MARIO BENEDICTY

La base sulla varietà di Segre e su varietà analoghe (*)

In questo lavoro mi propongo di determinare in maniera semplice la base sulla varietà di Segre (complessa o reale) e sulla varietà delle n-ple non ordinate dei punti di un S_r, e di dare di queste varietà sotto nuovo aspetto proprietà, note o meno note, che ritengo utili, in particolare il fatto che i modelli proiettivi per esse costruiti sono minimi (¹), *sia rispetto alle trasformazioni birazionali che a quelle topologiche.*

1. *Definizione.* — Per varietà di SEGRE si intende quello speciale modello proiettivo W_t del prodotto topologico $\Pi = S_{r_1} \times S_{r_2} \times \dots \times S_{r_n}$ di un n spazi lineari proiettivi considerato da C. SEGRE (²). Esso è di dimensione $t = r_1 + r_2 + \dots + r_n$; appartiene ad uno spazio a $(r_1+1)(r_2+1)\dots(r_n+1)-1$ dimensioni ed è definito dalle equazioni parametriche:

$$\rho\, z_{p_1p_2\dots p_n} = x_{1p_1}x_{2p_2}\dots x_{np_n}\ (p_i = 0,1,\dots,r_i;\ i = 1,2,\dots,n), \tag{1}$$

ove $x_{i0}, x_{i1}, \dots, x_{ir_i}$ sono coordinate omogenee del punto variabile in S_{r_i} e $z_{p_1p_2\dots p_n}$ sono coordinate omogenee dello spazio di appartenenza della W_t. Non espongo qui le proprietà più note di questa varietà (³); ricordo soltanto che essa contiene n sistemi di spazi lineari, immagini dei prodotti $S_0 \times S_0 \times \dots \times S_{r_i} \times \dots \times S_0$ di uno degli spazi per n-1 punti scelti ciascuno in uno dei rimanenti e che in essa esiste un gruppo assolutamente transitivo di omografie, corrispondente alle omografie degli S_{r_i} in sè. Questa varietà, come si è accennato e come si proverà nel seguito, è un modello minimo atto a rappresentare biunivocamente senza eccezione con i suoi punti i gruppi (ordinati) di n punti scelti ciascuno in uno degli S_{r_i}. Essa è evidentemente razionale. La corrispondenza birazionale (solo generalmente biunivoca) con un S_t si può per es. realizzare nel seguente modo: esclusi i punti di W_t giacenti nel piano $z_{00\dots 0} = 0$ [che per brevità chiameremo *iperpiano improprio*, come chiameremo *origine* il punto $(1, 0,\dots 0)$], usufruendo dei fattori di proporzionalità delle x si faccia $x_{10} = x_{20} = \dots = x_{n0} = x_0 \neq 0$ e al punto z dato dalle (1) si faccia corrispondere in S_t il punto di coordinate omogenee $x_0, x_{1p_1'}, x_{2p_2'}, \dots, x_{np_n'}$ $(p_i' = 1,2,\dots r_i)$.

(*) Memoria presentata dall'Accademico FRANCESCO SEVERI.

(¹) Secondo la previsione di F. SEVERI, *Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione, immersi in uno spazio lineare*, Ann. di Mat. [3], 24, 89 (1915) e F. SEVERI: *Introduzione alla Geometria algebrica. Geometria numerativa*, litografie, Docet, Roma, p. 57 (1948).

(²) C. SEGRE, *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi*, Rend. Palermo, 5, 192 (1891).

(³) Ved. E. BERTINI, *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi*, Principato, Messina, 2ª ed., 381 (1923); G. SCORZA, *Sulle varietà di Segre*, Atti Acc. Torino, 45, 93 (1909-10).

2. *Proiezione stereografica di* W_{r+s}. — Limitiamo per ora le nostre considerazioni alla W_{r+s} di SEGRE prodotto di due spazi S_r, S_s, salvo ad estendere poi i risultati alla varietà prodotto di più spazi.

La corrispondenza generalmente biunivoca tra essa e un S_{r+s} considerata al n. precedente si può ottenere mediante una *proiezione stereografica* (4). Nello $S_{(r+1)(s+1)-1}$ di appartenenza della W consideriamo lo S_{rs-1}, Ω, cui appartiene la varietà di SEGRE W^*_{r+s-2} subordinata alla W, ottenuta come prodotto di un iperpiano di S_r e di uno di S_s. Se si proietta W da Ω sopra un S_{r+s} generico, α, si ottiene tra quest'ultimo e la W una corrispondenza generalmente biunivoca. Se i due iperpiani scelti in S_r e in S_s hanno rispettivamente equazioni $x_o=o$, $y_o=o$, Ω ha equazioni:

$$z_{oo} = z_{p'o} = z_{oq'} = 0 \qquad (p' = 1,2,...,r;\ q' = 1,2,...,s),$$

e se per α si assume lo S_{r+s}:

$$z_{p'q'} = 0$$

opposto al precedente nella piramide fondamentale delle coordinate, la corrispondenza ottenuta tra W e α è quella del n. 1; le formule della corrispondenza sono ovviamente le (1) e le:

$$\rho\, x_o (= \rho y_o) = z_{oo},\ \rho x_{p'} = z_{p'o},\ \rho y_{q'} = z_{oq'}.$$

Fanno eccezione alla corrispondenza, in un senso, i punti di W^*_{r+s-2} che hanno il corrispondente indeterminato; con considerazioni di limite si osserva che ad ogni punto di W^* corrisponde, senza eccezione, una retta di α appoggiata ai due spazi S^*_{r-1}, S^*_{s-1}, subordinati ad α, ove si annullano le z_{oq} e le z_{po} rispettivamente, e viceversa; precisamente se il punto P di W^* è l'immagine della coppia di punti A $(o, a_1, ..., a_r)$, B $(o, b_1, ..., b_s)$, presi in S_r e S_s, la retta congiungente i punti $(o, a_1, ..., a_r, o, ..., o)$, $(o, o, ..., o, b_1, ..., b_s)$ di α corrisponde agli ∞^1 punti dell'intorno del primo ordine di P giacenti nel piano congiungente P con i punti $\bar{A}, \bar{B}$, immagini delle coppie (A, O''), (O', B), ove O' (O'') è l'origine di S_r (S_s).

