possono caratterizzare con le proprietà:

P_1 — *Un* E_{2q} $(q = 1, \dots, n)$ *è caratteristico, se con ogni vettore* R *contiene anche il vettore* $\widetilde{R}$; *e viceversa.*

P_2 — *Un* E_k $(k = 1, \dots, n)$ *è p.h.r., se per ogni coppia di vettori* M, N *di* E_k *è* $M \times \widetilde{N} = 0$; *e viceversa.*

Per stabilire P_1 conviene anzitutto osservare che il piano definito dai vettori $R\,\widetilde{R}$ è caratteristico [16]. Indi, fissato ad arbitrio un vettore $\underset{1}{R}$ in E_{2q}, si scelga in E_{2q} un vettore $\underset{2}{R}$ ortogonale al piano caratteristico $\underset{1}{R}\,\underset{1}{\widetilde{R}}$ che, per ipotesi, appartiene ad E_{2q}. Si perviene così ad un secondo piano caratteristico $\underset{2}{R}\,\underset{2}{\widetilde{R}}$, che riesce ortogonale in E_{2q} ad $\underset{1}{R}\,\underset{1}{\widetilde{R}}$ [17]. Si consideri poi $\underset{3}{R}$ ortogonale allo spazio 4-dimensionale $\underset{1}{R}\,\underset{1}{\widetilde{R}}\,\underset{2}{R}\,\underset{2}{\widetilde{R}}$ e si prosegua in modo analogo. In definitiva lo spazio E_{2q}

(13) Ved. p. es. A. Lichnerowicz, [3], p. 203-204; B. Eckmann, [2], p. 7-11 e p. 34-37.

(14) La nozione di vettore coniugato è dovuta ad E. Martinelli, Ved. [4] p. 145-147.

(15) J muta vettori linearmente indipendenti in vettori linearmente indipendenti.

(16) La considerazione di equazioni parametriche per il piano $R\,\widetilde{R}$ conduce all'asserto.

(17) L'ortogonalità scende subito dalle $(10)_2$, (9).

appare spazio congiungente i q piani caratteristici $\underset{t}{R}\,\underset{t}{\widetilde{R}}$ $(t = 1, \dots, q)$ mutuamente ortogonali, onde E_{2q} è caratteristico ([18]).

Il viceversa segue subito, p. es. analiticamente, dalla definizione di spazio caratteristico.

La proprietà P_2 si stabilisce facilmente, tenendo presente la definizione di spazio a prodotto hermitiano reale e la relazione:

$$M \cdot N = \frac{1}{2}\,(M \times N + i\,(M \times \widetilde{N})), \tag{12}$$

che scende immediatamente dalle (2), (3), (8).

5. — Riferimenti caratteristici. — Una k-pla ordinata di vettori $\underset{1}{M}, \dots, \underset{k}{M}$ $(k = 1, \dots, 2n)$ unitari, ortogonali, uscenti da O costituisce in E_{2q} un sistema fondamentale di riferimento k-dimensionale di origine O, brevemente un *k-riferimento* $\mathcal{R}_k$ in E_{2n}. In particolare, si dirà *caratteristico* un 2q-riferimento $(q = 1, \dots, n)$ costituito da coppie di vettori $\underset{t}{R}\,\underset{t}{\widetilde{R}}$ $(t = 1, \dots, q)$ (n. 4).

Le relazioni:

$$\underset{j}{M} \times \underset{h}{M} = \delta_{jh} \qquad (j, h = 1, \dots, k) \tag{13}$$

$$\underset{r}{R} \times \underset{s}{R} = \delta_{rs} \quad , \quad \underset{r}{R} \times \underset{s}{\widetilde{R}} = 0 \qquad (r, s = 1, \dots, q) \tag{14}$$

sono condizioni necessarie e sufficienti perché i vettori $\underset{1}{M}$ ed i vettori $\underset{t}{R}, \underset{t}{\widetilde{R}}$ costituiscano risp. un k-riferimento ed un 2q-riferimento caratteristico.

Utile per il seguito è l'osservazione: ([19]):

O_1 — *Un* $\mathcal{R}_{2q}$ *caratteristico* $(q = 1, \dots, n)$ *definisce un* E_{2q} *caratteristico. Inversamente, entro un* E_{2q} *caratteristico, esistono* ∞^{q^2} $\mathcal{R}_{2q}$ *caratteristici.*

La parte diretta si prova subito analiticamente. Per la parte inversa non v'è che da ripetere il ragionamento sviluppato per stabilire la proprietà del n. 4. Occorre soltanto scegliere i vettori $\underset{t}{R}$ $(t = 1, \dots, q)$ unitari e valutare il grado di arbitrarietà della costruzione.

Infine, uno spazio caratteristico di dimensione 2q con l'orientazione definita da un $\mathcal{R}_{2q}$ caratteristico si dice *orientato positivamente.*

6. — Risultati preliminari. — La trasformazione J (n. 4) permette di dare una caratterizzazione geometrica degli spazi caratteristici e degli spazi a prodotto hermitiano reale (n. 3). Precisamente:

T_1 — *Uno spazio* E_{2q} $(q = 1, \dots, n)$ *è caratteristico, se e solo se risulta unito nella trasformazione* J; *cioè*: $E_{2q} \equiv \widetilde{E}_{2q}$.

([18]) L'ultimo passo è ovvia conseguenza della definizione di spazio caratteristico.

([19]) Essa giustifica la denominazione di riferimento caratteristico. Un esempio di 2n-riferimento caratteristico è dato, nel caso della metrica $ds^2 = \Sigma\, dz^p\, d\bar{z}^p = \Sigma\, dx^j\, dx^j$ dai versori degli assi di E_{2n}, che corrispondono alle linee coordinate x^p, x^{n+p} $(p = 1, \dots, n)$ uscenti da O.

