Le congruenze rettilinee infinite volte di rotolamento e le superficie di Peterson.

Memoria di LUIGI BIANCHI

PREFAZIONE

Le ricerche esposte nel presente lavoro formano una continuazione di quelle fondamentali sulle congruenze di rotolamento, da me pubblicate nell'anno scorso [1].

Se si fa rotolare una superficie S_0 (superficie rotolante) sopra una qualunque sua superficie applicabile S (superficie d'appoggio), una retta r invariabilmente legata alla rotolante S_0 (retta satellite) genera una congruenza che diciamo *di rotolamento*. Le congruenze di rotolamento sono congruenze rettilinee del tutto speciali, con sviluppabili sempre reali; esse godono della proprietà *caratteristica* [2] che, per ogni raggio, i fuochi ed i piani focali serbano inalterate le loro posizioni, quando si flette comunque la superficie d'appoggio S, di cui ogni piano tangente s'immagina trasportare seco invariabilmente il corrispondente raggio della congruenza. In ogni congruenza di rotolamento un primo fuoco sul raggio r è il punto F_1 ove r incontra il piano tangente corrispondente della superficie S d'appoggio, e l'altro fuoco F_2 è il piede della perpendicolare abbassata su r dal punto di contatto. Diremo *prima* falda focale S_1 quella luogo di F_1, e *seconda* falda S_2 quella descritta da F_2. Data una congruenza rettilinea, a sviluppabili reali e distinte, si riconosce se essa è una congruenza di rotolamento, ricercando se è possibile scegliere sopra ciascuna delle normali di una delle due falde focali un punto M, tale che la superficie S, luogo di M, abbia in M un piano tangente che passi per la normale corrispondente dell'altra falda. Allora questa superficie S dà la superficie d'appoggio per la cercata generazione della congruenza proposta come congruenza di rotolamento, e la superficie rotolante S_0 ne risulta perfettamente individuata.

In generale una congruenza di rotolamento ammette, come tale, una sola generazione: cioè la coppia di superficie applicabili (S_0, S) e la retta satellite sono indi-

[1] *Sulle congruenze rettilinee di rotolamento*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tome 39°, pp. 177-229. I frequenti richiami a questa Memoria saranno segnati con (M).

[2] Ved. la mia Nota: *Sopra una proprietà caratteristica delle congruenze rettilinee di rotolamento*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXIV, seduta 3 gennaio 1915.

viduate. Ma esistono classi di congruenze *infinite volte* di rotolamento, fra le quali notevole è il caso delle congruenze pseudosferiche. Ora qui risolviamo il problema di trovare tutte le congruenze rettilinee infinite volte di rotolamento [1], e troviamo che *oltre le congruenze pseudosferiche, esiste un'altra sola classe di congruenze rettilinee infinite volte di rotolamento, e sono quelle date dalle tangenti alle linee di curvatura piane di una qualunque superficie di* JOACHIMSTHAL [2]. Per brevità, queste si diranno *congruenze di* JOACHIMSTHAL.

La ricerca delle ∞^1 generazioni di una congruenza di JOACHIMSTHAL, come congruenza di rotolamento, porta a mettere le superficie di JOACHIMSTHAL in relazione con un'altra classe di superficie ripetutamente incontrate in (M) nella risoluzione di problemi di rotolamento, superficie a cui ora diamo il nome di *superficie di* PETERSON per ricordare il geometra russo che per primo ne pose il rilievo le proprietà fondamentali. Le superficie di PETERSON sono caratterizzate dalla proprietà di possedere un doppio sistema coniugato (che è, anzi, isotermo-coniugato) di linee piane poste le une in piani per una retta fissa (che si dirà l'*asse* della superficie) le altre nei piani perpendicolari all'asse. Ogni superficie di PETERSON è applicabile sopra ∞^1 superficie della stessa specie coassiali, in guisa che il detto sistema coniugato si conserva coniugato nella deformazione.

Nella generazione delle congruenze di JOACHIMSTHAL come congruenze di rotolamento intervengono appunto le superficie di PETERSON, secondo il teorema seguente:

Se si fa rotolare una superficie di PETERSON *sopra un'altra superficie di* PETERSON *applicabile, l'asse descrive una congruenza di* JOACHIMSTHAL; *viceversa, ogni congruenza di* JOACHIMSTHAL *ammette* ∞^1 *tali generazioni come congruenza di rotolamento,*

Ma le superficie di PETERSON godono anche di un'altra proprietà, più generale, relativa alle congruenze generate dal loro asse quando si fanno rotolare sopra una qualunque superficie applicabile S. Allora ai sistemi coniugati della superficie S d'appoggio corrispondono sempre i sistemi coniugati della prima falda focale S_1, e questa proprietà è caratteristica per le superficie di PETERSON.