Le eccezioni nell'altro senso si hanno per i punti di S^*_{r-1} (S^*_{s-1}); ad ognuno di questi corrisponde uno spazio Σ_s (Σ_r) subordinato alla W, i cui punti provengono dagli ∞^s (∞^r) punti infinitamente vicini, nell'intorno del primo ordine, al punto considerato e giacenti nello spazio che congiunge quest'ultimo con lo S^*_s (S^*_r) di α proiettante S^*_{s-1} (S^*_{r-1}) dall'origine di α (5).

Le sezioni iperpiane di W si rappresentano in α con le forme quadriche passanti per S^*_{r-1}, S^*_{s-1}. Questa rappresentazione permette di calcolare facilmente l'ordine delle varietà di W rappresentate in α da un S_k, e in particolare l'ordine di W quando $k = r+s$.

Un S_k di α non appoggiato a S^*_{r-1}, S^*_{s-1} (6) è intersecato dalle immagini delle sezioni iperpiane di W secondo tutte le sue forme quadriche, e ad esso corrisponde quindi su W una $V^{2^k}_k$ di VERONESE (7). Se lo S_k si appoggia a S^*_{r-1} in un $S^*_{\mu-1}$ e a S^*_{s-1}

(4) Tale denominazione è giustificata dal fatto che nel caso $r=s=1$ la W è una quadrica dello spazio ordinario e la proiezione che consideriamo si riduce alla ordinaria proiezione stereografica.

(5) Sarà utile nel seguito considerare l'omografia τ_s (τ_r) che muta S_s in S^*_s (S_r in S^*_r) portando le coordinate y_q nelle z_{oq} (x_p nelle z_{po}).

(6) Circostanza che ovviamente può verificarsi solo se k è non maggiore di ciascuno dei numeri r, s.

(7) Qui e nel seguito, con BOMPIANI [*Una proprietà caratteristica dei coni di* VERONESE, Rend. Acc. d'Italia [7], 4, 447 (1943)], dirò varietà di VERONESE le $V^{n^k}_k$ di $\left[\binom{k+n}{n}-1\right]$ rappresentate sopra un S_k dal sistema di tutte le forme d'ordine n.

in un $S^*_{\nu-1}$ ($0 \leqslant \mu \leqslant r$, $0 \leqslant \nu \leqslant s$, $\mu+\nu \leqslant k+1$, ed escludendo per ora il caso $\mu+\nu=k+1$) ad esso corrisponde in W una W^m_k rappresentata in S_k con le forme quadriche per $S^*_{\mu-1}$, $S^*_{\nu-1}$. Immaginando queste ultime spezzate in iperpiani, si ottiene:

$$m = \sum_{\substack{i+j=k \\ i \geqslant \mu,\, j \geqslant \nu}} \frac{k!}{i!\, j!}$$

In particolare, se $\mu+\nu=0$ si ha la varietà di VERONESE già considerata; se $\mu+\nu=k$ si ha una varietà di SEGRE [8]; se $\mu+\nu=k=r+s$, si ottiene la W stessa, che è pertanto di ordine $\frac{t!}{r!\, s!}$.

Nel caso escluso $\mu+\nu=k+1$, lo S_k giace nell'iperpiano improprio di α, ossia nello spazio congiungente S^*_{r-1}, S^*_{s-1}, e ad esso corrisponde su W una varietà di SEGRE a k-1 dimensioni, i cui punti rappresentano senza eccezione le rette di S_k appoggiate a $S^*_{\mu-1}$, $S^*_{\nu-1}$.

3. *Base su* W_{r+s}. — La base delle V_k subordinate a W si può determinare costruendo una base nello spazio α immagine della W. Com'è noto [9] la base delle V_k di uno spazio lineare è costituita da un S_k; una base (sovrabbondante) per le V_k di α, considerato come rappresentativo di W, tenuto conto degli elementi eccezionali e dell'esistenza su W di un gruppo transitivo di omografie, è perciò costituita da S_k appoggiati a S^*_{r-1}, S^*_{s-1} in un $S^*_{\mu-1}$ e in un $S^*_{\nu-1}$ rispettivamente, dove μ, ν descrivono tutti i valori non negativi per i quali $k-s \leqslant \mu \leqslant r$, $k-r \leqslant \nu \leqslant s$, $\mu+\nu \leqslant k$.

Tale base è sovrabbondante, perchè, se per un S_k è $\mu+\nu < k$, si possono sempre trovare convenienti S'_k con $\mu'+\nu'=k$, tali che su W una combinazione lineare delle V_k' (di SEGRE) ad essi corrispondenti sia equivalente alla varietà da esso S_k rappresentata. Si immagini infatti S_k passante per l'origine O e contenuto nello $S_{\mu+s}$ congiungente $S^*_{\mu-1}$ con S^*_s (il che è sempre possibile, dato che è necessariamente $\mu \geqslant k-s$); si consideri inoltre un S'_k passante per O, per $S^*_{\mu-1}$ e per $S^*_{\nu-1}$, incidente S^*_{r-1} in un S^*_μ, S_k in un S_{k-1} e del resto generico. Facendo variare S_k nel fascio individuato da esso e da S'_k in modo da farlo tendere a quest'ultimo, la V_k corrispondente tende a spezzarsi in una V'_k di SEGRE, prodotto di S_μ e dello $S_{k-\mu}$ [10] intersezione con S_s dello S_{k+1} congiungente S_k e S'_k, la quale proviene dai punti di S_k che si avvicinano indefinitamente ai punti di S_μ, e in una residua varietà rappresentata da S'_k. Aumentando così successivamente di un'unità μ o ν, e sostituendo le eventuali V_k' contenute nell'iperpiano improprio con varietà ad esse omografiche su W, si ottiene che ogni varietà a k dimensioni è equivalente ad una combinazione lineare di varietà rappresentate da S_k per i quali $\mu+\nu=k$. Possiamo quindi concludere che *la base minima delle* V_k *tracciate su* W *è costituita dalle* ϱ *varietà di* SEGRE *subordinate a* W, *prodotti di un*

[8] Precisamente, nell'ipotesi che S_k passi per l'origine di α, essa è la varietà prodotto degli spazi S_μ e S_ν congiungenti rispettivamente $S^*_{\mu-1}$, $S^*_{\nu-1}$ con l'origine o, meglio, degli spazi a questi corrispondenti in S_r, S_s per le omografie τ considerate. E' evidente che ogni varietà di SEGRE prodotto di un S_μ di S_r e di un S_ν di S_s è omografica su W ad una varietà di SEGRE così rappresentata.