T_2 — *Uno spazio* E_k $(k = 1, \dots, n)$ *è p.h.r. se e solo se è ortogonale (in senso stretto* ([20])) *allo spazio* $\widetilde{E}_k$.

Per la parte diretta di T_1 si noti che, se R è un qualunque vettore di E_{2q}, $\widetilde{R}$ appartiene ad $\widetilde{E}_{2q}$ e cioè, in virtù dell'ipotesi, ad E_{2q}. La proprietà P_1 del n. 4 prova l'asserto.

Inversamente, si consideri nell'E_{2q} caratteristico un riferimento caratteristico $\underset{t}{R}\,\underset{t}{\widetilde{R}}$ $(t = 1, \dots, q)$ (O_1, n. 5). Lo spazio $\widetilde{E}_{2q}$ è definito dalle coppie $\underset{t}{\widetilde{R}}\,\underset{t}{\widetilde{R}}$. Dalla (9) del n. 4 segue subito: $\underset{t}{R}, \underset{t}{\widetilde{R}} = \underset{t}{\widetilde{R}}, -\underset{t}{\widetilde{R}} = \underset{t}{R}, \underset{t}{\widetilde{R}}$ $(t = 1, \dots, q)$, onde $\widetilde{E}_{2q} \equiv E_{2q}$ ([21]).

Per stabilire T_2, si considerino due vettori M, N qualunque di E_k. Il vettore $\widetilde{N}$ appartiene ad E_k, onde, per l'ipotesi di ortogonalità di E_k, $\widetilde{E}_k$, è $M \times \widetilde{N} = 0$. La proprietà P_2 del n. 4 prova la parte diretta.

Inversamente, sia $\underset{1}{R}, \dots, \underset{k}{R}$ un k-riferimento in E_k. In corrispondenza, i vettori $\underset{1}{\widetilde{R}}, \dots, \underset{k}{\widetilde{R}}$ costituiscono un k-riferimento in $\widetilde{E}_k$. Dall'ipotesi, tenuto conto della proprietà P_2 del n. 4, risulta:

$$\underset{r}{R} \times \underset{s}{\widetilde{R}} = 0 \qquad (r, s = 1, \dots, k)$$

e di qui l'asserto.

Per il seguito conviene osservare che ad ogni spazio lineare per O E_k $(k = 1, \dots, 2n)$ può essere associato lo spazio congiungente E_k ed $\widetilde{E}_k$, denotato con $(E_k, \widetilde{E}_k)$. Se $\underset{1}{M}, \dots, \underset{k}{M}$ è un k-riferimento in E_k, le coppie $\underset{j}{M}, \underset{j}{\widetilde{M}}$ $(j = 1, \dots, k)$ determinano $(E_k, \widetilde{E}_k)$. In virtù della P_1 lo spazio $(E_k, \widetilde{E}_k)$ risulta caratteristico; la sua dimensione è quindi un numero pari compreso tra k e 2k ([22]).

7. — Ciò premesso, sussistono i lemmi:

L_1 — *Per un* E_q $(q = 1, \dots, n)$ *a prodotto hermitiano reale passa uno ed un solo* E_{2q} *caratteristico.*

L_2 — *Entro un* E_{2q-1} $(q = 1, \dots, n)$ *esiste sempre un* E_q *a prodotto hermitiano reale.*

La dimostrazione di L_1 è semplice. Si consideri lo spazio congiungente $(E_q, \widetilde{E}_q)$. Come si è già notato, esso è caratteristico; inoltre, in virtù della ipotesi su E_q e del teor. T_2 la sua dimensione è 2q. Ogni E_{2q} caratteristico passante per E_q deve contenere, per il teor. T_1, oltre ad E_q anche $\widetilde{E}_q$, onde coincide necessariamente con $(E_q, \widetilde{E}_q)$.

La dimostrazione di L_2 si ottiene per induzione tra $q - 1$ e q, dopo aver osservato che, per $q = 1$, L_2 è banale. Infatti, se $q = 1$, per ogni vettore vale la $(11)_2$, onde dalla P_2 del n. 4 segue che ogni E_1 è p.h.r.

([20]) Ogni retta di E_k è ortogonale ad ogni retta di $\widetilde{E}_k$.

([21]) Se si prescinde dalle orientazioni di E_{2q}, $\widetilde{E}_{2q}$, il risultato può ottenersi più rapidamente, facendo uso della proprietà P_1 del n. 4.

([22]) L'operazione che conduce da E_k ad $(E_k, \widetilde{E}_k)$ si dice talora *complessificazione* di E_k. Geometricamente, $k + 1$ punti indipendenti di E_k in E_{2n} danno luogo in $\mathcal{C}_n$ a $k + 1$ punti complessi (non necessariamente indipendenti nel campo complesso) e quindi ad un $\mathcal{C}_s$ complesso, la cui immagine reale è $E_{2s} = (E_k, \widetilde{E}_k)$.

Entro E_{2q-1} si consideri un qualunque E_{2q-3} per O, il quale, per ipotesi, contiene un E_{q-1} p.h.r.; sia $\underset{1}{M}, \ldots, \underset{q-1}{M}$ un $(q-1)$-riferimento in E_{q-1}.

Introdotti poi gli spazi congiungenti $E_{2s} = (E_{2q-1}, \widetilde{E}_{2q-1})$, $E_{2t} = (E_{q-1}, \widetilde{E}_{q-1})$, in virtù del teor. T_2 è $t = q - 1$.

Si determini ora in E_{2s} l'intersezione dell'E_{2q-1} originario con lo spazio $E_{2s-2(q-1)}$, ortogonale in E_{2s} ad $(E_{q-1}, \widetilde{E}_{q-1})$. È:

$$2q - 1 + 2s - 2(q-1) = c + i$$

c ed i denotando risp. le dimensioni dello spazio congiungente e dello spazio intersezione di E_{2q-1} e $E_{2s-2(q-1)}$.

