ALDO ANDREOTTI

Sopra le varietà di Picard di una superficie algebrica (*)

Data una superficie algebrica F d'irregolarità $q > o$ si possano associare ad F due varietà di Picard di dimensione q. L'una, alla maniera di SEVERI (¹), è la varietà di Picard corrispondente alla matrice di Riemann dei periodi degli integrali semplici di prima specie di F; la indicheremo con V_q. L'altra alla maniera di CASTELNUOVO (²) è la varietà imagine dei sistemi lineari d'un sistema continuo ∞^q di F; la indicheremo con V'_q.

In questo lavoro ci occupiamo di stabilire la relazione che intercede fra V_q e V'_q. Proveremo che V'_q non è altro che la varietà imagine dei sistemi continui di ∞^q sistemi lineari di ipersuperficie di V_q. Queste due varietà coincidono sempre se i divisori della matrice di Riemann corrispondete a V_q sono tutti uguali ad uno. Negli altri casi V_q e V'_q coincidono solo se detta matrice ammette moltiplicazione complessa.

La memoria è divisa in due parti. Nella prima si studia la relazione intercedente fra una varietà di Picard e la sua varietà di Picard dei sistemi continui. Nella seconda si stabilisce il teorema testè enunciato per le due varietà di Picard di una superficie algebrica.

Di questa e di una memoria che seguirà sulla classificazione delle superficie irregolari ne è già stata data notizia in una nota riassuntiva presentata all'Accademia dei Lincei, che può considerarsi come l'introduzione a questi due lavori.

Il problema di cui ci occupiamo trovasi già chiaramente formulato nella nota citata di SEVERI.

PARTE I.

I sistemi continui d'ipersuperficie sopra una varietà di Picard.

1. - *La varietà dei sistemi continui d'una varietà di Picard.* — Sia data una varietà di Picard V_p a p dimensioni, relativa al corpo di funzioni abeliane definito dalla matrice di RIEMANN, ridotta a forma normale:

(*) Presentata dall'Accademico FRANCESCO SEVERI.

(¹) SEVERI, *Un teorema d'inversione per gli integrali semplici di prima specie appartenenti ad una superficie algebrica.* Atti del R. Istituto Veneto, t. 72, pagg. 765-772 (1913).

(²) CASTELNUOVO, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare.* Rend. Accad. Lincei, s. 5, t. 14, tre note (1905); vedi anche Memorie scelte, Zanichelli, Bologna, pagg. 473-500 (1937).

$$(1) \qquad \Omega = (\omega_{hk}) = \begin{pmatrix} \frac{\pi i}{\delta_1} \dots 0 & a_{11} \dots a_{1p} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ 0 \dots \frac{\pi i}{\delta_p} & a_{p1} \dots a_{pp} \end{pmatrix} \quad a_{rs} = a_{sr}$$

essendo $-\Sigma_h \delta_h (x_h y_{p+h} - x_{p+h} y_h)$ la forma principale della matrice [3]. Cominciamo a dimostrare che:

Ogni varietà algebrica W_{p-1} *a* p-1 *dimensioni, contenuta in* V_p, *di grado virtuale positivo, definisce un sistema irriducibile completo* $\{|W_{p+1}|\}$ *di* ∞^p *sistemi lineari; la varietà* V'_p *i cui punti rappresentano i sistemi lineari di* $\{|W_{p+1}|\}$ *è una varietà di Picard e risulta indipendente (rispetto al gruppo delle trasformazioni birazionali) dalla* W_{p-1} *di grado virtuale positivo scelta per costruirla.*