[9] F. SEVERI, *La base per le varietà algebriche di dimensione qualunque contenute in una data e la teoria generale delle corrispondenze fra i punti di due superficie algebriche*, Mem. Acc. d'Italia, 5, 239 (1934).

[10] O, meglio, dei loro corrispondenti in S_r e in S_s per le τ.

S_j *di* S_r *e di un* S_{k-j} *di* S_s, *ove* j *assume i valori non negativi e non superiori a* k *compresi tra i numeri* k-s, k-s+1, ..., r [11].

Il numero base è perciò, supposto $r \leqslant s$:

$$\begin{array}{lll} \rho = r + s - k + 1 & \text{se} & s \leqslant k \\ \rho = r + 1 & \text{se} & r \leqslant k \leqslant s \\ \rho = k + 1 & \text{se} & k \leqslant r. \end{array}$$

In particolare, la base delle V_{r+s-1} è costituita da due varietà di Segre immagini del prodotto $S_{r-1} \times S_s$ di un iperpiano di S_r e dello S_s, e del prodotto $S_r \times S_{s-1}$ di S_r e di un iperpiano di S_s. La somma delle due varietà costituisce una sezione piana, perchè i loro spazi rappresentativi su α costituiscono insieme una quadrica per S^*_{r-1} e S^*_{s-1}.

4. *Estensione alla generica* W_t. — E' immediata la generalizzazione delle nozioni precedenti alla W_t di Segre del n. 1.

Proiettando W dallo spazio Ω a $(r_1+1)(r_2+1)\ldots(r_n+1) - (r_1+r_2+\ldots+r_n) - 2$ dimensioni, di equazioni:

$$z_{0\ldots0} = z_{p_1'\ldots0} = z_{0p_2'\ldots0} = \cdots = z_{0\ldots p_n'} = 0 \; (p_i' = 1,2,\ldots,r_i)$$

(spazio congiungente gli spazi di appartenenza delle varietà di Segre prodotti di due iperpiani di due degli S_{r_i} per i rimanenti spazi, e contenente la W^*_{t-n}, prodotto di n iperpiani, uno per ciascun S_{r_i}) sullo S_t, che chiameremo α, opposto al precedente nella piramide fondamentale, si ottiene fra i punti di quest'ultimo e i punti della W la corrispondenza birazionale di cui si è detto al n. 1. Eccezioni sono date in un senso dai punti della W^*_{t-n}, cui corrispondono biunivocamente gli S_{n-1} di α appoggiati in un punto ad ognuno degli $S^*_{r_i-1}$ ove si annullano le coordinate diverse delle $z_{0\ldots p_i'\ldots0}$; nell'altro senso dai punti degli $S^*_{r_i-1}$, ad ogni punto $P^{(i)}$ dei quali corrisponde una varietà di Segre a $t-r_i$ dimensioni che rappresenta il prodotto $S_{r_1} \times S_{r_2} \times \ldots \times P^{(i)} \times \ldots \times S_{r_n}$.

Le sezioni iperpiane di W si rappresentano in α mediante le forme di ordine n passanti con molteplicità h per gli spazi congiungenti a n-h a n-h gli $S^*_{r_i-1}$ (h=1, 2, ..., n-1) [12].

In maniera del tutto analoga al caso n=2 si prova che uno S_k di α che si appoggi in un $[\mu_{1\ldots(j)\ldots n} - 1]$ [13] allo spazio congiungente gli $S^*_{r_i-1}$ ad esclusione di $S^*_{r_j-1}$; ....., in un $[\mu_{1\ldots(j_1\ldots j_h)\ldots n} - 1]$ allo spazio congiungente gli $S^*_{r_i-1}$ ad esclusione di $S^*_{r_{j_1}-1}, \ldots, S^*_{r_{j_h}-1}$ (ove $j_1, \ldots, j_h$ (h=1,..., n-1) è una combinazione dei numeri 1,2,..., n e le μ soddisfanno alle limitazioni $0 \leqslant \mu_i \leqslant r_i$ e a quelle necessariamente date dalle dimensioni degli spazi considerati), e che non giaccia nell'iperpiano improprio di α, corrisponde ad una V^m_k con:

$$m = \sum \frac{k!}{g_1!\, g_2! \ldots g_n!}$$

ove il sommatorio è esteso ai valori non negativi delle g soddisfacenti alle relazioni

$$g_1 + g_2 + \ldots + g_n = k\,;\; g_{j_1} + g_{j_2} + \ldots + g_{j_h} \geqslant \mu_{j_1 j_2 \ldots j_h}.$$

(11) Cfr. F. Severi, Rend. di Mat., [5], 2, III (1941).

(12) Cfr. G. Scorza, *Sulle varietà di* Segre (già citato).

(13) La notazione 1,...(a,b,...)...,n sta a indicare la successione 1,2,...,n da cui siano stati tolti i numeri a, b,....

In particolare: se S_k è sghembo con gli spazi congiungenti gli $S^*_{r_i-1}$ a n-1 a n-1 (ossia se tutte le μ sono nulle), si ha $m=n^k$ e la V_k è una $V_k^{n^k}$ di Veronese; se $\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_n=k$, la V_k è una varietà di Segre, di ordine $m=\dfrac{k!}{\mu_1!\,\mu_2!\dots\mu_n!}$, prodotto di un S_{μ_1} di S_{r_1}, di un S_{μ_2} di S_{r_2},..., di un S_{μ_n} di S_{r_n}; se $\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_n=k=t$, si ha la W_t, che è perciò d'ordine $\dfrac{t!}{r_1!\,r_2!\dots r_n!}$.

Inoltre: *la base minima delle V_k di W_t è costituita dalle ϱ varietà di* Segre *ciascuna delle quali è prodotto di n spazi S_{j_i} scelti ognuno in uno S_{r_i} in modo che* $0 \leq j_i \leq r_i$, $j_1+j_2+\dots+j_n=k$.