Poiché $c \leqslant 2s$, risulta $i \geqslant 1$; esiste quindi in E_{2q-1} un vettore unitario $\underset{q}{M}$ ortogonale a ciascuno dei vettori $\underset{1}{M}, \ldots, \underset{q-1}{M}, \underset{1}{\widetilde{M}}, \ldots, \underset{q-1}{\widetilde{M}}$.

Dalla (10) e dalla P_2 del n. 4 scende infine la conclusione: il q-riferimento $\underset{1}{M}, \ldots, \underset{q}{M}$ determina in E_{2q-1} un E_q a prodotto hermitiano reale. È così dimostrato L_2.

Conviene ancora segnalare che, per $q = 1$, il lemma L_1 si riduce alla nota proposizione: per una retta passa uno ed un solo piano caratteristico ([22]). Infatti, come già si è notato, ogni E_1 è p.h.r.. È bene anche osservare che, nel caso $q > 1$, se non si suppone E_q a prodotto hermitiano reale, l'unicità dell'E_{2q} caratteristico viene a mancare. Così accade p. es. per un E_q (q pari) caratteristico.

8. — Teorema di invarianza. — Si considerino in E_{2n} due arbitrari riferimenti caratteristici 2n-dimensionali $\mathcal{R}_{2n}, \mathcal{R}'_{2n}$, definiti risp. dalle coppie di vettori $\underset{t}{R}, \underset{t}{R}$; $\underset{t}{\widetilde{R}'}, \underset{t}{\widetilde{R}'}$ $(t = 1, \ldots, n)$. Siano inoltre $E_{2q}^{(p_1 \ldots p_q)}$, $'E_{2q}^{(p_1 \ldots p_q)}$ $(q = 1, \ldots, n)$ $(p_s = 1, \ldots, n;\ p_1 < p_2 < \ldots < p_q)$ gli spazi caratteristici 2q-dimensionali definiti risp. dalle coppie di vettori $\underset{p_s}{R}, \underset{p_s}{\widetilde{R}}$; $\underset{p_s}{R'}, \underset{p_s}{\widetilde{R}'}$ $(s = 1, \ldots, q)$. Brevemente $E_{2q}^{(p_1 \ldots p_q)}$, $'E_{2q}^{(p_1 \ldots p_q)}$ sono i 2q-spazi caratteristici *appartenenti* risp. ai riferimenti $\mathcal{R}_{2n}, \mathcal{R}'_{2n}$.

Ciò premesso, sussiste il teorema:

T_3 — *Per ogni* E_{2q} *di* E_{2n} *vale la relazione*:

$$\sum \cos E_{2q}\, E_{2q}^{(p_1 \ldots p_q)} = \sum \cos E_{2q}\, {}'E_{2q}^{(p_1 \ldots p_q)} \tag{15}$$

le somme essendo estese alle combinazioni ordinate $p_1 \ldots p_q$ *degli interi* $1, \ldots, n$.

Segue immediatamente l'osservazione:

O_2 — *L'espressione*:

$$K = \sum \cos E_{2q}\, E_{2q}^{(p_1 \ldots p_q)} \tag{14}$$

non dipende dal 2n-riferimento caratteristico $\mathcal{R}_{2n}$. K *è dunque un invariante di* E_{2q}.

([22]) Ved. p. es. B. Segre, [9], p. 354.

9. — Dimostrazione. — Tenuto conto delle condizioni (14) e della (9), tra i vettori che costituiscono i riferimenti caratteristici $\mathcal{R}_{2n}$, $\mathcal{R}'_{2n}$ (n. 5) sussistono le relazioni [24].

$$\underset{t}{R'} = a^w_t \underset{w}{R} + \widetilde{a}^w_t \underset{w}{\widetilde{R}} \quad ; \quad \underset{t}{\widetilde{R}'} = -\widetilde{a}^w_t \underset{w}{R} + a^w_t \underset{w}{\widetilde{R}} \tag{17}$$

$(t, w = 1, \ldots, n)$, con le a^w_t, $\widetilde{a}^w_t$ soddisfacenti alle:

$$\sum_w S^w_{rs} = \sum_w a^w_r a^w_s + \widetilde{a}^w_r \widetilde{a}^w_s = \delta_{rs} \quad ; \quad \sum_w D^w_{rs} = \sum_w a^w_r \widetilde{a}^w_s - \widetilde{a}^w_r a^w_s = 0 \,. \tag{18}$$

$(r, s = 1, \ldots, n)$.

Sia poi $\underset{1}{M}, \ldots, \underset{2q}{M}$ un 2q-riferimento per E_{2q}. Risulta:

$$\underset{j}{M} = m^w_j \underset{w}{R} + \widetilde{m}^w_j \underset{w}{\widetilde{R}} = {}'m^t_j \underset{t}{R'} + {}'\widetilde{m}^t_j \underset{t}{\widetilde{R}'} \qquad (j = 1, \ldots, 2q \tag{19}$$

con m^w_j, $\widetilde{m}^w_j$, ${}'m^t_j$, ${}'\widetilde{m}^t_j$ sodisfacenti alla:

$$\sum_w m^w_h m^w_k + \widetilde{m}^w_h \widetilde{m}^w_k = \sum_t {}'m^t_h {}'m^t_k + {}'\widetilde{m}^t_h {}'\widetilde{m}^t_k = \delta_{hk} \tag{20}$$

$(h, k = 1, \ldots, 2q)$ a causa delle (13).

Dalla (19), in virtù delle (17), (14), si ha subito:

$$m^w_j = {}'m^t_j a^w_t - {}'\widetilde{m}^t_j a^w_t \quad ; \quad \widetilde{m}^w_j = {}'m^t_j \widetilde{a}^w_t + {}'\widetilde{m}^t_j a^w_t \tag{21}$$

$(j = 1, \ldots, 2q \; ; \; w = 1, \ldots, n)$.