Il sèguito della ricerca ci porta a considerare superficie speciali di PETERSON che risolvono due problemi di rotolamento, nei quali, cangiando comunque la superficie d'appoggio, una delle due falde focali rimane sempre una superficie a curvatura costante. Le soluzioni del problema sono sempre superficie di PETERSON, che risultano applicabili sopra quadriche rotonde (reali od immaginarie) se la detta falda focale è la seconda S_2; e sono invece applicabili sopra quadriche immaginarie tangenti all'assoluto, nel caso che la proprietà in discorso appartenga alla prima falda focale.

(1) In (M) § 17, il problema è stato risoluto per congruenze normali.

(2) Ricordiamo che si dicono superficie di JOACHIMSTHAL quelle che hanno un sistema di linee di curvatura in piani per una retta fissa; allora le linee di curvatura dell'altro sistema sono tracciate sopra sfere che tagliano ortogonalmente la superficie (ved. *Lezioni*, vol. II, § 320).

§ 1.

Formole preliminari.

Nelle congruenze rettilinee infinite volte di rotolamento, di cui ci proponiamo la ricerca, le sviluppabili, oltre che reali, sono anche certamente distinte [1], e ci potremo servire delle formole generali per le congruenze riferite all'immagine sferica (u, v) delle sviluppabili (*Lezioni*, vol. I, §§ 147-149), formole che conviene ricordare.

Indichiamo con

$$ds'^2 = E du^2 + 2\sqrt{EG}\cos 2\omega\, du\, dv + G\, dv^2 \tag{1}$$

il quadrato dell'elemento lineare sferico rappresentativo, e con

$$(X_1, Y_1, Z_1)\ ,\ (X_2, Y_2, Z_2)\ ,\ (X_3, Y_3, Z_3)$$

i coseni di direzione del triedro principale formato dalle due direzioni delle bisettrici dell'angolo 2ω delle linee sferiche (u, v) e dalla normale alla sfera, che ha la direzione del raggio (u, v) della congruenza. Per le derivate rapporto ad u, v di questi nove coseni, sussistono allora le formole fondamentali:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial X_1}{\partial u} = -AX_2 - \sqrt{E}\,\mathrm{sen}\,\omega X_3\ ,\quad \frac{\partial X_2}{\partial u} = AX_1 - \sqrt{E}\cos\omega X_3\ ,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\partial X_3}{\partial u} = \sqrt{E}(\mathrm{sen}\,\omega X_1 + \cos\omega X_2)\\
&\frac{\partial X_1}{\partial v} = \quad BX_2 + \sqrt{G}\,\mathrm{sen}\,\omega X_3\ ,\quad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -BX_1 - \sqrt{G}\cos\omega X_3\ ,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\partial X_3}{\partial v} = \sqrt{G}(-\mathrm{sen}\,\omega X_1 + \cos\omega X_2)\ ,
\end{aligned}\right. \tag{2}$$

dove le quantità A, B hanno i valori

$$\left\{\begin{aligned}
A &= \frac{\partial\omega}{\partial u} + \sqrt{\frac{E}{G}}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,2\omega\\
B &= \frac{\partial\omega}{\partial v} + \sqrt{\frac{G}{E}}\,\beta\,\mathrm{sen}\,2\omega\ ,
\end{aligned}\right. \tag{3}$$

[1] Per quanto è dimostrato in (M) § 6, le congruenze di rotolamento a sviluppabili coincidenti sono unicamente quelle generate dall'asse di una conoide retta che rotoli su qualunque sua deformata; la congruenza è formata dalle tangenti alle asintotiche di un sistema dell'unica superficie focale Σ, ed ha una sola superficie d'appoggio, evoluta, di Σ.

avendo indicato, per brevità, con α, β i valori

$$\alpha = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \beta = \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \tag{4}$$

dei due simboli $\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}$ di CHRISTOFFEL, per l'elemento lineare sferico (1). In seguito converrà ricordare che fra le due quantità A, B, definite dalle (3), sussiste la relazione

$$\frac{\partial A}{\partial v} + \frac{\partial B}{\partial u} = -\sqrt{EG}\,\mathrm{sen}\,2\omega\,. \tag{5}$$

Si consideri ora una congruenza rettilinea qualunque, che abbia le linee sferiche (u, v) come immagini delle sviluppabili, e si indichi con 2ϱ la distanza focale. Si sa che ϱ deve soddisfare alla seguente equazione a derivate parziali del secondo ordine:

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial u\,\partial v} + \alpha\frac{\partial \varrho}{\partial u} + \beta\frac{\partial \varrho}{\partial v} + \left[\frac{\partial \alpha}{\partial u} + \frac{\partial \beta}{\partial v} + \cos 2\omega\sqrt{EG}\right]\varrho = 0\,; \tag{1}$$

e, viceversa, ad ogni soluzione ϱ di questa equazione corrisponde una sola congruenza della specie richiesta, che si ottiene per quadrature, come segue. Dette x, y, z le coordinate del *punto medio* sul raggio (u, v), queste sono determinate dalle formole:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = -\varrho\sqrt{E}(\mathrm{sen}\,\omega X_1 + \cos\omega X_2) + \left(\dfrac{\partial \varrho}{\partial u} + 2\beta\varrho\right)X_3 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = \varrho\sqrt{G}(-\mathrm{sen}\,\omega X_1 + \cos\omega X_2) - \left(\dfrac{\partial \varrho}{\partial v} + 2\alpha\varrho\right)X_3\,. \end{cases} \tag{6}$$

Per le coordinate x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 dei rispettivi fuochi F_1, F_2, si hanno le formole

$$\begin{cases} x_1 = x + \varrho X_3\,, \quad y_1 = y + \varrho Y_3\,, \quad z_1 = z + \varrho Z_3 \\ x_2 = x - \varrho X_3\,, \quad y_2 = y - \varrho Y_3\,, \quad z_2 = z - \varrho Z_3\,, \end{cases} \tag{7}$$

dalle quali, derivando, risultano le altre:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = 2\left(\dfrac{\partial \varrho}{\partial u} + \beta\varrho\right)X_3\,, \quad \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = 2\varrho\sqrt{G}(-\mathrm{sen}\,\omega X_1 + \cos\omega X_2) - 2\alpha\varrho X_3\,, \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u} = -2\varrho\sqrt{E}\,(\mathrm{sen}\,\omega X_1 + \cos\omega X_2) + 2\beta\varrho X_3\,, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial x_2}{\partial v} = -2\left(\dfrac{\partial \varrho}{\partial v} + \alpha\varrho\right)X_3\,, \text{ ecc.} \end{cases} \tag{8}$$

In fine, denotando con ξ_1, η_1, ζ_1 i coseni di direzione della normale alla prima

falda focale S_1 luogo di F_1, e con ξ_2, η_2, ζ_2 gli analoghi per la seconda falda focale S_2, abbiamo le formole:

$$(9) \qquad \begin{cases} \xi_1 = \cos\omega X_1 + \operatorname{sen}\omega X_2 \\ \xi_2 = \cos\omega X_1 - \operatorname{sen}\omega X_2 , \end{cases}$$

da cui per derivazione rapporto ad u, v,

$$(10) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\xi_1}{\partial u} = \sqrt{\dfrac{E}{G}}\,\alpha \operatorname{sen} 2\omega(\operatorname{sen}\omega X_1 - \cos\omega X_2) - \sqrt{E}\operatorname{sen} 2\omega X_3 \\ \dfrac{\partial\xi_1}{\partial v} = \left(2\dfrac{\partial\omega}{\partial v} + \sqrt{\dfrac{E}{G}}\,\beta \operatorname{sen} 2\omega\right)(-\operatorname{sen}\omega X_1 + \cos\omega X_2) \end{cases}$$

$$(10^*) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\xi_2}{\partial u} = -\left(2\dfrac{\partial\omega}{\partial u} + \sqrt{\dfrac{E}{G}}\,\alpha \operatorname{sen} 2\omega\right)(\operatorname{sen}\omega X_1 + \cos\omega X_2) \\ \dfrac{\partial\xi_2}{\partial v} = \sqrt{\dfrac{G}{E}}\,\beta \operatorname{sen} 2\omega(\operatorname{sen}\omega X_1 + \cos\omega X_2) + \sqrt{G}\operatorname{sen} 2\omega X_3 . \end{cases}$$

§ 2.

Equazione di Riccati in T.

Suppongasi, ora, che la congruenza, individuata dalle formole sopra riportate, sia infinite volte di rotolamento. Occorre e basta, per questo [(M), § 13], che le ∞^2 faccette piane coi centri distribuiti sulle normali di una delle due falde focali, diciamo di S_1, e coi piani passanti per le corrispondenti normali dell'altra falda S_2, possano ripartirsi in una semplice infinità di superficie S, ciascuna delle quali sarà allora superficie d'appoggio in una delle cercate generazioni per rotolamento della congruenza. Se diciamo $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ le coordinate di un punto qualunque preso sulla normale in F_1 alla S_1, avremo

$$(11) \qquad \bar{x} = x_1 + T\xi_1 \quad , \quad \bar{y} = y_1 + T\eta_1 \quad , \quad \bar{z} = z_1 + T\zeta_1 ,$$