Supposte le r_i in ordine non decrescente, il numero base è:

$$\varrho=\binom{k+n-1}{n-1} \qquad \text{se} \quad k \leq r_1$$

$$\varrho=\binom{k+n-1}{n-1}+\sum_{1}^{j}{}_{k}(-1)^h\sum_{1}^{j}{}_{i_1<\dots<i_k}\binom{k+n-(r_{i_1}+r_{i_2}+\dots+r_{i_h})+h-1}{n-1} \text{se } r_j<k\leq r_{j+1} (j=1,\dots,n; r_{n+1}=t).$$

Osserviamo che la varietà somma delle n varietà che costituiscono la base delle V_{t-1} di W_t è una sezione iperpiana di questa.

5. *Base reale.* — La varietà di Segre data dalle equazioni parametriche (1) è evidentemente determinata a meno di omografie, corrispondenti alla scelta del riferimento proiettivo nello spazio ambiente.

Fissando per ora l'attenzione sulla $W_{r+s}=S_r\times S_s$ e assumendo reali gli elementi della piramide fondamentale di riferimento delle z, la W così costruita e tutte le sue trasformate mediante omografie reali sono *varietà reali*, nel senso che, oltre a essere trasformate in se stesse dalla trasformazione di coniugio $\varrho\, z_{pq}=\bar{z}_{qp}$, contengono ∞^{r+s} punti reali. Nulla si altera in questo caso nelle argomentazioni svolte quando tutti gli elementi presi in considerazione si intendano reali. In queste condizioni la W presenta il *caso iperbolico*, ossia gli spazi Σ_r, Σ_s appartenenti ai sistemi contenuti in W e passanti per un suo punto reale generico, sono reali.

Non si può dire altrettanto per le trasformate di W mediante omografie complesse; sia R una tale trasformata, e sia essa stessa reale nel senso che la trasformazione di coniugio la muti in sè. Se essa contiene inoltre un punto reale, si considerino gli spazi Σ_r, Σ_s passanti per quel punto: o ognuno di essi è trasformato in se stesso dal coniugio, e si ha il caso iperbolico, oppure uno è il coniugato dell'altro, e quindi $r=s$, e si ha il caso ellittico; ovviamente i due Σ_r contengono ciascuno un solo punto reale, perchè essi incidono in un solo punto. Gli ∞^{2r^2+2r} S_{r^2} generici reali per il punto considerato intersecano la varietà in un numero finito di punti, mentre un punto reale generico della R è staccato da ∞^{2r^2} di tali S_{r^2}; d'altra parte la varietà ha l'ordine pari, e quindi uno almeno degli ulteriori punti d'intersezione con ciascuno degli S_{r^2} considerati è reale; tanto basta per affermare che la varietà contiene ∞^{2r} punti reali; e in ognuno di essi presenta il caso ellittico in conseguenza dell'esistenza su R di un gruppo transitivo di omografie reali, corrispondente alle omografie reali dei due S_r in sè.

La R_{2r} si può rappresentare su un S_{2r} reale in modo del tutto analogo alla W_{2r}, e precisamente proiettandola dallo spazio reale S_{r^2-1} cui appartiene la varietà di

Segre reale R^*_{2r-1}, luogo dei punti (reali) d'incontro dei Σ_r' (complessi coniugati) che si appoggiano in punti complessi coniugati a due iperpiani complessi coniugati scelti nei due Σ_r passanti per un punto reale di R. Le sezioni iperpiane di R sono rappresentate su S_{2r} dalle forme quadriche passanti per due spazi complessi coniugati S^*_{r-1}, $\bar{S}^*_{r-1}$.

Una base per le Φ_k reali di R_{2r} si può costruire in S_{2r}, tenuto conto degli elementi eccezionali della rappresentazione, osservando che ogni Φ_k reale di R_{2r} (fuori dell'iperpiano improprio, come si può sempre supporre) si proietta in una varietà k-dimensionale reale di S_{2r}. *Una base minima delle Φ_k di R_{2r} è quindi rappresentata in S_{2r} dagli S_k reali appoggiati a S^*_{r-1} e a $\bar{S}^*_{r-1}$ rispettivamente in un $S^*_{\mu-1}$ e nello $\bar{S}^*_{\mu-1}$ coniugato, quando μ descrive i valori non negativi compresi tra i numeri* k-r, k-r+1,..., $\left(\frac{k}{2}\right)$ (14). Poichè ognuno di questi S_k può interpretarsi come il luogo degli $S_{2\mu}$ congiungenti $S^*_{\mu-1}$ e $\bar{S}^*_{\mu-1}$ con i punti di un generico $S_{k-2\mu}$, la varietà corrispondente è il luogo delle $\infty^{k-2\mu}$ varietà di Segre $R_{2\mu}$, prodotto di due S_μ, passanti per una $V^{k-2\mu}_{k-2\mu}$ di Veronese rappresentata da uno $S_{k-2\mu}$ sghembo con S^*_{r-1}, $\bar{S}^*_{r-1}$.

Il numero base è:

$$\rho = \left(\frac{k}{2}\right) + 1 \qquad \text{se } k \leqslant r$$

$$\rho = \quad r \quad - \left(\frac{k-1}{2}\right) \quad \text{se } k \geqslant r.$$

Nel caso particolare $k = 2r - 1$ si ha un iperpiano di S_{2r}; esso, insieme con l'iperpiano improprio, rappresenta una sezione di R_{2r} con un iperpiano passante per la R^*_{2r-1}. Quindi: *la base minima delle Φ_{2r-1} di R_{2r} è una sezione iperpiana, la R_{2r} contiene solo intersezioni complete ed è un modello minimo rispetto alle trasformazioni birazionali senza eccezione.*

Com'è noto (15), la falda reale della R_{2r} è atta a rappresentare in modo reale i punti di un S_r proiettivo complesso.