Siano ora ρ, $\rho^{(p_1 \ldots p_q)}$ i 2q-vettori (n. 2) definiti dai 2q-riferimenti introdotti risp. per E_{2q}, $E^{(p_1 \ldots p_q)}_{2q}$. Tenuto conto della definizione di angolo tra spazi lineari (n. 3), dell'osservazione alla fine del n. 2 e della (7), è:

$$\cos E_{2q} E^{(p_1 \ldots p_q)}_{2q} = \cos \rho \, \rho^{(p_1 \ldots p_q)}_{2q} = \rho \times \rho^{(p_1 \ldots p_q)} \tag{22}$$

D'altra parte, dalle (19), (14) segue:

$$\underset{j}{M} \times \underset{p}{R} = m^p_j \quad ; \quad \underset{j}{M} \times \underset{p}{\widetilde{R}} = \widetilde{m}^p_j \qquad (j = 1, \ldots, 2q \; ; \; p = 1, \ldots, n)$$

Quindi, in virtù della (5) si ottiene:

$$\rho \times \rho^{(p_1 \ldots p_q)} = \begin{vmatrix} \underset{1}{M} \times \underset{p_1}{R} & \underset{1}{M} \times \underset{p_1}{\widetilde{R}} \ldots \underset{1}{M} \times \underset{p_q}{R} & \underset{1}{M} \times \underset{p_q}{\widetilde{R}} \\ \cdot & \cdot \quad \ldots \quad \cdot & \cdot \\ \underset{2q}{M} \times \underset{p_1}{R} & \underset{2q}{M} \times \underset{p_1}{\widetilde{R}} \ldots \underset{2q}{M} \times \underset{p_q}{R} & \underset{2q}{M} \times \underset{p_q}{\widetilde{R}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m^{p_1}_1 & \widetilde{m}^{p_1}_1 & \ldots & m^{p_q}_1 & \widetilde{m}^{p_q}_1 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ m^{p_1}_{2q} & \widetilde{m}^{p_1}_{2q} & \ldots & m^{p_q}_{2q} & \widetilde{m}^{p_q}_{2q} \end{vmatrix} \tag{23}$$

---

[24] Qui e nel seguito è adottata la convenzione di somma rispetto agli indici ripetuti risp. in alto e in basso.

Introdotti poi i simboli:

$$(24) \qquad \triangle^{rs}_{hk} = \begin{vmatrix} m^r_h & \widetilde{m}^s_h \\ m^r_k & \widetilde{m}^s_k \end{vmatrix} \quad ; \quad \overset{*}{\triangle}{}^{rs}_{hk} = \begin{vmatrix} m^r_h & \widetilde{m}^s_h \\ \widetilde{m}^r_k & m^s_k \end{vmatrix} ,$$

dalle (22), (23) scende:

$$(25) \qquad \cos E_{2q} \; E^{(p_1 \dots p_q)}_{2q} = \frac{1}{2^q} e^{r_1 s_1 \dots r_q s_q} \triangle^{p_1 p_1}_{r_1 s_1} \dots \triangle^{p_q p_q}_{r_q s_q} .$$

Formule del tutto analoghe alle precedenti sussistono in relazione al 2n-riferimento caratteristico $\mathcal{R}'_{2n}$.

Denotate risp. con $'\triangle^{rs}_{hk}$, $'\overset{*}{\triangle}{}^{rs}_{hk}$ le espressioni nelle $'m^t_j$, $'\widetilde{m}^t_j$ che corrispondono alle espressioni $\triangle^{rs}_{hk}$, $\overset{*}{\triangle}{}^{rs}_{hk}$ della (24), in virtù della (21) si perviene alla:

$$(26) \qquad \triangle^{pp}_{hk} = {}'\triangle^{rs}_{hk} S^p_{rs} + {}'\overset{*}{\triangle}{}^{rs}_{hk} D^p_{rs}$$

$(p, r, s = 1, \dots, n \; ; \; h, k = 1, \dots, 2q)$ con S^p_{rs}, D^p_{rs} definite dalla (18). Dalle (26), (18) segue ancora:

$$(27) \qquad \sum_p^{1 \dots n} \triangle^{pp}_{rs} = \sum_p^{1 \dots n} {}'\triangle^{pp}_{rs} \qquad (r, s = 1, \dots, n)$$

Infine, sommando membro a membro nella (25) rispetto alle disposizioni (con ripetizione) $p_1 \dots p_q$ degli interi $1, \dots, n$ e tenendo conto della (27), si perviene alla (15) del n. 7. Come appare p. es. dalla (25), una permutazione delle $p_1 \dots p_q$ dà luogo a termini uguali; le somme nella (15) si possono quindi limitare alle combinazioni semplici ordinate $p_1 \dots p_q$. degli interi $1, \dots, n$.

È così stabilito il teor. T_2 del n. 8.

10. — Deviazione caratteristica. — Una scelta opportuna del riferimento caratteristico $\mathcal{R}_{2n}$ conduce ad un semplice significato geometrico per l'invariante K di un E_{2q}, definito dalla (16) del n. 7.

Sia E_q uno spazio q-dimensionale di E_{2q} a prodotto hermitiano reale. Il lemma L_2 del n. 7 ne assicura l'esistenza.

