LUIGI CASTOLDI

Estensione a tensori qualunque negli spazi di Riemann di alcuni teoremi fondamentali dell'Analisi vettoriale (*)

E' dovuta al Palatini (1) una notevole ed elegante estensione a tensori emisimmetrici o *«vettori generalizzati»* in uno spazio di Riemann di tutti i principali concetti e teoremi dell'analisi vettoriale ordinaria.

Il presente lavoro è strettamente ispirato alla citata Memoria del Palatini ed ha per scopo di mostrare come gran parte delle nozioni introdotte da quell'Autore si prestino ad essere estese, con opportuni adattamenti, a tensori del tipo più generale, rendendo possibile enunciare anche per questi ultimi proposizioni e teoremi affatto analoghi a quelli validi per vettori ordinari (2).

2) *Prodotto completo e prodotto interno di due tensori.* — Siano $\mathbf{X}^{(m)}$ e $\mathbf{Y}^{(p)}$ due tensori (3) di rispettivi ordini m e p in una varietà metrica V_n. Diremo *«prodotto completo»*, o brevemente *«prodotto»* $\mathbf{X}^{(m)}\,\mathbf{Y}^{(p)}$ dei due tensori dati, nell'ordine indicato, il tensore di ordine m + p di componenti

$$(XY)^{i_1 \ldots i_m\, j_1 \ldots j_p} = X^{i_1 \ldots i_m}\, Y^{j_1 \ldots j_p} \tag{1}$$

Come *«prodotto interno»* di due tensori assumiamo, per il momento, uno qualunque dei tensori di ordine m-p o p-m, secondochè è $m > p$ o $m < p$, che si ottengono dal prodotto completo, in un certo ordine, dei due tensori dati, saturando tutti gli indici del tensore di ordine più basso con altrettanti indici di posto designato del tensore di ordine più alto.

(*) Nota presentata dal Socio Nazionale Luigi Rolla.

(1) A. PALATINI, *Concetto di vettore generalizzato*, Rend. Sem. Mat. dell'Università di Padova, anno IV, nn. 3-4.

(2) L'utilità di tale estensione appare più evidente allorchè si pensi che i tensori che si presentano in molte applicazioni geometriche e fisico-matematiche sono forse più spesso simmetrici che emisimmetrici. Alludiamo, per citare soltanto alcuni esempi notissimi, al primo e secondo tensore fondamentale, ai tensori di Ricci e di Einstein della Geometria Riemanniana, ai tensori di deformazione e degli sforzi, di potere induttore elettrico e permeabilità magnetica della Fisica matematica, al tensore energetico della Relatività generale. Per quest'ultimo e per il tensore degli sforzi ha, poi, particolare interesse la considerazione della *«divergenza»* (nulla per il primo) quale espressione analitica di enti geometrici o fisici notevolissimi.

(3) Qui e nel seguito, quando non occorra mettere in espressa evidenza le componenti di un tensore, nè il loro carattere covariante o controvariante, ma soltanto interessi considerare il tensore in se, come unico ente analitico, o geometrico, o fisico, denoteremo il tensore stesso con una lettera maiuscola grassetta, eventualmente seguita in alto, tra parentesi, da una lettera che ne indica l'ordine.

Supposto, per fissare le idee, $m > p$, e introdotto, per evidenti ragioni di comparabilità numerica, il fattore $\frac{1}{p!}$, sarà, per esempio *un* prodotto interno di $\mathbf{X}^{(m)}$ per $\mathbf{Y}^{(p)}$ il tensore $\mathbf{Z}^{(m-p)}$ di componenti

$$Z^{i_1 \dots i_{m-p}} = \frac{1}{p!} X^{i_1 \dots i_{m-p} j_1 \dots j_p} Y_{j_1 \dots j_p} \tag{2}$$

Va notato, peraltro, che, una volta scelto il gruppo degli indici da saturare nel tensore di ordine più elevato, l'ordine dei fattori del prodotto interno risulta inessenziale. Di due tensori di ordini m e p ($m \leq p$) si hanno pertanto, in generale $\binom{m}{p}$ prodotti interni distinti. Tuttavia, in particolare:

a) se è $m > p$ e $\mathbf{X}^{(m)}$ simmetrico, tutti i prodotti interni coincidono;

b) se è $m > p$ e $\mathbf{X}^{(m)}$ emisimmetrico, i diversi prodotti interni differiscono al più per il segno;

c) se è $m = p$, si ha un'unico prodotto interno (invariante).