E' pressochè immediata l'estensione di questi concetti alla varietà di Segre R_t, contenente ∞^t punti reali, trasformata omografica della W_t costruita in base alle (1). Fissato un punto reale della R_t, gli spazi $\Sigma_{r_1}, \Sigma_{r_2}, \dots, \Sigma_{r_n}$ passanti per esso saranno parte reali e parte complessi, e questi ultimi a due a due complessi coniugati. Siano $\Sigma_{r_1}, \dots, \Sigma_{r_l}, \Sigma_{r_{l+1}} = \bar{\Sigma}_{r_1}, \dots, \Sigma_{r_{2l}} = \bar{\Sigma}_{r_l}$ gli spazi complessi, $\Sigma_{r_{2l+1}}, \dots, \Sigma_{r_n}$ quelli reali. Rappresentata la R_t su un S_t reale, in modo che $S^*_{r_i-1}$ ed $S^*_{r_{l+i}-1}$ (i = 1,2,..., l) siano complessi coniugati e $S^*_{r_j-1}$ (j = 2l+1,...,n) siano reali, si costruisce una base reale nello S_t, e quindi sulla R_t, analogamente a quanto si è fatto per la R_{2r}. Tale base risulta rappresentata dagli S_k appoggiati a $S^*_{r_i-1}$ in un $S^*_{\mu_i-1}$ (e quindi a $\bar{S}^*_{r_i-1}$ nello $\bar{S}^*_{\mu_i-1}$) e a $S^*_{r_j-1}$ in un $S^*_{\nu_j-1}$, dove μ_i descrive tutti i possibili valori non negativi compresi tra i numeri $k-r_i, \dots, \left(\frac{k}{2}\right)$; le ν_j invece descrivono i valori $0, 1, \dots, r_j$ con la condizione che la somma $2(\mu_1 + \dots + \mu_l) + \nu_{2l+1} + \dots + \nu_n$ raggiunga il massimo valore non superiore a k.

(14) Con $\left(\frac{k}{2}\right)$ indico la parte intera di $\frac{k}{2}$.

(15) F. Severi, *Conferenze di Geometria algebrica*, raccolte da B. Segre, litografie, Roma p. 71 (1927).

Si osservi che nel caso $n=2l$, *la falda reale della* $R_{2(r_1+\dots+r_l)}$ *rappresenta la riemanniana del prodotto di* l *spazi proiettivi complessi* $S_{r_1}, \dots, S_{r_l}$.

6. *Quadrato simmetrico di* S_r *e sua base.* — Tornando al caso $n=2$, quando si considera la varietà delle coppie dei punti di due S_r sovrapposti, questa può intendersi come la *varietà delle coppie ordinate dei punti di* S_r, nel qual caso si ottiene la W_{r+s} in cui $r=s$, prodotto di S_r per una sua copia, ovvero come *varietà delle coppie non ordinate dei punti di* S_r, nel qual caso si parla anche di *quadrato simmetrico* di S_r. E' evidente che questa seconda varietà, $\overline{\Pi}_{2r}$, è la varietà delle coppie dell'involuzione γ_2 di $\Pi_{2r}=S_r \times S_r$, in cui sono coniugati i punti immagini delle *due* coppie ordinate cui dà luogo una coppia *non* ordinata. Sulla varietà di Segre W_{2r}, modello di Π_{2r}, la γ_2 ha evidentemente le equazioni $\varrho\, z'_{pq}=z_{qp}$ ed è subordinata all'omologia biassale armonica χ dello spazio ambiente, avente come assi gli spazi $\omega_{\frac{r(r+1)}{2}-1}$, $z_{pq}+z_{qp}=0$, e $\beta_{\frac{r(r+3)}{2}}$, $z_{pq}=z_{qp}$; il luogo dei punti uniti della γ_2 su W_{2r}, essendo quest'ultima non incidente ω, è l'intersezione di W_{2r} con β: una $V_r^{2^r}$ di Veronese; ciò si vede per esempio rappresentando W_{2r} sopra un S_{2r}, come al n. 2; la γ_2 si riduce all'omologia $x_\nu'=y_\nu'$; un'asse di questa, corrispondente a β, è lo S_r, $x_\nu'=y_\nu'$, sghembo con gli S^*_{r-1}. Segue pure che γ_2, e quindi $\overline{\Pi}_{2r}$, è una varietà razionale, essendo birazionalmente equivalente alle coppie di un'omologia involutoria di uno spazio lineare.

La base di $\overline{\Pi}_{2r}$ si costruisce facilmente a partire dalla base di Π_{2r}. Scelte anzitutto le varietà $S_j \times S_{k-j}$, che chiameremo A_j, costituenti base per Π_{2r}, in modo che A_j sia coniugata di A_{k-j} in γ_2, ciò che si ottiene prendendo in S_r gli spazi S_j e S_{k-j} l'uno contenuto nell'altro (propriamente no), è evidente che tutte le V_k di Π_{2r} autoconiugate in γ_2 sono equivalenti ad una combinazione lineare del tipo $\Sigma_j \lambda_j A_j$, con $\lambda_j=\lambda_{k-j}$, ossia:

$$V_k \equiv \Sigma \lambda_j (A_j + A_{k-j}) + \lambda_{\frac{k}{2}} A_{\frac{k}{2}} \quad \left(j < \frac{k}{2}\right)$$

ove l'ultimo termine non comparisce se k è dispari.

Ad una $\overline{V}_k$ di $\overline{\Pi}_{2r}$, contata due volte, corrisponde su Π_{2r} una V_k del tipo detto e, poichè ad A_j e A_{k-j} corrisponde la medesima $\overline{A}_j$ di $\overline{\Pi}_{2r}$, e ad $A_{\frac{k}{2}}$ una $\overline{A}_{\frac{k}{2}}$ contata due volte, vale, su $\overline{\Pi}_{2r}$, la relazione:

$$(3) \qquad 2\,\overline{V}_k \equiv 2\,\Sigma_i \lambda_i \overline{A}_i \qquad \left(i \leqslant \frac{k}{2}\right);$$

le $\overline{A}_i$ *costituiscono* cioè *una base intermediaria*. Potremo affermare che essa è minima quando avremo provato che $\overline{\Pi}_{2r}$ non possiede divisori dello zero [e che quindi nella (3) si può prescindere dal fattore 2]. Essendo vera quest'ultima affermazione per $r=1$ (un modello di $\overline{\Pi}_2$ è notoriamente un piano), dimostriamola per induzione da r-1 ad r. A questo scopo osserviamo che, per $k<r$, ogni V_k di Π_{2r} è equivalente ad una Λ_k giacente in *una* $\Pi_{2(r-1)}$ subordinata, perchè in quest'ultima si possono scegliere le $A_j=S_j \times S_{k-j}$ $(j=0,1,\dots,k)$ costituenti base per le V_k di Π_{2r}. Se V_k è autoconiugata nella γ_2, tale si può prendere la Λ_k. E' intuitivo che la variazione continua che porta V_k in Λ_k si può scegliere in modo che le varie posizioni descritte siano varietà autoco-