Si scelga poi il 2q-riferimento per E_{2q} in modo che i primi q vettori $\underset{1}{M}, \dots, \underset{q}{M}$ costituiscano un q-riferimento per l'E_q p.h.r. Dalla P_2 del n. 4 segue:

$$(28) \qquad \underset{h}{M} \times \underset{k}{M} = \delta_{hk} \quad ; \quad \underset{h}{M} \times \underset{k}{\widetilde{M}} = 0 \qquad (h, k = 1, \dots, q)$$

È ora lecito scegliere le prime q delle coppie $\underset{t}{R}$, $\underset{t}{\widetilde{R}}$ $(t = 1, \dots, n)$ che definiscono il 2n-riferimento caratteristico $\mathcal{R}_{2n}$ (n. 5), coincidenti risp. con le coppie $\underset{s}{M}$, $\underset{s}{M}$ $(s = 1, \dots, q)$; vale a dire:

$$(29) \qquad \underset{s}{R} = \underset{s}{M} \qquad (s = 1, \dots, q)$$

Ciò premesso, sia $p_1 \dots p_q$ una combinazione semplice ordinata degli interi $1, \dots, n$, diversa da $1, \dots, q$. È quindi $1 < p_1 < p_2 < \dots < p_q$; onde, per le (29), (14), è:

$$\underset{1}{M} \times \underset{p_s}{R} = \underset{1}{R} \times \underset{p_s}{R} = 0 \quad , \quad \underset{1}{M} \times \underset{p_s}{\widetilde{R}} = \underset{1}{R} \times \underset{p_s}{\widetilde{R}} = 0 \qquad (s = 1, \dots, q)$$

Dalla (23) segue ormai subito $\rho \times \rho^{(p_1 \dots p_q)} = 0$ e quindi, per la (22), $\cos E_{2q} E_{2q}^{(p_1 \dots p_q)} = 0$.

In conclusione, nelle ipotesi attuali, la somma (16) si riduce ad un solo termine:

$$K = \cos E_{2q} E_{2q}^{(1 \dots q)} \tag{30}$$

Denotato con $E_{2q}^{(E_q)}$ lo spazio caratteristico 2q-dimensionale, individuato dallo spazio E_q a prodotto hermitiano reale (lemma L_1), è immediato riconoscere che $E^{(p_1 \dots p_q)} \equiv E_{2q}^{(E_q)}$ (25). Dunque:

$$K = \cos E_{2q} E_{2q}^{(E_q)} . \tag{31}$$

Dall'osservazione O_2 del n. 8 segue infine il teorema:

T_4 — *Al variare in* E_{2q} *dello spazio a prodotto hermitiano reale* E_q *l'angolo tra* E_{2q} *e lo spazio caratteristico* $E_{2q}^{(E_q)}$, *individuato da* E_q, *non varia.*

In particolare, se E_{2q} è *caratteristico* ed orientato positivamente (n. 5), in virtù del lemma L_1 risulta $E_{2q} \equiv E_{2q}^{(E_q)}$; onde *l'angolo indicato è zero.*

Se E_{2q} non è caratteristico, si consideri il sistema $\Sigma_{E_{2q}}$ degli spazi caratteristici 2q-dimensionali, aventi con E_{2q} intersezione di dimensione massima; cioè $2q - 1$. In ogni spazio intersezione esiste, per il lemma L_2, uno spazio E_q a prodotto hermitiano reale. Ne segue, in virtù di L_1, che gli spazi caratteristici di $\Sigma_{E_{2q}}$ sono caso particolare degli spazi $E_{2q}^{(E_q)}$, che intervengono nel teor. T_4.

Sussiste perciò il teorema:

T_5 — *L'angolo tra* E_{2q} *e gli spazi caratteristici* 2q-*dimensionali, aventi intersezione di dimensione massima con* E_{2q}, *è costante.*

Le osservazioni precedenti suggeriscono per l'angolo, di cui ai teor. T_4 e T_5, la denominazione di *deviazione caratteristica* $\delta_{E_{2q}}$ *di* E_{2q} (26).

Il significato geometrico dell'invariante K appare dalla *relazione*:

$$K = \cos \delta_{E_{2q}} , \tag{32}$$

che scende dalla (31).

---

(25) Basta notare che $E_{2q}^{(1 \dots q)}$, definito dalle coppie $\underset{s}{R}, \underset{s}{\widetilde{R}} = \underset{s}{M}, \underset{s}{\widetilde{M}}$ $(s = 1, \dots, q)$, passa per l'E_q p.h.r. e tener conto del lemma L_1.

(26) La nozione di *deviazione caratteristica* di una faccetta piana è stata introdotta per la prima volta in G. B. Rizza, [7], p. 665.

11. — È utile nel seguito una espressione della deviazione caratteristica $\delta_{E_{2q}}$ di E_{2q} mediante i vettori del 2q-riferimento relativo ad E_{2q} considerato al n. 10.

Tenuto conto delle (29), (28), si prova l'uguaglianza:

$$(33)\qquad \begin{vmatrix} \underset{1}{M} \times \underset{1}{R} & \underset{1}{M} \times \underset{1}{\widetilde{R}} & \dots & \underset{1}{M} \times \underset{q}{R} & \underset{1}{M} \times \underset{q}{\widetilde{R}} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \underset{2q}{M} \times \underset{1}{R} & \underset{2q}{M} \times \underset{1}{\widetilde{R}} & \dots & \underset{2q}{M} \times \underset{q}{R} & \underset{2q}{M} \times \underset{q}{\widetilde{R}} \end{vmatrix} = (-1)^{q\frac{(q-1)}{2}} \begin{vmatrix} \underset{q+1}{M} \times \underset{1}{\widetilde{M}} & \dots & \underset{q+1}{M} \times \underset{q}{\widetilde{M}} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \underset{2q}{M} \times \underset{1}{\widetilde{M}} & \dots & \underset{2q}{M} \times \underset{q}{\widetilde{M}} \end{vmatrix}.$$