In generale, parlando di prodotto interno di due tensori, e volendo precisare a quale tra gli $\binom{m}{p}$ possibili si alluda, è necessario indicare i posti $k_1, \dots, k_p$ degli indici che vengono saturati nel tensore di ordine più elevato. Si dirà, allora, che si forma il prodotto interno di $\mathbf{X}^{(m)}$ per $\mathbf{Y}^{(p)}$ di posti $k_1, \dots k_p$, e si designerà tal prodotto col simbolo

$$(\mathbf{X}^{(m)}, \mathbf{Y}^{(p)})_{(k_1 \dots k_p)}$$

Spesso, allorchè non si indichino i posti di saturazione, si sottintende che, come nella formula (2), gli indici di $\mathbf{Y}^{(p)}$ si saturano cogli *ultimi* p indici di $\mathbf{X}^{(m)}$; si pone cioè

$$(\mathbf{X}^{(m)}, \mathbf{Y}^{(p)}) = (\mathbf{X}^{(m)}, \mathbf{Y}^{(p)})_{(m-p+1, \dots, m)}$$

3) *Vettore supplementare di un tensore. - Prodotto vettore di più tensori.* — Definiamo «*vettore supplementare*» [4] $\boldsymbol{x}^{(n-p)}$, o $\mathcal{S}up^{(n-p)} \mathbf{X}^{p}$, di un tensore $\mathbf{X}^{(p)}$ di ordine $p \leqq n$ il vettore prodotto interno di $\mathbf{X}^{(p)}$ per il noto vettore $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$, spesso designato come «*secondo tensore fondamentale*» [5] della varietà; poniamo cioè:

$$\boldsymbol{x}^{i_1 \dots i_{n-p}} = \frac{1}{p!} \boldsymbol{\varepsilon}^{i_1 \dots i_{n-p} j_1 \dots j_p} X_{j_1 \dots j_p}. \tag{3}$$

Chiameremo poi «*prodotto vettore*» di due tensori $\mathbf{X}^{(p)}$, $\mathbf{Y}^{(q)}$ nell'ordine indicato ($p + q \geqq n$), il prodotto interno di $\mathbf{X}^{(p)}$ per il vettore supplementare di $\mathbf{Y}^{(q)}$. Più in generale, supposto definito il prodotto vettore di l-1 tensori $\underset{2}{\mathbf{X}}^{(m_2)}, \dots, \underset{l}{\mathbf{X}}^{(m_l)}$, definiremo come prodotto vettore di l tensori $\underset{1}{\mathbf{X}}^{(m_1)}, \dots, \underset{l}{\mathbf{X}}^{(m_l)}$, il prodotto interno di $\underset{1}{\mathbf{X}}^{(m_1)}$ per il prodotto vettore, già definito, di $\underset{2}{\mathbf{X}}^{(m_2)}, \dots, \underset{l}{\mathbf{X}}^{(m_l)}$ ($m_1 + \dots + m_l = p \leqq n$).

[4] Per brevità, tutte le volte che non ne nascano equivoci, useremo la denominazione di «*vettore*» senz'altro, in luogo di quella di «*plurivettore*» o di «*vettore generalizzato*» per denotare un tensore emisimmetrico. Come simboli per i vettori, adotteremo lettere maiuscole corsive in carattere grassetto.

[5] A questo proposito si confronti, per esempio: T. Levi Civita, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, p. 180.

Denotato con $\left\{ \underset{1}{\mathbf{X}}^{(m_1)},\ldots,\underset{l}{\mathbf{X}}^{(m_l)} \right\}$ il prodotto vettore testè definito, sarà dunque:

$$\left\{ \underset{1}{\mathbf{X}}^{(m_1)},\ldots,\underset{l}{\mathbf{X}}^{(m_l)} \right\} = \tag{4}$$

$$\equiv \frac{1}{m_1!\ldots m_l!}\, g^{i_1\ldots i_{n-p}\, j_{r_1}\ldots j_{r_{m_1}}\, j_{s_1}\ldots j_{s_{m_2}}\ldots j_{t_1}\ldots j_{t_{m_l}}}\, \underset{1}{X}_{r_1\ldots r_{m_1}}\ldots \underset{l}{X}_{t_1\ldots t_{m_l}}\,.$$

Converremo di dire che due fattori $\underset{h}{\mathbf{X}}^{(m_h)}$, $\underset{k}{\mathbf{X}}^{(m_k)}$ (seguentisi in quest'ordine) di un prodotto vettore *distano fra loro di* q *posti* quando, nel secondo membro della definizione (4), l'ultimo indice di $\underset{h}{\mathbf{X}}^{(m_h)}$ e il primo di $\underset{k}{\mathbf{X}}^{(m_k)}$ risultano separati da altri q indici intermedi.

