Relazione sul premio per la matematica (anno 1915), presentata dalla Commissione composta dei Soci Enr. D'Ovidio, V. Volterra *e* L. Bianchi (relatore).

La sottoscritta Commissione, delegata a dar giudizio sul conferimento del premio per la matematica nell'anno 1915, ha fissato questa volta la sua attenzione sulle Memorie d'analisi applicata alla geometria, che il prof. Pasquale Calapso ha pubblicato dal 1910 in poi.

Sono particolarmente le due Memorie: *Intorno alle superficie applicabili sulle quadriche ed alle loro trasformazioni*, contenute nei tomi 32 e 36 (1911-1913) dei Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, e l'ampio lavoro collo stesso titolo, apparso nel 1912 negli Annali di matematica (tom. XIX), che qui debbono venire prese in considerazione. Queste pubblicazioni del Calapso costituiscono un insieme organico di ricerche importanti ed originali nella teoria della deformazione delle quadriche, soggetto verso cui convergevano da varî anni gli sforzi dei cultori della geometria infinitesimale. A bene intendere l'importanza del contributo arrecato a questa teoria dal Calapso, conviene ancora risalire al lavoro fondamentale pubblicato dell'A. stesso fin dal 1902 nel tom. 16 dei Rendiconti del Circolo, del quale gli attuali formano una felice continuazione ed un coronamento. All'epoca ora indicata, la teoria delle trasformazioni per le superficie applicabili sulle quadriche era costruita completamente solo pel caso delle quadriche di rotazione attorno all'asse focale, e col sussidio dei teoremi di Guichard che collegano le deformate di queste quadriche alle superficie a curvatura costante. Il Calapso, affrontando nella Memoria del 1902 il problema della deformazione per le quadriche generali, ottiene una fondamentale trasformazione analitica del problema, movendo dalla considerazione del sistema coniugato comune alla quadrica fondamentale ed alla sua deformata. Il problema viene così ricondotto a trovare quei doppî sistemi ortogonali di linee *sulla sfera*, che dànno al ds^2 sferico una forma in cui la somma o la differenza dei due coefficienti eguaglia un'assegnata forma quadratica φ nelle coordinate X, Y, Z di un punto mobile sulla sfera. È questo un risultato per sè notevole, che costituisce la naturale generalizzazione di quello che per l'immagine sferica delle linee di curvatura delle superficie a curvatura costante segue, nel noto modo, dal teorema di Weingarten. E invero, se la quadrica fondamentale è una sfera (reale od immaginaria), il sistema coniugato comune alla sfera ed alla sua deformata diventa quello delle linee di curvatura; e d'altra parte l'indicata forma quadratica φ si riduce, in questo caso ad una costante.

Il sistema delle equazioni differenziali per X, Y, Z che il Calapso ottiene con questa trasformazione del problema, costituisce il fondamento per tutte le sue ricerche successive. Nella Memoria stessa esso viene applicato a presentare sotto nuova forma la teoria delle trasformazioni delle deformate delle quadriche rotonde, e successivamente a porre sotto una semplice e molto utile forma l'equazione a derivate parziali del secondo ordine per le deformate dei paraboloidi.

A questo lavoro fondamentale del Calapso seguono, intrecciandosi in vario modo, ricerche di altri autori, i quali riuscirono, col sussidio essenziale di nuove idee geometriche, a costruire una teoria completa delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche generali. Dopo la pubblicazione per esteso di queste ricerche, avvenuta nel 1909 nel tom. 34 delle *Mémoires des savants étrangers*, il Calapso si è applicato, con molto successo, ad illustrare le nuove teorie dal suo punto di vista ed a coordinare fra loro le varie specie di trasformazioni ideate, il cui nesso restava ancora inesplorato.