e il nostro problema richiede che si possa prendere in queste formole, per T, una tale funzione di u, v *e di una costante arbitraria*, che, per la superficie S definita dalle (11), il piano tangente in $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ passi per la normale in F_2 alla seconda falda focale S_2. Queste condizioni equivalgono all'annullarsi dei due determinanti [ved. (M), § 13]:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\bar{x}}{\partial u} & , & \dfrac{\partial\bar{y}}{\partial u} & , & \dfrac{\partial\bar{z}}{\partial u} \\ \bar{x} - x_2 & , & \bar{y} - y_2 & , & \bar{z} - z_2 \\ \xi_2 & , & \eta_2 & , & \zeta_2 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\bar{x}}{\partial v} & , & \dfrac{\partial\bar{y}}{\partial v} & , & \dfrac{\partial\bar{z}}{\partial v} \\ \bar{x} - x_2 & , & \bar{y} - y_2 & , & \bar{z} - z_2 \\ \xi_2 & , & \eta_2 & , & \zeta_2 \end{vmatrix} ;$$

ovvero, introducendovi i valori (11) di $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, alle due seguenti equazioni simultanee per T:

$$2\varrho \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} \frac{\partial T}{\partial u} = \begin{vmatrix} T\frac{\partial \xi_1}{\partial u} + \frac{\partial x_1}{\partial u} & , & T\frac{\partial \eta_1}{\partial u} + \frac{\partial y_1}{\partial u} & , & T\frac{\partial \zeta_1}{\partial u} + \frac{\partial z_1}{\partial u} \\ T\xi_1 + 2\varrho X_3 & , & T\eta_1 + 2\varrho Y_3 & , & T\zeta_1 + 2\varrho Z_3 \\ \xi_2 & , & \eta_2 & , & \zeta_2 \end{vmatrix},$$

$$2\varrho \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} \frac{\partial T}{\partial v} = \begin{vmatrix} T\frac{\partial \xi_1}{\partial v} + \frac{\partial x_1}{\partial v} & , & T\frac{\partial \eta_1}{\partial v} + \frac{\partial y_1}{\partial v} & , & T\frac{\partial \zeta_1}{\partial v} + \frac{\partial z_1}{\partial v} \\ T\xi_1 + 2\varrho X_3 & , & T\eta_1 + 2\varrho Y_3 & , & T\zeta_1 + 2\varrho Z_3 \\ \xi_2 & , & \eta_2 & , & \zeta_2 \end{vmatrix}.$$

Osservando le (8), (9), (10), queste si traducono subito nelle altre:

$$2\varrho \operatorname{sen} 2\omega \frac{\partial T}{\partial u} =$$

$$\begin{vmatrix} T\sqrt{\frac{E}{G}}\,\alpha \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen} 2\omega & , & -T\sqrt{\frac{E}{G}}\,\alpha \cos\omega \operatorname{sen} 2\omega & , & -T\sqrt{E}\operatorname{sen} 2\omega + 2\left(\frac{\partial \varrho}{\partial u} + \beta\varrho\right) \\ T\cos\omega & , & T\operatorname{sen}\omega & , & 2\varrho \\ -\cos\omega & , & \operatorname{sen}\omega & , & 0 \end{vmatrix}$$

$$2\varrho \operatorname{sen} 2\omega \frac{\partial T}{\partial v} =$$

$$\begin{vmatrix} -T\left(2\frac{\partial \omega}{\partial v} + \sqrt{\frac{G}{E}}\,\beta \operatorname{sen} 2\omega\right)\operatorname{sen}\omega - 2\varrho\sqrt{G}\operatorname{sen}\omega & , & T\left(2\frac{\partial \omega}{\partial v} + \sqrt{\frac{G}{E}}\,\beta \operatorname{sen} 2\omega\right)\cos\omega + 2\varrho\sqrt{G}\cos\omega & , & -2\alpha\varrho \\ T\cos\omega & , & T\operatorname{sen}\omega & , & 2\varrho \\ -\cos\omega & , & \operatorname{sen}\omega & , & 0 \end{vmatrix}$$

Sviluppando i determinanti dei secondi membri, ne risulta per T il seguente sistema differenziale del tipo di Riccati [(M), § 13]:

$$(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial u} = a T^2 + b T + c \\ \dfrac{\partial T}{\partial v} = a' T^2 + b' T + c', \end{cases}$$

dove i coefficienti a, b, c ; a', b', c' si calcolano colle formole

$$\begin{cases} a = -\dfrac{\sqrt{E}\operatorname{sen} 2\omega}{2\varrho} \quad , \quad b = \sqrt{\dfrac{E}{G}}\,\alpha\cos 2\omega + \beta + \dfrac{\partial \log\varrho}{\partial u} \quad , \quad c = 0 \\ a' = 0 \quad , \quad b' = -\alpha - \sqrt{\dfrac{G}{E}}\,\beta\cos 2\omega - 2\cot 2\omega\dfrac{\partial \omega}{\partial v} \quad , \quad c = -2\varrho\sqrt{G}\cot 2\omega. \end{cases}$$