Segue allora immediatamente dalla definizione e dalle proprietà del vettore $\mathscr{E}^{(n)}$ che se nel prodotto vettore di più tensori si scambiano fra loro due fattori di ordine m_h ed m_k distanti fra loro di q posti, il prodotto vettore risulta moltiplicato per $(-1)^{m_h m_k + q(m_h + m_k)}$. in particolare, per $q=0$, cioè scambiando fra loro due fattori contigui, il prodotto vettore cambia segno se entrambi i fattori scambiati sono di ordine dispari. Se, inoltre, i fattori del prodotto vettore sono tutti di ordine 1 (vettori ordinari), il prodotto stesso cambia segno per lo scambio di due fattori comunque situati.

In base alla definizione (4) di dimostra ancora quanto segue:

Il prodotto vettore di più tensori si annulla se due fattori di ordine dispari coincidono.

Il prodotto interno del prodotto vettore di più tensori per uno dei fattori del prodotto vettore si annulla, se il fattore considerato è di ordine dispari.

Queste proprietà ovviamente generalizzano quelle relative al prodotto esterno di due vettori ordinari.

Osservazione. — La definizione di vettore supplementare di un tensore data, mediante (3), all'inizio di questo numero, perde significato nel caso di tensori di ordine maggiore di n, giacchè allora, al prodotto interno del vettore $\mathscr{E}^{(n)}$ per un tale tensore vien meno, generalmente, lo stesso carattere di vettore; fatta eccezione per il caso $p=n+1$, peraltro di scarso interesse, e pertanto non più considerato nel seguito.

4) *Vettore di un tensore.* — Diremo « *vettore* $\mathscr{X}^{(p)}$ *di un tensore* $\mathbf{X}^{(p)}$ il supplementare del supplementare di $\mathbf{X}^{(p)}$, moltiplicato per il fattore numerico $(-1)^{p(n-p)}$; porremo cioè:

$$\mathscr{X}^{i_1\ldots i_p} = \frac{(-1)^{p(n-p)}}{p!(n-p)!}\, g^{i_1\ldots i_p\, j_1\ldots j_{n-p}}\, g_{j_1\ldots j_{n-p}\, r_1\ldots r_p}\, X^{r_1\ldots r_p} = \tag{5}$$

$$= \frac{1}{p!}\; \delta^{i_1\ldots i_p}_{r_1\ldots r_p}\, X^{r_1\ldots r_p},$$

dove, con

$$\delta^{i_1\ldots i_p}_{r_1\ldots r_p} = \frac{1}{(n-p)!}\, g^{i_1\ldots i_p\, j_1\ldots j_{n-p}}\, g_{r_1\ldots r_p\, j_1\ldots j_{n-p}}$$

si sono denotati i noti simboli di Kronecker (*).

(*) Per il loro significato si veda, per esempio, A. PALATINI, loco citato nella nota (1).

5) *Decomposizione per somma di un tensore generico in un vettore e in un tensore residuo.* — Un tensore emisimmetrico (vettore) coincide ovviamente in virtù di (5), col proprio vettore. Viceversa, se un tensore si identifica col proprio vettore, esso è, per ciò stesso, emisimmetrico. E' quindi condizione necessaria e sufficiente perchè un tensore sia emisimmetrico (vettore), che esso coincida col proprio vettore, che sia cioè

$$\mathscr{X}^{(p)} = \mathbf{X}^{(p)} \tag{6}$$

Passiamo ora a generalizzare il concetto di tensore simmetrico mediante la seguente definizione:

Diremo che un tensore $\mathbf{X}^{(p)}$ di componenti $X^{i_1 \dots i_p}$ è *«globalmente simmetrico»* o che è una *«dilatazione»*, se, qualunque sia la determinazione degli indici $i_1, \dots, i_p$, la somma delle componenti di $\mathbf{X}^{(p)}$ provenienti da tutte le permutazioni di quegli indici della medesima classe di $(i_1, i_2, \dots, i_p)$ è uguale alla analoga somma proveniente dalle permutazioni di classe opposta.

Segue di qui, immediatamente, che sono dilatazioni tutti e soli i tensori $\mathbf{X}^{(p)}$ il cui vettore è nullo. Denotando con $\mathring{\mathbf{X}}^{(p)}$ una dilatazione di ordine p, è, dunque, per definizione:

$$\mathring{\mathscr{X}}^{(p)} = o \quad (^1) \tag{7}$$

Consideriamo da ultimo un tensore $\mathbf{X}^{(p)}$ che non sia un vettore nè una dilatazione. Sarà allora, in virtù delle precedenti proposizioni:

$$\mathscr{X}^{(p)} \neq o \quad ; \quad \mathscr{X}^{(p)} \neq \mathbf{X}^{(p)}. \tag{8}$$

Posto allora

$$\mathbf{Y}^{(p)} = \mathbf{X}^{(p)} - \mathscr{X}^{(p)}, \tag{9}$$

si riconosce subito che $\mathbf{Y}^{(p)}$ è una dilatazione (la *«dilatazione di* $\mathbf{X}^{(p)}$»). Si ha infatti prendendo il vettore di entrambi i membri di (9), $\mathscr{Y}^{(p)} = \mathscr{X}^{(p)} - \mathscr{X}^{(p)} = o$.