D'altra parte, dalle (32), (30), (22) segue:

$$(34)\qquad K = \cos \delta_{E_{2q}} = \rho \times \rho^{(1 \dots q)}.$$

In definitiva, dalle (34), (33), in virtù delle (23, (10), deriva la *relazione*:

$$(35)\qquad K = \cos \delta_{E_{2q}} = (-1)^{q\frac{(q+1)}{2}} \begin{vmatrix} \underset{1}{M} \times \underset{q+1}{\widetilde{M}} & \dots & \underset{1}{M} \times \underset{2q}{\widetilde{M}} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \underset{q}{M} \times \underset{q+1}{\widetilde{M}} & \dots & \underset{q}{M} \times \underset{2q}{\widetilde{M}} \end{vmatrix},$$

che può scriversi nella forma:

$$(36)\qquad K = \cos \delta_{E_{2q}} = (-1)^{q\frac{(q+1)}{2}} \delta^{s_1 \dots s_q}_{q+1 \dots 2q} (\underset{1}{M} \times \underset{s_1}{\widetilde{M}}) \dots (\underset{q}{M} \times \underset{s_q}{M}).$$

12. — La forma esterna ω. — Si consideri ora la *forma esterna*:

$$(37)\qquad \omega = i\, g_{p\bar{q}}\, dz^p \wedge dz^{\bar{q}},$$

associata alla metrica hermitiana (1) del n. 2.

Si denotino poi risp. con $\omega_{E_{2q}}$ e con $dV_{E_{2q}}$ la forma ω su E_{2q} e l'elemento di volume di E_{2q}.

Ciò premesso, in relazione al 2q-riferimento introdotto al n. 10, su E_{2q} è:

$$(38)\qquad dz^t = \underset{j}{M^t}\, d\xi^j \quad , \quad dz^{\bar{t}} = \underset{j}{M^{\bar{t}}}\, d\xi^j \qquad (t = 1, \dots, n)$$

con le ξ^j $(j = 1, \dots, 2q)$ parametri reali.

Dalle (37), (38), in virtù delle (3), (12), (13), segue:

$$(39)\qquad \omega_{E_{2q}} = i\, g_{p\bar{q}}\, \underset{h}{M^p}\, \underset{k}{M^{\bar{q}}}\, d\xi^h \wedge d\xi^k = i\, \underset{h}{M} \cdot \underset{k}{M}\, d\xi^h \wedge d\xi^k = -\frac{1}{2}\, \underset{h}{M} \times \underset{k}{\widetilde{M}}\, d\xi^h \wedge d\xi^k.$$

Di conseguenza:

$$(40)\qquad (\omega_{E_{2q}})^q = \left(-\frac{1}{2}\right)^q (\underset{h_1}{M} \times \underset{k_1}{\widetilde{M}}) \dots (\underset{h_q}{M} \times \underset{k_q}{\widetilde{M}})\, d\xi^{h_1} \wedge d\xi^{k_1} \wedge \dots \wedge d\xi^{h_q} \wedge d\xi^{k_q}$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^q e^{h_1 k_1 \dots h_q k_q} (\underset{h_1}{M} \times \underset{k_1}{M}) \dots (\underset{h_q}{M} \times \underset{k_q}{\widetilde{M}})\, d\xi^1 \wedge \dots \wedge d\xi^{2q}.$$

Fissata ora una permutazione $h_1 k_1 \dots h_q k_q$ degli interi $1, \dots, 2q$ si consideri il prodotto:

$$(14)\qquad e^{h_1 k_1 \dots h_q k_q} (\underset{h_1}{M} \times \underset{k_1}{\widetilde{M}}) \dots (\underset{h_q}{M} \times \underset{k_q}{\widetilde{M}})$$

che interviene nella (40).

Se $h_1 \leqslant q$, $k_1 \leqslant q$, esso è nullo a causa della (28). Se $h_1 > q$, $k_1 > q$, non essendovi ripetizioni in $h_1 k_1 \dots h_q k_q$, esiste necessariamente una coppia di indici h_s, k_s $(2 \leqslant s \leqslant q)$ non maggiori di q; perciò, ancora per la (28), l'espressione (41) è nulla. Se poi è $h_1 > q$, $k_1 \leqslant q$, in virtù della (10), si è ricondotti al caso del primo indice minore o uguale a q e del secondo indice maggiore di q. Analogamente si ragioni per gli altri prodotti scalari della (41).

In conclusione, si perviene alla:

$$(42)\qquad (\omega_{E_{2q}})^q = (-1)^q e^{h_1 k_1 \dots h_q k_q} (\underset{h_1}{M} \times \underset{k_1}{\widetilde{M}}) \dots (\underset{h_q}{M} \times \underset{k_q}{\widetilde{M}})\, d\xi^1 \wedge \dots \wedge d\xi^{2q}$$

ove si intende $h_s \leqslant q$, $k_s > q$ $(s = 1, \dots, q)$.

Conviene ora ordinare nella (42) i prodotti scalari secondo i valori crescenti del primo indice e notare che:

$$e^{1 s_1 \dots q s_q} = (-1)^{q \frac{(q-1)}{2}} e^{1 \dots q s_1 \dots s_q} = (-1)^{q \frac{(q-1)}{2}} \delta^{s_1 \dots s_q}_{q+1 \dots 2q}.$$

La (42) diviene:

$$(43)\qquad (\omega_{E_{2q}})^q = (-1)^{q \frac{(q+1)}{2}} q!\, \delta^{s_1 \dots s_q}_{q+1 \dots 2q} (\underset{1}{M} \times \underset{s_1}{\widetilde{M}}) \dots (\underset{q}{M} \times \underset{s_q}{\widetilde{M}})\, d\xi^1 \wedge \dots \wedge d\xi^{2q}.$$

D'altra parte, poiché i vettori $\underset{j}{M}$ $(j = 1, \dots, 2q)$ costituiscono un $2q$-riferimento in E_{2q}, le variabili reali ξ^j danno luogo su E_{2q} ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, la cui unità di misura è uguale a quella indotta su E_{2q} dalla metrica. Perciò l'elemento di volume su E_{2q} è:

$$(44)\qquad dV_{E_{2q}} = d\xi^1 \wedge \dots \wedge d\xi^{2q}.$$

Infine, tenendo conto delle (35), (44), (16), dalla (43) deriva la *relazione fondamentale* [27]:

$$(45)\qquad (\omega_{E_{2q}})^q = q!\, dV_{E_{2q}} \cos \delta_{E_{2q}} = q! \sum dV_{E_{2q}} \cos E_{2q}\, E^{(p_1 \dots p_q)}_{2q}.$$

---

[27] Il fattore $(-1)^{q \frac{(q-1)}{2}}$, che figura nella (6) del lavoro [8], è dovuto ad una diversa orientazione dei piani caratteristici del sistema $\Sigma_{E_{2q}}$ del n. 10.