A queste possiamo dare un altro aspetto, servendoci delle identità

$$(13)\quad \begin{cases} \alpha + \sqrt{\dfrac{G}{E}}\,\beta \cos 2\omega = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} + \dfrac{F}{E}\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = \dfrac{1}{E}\begin{bmatrix} 12 \\ 1 \end{bmatrix} = \dfrac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \\ \beta + \sqrt{\dfrac{E}{G}}\,\alpha \cos 2\omega = \dfrac{F}{G}\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = \dfrac{1}{G}\begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix} = \dfrac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}, \end{cases}$$

e risulta, così,

$$(14)\quad \begin{cases} a = -\dfrac{\sqrt{E}\,\mathrm{sen}\,2\omega}{2\varrho}, \quad b = \dfrac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} + \dfrac{\partial \log \varrho}{\partial u}, \quad c = 0 \\ a' = 0, \quad b' = -\dfrac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} - 2 \cot 2\omega \dfrac{\partial \omega}{\partial v}, \quad c' = -2\varrho \sqrt{G} \cot 2\omega. \end{cases}$$

§ 3.

Condizioni d'integrabilità.

La nostra congruenza sarà infinite volte di rotolamento allora ed allora soltanto che il sistema (12) sia *illimitatamente* integrabile, quando cioè siano verificate le tre condizioni d'integrabilità:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial v} - \dfrac{\partial a'}{\partial u} = ba' - ab' \\ \dfrac{\partial c}{\partial v} - \dfrac{\partial c'}{\partial u} = cb' - bc' \\ \dfrac{\partial b}{\partial v} - \dfrac{\partial b'}{\partial u} = 2\,ca' - 2\,ac'. \end{cases}$$

Le due prime, introdotti i valori (14), diventano semplicemente

$$(15)\qquad \frac{\partial \varrho}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial u} = 0;$$

e la terza, avendo riguardo a queste ultime, si riduce a

$$(15^*)\qquad \frac{\partial^2 \log \sqrt{EG}}{\partial u\, \partial v} = -2\sqrt{EG} \cos 2\omega.$$

Poniamo quest'ultima sotto un'altra forma, osservando che la (5), essendo $\frac{\partial \omega}{\partial u} = 0$, diventa

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{G}{E}}\,\beta\,\mathrm{sen}\,2\omega\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{E}{G}}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,2\omega\right) = -\sqrt{EG}\,\mathrm{sen}\,2\omega,$$

od anche

$$(16)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{G}{E}}\,\beta\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{E}{G}}\,\alpha\right)+2\sqrt{\frac{E}{G}}\,\alpha\cot 2\omega\,\frac{\partial\omega}{\partial v}=-\sqrt{EG}.$$

D'altra parte, per l'identità (13), abbiamo

$$\frac{\partial^2\log\sqrt{EG}}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial}{\partial u}\left[\alpha+\sqrt{\frac{E}{G}}\,\beta\cos 2\omega\right]+\frac{\partial}{\partial v}\left[\beta+\sqrt{\frac{E}{G}}\,\alpha\cos 2\omega\right];$$

e dalla (I), essendo $\frac{\partial\varrho}{\partial v}=0$,

$$(16^*)\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial u}+\frac{\partial\beta}{\partial v}+\cos 2\omega\sqrt{EG}+\alpha\frac{\partial\log\varrho}{\partial u}=0,$$

onde la precedente si scrive

$$\frac{\partial^2\log\sqrt{EG}}{\partial u\,\partial v}=-\cos 2\omega\sqrt{EG}-\alpha\frac{\partial\log\varrho}{\partial u}+$$

$$+\cos 2\omega\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{G}{E}}\,\beta\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{E}{G}}\,\alpha\right)\right]-2\sqrt{\frac{E}{G}}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,2\omega\frac{\partial\omega}{\partial v},$$

o in fine, per la (16),

$$\frac{\partial^2\log\sqrt{EG}}{\partial u\,\partial v}+2\cos 2\omega\sqrt{EG}=-\alpha\left[\frac{\partial\log\varrho}{\partial u}+\sqrt{\frac{E}{G}}\,\frac{2}{\mathrm{sen}\,2\omega}\,\frac{\partial\omega}{\partial v}\right].$$

Concludiamo quindi:

La congruenza sarà infinite volte di rotolamento solo quando si verifichino insieme le tre equazioni

$$(\mathrm{II})\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\varrho}{\partial v}=0\ ,\quad \dfrac{\partial\omega}{\partial u}=0 \\[2ex] \alpha\left[\dfrac{\partial\log\varrho}{\partial u}+\sqrt{\dfrac{E}{G}}\,\dfrac{1}{\mathrm{sen}\,\omega\cos\omega}\,\dfrac{\partial\omega}{\partial v}\right]=0 \end{array}\right.$$

(ovvero le tre analoghe, che si scrivono scambiando u con v).