All'uopo osserviamo che, in virtù del teorema di APPEL-HUMBERT la W_{p-1} considerata si rappresenta completamente annullando una funzione intermediaria $\varphi(u)$. Per l'ipotesi che la W_{p-1} abbia grado virtuale positivo segue che $\varphi(u)$ è una funzione intermediaria *non degenere*. Sia invero, $\psi(u)$ una funzione intermediaria non degenere e Z_{p-1} la varietà algebrica a p-1 dimensioni di V_p luogo degli zeri di $\psi(u)$. Per l abbastanza alto $\varphi(u)\psi^l(u)$ è una funzione intermediaria non degenere. Indicando infatti con λ_{sk}, μ_{sk} i periodi di seconda specie di $\varphi(u)$, $\psi(u)$ rispettivamente, quelli di $\varphi(u)\psi^l(u)$ risultano uguali a $\lambda_{sk} + l\mu_{sk}$ ($s=1, \dots, p$; $k=1, \dots, 2p$) e il determinante di quest'ultima funzione intermediaria risulta uguale ad un polinomio di grado p in l con il coefficiente di l^p uguale al determinante [4] di $\psi(u)$:

$$\mathrm{Det}\,[\varphi(u)\,\psi^l(u)] = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} \omega_{sk} \\ \lambda_{sk} + l\mu_{sk} \end{pmatrix} = l^p\,\mathrm{Det}\,[\psi(u)] + \dots + \mathrm{Det}\,[\varphi(u)]$$

Poichè per ipotesi $\mathrm{Det}[\psi(u)] \neq 0$, per l abbastanza alto $\mathrm{Det}[\varphi(u)\,\psi^l(u)]$ è $\neq 0$ e $\varphi(u)\,\psi^l(u)$ è non degenere, sicchè vale anche per infiniti valori di l, e perciò per ogni l, l'identità:

$$p!\ \mathrm{Det}[\varphi(u)\psi^l(u)] = [W + lZ,\ W + lZ, \dots,\ W + lZ]$$

Di qui risulta che $p!\ \mathrm{Det}[\varphi(u)]$ uguaglia il grado virtuale di W. E' dunque $\mathrm{Det}[\varphi(u)] \neq 0$, cioè $\varphi(u)$ è non degenere.

Da ciò consegue che la W_{p-1} individua un sistema ∞^p irriducibile di sistemi lineari $\{|W_{p-1}|\}$ [5].

Che poi questo sistema risulti rappresentato da una V'_p di Picard la quale non dipenda più dalla W_{p-1} impiegata per costruirla discende da un teorema stabilito da

(3) Opere da consultare sull'argomento: CONFORTO, *Funzioni abeliane e matrici di Riemann*, ed. Libreria dell'Università di Roma (1942); LEFSCHETZ, *L'analysis situs et la géométrie algébrique*, ed. Gauthier-Villars, Paris, Cap. 6 (1924); SIEGEL, *Analytic functions of several complex variables*, litografie dell'Institute for advanced study, Princeton (1949).

(4) CONFORTO, loc. cit. in (3), pag. 76.

(5) CONFORTO, loc. cit. in (3), pag. 232.

Severi (6) il quale mostra in sostanza che se sopra una varietà algebrica d'irregolarità superficiale p si considerano due sistemi irriducibili $\{|A|\}$, $\{|B|\}$ d'∞^p sistemi lineari di ipersuperficie l'operazione $+ B_1 - B_2$, essendo B_1, B_2 una coppia qualsiasi di varietà B, applicata ad una qualunque A conduce sempre ad un sistema lineare di varietà effettive (7).

La varietà V'_p che resta pertanto associata a V_p la chiameremo *la varietà di Picard dei sistemi continui di* V_p.

2\. - *Relazione fra una varietà di Picard e la sua varietà dei sistemi continui.* — Fatte queste premesse vogliamo stabilire che relazione intercede fra le due varietà di Picard V_p e V'_p. Torna utile al nostro scopo il lemma seguente:

Se è data una funzione intermediaria non degenere, e possiamo senz'altro supporre sia una funzione $\Theta(u)$ d'ordine $l\delta_p$, *condizione necessaria e sufficiente perchè per due distinte p-ple di valori*

$$c^1 = \begin{pmatrix} c^1_1 \\ \vdots \\ c^1_p \end{pmatrix} \quad ; \quad c^2 = \begin{pmatrix} c^2_1 \\ \vdots \\ c^2_p \end{pmatrix}$$

delle componenti del vettore c, le varietà W_{p-1} *di zeri di* $\Theta(u+c)$ *risultino linearmente equivalenti su* V_p *è che valgano le congruenze:*

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} c^1_h - c^2_h \equiv \dfrac{m_h \pi i + \sum_1^p k_s \delta_s a_{sh}}{l\delta_p} \qquad \text{mod } \Omega \\ h = 1, \ldots, p \end{array} \right.$$

essendo m_h, k_s interi (8).