niugate nella γ_2; per provarlo, rappresentiamo, al solito, Π_{2r} con W_{2r} e quindi con un S_{2r}, ove S^*_{r-1} e S'^*_{r-1} sono gli spazi eccezionali, che supponiamo coniugati nella γ'_2, immagine di γ_2. Si può rappresentare $\Pi_{2(r-1)}$ in uno spazio $\pi_{2(r-1)}$ passante per l'origine e appoggiato a S^*_{r-1}, S'^*_{r-1} in due spazi T^*_{r-2}, T'^*_{r-2} coniugati nella γ_2'. Fissata una generica retta a, unita nella γ_2' e appoggiata a S^*, S'^*, trasformiamo l'immagine V_k' di V_k (immagine che, previa un'omografia di W_{2r} in sè, si può supporre in posizione generica rispetto agli elementi fissati), mediante il gruppo ∞^1 delle omologie biassiali di assi a e π, le quali sono evidentemente permutabili con γ_2'; V_k' descrive sul cono Γ_{k+2}, proiettante V_k' da a, un fascio lineare contenente la proiezione V_k'' di V_k' da a su π. Per la genericità supposta, Γ_{k+2} non interseca T^*, T'^* e si appoggia a S^*, S'^* in un numero finito di punti. Nel fascio di varietà si congiungano la V_k' e la V_k'' con un arco non passante per le varietà incidenti S^*, S'^*; le varietà rappresentate dai punti di quest'arco forniscono la variazione continua richiesta.

Ciò posto, sia, per assurda ipotesi, $\overline{Z} = \overline{M} - \overline{N}$ un divisore dello zero di $\overline{\Pi}_{2r}$; sia cioè $\overline{M} \not\equiv \overline{N}$, $\lambda\overline{M} \equiv \lambda\overline{N}$. Siano M, N le varietà di Π_{2r} corrispondenti alle varietà doppie $\overline{M}$, $\overline{N}$; su Π_{2r}, M, N equivalgono a due varietà M', N' di $\Pi_{2(r-1)}$, cui corrispondono su $\overline{\Pi}_{2r}$ le $\overline{M}'$, $\overline{N}'$ di $\overline{\Pi}_{2(r-1)}$. Da $\lambda\overline{M} \equiv \lambda\overline{N}$ segue immediatamente $\lambda\overline{M}' \equiv \lambda\overline{N}'$; da $\overline{M}' \equiv \overline{N}'$ seguirebbe $\overline{M} \equiv \overline{N}$ (dato che la variazione continua su Π_{2r} non fa uscire dal campo delle varietà autoconiugate), e quindi dev'essere $\overline{M} \not\equiv \overline{N}$. Ne viene che $\overline{Z}' = \overline{M}' - \overline{N}'$ è divisore dello zero anche su $\overline{\Pi}_{2(r-1)}$, ciò che è assurdo. Quindi $\overline{\Pi}_{2r}$ è priva di divisori dello zero di dimensione minore di r; ma poichè i gruppi dei divisori dello zero per le dimensioni k e 2r—k—1 sono isomorfi ([16]), e $\overline{\Pi}_{2r}$ è razionale, *su $\overline{\Pi}_{2r}$ non esistono divisori dello zero e le varietà $\overline{\Lambda}_j$ costituiscono una base minima.*

Il numero base è evidentemente:

$$\rho = \binom{k}{2} + 1 \qquad \text{per } k \leqslant r$$

$$\rho = r - \binom{k-1}{2} \qquad \text{per } k > r$$

Le osservazioni fatte a pag. 7 intorno all'omologia χ permettono di costruire immediatamente un modello proiettivo $\overline{W}_{2r}$ (che proveremo minimo) di $\overline{\Pi}_{2r}$, proiettando doppiamente W_{2r} da ω su β; infatti questa proiezione pone una corrispondenza biunivoca senza eccezione tra le coppie di γ_2 e i punti di $\overline{W}_{2r}$. In $\overline{W}_{2r}$ è contenuta, come varietà di diramazione, la $V_r^{2^r}$ di Veronese sezione di W_{2r} e β. L'ordine di $\overline{W}_{2r}$ è $\frac{1}{2}\binom{2r}{r}$.

Si verifica facilmente che $\overline{W}_{2r}$ è il luogo degli S_r tangenti a $V_r^{2^r}$, luogo che si può quindi costruire nel seguente modo ([17]): costruita la $V_r^{2^r}$ di Veronese, immagine proiettiva del sistema totale delle forme quadriche di S_r, e osservato che due suoi S_r tangenti, rappresentati ciascuno dalle forme aventi un prefissato punto doppio, si appoggiano in un punto, si assuma questo ad immagine della coppia dei punti di S_r corrispondenti ai due punti di contatto, ove questi siano distinti; nel caso che i due

([16]) Ved. per es. F. Severi, *Fondamenti di Geometria algebrica*, lezioni tenute alla Sc. Norm. Sup. di Pisa, litografie, CEDAM, Padova, p. 135, 140 (1940).

([17]) Cfr. C. Segre, loc. cit. e G. Bordiga, *Sul modello minimo della varietà delle n-ple non ordinate dei punti di un piano*, Ann. di Mat. (3), 27, 1 (1918), dove si trovano alcuni dei risultati qui riportati.

punti di S_r, e quindi di $V_r^{2^r}$, siano coincidenti, si assuma ad immagine della coppia il punto stesso.

Osserviamo che: la $V_r^{2^r}$ rappresenta coi suoi punti le coppie di punti coincidenti; uno S_r tangente rappresenta coi suoi punti le coppie aventi un punto fisso; le omografie di S_r in sè subordinano su $\overline{W}_{2r}$ un gruppo transitivo di trasformazioni avente la $V_r^{2^r}$ come sistema di intransitività.