Una prima classe di congruenze, per le quali le condizioni (II) sono soddisfatte, è quella delle congruenze pseudosferiche, essendo allora ϱ ed ω costanti. Così arriviamo al risultato già stabilito in (M) § 18: *Ogni congruenza pseudosferica è infinite volte (ed in doppio modo) una congruenza di rotolamento.*

Le altre classi di congruenze infinite volte di rotolamento, se esistono, si otterranno ricercando se si può soddisfare alle (II) senza che ϱ ed ω siano insieme costanti.

§ 4.

Necessità della condizione $\alpha = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$.

In virtù delle prime due equazioni (II), sarà ϱ una funzione della sola u, ed ω una funzione della sola v. Inoltre avremo, per la terza,

$$\alpha \left[\frac{d \log \varrho}{du} + \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{d \log \operatorname{tg} \omega}{dv} \right] = 0,$$

sicchè dovrà annullarsi α; ovvero dovremo avere

$$(a) \qquad \frac{d \log \varrho}{du} + \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{d \log \operatorname{tg} \omega}{dv} = 0.$$

Noi dimostriamo, dapprima, che anche in quest'ultimo caso ne conseguirebbe $\alpha = 0$. Essendo escluso il caso delle congruenze pseudosferiche (ϱ, ω costanti), la (a) non può verificarsi se non con ϱ, ω ambedue variabili; ma allora ne risulta

$$\sqrt{\frac{E}{G}} = \frac{U}{V},$$

con U funzione di u soltanto, e V di v. Cangiando i parametri u, v possiamo fare senz'altro

$$U = V = 1,$$

e resterà ancora disponibile, nei due parametri u, v, un fattore costante comune (arbitrario), inoltre in ciascuno di essi una costante additiva. Avendosi allora $\sqrt{E} = \sqrt{G}$, poniamo

$$(17) \qquad \sqrt{E} = \sqrt{G} = e^{\psi},$$

essendo ψ una funzione incognita di u, v; ed avremo

$$(17^*) \qquad F = \sqrt{EG} \cos 2\omega = e^{2\psi} \cos 2\omega.$$

La condizione (a)

$$\frac{d \log \varrho}{du} = - \frac{d \log \operatorname{tg} \omega}{dv}$$

dimostra che il valor comune dei due membri è una costante che si può supporre $= 1$, disponendo del fattor costante comune in u, v. Di più, disponendo delle costanti additive, potremo prendere

$$\varrho = e^{u} \quad , \quad \operatorname{tg} \omega = e^{-v},$$

indi

$$\operatorname{sen} 2\omega = \frac{1}{\cosh v} \quad , \quad \cos 2\omega = \operatorname{tgh} v .$$

Coi valori attuali dei coefficienti

$$E = G = e^{2\psi} \quad , \quad F = e^{2\psi} \operatorname{tgh} v \quad , \quad EG - F^2 = \frac{e^{4\psi}}{\cosh^2 v} ,$$

i valori dei simboli α, β di CHRISTOFFEL sono dati da (*Lezioni*, vol. I, pag. 92)

$$(18) \qquad \begin{cases} \alpha = \cosh^2 v \dfrac{\partial \psi}{\partial v} - \operatorname{senh} v \cosh v \dfrac{\partial \psi}{\partial u} \\ \beta = \cosh^2 v \dfrac{\partial \psi}{\partial u} - \operatorname{senh} v \cosh v \dfrac{\partial \psi}{\partial v} . \end{cases}$$

Ora la (15*) e la (16*) si traducono, per la funzione incognita ψ, nel seguente sistema di equazioni del secondo ordine:

$$(A) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial u \, \partial v} = - e^{2\psi} \operatorname{tgh} v \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} = \dfrac{\partial \psi}{\partial u} - \operatorname{tgh} v \dfrac{\partial \psi}{\partial v} - \dfrac{\cosh 2v}{\cosh^2 v} e^{2\psi} . \end{cases}$$