Si può dire che $\frac{1}{q!}(\omega_{E_{2q}})^q$ *è la componente caratteristica dell'elemento di volume di* E_{2q}. La (45) dà quindi un significato geometrico alla forma esterna ω, considerata sugli spazi di dimensione pari.

13. — Casi particolari. — Due tipi di spazi lineari E_{2q} $(q = 1, \dots, n)$ appaiono interessanti in questa ricerca:

A) — E_{2q} *caratteristici*

B) — E_{2q} *contenenti un* E_{q+1} *a prodotto hermitiano reale.*

In generale, entro un E_{2q} esiste un E_q p.h.r. (lemma L_2); ma non un E_{q+1} p.h.r. Ad es. un E_{2q} caratteristico non è certo di tipo B. Invero, per il teor. T_1, esso dovrebbe contenere oltre all'E_{q+1} p.h.r. anche il corrispondente $\widetilde{E}_{q+1}$; ma questo è impossibile a causa dell'ortogonalità di E_{q+1} ed $\widetilde{E}_{q+1}$ (teor. T_2).

Un E_{2q} p.h.r. è ovviamente di tipo B. Ma, non appena $q \geqslant 2$, non vale il viceversa. Ciò appare subito dal confronto del teor. T_2 con la seguente caratterizzazione geometrica degli E_{2q} di tipo B.

T_4 — *Uno spazio* E_{2q} $(q = 1, \dots, n)$ *è di tipo* B, *se e solo se è ortogonale, in senso lato* [28], *allo spazio* $\widetilde{E}_{2q}$.

Nella parte diretta, per ipotesi esiste in E_{2q} un E_1 ortogonale ad $\widetilde{E}_{2q}$ [29]. D'altro canto, entro l'E_{2q-1}, ortogonale ad E_1 in E_{2q}, esiste un E_q p.h.r. (lemma L_2). Ne segue che E_1 è ortogonale ad $E_q \subset E_{2q-1}$ ed anche ad $\widetilde{E}_q \subset \widetilde{E}_{2q}$.

È ormai facile provare che lo spazio congiungente $E_{q+1} = (E_q, E_1)$, appartenente ad E_2, è a prodotto hermitiano reale. Infatti i vettori $\underset{1}{M}, \dots, \underset{q}{M}$, che costituiscono un riferimento in E_q, insieme ad un vettore unitario $\overset{q+1}{M}$ di E_1 danno luogo ad un riferimento in E_{q+1}, soddisfacente alle $\underset{h}{M} \times \underset{k}{\widetilde{M}} = 0$ $(h, k = 1, \dots, q+1)$. E_{q+1} è dunque p.h.r. in virtù della proprietà P_2 del n. 4.

Per la parte inversa, indicato con E_{q+1} lo spazio p.h.r., che per ipotesi esiste in E_{2q}, ed introdotti gli spazi congiungenti $E_{2s} = (E_{2q}, \widetilde{E}_{2q})$ $E_{2t} = (E_{q+1}, \widetilde{E}_{q+1})$, dal teor. T_2 segue $t = q + 1$.

Denotato poi con E_{2s-2q} lo spazio ortogonale ad $\widetilde{E}_{2q}$ in E_{2s} siano c ed i risp. le dimensioni dello spazio congiungente e dello spazio intersezione di E_{2s-2q} con $E_{2q+2} = (E_{q+1}, \widetilde{E}_{q+1})$. Risulta:

$$2s - 2q + 2q + 2 = c + i$$

da cui, essendo $2s \geqslant c$, segue $i \geqslant 2$.

Lo spazio intersezione E_i, appartenendo ad E_{2s-2q}, è ortogonale ad $\widetilde{E}_{2q}$ ed in particolare ad E_{q+1}. D'altra parte E_i appartiene anche ad $(E_{q+1}, \widetilde{E}_{q+1})$; per-

---

[28] Esiste in E_{2q} una retta ortogonale ad ogni retta di $\widetilde{E}_{2q}$.

[29] Nella dimostrazione di T_4 l'ortogonalità è intesa sempre in senso stretto. Per le definizioni di ortogonalità in senso stretto ed in senso lato ved. le note [26], [18].

ciò, dall'ipotesi su E_{q+1} e dal teor. T_2 deriva che E_i appartiene necessariamente ad E_{q+1} e quindi ad E_{2q}. In definitiva, una qualunque retta di E_i $(i \geqslant 2)$ appartiene ad E_{2q} e risulta ortogonale ad ogni retta di $\widetilde{E}_{2q}$ e ciò prova l'asserto.

Ciò premesso, si considerino i casi A e B.

Caso A : E_{2q} *caratteristici.*

Sussistono le proprietà :

A_1 — *Se* E_{2q} *è caratteristico, la deviazione caratteristica* $\delta_{E_{2q}}$ *vale* 0 *o* π, *a seconda dell'orientazione positiva o negativa di* E_{2q} ; *e viceversa.*

A_2 — *Se* E_{2q} *è caratteristico, la forma esterna* $\frac{1}{q!}\omega^q$, *considerata su* E_{2q}, *equivale all'elemento di volume di* E_2 ; *e viceversa.*

A_3 — *Se* E_{2q} *è caratteristico, l'elemento di volume di* E_{2q} *è la somma delle sue proiezioni sugli spazi caratteristici* 2q-*dimensionali appartenenti ad un* 2n-*riferimento caratteristico arbitrariamente fissato* ; *e viceversa.*

La A_1 è diretta conseguenza della definizione di deviazione caratteristica (n. 10). Dalla (45), tenuto conto della A_1, derivano le A_2, A_3, nelle quali lo spazio caratteristico E_{2q} è inteso orientato positivamente.