Frutto di questi studi del Calapso sono le tre Memorie citate da principio (1911-1913), sulle quali, senza entrare in un'analisi minuta, veniamo ora a riferire, cercando di rilevarne i punti principali. Le ricerche del Calapso hanno pienamente confermato che le trasformazioni elementari di tutta la teoria sono veramente le trasformazioni B_k per congruenza W, le cui due falde focali sono superficie applicabili sulla stessa quadrica, alle quali è da aggregarsi, come ausiliaria, la trasformazione (involutoria) H per le quadriche coniugate da deformazione. Si può dire che il ricordato sistema differenziale fondamentale, al quale nel 1902 il Calapso aveva ricondotto il problema della deformazione delle quadriche, gli ha servito come ponte di passaggio fra le trasformazioni B_k e le trasformazioni di varia specie dovute a Guichard. Una prima ricerca di questo genere offre la Memoria del tom. 32 dei Rendiconti del Circolo, nella quale si dimostra che la trasformazione data da Guichard nel 1905 non è altro che una D_m, onde segue che essa si risolve nel prodotto di B_k. Ma le ricerche sistematiche sull'argomento delle trasformazioni sono quelle esposte dal Calapso nel tom. 19 degli Annali di matematica. In questo lavoro è contenuta, per le deformate delle quadriche a centro, una nuova trattazione della teoria delle trasformazioni B_k, completa dal punto di vista intrinseco, e tutta fondata sulla considerazione del sistema coniugato permanente e del relativo sistema differenziale, con esclusione quindi soltanto delle deformate rigate. Il nuovo modo di esposizione (che realizza, per le deformate delle quadriche a centro, la trattazione intrinseca che prima si presentò, nell'ordine cronologico, per le deformate dei paraboloidi) ha per alcune parti della teoria i suoi particolari vantaggi; così, p. es., si rivela molto utile nella dimostrazione del teorema di permutabilità, alla cui conferma si arriva rapidamente. Ma ci resta ancora da dire del risultato più originale e naturale conseguito dal Calapso nella sua trattazione, colla quale si viene ad aggiungere una nuova trasformazione *singolare*, opportunamente dall'A. indicata con B_∞. Per intenderne il significato, conviene ricordare che le trasformazioni B_k di una deformata della quadrica Q fondamentale corrispondono individualmente ai valori del parametro k, che fissa la posizione della quadrica Q_k nella schiera delle quadriche omofocali, senza esclusione dei valori singolari di k che corrispondono alle coniche focali. Ora fra queste è pure da annoverarsi, in ogni caso, il circolo immaginario all'infinito (assoluto), corrispondente al valore $k=\infty$ del parametro; e la nuova trasformazione singolare introdotta dal Calapso è appunto da riguardarsi come associata a questa quarta conica focale. Ciò che vi ha di più notevole nel risultato è che, mentre la costruzione geometrica per congruenze W diventa in questo caso illusoria, la seconda falda focale venendo tutta rigettata all'infinito, dal punto di vista analitico invece le formole di passaggio dal sistema noto di soluzioni delle equazioni differenziali fondamentali a sistemi nuovi di soluzioni conservano un senso ben determinato anche in questo caso-limite. E del resto si può trovare, come il Calapso dimostra, anche un significato geometrico delle B_∞ analogo a quello delle altre B_k, alla considerazione delle congruenze W sostituendo quella delle deformazioni *infinitesime* corrispondenti della prima falda focale. Nelle ordinarie trasformazioni B_k, gli spostamenti dei singoli punti della deformata della quadrica Q, per le corrispondenti deformazioni infinitesime, avvengono normalmente ai coni circoscritti dai punti di Q alla quadrica omofocale Q_k; nelle B_∞ queste deformazioni infinitesime si riducono a *traslazioni isotrope*, mentre i coni corrispondenti diventano quelli projettanti l'assoluto (coni isotropi). In fine è da avvertire che mentre una B_∞, applicata ad una deformata reale, conduce ad una deformata immaginaria, combinando opportunamente fra loro le B_∞ e colle altre B_k, si ottengono trasformazioni reali. Ed appunto il Calapso, nella Memoria degli Annali che stiamo esaminando, fa una ricerca accurata del modo di composizione delle B_k in generale, ed applica in particolare i risultati alla ricerca di trasformazioni reali per le deformate reali delle quadriche reali. E delle accennate formole di composizione delle B_k, come pure di quelle relative alla trasformazione involutoria H, egli si serve abilmente in questa, e nella successiva Memoria del tom. 36 dei Rendiconti del Circolo, per esaminare le trasformazioni del Guichard e risolverle nelle elementari corrispondenti.

Concludendo questa rapida rassegna dei lavori del Calapso, è da riconoscersi un merito singolare della sua produzione matematica. Alla teoria delle superficie applicabili sulle quadriche e delle loro trasformazioni egli ha portato importanti ed originali contributi; coi suoi metodi è riuscito a coordinare ricerche disparate, mostrandone la mutua dipendenza e pervenendo pel primo a realizzare confronti appena tentati da altri.

La Commissione ritiene pertanto questi lavori del Calapso ben degni di premio, e propone che al loro autore venga assegnata la medaglia destinata dalla Società di scienze, per l'anno 1915, a premiare le Memorie di matematica.

La Commissione:
Enrico D'Ovidio
Vito Volterra
Luigi Bianchi, relatore.