Per esaminare la compatibilità di queste due equazioni, procedendo come insegna la teoria generale, deriviamo la (A_1) rapporto ad u, ciò che dà

$$(19) \qquad \frac{\partial^3 \psi}{\partial u^2 \, \partial v} = - 2 e^{2\psi} \operatorname{tgh} v \frac{\partial \psi}{\partial u} ;$$

poi deriviamo la (A_2) rapporto ad u, e, sottraendo la (A_1) derivata rapporto a v, avremo

$$(20) \qquad \frac{\partial^3 \psi}{\partial u^3} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} - 2 \frac{\cosh 2v}{\cosh^2 v} e^{2\psi} \frac{\partial \psi}{\partial u} + 2 e^{2\psi} \operatorname{tgh} v \frac{\partial \psi}{\partial v} + e^{2\psi} .$$

In fine deriviamo la (20) rispetto a v, la (19) rispetto ad u, e sottraendo, coll'aver riguardo alle (A) stesse ed alla (10), ne deduciamo l'equazione del primo ordine:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 - \frac{\cosh 2v}{\operatorname{sen} v \cosh v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{1}{\cosh^2 v} \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{1}{\operatorname{senh} v \cosh v} \frac{\partial \psi}{\partial v} = 0$$

Ma il primo membro di questa si risolve nel prodotto dei due seguenti fattori:

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} - \operatorname{tgh} v \frac{\partial \psi}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} - \coth v \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{1}{\operatorname{senh} v \cosh v} .$$

L'annullarsi del primo porta, per la (18), che sia $\alpha = 0$, come abbiamo enunciato, mentre si esclude la possibilità dell'annullarsi del secondo, come segue. Si avrebbe allora

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} = \coth v \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{1}{\operatorname{senh} v \cosh v}; \tag{21}$$

e derivando rapporto ad u, v, coll'osservare la (A_1),

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} = -e^{2\psi} \operatorname{tgh}^2 v \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} = \dfrac{\cosh 2v}{\operatorname{senh}^2 v \cosh^2 v} - e^{2\psi} - \dfrac{1}{\operatorname{senh}^2 v} \dfrac{\partial \psi}{\partial u}. \end{cases}$$

Sostituendo nella (A_2) coll'osservare la (21), ne verrebbe $\frac{\partial \psi}{\partial u} = 1$, onde $\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \, \partial v} = 0$: ciò che contraddice alla (A_1). Concludiamo adunque: *Se la congruenza rettilinea è infinite volte di rotolamento, senza essere pseudosferica, si ha necessariamente* $\alpha = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$ $\left(\text{oppure } \beta = \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0\right)$.

§ 5.

Le congruenze di Joachimsthal.

Resta ora da vedere se esiste in effetto una classe di congruenze per le quali si abbia

$$\alpha = 0 \quad , \quad \varrho = f(u) \quad , \quad \omega = \varphi(v),$$

senza che siano insieme ϱ, ω costanti. Ma le formole (8) e (10), essendo $\alpha = 0$, diventano

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = 2\left(\dfrac{d\varrho}{du} + \beta\varrho\right) X_3 \quad , \quad \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = 2\varrho\sqrt{G}\,(-\operatorname{sen}\omega\, X_1 + \cos\omega\, X_2), \\ \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} = -\sqrt{E}\operatorname{sen} 2\omega\, X_3 \quad , \quad \dfrac{\partial \xi_1}{\partial v} = 2\dfrac{d\omega}{\partial v}(-\operatorname{sen}\omega\, X_1 + \cos\omega\, X_2), \end{cases}$$

e ne seguono le formole

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = -\frac{2}{\sqrt{E}\operatorname{sen} 2\omega}\left(\frac{d\varrho}{du} + \beta\varrho\right)\frac{\partial \xi_1}{\partial u} \quad , \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{\varrho\sqrt{G}}{\dfrac{d\omega}{dv}}\frac{\partial \xi_1}{\partial v},$$

colle analoghe per y_1, z_1; η_1, ζ_1. Queste dimostrano, intanto, che sulla superficie focale S_1 le linee (u, v) sono linee di curvatura, e la congruenza è formata dalle tangenti alle linee $v = \text{cost}$. Ma, di più, la distanza focale 2ϱ, che rappresenta

anche il raggio di curvatura geodetica delle $u = \text{cost}$ sulla S_1, è una funzione della sola u, e però ciascuna linea di curvatura $u = \text{cost}$ ha costante la curvatura geodetica. Da un noto teorema di Brioschi (ved. *Lezioni*, vol. II, pag. 296) segue quindi: *Le linee* $u = \text{cost}$ *sono tracciate sopra sfere che tagliano ortogonalmente la superficie.* Ora, l'angolo 2ω dei piani focali, cioè l'angolo d'inclinazione del piano osculatore delle $v = \text{cost}$ sul piano tangente di S_1, è funzione della sola v, e però costante lungo una linea $v = \text{cost.}$; dunque *le linee di curvatura* $v = \text{cost}$ *sono piane.* Queste proprietà della S_1 dimostrano che essa è una superficie di Joachimsthal: quindi le $v = \text{cost}$ sono in piani per una retta fissa (asse della superficie), e le $u = \text{cost}$ sopra sfere ortogonali alla superficie coi centri sull'asse. Le stesse conclusioni si traggono, del resto, anche dalle formole (8_2) e (10_2) relative alla seconda falda S_2, che si vede ridursi ad una retta.