La condizione è *necessaria*. Supponiamo, per semplicità di discorso $c^1 = 0$ e poniamo $c^2 = c$. Se allora $\Theta_{l\delta_p}(u+c) = 0$ equivale linearmente su V_p a $\Theta_{l\delta_p}(u) = 0$, deve essere,

$$(3) \qquad \Theta_{l\delta_p}(u+c) = e^{2\pi i \{\sum a_{rs} c_r u_s + \sum \nu_s u_s + \nu\}} \, \Theta^*_{l\delta_p}(u) \qquad (a_{rs} = a_{sr})$$

ove si è indicato con $\Theta^*_{l\delta_p}(u)$ una Θ dello stesso tipo di $\Theta_{l\delta_p}(u)$.

La periodicità di $\Theta_{l\delta_p}(u)$ e $\Theta^*_{l\delta_p}(u)$ rispetto ai primi p periodi della matrice (1) porta:

(6) Severi, *Sulla irregolarità superficiale d'una varietà algebrica*. Rendiconti Accad. Italia, s. 7, t. 3, pagg. 547-555 (1942).

(7) Nel caso attuale se ne può dare daltronde una verifica diretta. Infatti il sistema $|A+B|$ appartiene ancora ad un sistema continuo di ∞^q sistemi lineari. Uno qualunque $|\bar{A}+\bar{B}|$ di questi sistemi lineari contiene parzialmente ogni varietà B di $\{|B|\}$ chè, altrimenti alla generica $\bar{B}$ delle B contenute in $|\bar{A}+\bar{B}|$ dovrebbe corrispondere una infinità di sistemi $|\bar{A}|$ tali che $|\bar{A}|+|\bar{B}|=|\bar{A}+\bar{B}|$ due a due disequivalenti, dato che ogni $|A+B|$ proviene da ∞^q coppie di sistemi $|A|$ e $|B|$. Ma ciò è assurdo.

(8) Il lemma si trova già stabilito come condizione necessaria nell'op. cit. di Conforto, pag. 232.

$$\Theta_{l\delta_p}(u+c) = e^{2\pi i \left\{ \Sigma\alpha_{rs} u_r u_s + 2\Sigma\alpha_{rh} u_r \frac{\pi i}{\delta_h} + \alpha_{hh}\left(\frac{\pi i}{\delta_h}\right)^2 + \Sigma\nu_s u_s + \nu_h \frac{\pi i}{\delta_h} + \nu \right\}} \Theta^*_{l\delta_p}(u) \tag{4}$$

Confrontando la (4) colla (3) risulta dunque:

$$e^{2\pi i \left\{ 2\Sigma\alpha_{rh} u_r \frac{\pi i}{\delta_h} + \alpha_{hh}\left(\frac{\pi i}{\delta_h}\right)^2 + \nu_h \frac{\pi i}{\delta_h} \right\}} = 1$$

ossia con k_h intero opportuno, deve valere per ogni u la relazione

$$2\,\Sigma\,\alpha_{rh}\,u_r \frac{\pi i}{\delta_h} + \alpha_{hh}\left(\frac{\pi i}{\delta_h}\right)^2 + \nu_h \frac{\pi i}{\delta_h} = -\,k_h$$

Pertanto

$$\alpha_{rh} = 0 \qquad (r, h = 1, \ldots, p)$$

e quindi

$$\nu_h = -\frac{k_h \delta_h}{\pi i} \qquad (h = 1, \ldots, p)$$

La (3) si scrive pertanto nella forma:

$$\Theta_{l\delta_p}(u+c) = e^{-2\Sigma k_s \delta_s u_s + 2\pi i\nu} \Theta^*_{l\delta_p}(u) \tag{5}$$