Caso B :

B_1 — *Se* E_{2q} *è di tipo* B, *la deviazione caratteristica* $\delta_{E_{2q}}$ *vale* $\frac{\pi}{2}$ *o* $\frac{3}{2}\pi$, *in dipendenza dall'orientazione di* E_{2q} ; *e viceversa.*

B_2 — *Se* E_{2q} *è di tipo* B, *la forma esterna* $\frac{1}{q!}\omega^q$, *considerata su* E_{2q}, *è nulla ; e viceversa.*

B_3 — *Se* E_{2q} *è di tipo* B, *è nulla la somma delle proiezioni dell'elemento di volume di* E_{2q} *sugli spazi caratteristici* 2q-*dimensionali appartenenti ad un* 2n-*riferimento caratteristico arbitrariamente fissato* ; *e viceversa.*

Nella parte diretta di B_1, è lecito per ipotesi scegliere entro l'E_{q+1} p.h.r. i primi $q+1$ vettori del 2q-riferimento relativo ad E_{2q}. Risultano allora nulli gli elementi della prima colonna del determinante della (35) e da ciò segue l'asserto.

Nella parte inversa, scelti entro E_q p.h.r. i primi q vettori del 2q-riferimento relativo ad E_{2q} (lemma L_2) è per ipotesi nullo il determinante della (35). Ne derivano le relazioni :

$$\mu^t \underset{t}{M} \times \underset{q+s}{\widetilde{M}} = 0 \qquad (s = 1, \dots, q)$$

In definitiva, il vettore $\mu^t \underset{t}{M}$ appartiene ad E_{2q} ed è ortogonale allo spazio $\widetilde{E}_{2q}$; da ciò segue l'asserto in virtù del teor. T_6.

Le proprietà B_2 , B_3 seguono poi subito da B_1, tenuto conto della relazione (45).

14. — Osservazioni.

Ω_1 — Poiché la forma (1), che dà la metrica su V_{2n}, è definita positiva, è $|\cos \delta_{E_{2q}}| \leqslant 1$. Perciò, dalla (45) derivano le *disuguaglianze*:

$$-dV_{E_{2q}} \leqslant \sum dV_{E_{2q}} \cos E_{2q} E_{2q}^{(p_1 \cdots p_q)} \leqslant dV_{E_{2q}} ,$$

$$-dV_{E_{2q}} \leqslant \frac{1}{q!} (\omega_{E_{2q}})^q \leqslant dV_{E_{2q}} ,$$

che sussistono per ogni E_{2q} ed in relazione ad un arbitrario 2n-riferimento caratteristico di E_{2n}.

Le proprietà A_3, A_2 del n. 13 precisano che i valori estremi sono raggiunti se e solo se E_{2q} è caratteristico.

Nell'ipotesi che la metrica si riduca a $ds^2 = \sum dz^p \, dz^{\bar{p}} = \sum dx^j \, dx^j$ e che il 2n-riferimento caratteristico sia quello costituito dai versori degli assi di E_{2n} (nota ([19]), n. 5), la prima disuguaglianza è già in W. Wirtinger ([30]) e la seconda esprime in termini locali un teorema dello stesso Autore ([31]).

Ω_2 — Il problema del significato geometrico della forma esterna ω, associata alla metrica hermitiana definita positiva, completamente risolto al n. 12 per gli spazi di dimensione $2q$ $(q = 1, \ldots, n)$, è stato originariamente posto da E. Martinelli nel caso $q = 1$ e da lui stesso risolto per gli E_2 caratteristici ([32]).

Roma - Istituto Matematico «Guido Castelnuovo» dell'Università.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. Cartan, *Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann*, 2me ed., Gauthier-Villars, Paris (1951).

[2] B. Eckmann, *Cours sur les variétés complexes*, Centro Internazionale Matematico Estivo (1956).

[3] A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Consiglio Nazionale Ricerche, Cremonese, Roma, (1955).

[4] E. Martinelli, *Studio di alcune questioni della teoria delle funzioni biarmoniche ecc.*, Atti Accademia Italia, 12, (1941).

[5] E. Martinelli, *Punti di vista geometrici nello studio delle varietà a struttura complessa*, Centro Internazionale Matematico Estivo, (1956).

[6] E. Martinelli, *Sulle varietà a struttura complessa*, Ann. di Mat., 6, 43, (1957).

[7] G. B. Rizza, *Deviazione caratteristica delle faccette piane di una varietà a struttura complessa*, Rend. Lincei, 8, 24, (1958).

[8] G. B. Rizza, *Holomorphic deviation for the 2q-dimensional sections of complex analytic manifolds*, Archiv der Math., 10, (1959).

[9] B. Segre, *Forme differenziali e loro integrali*, I, Docet, Roma, (1951).

[10] W. Wirtinger, *Eine Determinantenidentität und ihre Anwendung auf analytische Gebilde in Euclidischer und Hermitescher Massbestimmung*, Monatshefte f. Math. u. Phys., 44, (1936).

[11] K. Yano-S. Bochner, *Curvature and Betti numbers*, Ann. of Math. Studies, n. 32, Princeton Univ. Press, (1953).

([30]) W. Wirtinger, [10], p. 347. Ved. anche B. Segre, [9], Teor. II, p. 366.

([31]) W. Wirtinger, [10], p. 351.

([32]) E. Martinelli, [5], p. 17.