Denotando con $\mathring{\mathbf{X}}^{(p)}$ la dilatazione di $\mathbf{X}^{(p)}$, la (9) diventa

$$\mathbf{X}^{(p)} = \mathscr{X}^{(p)} + \mathring{\mathbf{X}}^{(p)} \tag{10}$$

che fornisce la scomposizione del tensore $\mathbf{X}^{(p)}$ nella somma di un vettore e di una dilatazione.

E' poi facile riconoscere che la scomposizione testè rilevata può effettuarsi in un unico modo. Supponiamo infatti che sia

$$\mathbf{X}^{(p)} = \mathscr{X}^{(p)} + \mathring{\mathbf{X}}^{(p)} = \mathscr{X}'^{(p)} + \mathring{\mathbf{X}}'^{(p)}.$$

Prendendo il vettore degli ultimi due membri, si ha subito

$$\mathscr{X}^{(p)} = \mathscr{X}'^{(p)} \text{ e quindi } \mathring{\mathbf{X}}^{(p)} = \mathring{\mathbf{X}}'^{(p)}.$$

Concludiamo quindi che *ogni tensore è sempre esprimibile univocamente come somma di un vettore e di una dilatazione, mancando, eventualmente, il primo termine o il secondo allorchè il tensore dato sia, rispettivamente, una dilatazione o un vettore.*

(1) Nel caso di tensori del secondo ordine, i concetti di dilatazione e di tensore simmetrico coincidono. Essi sono, peraltro, generalmente distinti per tensori di ordine p maggiore di 2, giacchè, come risulta dalla definizione, ogni tensore simmetrico è sempre una dilatazione, ma non viceversa.

6) *Un'applicazione. - Trasporto per parallelismo di un prodotto vettore.* — Allo scopo di indicare una semplice applicazione dei concetti esposti, premettiamo una ovvia generalizzazione della nozione di trasporto per parallelismo di un vettore (ordinario) in una varietà riemanniana.

Sia, con evidente significato delle notazioni, $\lambda^i = \frac{dx^i}{ds}$ il vettore unitario tangente a una curva L in V_n, e siano $\nabla_{i_{p+1}} X^{i_1 \dots i_p}$ le componenti del derivato covariante di un tensore $\mathbf{X}^{(p)}$, rispetto alla metrica di V_n. Diremo che $\mathbf{X}^{(p)}$ viene trasportato per parallelismo lungo L, o che le sue determinazioni nei punti di L sono fra loro parallele, quando lungo il tratto di L che eventualmente si considera, è

$$\frac{\nabla X^{i_1 \dots i_p}}{\nabla s} \equiv \nabla_{i_{p+1}} X^{i_1 \dots i_p} \cdot \lambda^{i_{p+1}} = 0 , \tag{11}$$

dove col simbolo $\frac{\nabla}{\nabla s}$ si è denotata la derivazione intrinseca lungo l'arco di L.

Dalla regola di derivazione di un prodotto di più tensori segue allora che se tutti i fattori di un prodotto (evenualmente saturato) si trasportano per parallelismo lungo una curva di V_n, altrettanto avviene del prodotto considerato.

In particolare, il trasporto parallelo di più tensori lungo una curva in V_n subordina il trasporto per parallelismo del loro prodotto vettore. Infatti, quest'ulimo non è che un prodotto (saturato) di tensori tutti soddisfacenti la condizione (11); i tensori dati, per ipotesi, il vettore $\varepsilon^{(n)}$, come quello per cui si annulla il derivato covariante.

Rientra in quest'ultima proposizione un risultato del Signorini, secondo cui « in ogni metrica riemanniana il prodotto vettoriale di n-1 vettori sempre si conserva nel trasporto per parallelismo di Levi Civita » (*).