Su questa varietà è immediato il significato della base costruita precedentemente su $\overline{\Pi}_{2r}$. Si è detto che A_j si ottiene prendendo S_k contenuto in $S_{k\text{-}j}$; consideriamo le $V_j^{2^j}$ e $V_{k-j}^{2^{k-j}}$ di VERONESE rappresentate da questi spazi; è evidente che $\overline{A}_j$ è l'insieme degli $S_{k\text{-}j}$ tangenti a $V_{k\text{-}j}$ nei punti di V_j. Per $k=2r-1$, l'insieme degli S_r tangenti a $V_r^{2^r}$ nei punti di una $V_{r-1}^{2^{r-1}}$ subordinata è la sezione di $\overline{W}_{2r}$ con l'iperpiano tangente a $V_r^{2^r}$ lungo la $V_{r-1}^{2^{r-1}}$. *La base delle V_{2r-1} di $\overline{W}_{2r}$ è quindi una sezione iperpiana; conseguentemente $\overline{W}_{2r}$ è il modello minimo di $\overline{\Pi}_{2r}$, e risulta determinato a meno di omografie.*

Si verifica senza difficoltà che $\overline{W}_{2r}$ è data analiticamente, nello $S_{\frac{r(r+3)}{2}}$ in cui sono coordinate omogenee z_{pq} $(p \leqq q)$, mediante le equazioni parametriche:

$$\rho\, z_{pq} = x_p\, y_q + x_q\, y_p, \tag{4}$$

quando x ed y descrivono indipendentemente lo S_r. Che questo sia un modello senza eccezioni di $\overline{\Pi}_{2r}$ si sarebbe potuto affermare a priori osservando che le x, y, date a meno dell'ordine, individuano le z, e viceversa, le z, date compatibilmente con la risolubilità del sistema (4), determinano le x, y, a meno dello scambio simultaneo di x_p con y_p.

Osserviamo infine che $\overline{W}_{2r}$ non risulta in generale priva di punti multipli. Per $r=1$, come già si è accennato, si ha un piano, ove una conica costituisce la $V_r^{2^r}$; per $r>1$ i punti di $\overline{W}_{2r}$ non giacenti su $V_r^{2^r}$ sono semplici, come segue immediatamente dall'esistenza su $\overline{W}_{2r}$ del gruppo transitivo di trasformazioni, mentre quelli di $V_r^{2^r}$ sono *punti 2^{r-1}pli cuspidali*, nel senso che per essi passa una sola falda della varietà, com'è evidente dalla proiezione doppia di W_{2r} su $\overline{W}_{2r}$. Il cono tangente alla varietà in un punto di $V_r^{2^r}$ è il cono che proietta quest'ultima (o, il che è lo stesso, una sua $V_{r-1}^{2^{r-1}}$ generica subordinata) dallo S_r ad essa tangente nel punto considerato.

7. *Potenza n-esima simmetrica di S_r e sua base.* — E' pressochè immediata la estensione di alcuni concetti e costruzioni precedenti alla W_{nr}, modello della *varietà $\overline{\Pi}_{nr}$ delle n-ple non ordinate dei punti di un S_r, o n-esima potenza simmetrica di S_r.* Esporrò le conclusioni seguenti.

La base intermediaria per le V_k di $\overline{\Pi}_{nr}$ è costituita dalle varietà rappresentanti ognuna il prodotto di n spazi $S_{j_1}, S_{j_2}, \dots, S_{j_n}$, ciascuno contenuto (anche non propriamente) *nel seguente, tali che $j_1+j_2+\dots+j_n=k$; $k-r \leqq j_i \leqq r$; $j_i \geqq 0$. Per $k \leqq r-1$ o $k \geqq (n\text{-}1)r$* (e presumibilmente per tutte le dimensioni) *tale base è anche minima, in quando non esistono divisori dello zero.*

L'involuzione γ, d'ordine $\nu = n!$, in cui si corrispondono punti di Π_{nr} immagini delle ν n-ple ordinate che si ricavano da una n-pla non ordinata, è un modello di $\overline{\Pi}_{nr}$. Sul modello W_{nr} di SEGRE della Π_{nr}, la γ si rappresenta esprimendo l'uguaglianza delle $z_{p_1 p_2 \dots p_n}$ $(p_1 \gtreqless p_2 \gtreqless \dots \gtreqless p_n)$ che differiscono soltanto per una permutazione degli indici:

il gruppo delle trasformazioni (omografiche) che portano un punto generico in ciascuno dei suoi corrispondenti è generato dalle omologie involutorie che mutano le z contenenti due prefissati indici nelle z in cui gli stessi indici compariscono permutati, lasciando inalterate le altre coordinate. Rappresentando questa involuzione sullo S_{nr} immagine birazionale di W_{nr} si deduce la razionalità di $\overline{\Pi}_{nr}$.

Gli $S_{\nu-1}$ congiungenti ν-ple di punti coniugati nella γ si appoggiano allo spazio a $(r+1)^n - \binom{n+r}{r} - 1$ dimensioni, di equazioni $\sum\limits_{i_1 i_2 \dots i_n} z_{i_1 i_2 \dots i_n} = 0$ (ove ogni equazione è relativa ad una combinazione con ripetizione $p_1, p_2, \dots, p_n$ degli indici $0, 1, \dots, r$, e il sommatorio è esteso alle permutazioni dei p, supposti tutti diversi), e allo spazio a $\binom{n+r}{r} - 1$ dimensioni, che ha per equazioni le equazioni delle trasformazioni che generano l'involuzione. Proiettando quindi W_{nr} dal primo di questi spazi sul secondo, si ottiene la rappresentazione ν-pla della W_{nr} su una $\overline{W}_{nr}$, che assumiamo a modello della $\overline{\Pi}_{nr}$. La varietà intersezione di W_{nr} con lo spazio su cui si proietta è la $V_r^{n^r}$ di Veronese che rappresenta le n-ple di punti coincidenti. E' da ciò immediato che l'ordine di $\overline{W}_{nr}$ è $\dfrac{(nr)!}{n!\,(r!)^n}$.