Teniamo ora conto della pseudoperiodicita di $\Theta_{l\delta_p}(u)$ e $\Theta^*_{l\delta_p}(u)$ rispetto agli ultimi p periodi; risulta dalla (5):

$$\Theta_{l\delta_p}(u+c+a_h) = e^{-2l\delta_p(u_h+c_h) - l\delta_p a_{hh}} \Theta_{l\delta_p}(u+c) =$$

$$= e^{-2\Sigma k_s \delta_s (u_s + a_{sh}) + \pi i\nu} \cdot e^{-2l\delta_p u_h - l\delta_p a_{hh}} \Theta^*_{l\delta_p}(u)$$

Di qui si ricava:

$$e^{-2l\delta_p c_h} = e^{-2\Sigma k_s \delta_s a_{sh}}$$

ossia, con m_h intero opportuno

$$l\delta_p c_h = \Sigma k_s \delta_s a_{sh} + m_h \pi i$$

cioè la formula richiesta.

Proviamo che la condizione è anche *sufficiente*, cioè che per ogni c dato dalla (2) con k_s, m_h interi qualsiasi, $\Theta_{l\delta}(u+c)$ si riduce, a meno di un'esponenziale elevata ad un polinomio di secondo grado in u ad una Θ dello stesso tipo della $\Theta_{l\delta_p}(u)$.

Considieriamo infatti la funzione intermediaria:

$$\psi(u) = e^{2\Sigma k_s \delta_s u_s + \mu} \Theta_{l\delta_p}(u+c)$$

con μ dato qualsiasi.

Risulta:

$$\psi(u_1, \ldots, u_h + \frac{\pi i}{\delta_h}, \ldots, u_p) = e^{2\Sigma k_s \delta_s u_s + 2 k_h \pi i + \mu} \Theta_{l\delta_p}(u + c) = \psi(u)$$

$$\psi(u + a_h) = e^{2\Sigma k_s \delta_s (u_s + a_{sh}) + \mu} \Theta_{l\delta_p}(u + c + a_h) =$$

$$= e^{2\Sigma k_s \delta_s u_s + 2\Sigma k_s \delta_s a_{sh} + \mu} e^{-2 l\delta_p (u_h + c_h) - l\delta_p a_{hh}} \Theta_{l\delta_p}(u + c) =$$

$$= e^{-2 l\delta_p u_h - l\delta_p a_{hh}} \psi(u).$$

Ciò dimostra che $\varphi(u)$ è una Θ d'ordine $l\delta_p$ e l'asserto è provato.

3. - Ciò premesso consederiamo la varietà V'_p dei sistemi continui di V_p e imaginiamola costruita a partire dalla W_{p-1} di zero delle Θ_{δ_p} $(l = 1)$.

Dal lemma precedente, tenuto conto dell'equivalenza birazionale di V_p e del gruppo ∞^p delle sue trasformazioni di 2ª specie, consegue immediatamente che *la varietà di Picard V'_p dei sistemi continui di V_p si rapprenta su V_p mediante una involuzione d'ordine δ^2 (δ essendo il determinnante di $\Theta_{\delta_p}(u)$ cioè $\delta = \prod_1^{p-1} \frac{\delta_p}{\delta_i}$) generabile col gruppo delle trasformazioni di 2ª specicie rappresentate* al variare degli interi m e k *dalle:*

$$(6) \qquad \begin{cases} u_h(y) \equiv u_h(x) + \dfrac{1}{\delta_p} \left\{ m_h \pi i + k_1 \delta_1 a_{h1} + \ldots + k_{p-1} \delta_{p-1} a_{hp-1} \right\} \\ h = 1 \ldots\ldots p \end{cases}$$

Infatti la (6) non è che la descrizione delle (2) ove si è posto a_{hs} in luogo di a_{sh} e trascurato il termine $k_p\, a_{hp}$ che non ha effetto sulle congruenze scritte. L'ordine della involuzione si ha dal numero di sistemi di valori incongrui che possono prendere le parentesi al 2º membro e questi si ottengono tutti una sola volta, ponendo

$$m_h = 0, \ldots, \frac{\delta_p}{\delta_h} - 1\,,\ k_h = 0, \ldots, \frac{\delta_p}{\delta_h} 1 - (h = 1, \ldots,).$$

Ma si può dire di più: *Se $\delta = 1$, cioè se tutti i divisori di Ω sono uguali all'unità, V_p, V'_p sono birazionalmente equivalenti. Se $\delta > 1$ e se V_p è a moduli generali le due varietà V_p, V'_p sono birazionalmente distinte.*

Infatti se V_p è a moduli generali ogni involuzione J_α su V_p, birazionalmente equivalente a V_p medesima, si può rappresentare come una corrispondenza $(\alpha, 1)$ fra le coppie di punti (x), (y), di V_p.