7) *Divergenza di un tensore. - Teorema della divergenza.* — Il derivato covariante $\nabla_{i_{p+1}} X^{i_1 \dots i_p}$ di un tensore $\mathbf{X}^{(p)}$ può formalmente considerarsi come prodotto del vettore simbolico (ordinario) $\nabla^{(1)}$ per il tensore $\mathbf{X}^{(p)}$. Conformemente a ciò, secondo la più ampia accezione di prodotto interno introdotta all'inizio del numero 2, è possibile considerare il tensore di ordine p-1, prodotto interno di posto k di $\boldsymbol{\nabla}^{(1)}$ per $\mathbf{X}^{(p)}$

Assumeremo tale tensore come *« divergenza di posto k »* del tensore $\mathbf{X}^{(p)}$. Porremo cioè:

$$\mathrm{Div}^{(p-1)}_{[k]}\, \mathbf{X}^{(p)} \equiv \nabla_j\, X^{i_1 \dots i_{k-1} j\, i_{k+1} \dots i_p} \tag{12}$$

Segue di qui che esistono, in generale, p divergenze distinte di un tensore dato di ordine p, eventualmente coincidenti (allorchè $\mathbf{X}^{(p)}$ è un tensore simmetrico), o coincidenti a meno del segno (allorchè $\mathbf{X}^{(p)}$ è un vettore).

Spesso si assume senz'altro come *« divergenza »* di $\mathbf{X}^{(p)}$ la divergenza di posto p; si pone cioè

$$\mathrm{Div}^{(p-1)} \mathbf{X}^{(p)} = \mathrm{Div}^{(p-1)}_{[p]}\, \mathbf{X}^{(p)}, \tag{12'}$$

conformemente, del resto, alla definizione di prodotto interno adottata alla fine del numero 2.

(*) A. SIGNORINI, *Sul prodotto vettore*, Boll. dell'Un. Mat. Italiana, dicembre 1934.

Scrivendo distesamente le espressioni delle derivate covarianti, si ha in generale:

(13)
$$\nabla_j X^{i_1\ldots i_{k-1}\,j\,i_{k+1}\ldots i_p} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{\partial\sqrt{a}\,(X^{i_1\ldots i_{k-1}\,j\,i_{k+1}\ldots i_p})}{\partial x^j} + \\ + \sum_{l=1}^{p}{}' X^{i_1\ldots i_{l-1}\,\rho\,i_{l+1}\ldots i_{k-1}\,j\,i_{k+1}\ldots i_p}\left\{ {i_l \atop \rho j} \right\},$$

(dove l'apice alle sommatorie indica che va escluso per l il valore k); e, per vettori,

(13')
$$\triangle_j \mathfrak{X}^{i_1\ldots i_{k-1}\,j\,i_{k+1}\ldots i_p} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{\partial\sqrt{a}\,(\mathfrak{X}^{i_1\ldots i_{k-1}\,j\,i_{k+1}\ldots i_p})}{\partial x^j}$$

Ciò posto, sussiste, come abbiamo dimostrato in altra parte (9), per un tensore qualunque $\mathbf{X}^{(p)}$ di V_n un «*teorema della divergenza*», evidente generalizzazione dell'analogo teorema valido per vettori ordinari di S_3, ed espresso dalla relazione

(14)
$$\int_S \mathbf{Div}_{[k]}^{(p-1)} \nabla_j X^{i_1\ldots i_{k-1}\,j\,i_{k+1}\ldots i_p}\, dS = \int_\sigma X^{i_1\ldots i_{k-1}\,j\,i_{k+1}\ldots i_p}\, \varkappa_j\, d\sigma\,,$$

ossia, in forma sintetica,

(14')
$$\int_S \mathbf{Div}_{[k]}^{(p-1)}\, \mathbf{X}^{(p)}\, dS = \int_\sigma (\mathbf{X}^{(p)}, \boldsymbol{\varkappa})_{[k]}\, .\, d\sigma\,,$$

dove S è una regione di V_n racchiusa dal contorno ipersuperficiale σ, $\boldsymbol{\varkappa}$ è il vettore unitario normale a σ in V_n, rivolto verso l'esterno di S, e l'indice $[k]$ nel secondo membro denota il prodotto interno di posto k.

8) *Un'applicazione del teorema della divergenza: proprietà di simmetria del tensore degli sforzi.* — Se $\mathbf{v}$ è un vettore ordinario, l'applicazione della relazione (14) al prodotto vettore $|\mathbf{v}, (\boldsymbol{\varkappa}, \mathbf{X}^{(p)})_{[k]}|$ fornisce:

$$\int_\sigma \varepsilon_{i_1\ldots i_{n-p}\,j\,r_1\ldots r_{k-1}\,r_{k+1}\ldots r_p}\, v^j \varkappa_\rho\, X^{r_1\ldots r_{k-1}\,\rho\, r_{k+1}\ldots r_p}\, d\sigma =$$
$$= \int_S \varepsilon_{i_1\ldots i_{n-p}\,j\,r_1\ldots r_{k-1}\,r_{k+1}\ldots r_p}\, v^j\, \nabla_\rho X^{r_1\ldots r_{k-1}\,\rho\, r_{k+1}\ldots r_p}\, dS +$$
$$+ \int_S \varepsilon_{i_1\ldots i_{n-p}\,j\,r_1\ldots r_{k-1}\,r_{k+1}\ldots r_p}\, \nabla_\rho v^j\, X^{r_1\ldots r_{k-1}\,\rho\, r_{k+1}\ldots r_p}\, dS,$$

ossia, sotto forma sintetica:

(15)
$$\int_\sigma |\mathbf{v}, (\boldsymbol{\varkappa}, \mathbf{X})_{[k]}|\; d\sigma = \int_S |\,\mathbf{v},\ \mathbf{Div}_{[k]}\mathbf{X}\,|\; dS + \int_S \mathscr{S}\mathrm{up}\,(\nabla\mathbf{v}, \mathbf{X})_{[k]}\; dS.$$

Quest'ultima formula trova una notevole applicazione nei fondamenti della elastomeccanica, ove si identifichino V_n coll'ordinario S_3, $\mathbf{v}$ col *raggio vettore* $P - O = \mathbf{r}$,

(9) L. Castoldi, *Attorno a un «teorema della divergenza» per tensori qualunque negli spazi di Riemann* (Rend. Lincei, ser. VIII, vol. IV, fasc. 4, 1947).

Limitatamente al caso di tensori emisimmetrici (vettori generalizzati), il teorema in questione è stato stabilito dal Palatini, loco citato nella nota (1). Per tensori qualunque in varietà euclidee, lo stesso teorema è riferito da Schouten-Struik in *Neuere Methoden der Differentialgeometrie*, volume I, § 11.

S e σ con una regione di S_3 occupata da un continuo deformabile e col rispettivo contorno, infine $\mathbf{X}^{(p)}$ col tensore doppio $\Phi^{(2)}$ degli sforzi. Indicata con ρ la densità materiale, con $\mathbf{a}$ l'accelerazione della generica particella, con $\mathbf{F}$ la forza di massa unitaria, con $\Phi_{\chi} = (\chi, \Phi)_{[1]}$ lo sforzo in superficie, la seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi dà:

$$\int_S \{\mathbf{r}, \rho\, \mathbf{a}\}\, dS = \int_S \{\mathbf{r}, \rho\, \mathbf{F}\}\, dS + \int_\sigma \{\mathbf{r}, \Phi_\chi\}\, d\sigma, \tag{16}$$

mentre dalla prima risulta

$$\rho\, \mathbf{a} = \rho\, \mathbf{F} + \mathbf{Div}_{[1]}\, \Phi\,. \tag{17}$$

Utilizzando quest'ultima la (16) diventa

$$\int_S \{\mathbf{r}, \mathbf{Div}_{[1]}\, \Phi\}\, dS = \int_\sigma \{\mathbf{r}, (\chi, \Phi)_{[1]}\}\, d\sigma. \tag{16'}$$

D'altra parte la (15), ponendovi $\mathbf{v}=\mathbf{r}$ e quindi $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{A}$, con $A_i{}^j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$, nonchè effettuando le restanti indicate sostituzioni, assume la forma

$$\int_\sigma \{\mathbf{r}, (\chi, \Phi)_{[1]}\}\, d\sigma = \int_S \{\mathbf{r}, \mathbf{Div}_{[1]}\, \Phi\}\, dS + \int_S \mathscr{S}up\, \Phi\, dS \tag{17}$$

Confrontando quest'ultima colla (16') si ottiene $\int_S \mathscr{S}up\, \Phi\, dS = 0$, e quindi, per l'arbitrarietà di S,

$$\mathscr{S}up\, \Phi = 0 \quad , \quad \text{cioè } \Phi_{ij} = \Phi_{ji}\,,$$

da sui risulta la fondamentale proprietà di simmetria del tensore degli sforzi.

9) *Gradiente e rotore di un tensore.* — Definiamo *gradiente* di un tensore $\mathbf{X}^{(p)}$ il vettore del suo derivato covariante, cioè il vettore $\mathscr{G}rad^{(p+1)}\, \mathbf{X}^{(p)}$ di componenti

$$\frac{1}{(p+1)!}\, \delta^{r_1 \ldots r_p\, r_{p+1}}_{i_1 \ldots i_p\, i_{p+1}}\, \nabla_{r_{p+1}}\, X_{r_1 \ldots r_p}\,. \tag{18}$$

Definiamo anche *rotore* del tensore $\mathbf{X}^{(p)}$ il supplementare del gradiente di $\mathbf{X}^{(p)}$, cioè il vettore $\mathscr{R}ot^{(n-p-1)}\, \mathbf{X}^{(p)}$ di componenti

$$\frac{1}{[(p+1)!]^2}\, \varepsilon^{i_1 \ldots i_{n-p-1}\, j_1 \ldots j_{p+1}}\, \delta^{r_1 \ldots r_{p+1}}_{j_1 \ldots j_{p+1}}\, \nabla_{r_{p+1}}\, X_{r_1 \ldots r_p}\,. \tag{19}$$