La $\overline{W}_{nr}$ così costruita coincide con la varietà dei punti di appoggio di n spazi, ad $\binom{n+r-1}{r} - 1$ dimensioni, $(n-1)$-osculatori in n punti distinti alla $V_r^{n^r}$ di Veronese immagine proiettiva del sistema delle forme d'ordine n di S_r, varietà che appartiene ad uno spazio a $\binom{n+r}{r}$ dimensioni ([18]). Tale punto di appoggio si assume come immagine della n-pla dei punti di S_r immagini dei punti di osculazione. Qualora i punti non siano tutti distinti, si rappresenta la n-pla mediante il punto d'appoggio degli spazi a $\binom{n-h+r}{r} - 1$ dimensioni, $(n-h)$-osculatori a $V_r^{n^r}$ nei punti corrispondenti a quelli ove coincidono h punti della n-pla $(1 \leqslant h \leqslant n)$. La varietà dei punti immagini di n-ple contenenti h punti coincidenti è perciò costituita dall'insieme dei punti di appoggio di uno spazio $(n-h)$-osculatore e di $n-h$ spazi $(n-1)$-osculatori; e le n-ple aventi h punti coincidenti in un prefissato punto di S_r riempiono una $\overline{W}_{(n-h)r}$ nello spazio $(n-h)$-osculatore nel punto corrispondente.

Quando $V_r^{n^r}$ si rappresenta parametricamente con le equazioni

$$\rho\, z_{p_1 p_2 \dots p_n} = x_{p_1} x_{p_2} \dots x_{p_n} \qquad (p_1 \leqslant p_2 \leqslant \dots \leqslant p_n)$$

(con ovvio significato dei simboli), si ottiene per la $\overline{W}_{nr}$, la rappresentazione parametrica:

$$(5) \qquad \rho\, z_{p_1 p_2 \dots p_n} = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} x_{i_1 p_1} x_{i_2 p_2} \dots x_{i_n p_n} \qquad (p_1 \leqslant p_2 \leqslant \dots \leqslant p_n),$$

ove $p_1\, p_2 \dots p_n$ sono le combinazioni con ripetizione degli indici $0, 1, \dots, r$, mentre il sommatorio è esteso a tutte le $n!$ permutazioni $i_1\, i_2 \dots i_n$ degli indici $1, 2, \dots, n$ ([19]).

Analogamente a quanto si è detto al n. 6 riguardo alle (4), e per lo stesso motivo, si poteva osservare a priori che la varietà data dalle (5) è un modello proiettivo della $\overline{\Pi}_{nr}$.

([18]) Cfr. nota ([17]).

([19]) Ovvero, il che è lo stesso, a tutte le permutazioni degli indici $p_1 p_2 \dots p_n$, supposti tutti diversi. Cfr. formula (6) a pag. 7 del citato lavoro di Bompiani, nel quale il sommatorio è esteso invece alle permutazioni dei p diversi tra loro.

Si verifica anche qui che *la base delle* $\overline{V}_{nr-1}$ *di* $\overline{W}_{nr}$ *è una sezione iperpiana,* e quindi $\overline{W}_{nr}$ *è un modello minimo di* $\overline{\Pi}_{nr}$, determinato a meno di omografie.

9. *Una proprietà topologica.* — Dimostrerò in questo n. una proprietà enunciata da Severi [29], e che non si trova finora dimostrata esplicitamente: *la varietà di* Segre W_t *è di ordine invariantico* $\frac{t!}{r_1!\, r_2! \dots r_n!}$ *non solo rispetto alle trasformazioni birazionali senza eccezione, ma anche rispetto agli omeomorfismi.*

E' noto che l'ordine invariantivo topologico di una varietà è dato dal minimo (non nullo) del valore assoluto dell'indice di Kronecker relativo all'intersezione di t cicli a t-1 dimensioni, appartenenti ad un sistema continuo. Sostituendo questi cicli con cicli algebrici ad essi omologhi, il che è sempre possibile trattandosi di una varietà razionale, si ottiene, per un teorema di Lefschetz, che le loro intersezioni hanno tutte il medesimo segno; appartenendo ad un medesimo sistema continuo, essi sono equivalenti alla medesima combinazione lineare $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_n A_n$ delle A_i ove A_i rappresenta la varietà di Segre immagine del prodotto $S_{r_1} \times \dots \times S_{r_i} \times \dots \times S_{r_n}$ facente parte della base (v. n. 4) (i=1,2,..., n e naturalmente *non* indica la dimensione).

Introduciamo la notazione $(A_1^{j_1} A_2^{j_2} \dots A_n^{j_n})$ $(j_i \geq 0)$ per indicare l'intersezione di j_1 varietà A_1, j_2 varietà A_2,..., j_n varietà A_n. E' pressochè evidente che $(A_1^{j_1} A_2^{j_2} \dots A_n^{j_n})$ è la varietà di Segre $S_{r_1-j_1} \times S_{r_2-j_2} \times \dots \times S_{r_n-j_n}$ e quindi che tra questi simboli si può operare con le ordinarie regole dell'algebra; inoltre $(A_i^{j_i})$ è nullo per $j_i > r_i$. Si ha quindi:

$$(\{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_n A_n\}^t) = \sum_{j_1+j_2+\dots+j_n=t} \frac{t!}{j_1!\, j_2! \dots j_n!} \lambda_1^{j_1} \lambda_2^{j_2} \dots \lambda_n^{j_n} \left(A_1^{j_1} A_2^{j_2} \dots A_n^{j_n}\right).$$

Nello sviluppo esiste un solo termine in cui nessun j_i sia maggiore del corrispondente r_i, precisamente quello in cui $j_i = r_i$ (per ogni i). Esso è quindi l'unico termine non nullo dello sviluppo e rappresenta un punto, immagine di un'n-pla di punti presi ognuno in uno degli S_{r_i}. L'indice di Kronecker cercato è quindi

$$\frac{t!}{r_1!\, r_2! \dots r_n!} \lambda_1^{r_1} \lambda_2^{r_2} \dots \lambda_n^{r_n}$$

e il suo valore assoluto è minimo quando le λ_i sono tutte, in modulo, eguali all'unità; per ottenere una varietà effettiva deve essere $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1$, e la $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_n A_n$ si riduce ad una sezione iperpiana, il che prova l'asserto.

Per le $\overline{W}_{nr}$ *la proprietà analoga è immediata conseguenza del fatto che la base minima è data da una sezione iperpiana.*

(29) F. Severi, *Geometria numerativa*, già citato.