Essa ha dunque equazioni trascendenti del tipo:

$$u(y) \equiv \frac{1}{\gamma}\,[u(x) + c] + \frac{1}{\gamma}\,\Omega\rho \quad \bmod \Omega \tag{7}$$

ove γ è un intero dato, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$ è un vettore pure dato, $\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_p \end{pmatrix}$ un vettore a componenti intere completamente arbitrarie.

Di qui si trae che il numero a, ordine dell'involuzione J_a è $a = \gamma^{2p}$. Se perciò δ non è uguale alla potenza p-esima di un intero γ la nostra asserzione è senz'altro provata.

Ma quand'anche si avesse $\delta = \gamma^p$ con γ intero $\neq \pm 1$ le involuzioni definite da (6) e (7) non possono ugualmente coincidere. Basta osservare che la differenza dei valori di u assunti in due punti dello stesso gruppo dell'involuzione definita dalle (7) dovrebbero in virtù della (2) essere $\equiv 0 \bmod \left(\frac{\pi i}{\delta_p}\,\mathcal{E} \,\middle|\, \frac{1}{\delta_p}\,\mathcal{A}\,\mathcal{D}\right)$:

$$\frac{1}{\gamma}\,\Omega\rho \equiv 0 \quad \bmod \left(\frac{\pi i}{\delta_p}\,\mathcal{E} \,\middle|\, \frac{1}{\delta_p}\,\mathcal{A}\,\mathcal{D}\right)$$

ove $\mathcal{E}$ è la matrice unitaria $\mathcal{A} = (a_{rs})$, $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_p \end{pmatrix}$ ove ρ è un vettore a componenti intere arbitrarie. Ciò implicherebbe l'esistenza della moltiplicazione complessa per Ω il che non è per ipotesi.

Osservazione I. — Dalle (6) risulta che la matriche di Riemann corrispondente alla varietà V'_p è equivalente nel senso di G. Scorza alla matrice $(\pi i\,\mathcal{E} \mid \mathcal{A}\,\mathcal{D})$ (*).

Perciò il problema di riconoscere quand'è che le due varietà di Picard V_p e V'_p sono birazionalmente equivalenti è ricondoto al problema aritmetico di *riconoscere l'equivalenza delle due matrici* Ω e $(\pi i\,\mathcal{E} \mid \mathcal{A}\,\mathcal{D})$.

Osservazione II. — Nell'enunciato precedente la condizione che V_p sia a moduli generali è essenziale. Per esempio la varietà di Picard che corrisponde alla matrice di periodi:

$$\begin{pmatrix} \pi i & 0 & \ldots & 0 & \tau & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{\pi i}{\delta_2} & \ldots & 0 & 0 & \frac{\tau}{\delta_2} & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{\pi i}{\delta_p} & 0 & 0 & \ldots & \frac{\tau}{\delta_p} \end{pmatrix}$$

($\tau = \tau' + i\tau''$ con $\tau' < 0$) è la stessa di quella che si ottiene facendo i δ_i tutti uguali ad uno e perciò coincide colla varietà dei sistemi continui. Ciò d'altronde è evidente a priori se si pensa che V_p è la varietà prodotto di p curve ellittiche birazionalmente identiche.

(*) Vedi Conforto, loc. cit. in (*), pag. 27.

PARTE II.

Le varietà di Picard di una superficie algebrica.

4. - Ci proponiamo di dimostrare il seguente teorema: *La varietà di* PICARD V'_q *costruita alla maniera di* CASTELNUOVO F *d'irregolarità* $q > 0$, *è la varietà imagine dei sistemi continui di sistemi lineari d'ipersuperficie sulla varietà di* PICARD V_q *costruita alla maniera di* SEVERI.