E' dunque, per definizione:

$$\mathscr{R}ot^{(n-p-1)}\, \mathbf{X}^{(p)} = \mathscr{S}up\, \mathscr{G}rad^{(p+1)}\, \mathbf{X}^{(p)}, \tag{20}$$

ma è anche, per quanto precede,

$$\mathscr{R}ot^{(n-p-1)}\, \mathbf{X}^{(p)} = \mathscr{S}up\, \Delta\, \mathbf{X}^{(p)}\,, \tag{21}$$

come risulta anche materialmente da (19) esprimendovi i simboli di Kronecker mediante il vettore $\varepsilon^{(n)}$, indi raggruppando diversamente i fattori. Si ha infatti in tal modo

$$
\begin{aligned}
\mathit{Rot}^{(n-p-1)}\,\mathbf{X}^{(p)} &\equiv \frac{1}{[(p+1)!]^2 (n-p-1)!}\,\varepsilon^{i_1\ldots i_{n-p-1}\,j_1\ldots j_{p+1}} \times \\
&\times \varepsilon^{r_1\ldots r_{p+1}\,s_1\ldots s_{n-p-1}}\,\varepsilon_{j_1\ldots j_{p+1}\,s_1\ldots s_{n-p-1}}\,\nabla_{r_{p+1}} X_{r_1\ldots r_p} = \\
&= \frac{1}{(n-p-1)!}\,\delta^{i_1\ldots i_{n-p-1}}_{s_1\ldots s_{n-p-1}} \cdot \frac{1}{(p+1)!}\,\varepsilon^{s_1\ldots s_{n-p-1}\,r_1\ldots r_{p+1}}\,\nabla_{r_{p+1}} X_{r_1\ldots r_p} \\
&= \frac{1}{(p+1)!}\,\varepsilon^{i_1\ldots i_{n-p+1}\,r_1\ldots r_{p+1}}\,\nabla_{r_{p+1}} X_{r_1\ldots r_p}\,,
\end{aligned}
\tag{22}
$$

relazione che dimostra la (20), e dalla quale ulteriomente risulta

$$
\mathit{Rot}^{(n-p-1)}\,\mathbf{X}^{(p)} = (-1)^p\,\varepsilon^{i_1\ldots i_{n-p-1}\,r_{p+1}\,r_1\ldots r_p}\,\nabla_{r_{p+1}} X_{r_1\ldots r_p}
\tag{23}
$$

ossia

$$
\mathit{Rot}^{(n-p-1)}\,\mathbf{X}^{(p)} = (-1)^p\,\mathbf{Div}\,\mathcal{S}\mathrm{up}\,\mathbf{X}^{(p)} = (-1)^p\,\mathbf{Div}\,\mathcal{X}^{(n-p)}
\tag{24}
$$

Le (20), (21), (24) possono assumersi come altrettante definizioni equivalenti del rotore di un tensore.

10) *Tensori a rotore nullo.* — Richiamiamo un teorema dovuto al Palatini, secondo cui, condizione necessaria e sufficiente affinchè un vettore $\mathcal{X}^{(p)}$ di ordine p abbia divergenza nulla è che esso sia la divergenza di un vettore $\mathcal{Y}^{(p+1)}$ di ordine p+1. Sono dunque equivalenti le due relazioni

$$
\mathbf{Div}^{(p-1)}\,\mathcal{X}^{(p)} = 0\,, \qquad \mathcal{X}^{(p)} = \mathbf{Div}^{(p)}\,\mathcal{Y}^{(p+1)}
$$

Sia ora $\mathbf{X}^{(p)}$ un tensore a rotore nullo,

$$
\mathit{Rot}\,\mathbf{X}^{(p)} = 0
$$

Segue allora dalla (24)

$$
\mathbf{Div}\,\mathcal{X}^{(n-p)} = 0\,.
$$

Esiste quindi un vettore $\mathcal{Y}^{(n-p+1)}$ per cui è

$$
\mathcal{X}^{(n-p)} = \mathbf{Div}\,\mathcal{Y}^{(n-p+1)} = (-1)^{(p-1)}\,\mathit{Rot}^{(n-p)}\,\mathcal{Y}^{(p-1)}\,,
$$

ossia, posto

$$
(-1)^{p-1}\,\mathcal{Y}^{(p-1)} = \mathcal{Z}^{(p-1)}\,,
$$

$$
\mathcal{X}^{(n-p)} = \mathit{Rot}^{(n-p)}\,\mathcal{Z}^{(p-1)}\,.
$$

Di qui, prendendo i supplementari di entrambi i membri, consegue

$$
\mathcal{X}^{(p)} = \mathcal{G}\mathrm{rad}\,\mathcal{Z}^{(p-1)}.
$$

Si conclude allora che è

$$
\mathbf{X}^{(p)} = \mathcal{G}\mathrm{rad}\,\mathcal{Z}^{(p-1)} + \mathring{\mathbf{X}}^{(p)}
$$

con $\mathring{\mathbf{X}}^{(p)}$ conveniente dilatazione. Dunque: *« Ogni tensore a rotore nullo è somma di un gradiente e di una dilatazione ».*