Ecco la dimostrazione: Indichiamo con un $u_1, \ldots, u_q$ q integrali semplici di prima specie di F e supponiamo che la matrice dei periodi Ω sia ridotta alla forma canonica (1) $(p = q)$. Sia inoltre $\Sigma = \{C\}$ un sistema continuo ∞^q di curve due a due linearmente disequivalenti (ciò che può ottenerersi imponendo per esempio un conveniente numero di punti base alle curve di un sistema completo di ∞^q sistemi lineari). La varietà V_q è pertanto la varietà di Picard relativa alla matrice Ω; la varietà V'_q è la imagine del sistema Σ, alla curva generica di Σ corrispondendo un punto di V_q e viceversa.

Consideriamo il multiplo δ_q C della curva C variabile entro Σ. Si può considerare V'_q come imagine altresì del sistema di curve δ_q C. Tuttavia bisogna ricordare che essendo V'_q la varietà dei sistemi continui di sistemi lineari ad punto generico di V'_p non corrisponderà più una sola curva δ_q C ma bensì il gruppo di tutte le curve δ_q C equivalenti all'una di esse; gruppo d'un numero finito di curve in virtù del teorema di ABEL per le superficie algebriche (10).

Sia D una sezione iperpiana generica di F e consideriamo i gruppi di punti staccati dalle curve δ_q C sopra D. Siamo $\delta_q C_1$, $\delta_q C_2$ due di queste curve, e indichiamo con $u_h(C_1)$, $u_h(C_2)$ le somme dei valori assunti dall'integrale u_h nei punti del gruppo (C_1, D) o (C_2, D) rispettivamente.

5. - Ciò posto dimostriamo il lemma seguente, precisazione d'un criterio d'equivalenza dovuto a SEVERI (11):

Condizione necessaria e sufficiente perchè le due curve $\delta_q C_1$, $\delta_q C_2$ *siano linearmente equivalenti è che sussistano le congruenze:*

$$(8) \qquad u_h(C_2) - u_h(C_1) \equiv \frac{m_h \pi i + \Sigma_s k_s \delta_s a_{sh}}{\delta_q} \qquad \text{mod. } \Omega$$

La condizione è *necessaria*. Sia R(x) una funzione razionale su F, avente come curva totale di poli $\delta_q C_1$ e come curva totale di zeri $\delta_q C_2$. Allora Log R(x) è un integrale semplice di terza specie colle curve logaritmiche $\delta_q C_1$ e $\delta_q C_2$.

(10) SEVERI, *Il teorema di Abel sulle superficie algebriche*. Annali di Matematica, s. 3, t. 12, pagg. 55-79, (1905).

(11) SEVERI, *Intorno al teorema di Abel sulle superficie algebriche ed alla riduzione a forma normale degli integrali di Picard*. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. 21, pagg. 257-282 (1906).

Indichiamo con $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$, $\beta_1, \ldots, \beta_q$ i $2q$ 1-cicli fondamentali lungo i quali sono calcolati i periodi della matrice Ω. Indichiamo ancora con $\Xi_{C_1}^{C_2}$ l'integrale normale di terza specie colle curve logaritmiche C_2 e C_1. Con ciò intendiamo [12] un integrale di terza specie coi periodi polari $+\pi i$, $-\pi i$ rispettivamente lungo le curve C_2, C_1 e coi periodi nulli ai cicli $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$.

A norma di un teorema di SEVERI [13] si sa allora che i periodi Ξ lungo i cicli $\beta_1, \ldots, \beta_q$ uguagliano, modulo Ω, le differenze $u_1(C_2) - u_1(C_1), \ldots, u_q(C_2) - u_q(C_1)$.

Ora la differenza $\operatorname{Log} R - 2\,\delta_q\, \Xi_{C_1}^{C_2}$ è un integrale semplice di prima specie essendo dappertutto finito.

Si possono perciò determinare q costanti $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ tali che

$$\operatorname{Log} R(x) = 2 \left\{ \delta_q\, \Xi_{C_1}^{C_2} + \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_q u_q \right\}.$$

Siccome

$$R(x) = e^{2 \left\{ \delta_q \Xi_{C_1}^{C_2} + \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_q u_q \right\}} \tag{9}$$

deve avere periodi nulli lungo i cicli $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ si vede che $\lambda_s \dfrac{\pi i}{\delta_s}$ $(s = 1, \ldots, q)$ dev'essere un multiplo intero di πi; cioè:

$$\lambda_s = -k_s \delta_s \qquad (s = 1, \ldots, q)$$

con le k_s interi.

Anche i periodi lungo i cicli $\beta_1, \ldots, \beta_q$ devono essere nulli. Ciò implica che

$$\delta_q \left[(u_h(C_2) - u_h(C_1) \right] - \Sigma\, k_s \delta_s a_{sh} = m_h \pi i$$

colle m_h interi convenienti, $(h = 1, \ldots, q)$.

Da questa relazione si deduce subito la (8).

Veniamo alla *sufficienza*. Questa si riduce ad una verifica; infatti l'espressione (9), una volta valide le (8) risulta un integrale semplice di seconda specie, senza periodi, epperò una funzione razionale, colle curve totali di zero e poli rispettivamente su $\delta_q C_2$ e $\delta_q C_1$.

6. - Ciò posto non resta che osservare che le congruenze (8) sono identiche alle (6). Ciò prova che la varietà V'_q dei sistemi continui di F si rappresenta sopra la varietà V_q corrispondente ad Ω colla medesima involuzione che rappresenta la varietà dei sistemi continui di V_q su V_q medesima. Di qui l'asserto.

7. - *Estensione alle varietà di dimensione qualunque. — Il teorema testè dimostrato sussiste per una varietà algebrica* M_k *di dimensione* k *qualsiasi*: la varietà V'_q rappresentativa dei sistemi continui di ∞^q sistemi lineari di M, q essendo l'irregolarità superficiale della varietà, è la varietà che rappresenta i sistemi di ∞^q si-

(12) Cfr. SEVERI, loc. cit. in (11).
(13) Cfr. SEVERI, loc. cit. in (11).

stemi lineari sopra la varietà di Picard V_q corrispondente alla matrice di Riemann degli integrali semplici di prima specie.

Infatti in virtù d'un teorema di Castelnuovo-Enriques [14] la varietà V_q è la stessa che la varietà di Picard, costruita alla maniera di Severi, d'una generica superficie F, sezione di M con uno spazio lineare di dimensione opportuna.

D'altronde, in forza di un criterio di equivalenza Severi [15] la stessa cosa si presenta per la varietà V'_q di M e la varietà di Picard, costruita alla maniera di Castelnuovo, della superficie F.

Sia infatti ad esempio M di dimensione $k = 3$, ed F una generica sezione iperpiana, $\{|G|\}$ un sistema continuo di ∞^q sistemi lineari di superficie di M. Sia $|G_1|$ un sistema lineare di $\{|G|\}$ e supponiamo vi sia un altro sistema lineare completo $|G_2|$ di $\{|G|\}$ staccante su F curve linearmente equivalenti a quelle staccate da $|G_1|$.

Quando F varia $|G_2|$, in virtù del citato criterio d'equivalenza non può rimanere fisso. Mà ciò è assurdo dato che i sistemi $|G_2|$ seganti su F curve equivalenti a quelle segate da $|G_1|$ danno i gruppi d'una involuzione rappresentante la varietà V'_q sopra la varietà di Picard di F, costruita al modo di Castelnuovo, e questa involuzione non può variare su V'_q [cfr. il teorema *a*) di una mia nota di prossima pubblicazione [16]].

Il ragionamento ha carattere assolutamente generale.

[14] Castelnuovo-Enriques, *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébriche à plusieurs dimensions*. Annales de l'Ecole normale supérieure, s. 3 t. 23, pagg. 339-366 (1906).

[15] Severi, *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà*. Atti del R. Istituto veneto, t. 65, pagg. 625-643 (1906).

[16] Nelle « Commentationes » della Pontificia Academia Scientiarum.