11) *Teorema del rotore.* — Riprendiamo la relazione (24), valida per un qualunque tensore $\mathbf{X}^{(p)}$, e osserviamo che, essendo $\boldsymbol{\chi}$ un qualsivoglia vettore ordinario, è

$$\left\{\mathbf{X}^{(p)}, \boldsymbol{\chi}\right\} = (\boldsymbol{\chi}^{(n-p)}, \boldsymbol{\chi})_{[1]} . \tag{25}$$

In conseguenza di ciò, il teorema della divergenza dà:

$$\int_S \mathit{Rot}\ \mathbf{X}^{(p)}\, dS = \int_\sigma \left\{\boldsymbol{\chi}, \mathbf{X}^{(p)}\right\} d\sigma, \tag{26}$$

formula che generalizza ovviamente il noto teorema del rotore.

12) *Teorema di Stockes.* — Sia V_m una varietà ad m dimensioni immersa in V_n, di equazioni parametriche

$$y^i = y^i\,(u^1, \ldots\ldots, u^m), \tag{27}$$

e $\mathbf{X}^{(p)}$ ($p \leq m$) un tensore di V_n definito nei punti di V_m. Indicando con $\bar{\mathbf{X}}^{(p)}$ la sua «*proiezione*» su V_m, è, come è noto:

$$\bar{X}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = X_{i_1 \ldots i_p}\ y^{i_1}_{\alpha_1} \cdot y^{i_2}_{\alpha_2} \cdots y^{i_p}_{\alpha_p} ,$$

dove si è posto

$$y^i_\alpha = \frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha}$$

E' facile riconoscere che, con evidente significato delle notazioni, si ha:

$$\mathit{Rot}_{V_m}\ \bar{\mathbf{X}}^{(p)} = (\mathit{Rot}_{V_n}\ \mathbf{X}^{(p)}, \boldsymbol{\chi}^{(n-m)}), \tag{28}$$

dove $\boldsymbol{\chi}^{(m-n)}$ è il vettore unitario di ordine n-m, rappresentante, punto per punto di V_m, lo spazio vettoriale normale in quel punto a V_m. Indicando con $\varepsilon^{\alpha_1 \cdots \alpha_m}$ il vettore $\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$ formato rispetto alla metrica di V_m, le componenti di $\boldsymbol{\chi}^{(n-m)}$ sono:

$$\chi_{r_1 \ldots r_{n-m}} = \frac{1}{m\,!}\ \varepsilon^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}\ \varepsilon_{r_1 \ldots r_{n-m}\, i_1 \ldots i_m}\ y^{i_1}_{\alpha_1} \cdots y^{i_m}_{\alpha_m} \tag{29}$$

Premesso ciò, consideriamo una regione S di V_m racchiusa da un contorno σ (m-1)-dimensionale, e siano $\boldsymbol{\nu}$ la normale esterna a σ in V_m e $\boldsymbol{\tau}^{(m-1)}$ il vettore unitario di ordine m-1 che caratterizza l'S_{m-1} puntualmente tangente a σ. Si ha allora

$$\left\{\boldsymbol{\nu}, \bar{\mathbf{X}}^{(p)}\right\} = -\,(\mathbf{X}^{(p)}, \boldsymbol{\tau}^{(m-1)}), \tag{30}$$

e il teorema del rotore, applicato in V_m al tensore $\bar{\mathbf{X}}^{(p)}$:

$$\int_S \mathit{Rot}_{V_m}\ \bar{\mathbf{X}}^{(p)}\, dS = \int_\sigma \left\{\boldsymbol{\nu}, \bar{\mathbf{X}}^{(p)}\right\} d\sigma , \tag{31}$$

diventa, in virtù di (28) e (30),

$$\int_S (\mathit{Rot}_{V_n}\ \mathbf{X}^{(p)}, \boldsymbol{\chi}^{(n-m)})\, dS = -\int_\sigma (\mathbf{X}^{(p)}, \boldsymbol{\tau}^{(m-1)})\, d\sigma, \tag{32}$$

che costituisce un'ovvia generalizzazione del teorema ordinario del rotore.