Inversamente, consideriamo la congruenza delle tangenti alle linee di curvatura piane $v = \text{cost}$ di una qualunque superficie di Joachimsthal. Siccome le linee (u, v) sono sopra la S_1 le linee di curvatura, le formole del § 1 dimostrano che si avrà $\alpha = 0$, mentre ϱ sarà funzione di u, ed ω di v; onde, essendo soddisfatte le condizioni (II) § 3, la congruenza sarà infinite volte di rotolamento.

Concludiamo adunque che *esistono due sole classi di congruenze rettilinee infinite volte di rotolamento, e sono:* α) *le congruenze pseudosferiche,* β) *le congruenze di* Joachimsthal. Si osservi, in particolare, che le congruenze *normali* infinite volte di rotolamento sono, fra le α), quelle delle normali alle superficie che hanno costante la differenza dei raggi principali di curvatura, e, fra le β), quelle delle tangenti ai meridiani delle superficie di rotazione. Sotto altra forma, questi ultimi sono i risultati stessi ottenuti in (M) § 17.

Il seguito della nostra ricerca conduce a determinare, per ciascuna congruenza della classe α) o β), le ∞^1 corrispondenti generazioni come congruenze di rotolamento. Per le prime il problema è già stato risoluto in (M) § 16, e si è visto che la superficie rotolante è sempre l'*elicoide logaritmico*, mentre per superficie d'appoggio può prendersi qualunque deformata di questa elicoide.

Vedremo fra breve che, per le congruenze β) di Joachimsthal, tanto la superficie rotolante quanto la superficie d'appoggio sono superficie di Peterson applicabili. Intanto osserviamo che in queste congruenze la prima falda focale si riduce all'asse della superficie di Joachimsthal, la quale dà la seconda falda focale.

§ 6.

Congruenze di rotolamento a direttrice rettilinea.

L'osservazione superiore ci porta a considerare in generale le congruenze rettilinee i cui raggi si appoggiano ad una retta. Considerazioni geometriche semplicissime servono a riconoscere che *Qualunque congruenza a direttrice rettilinea è almeno due volte congruenza di rotolamento.*

E infatti sia r il raggio generico della congruenza appoggiata alla direttrice fissa d, e nel piano (d, r) prendiamo l'una o l'altra delle due bisettrici dell'angolo di queste due rette, per la quale conduciamo il piano π normale al piano (d, r). Considerando la superficie S_0 inviluppo di questo piano, è chiaro che la congruenza proposta risulterà dal prendere, rispetto a ciascun piano tangente π di S_0, la retta r simmetrica della retta fissa d. Dunque, se si fa rotolare la S_0 sulla sua simmetrica S, la retta d, satellite di S_0, descriverà la nostra congruenza, c. d. d.

Confermiamo analiticamente questo risultato e veniamo così a trovare per altra via le proprietà delle congruenze di Joachimsthal già sopra stabilite. Consideriamo una qualunque congruenza coll'asse Oz come direttrice rettilinea, che sarà una delle due falde focali, mentre l'altra falda sarà una superficie Σ (1), le cui equazioni parametriche ordinarie scriveremo, come in (M) § 1,

$$x = u \quad , \quad y = v \quad , \quad z = z(u, v).$$

Prendiamo sulla normale a Σ un punto $M = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, le cui coordinate potremo scrivere

$$\bar{x} = u + Tp \quad , \quad \bar{y} = v + Tq \quad , \quad \bar{z} = z - T,$$

dove T indica una funzione di u, v. Dimostriamo che si può sempre determinare (almeno in due modi) T in funzione di u, v, per modo che la superficie S, luogo di M, abbia in M un piano tangente che passa per la normale alla prima falda focale ridotta all'asse Oz, sicchè la congruenza sarà (almeno due volte) congruenza di rotolamento.

Calcolando le condizioni cui deve soddisfare T, secondo le regole fissate in (M) § 13, vediamo che esse consistono nell'annullarsi dei due determinanti

$$\begin{vmatrix} p\dfrac{\partial T}{\partial u} + rT + 1 & , & q\dfrac{\partial T}{\partial u} + sT & , & -\dfrac{\partial T}{\partial u} + p \\ pT + u & , & qT + v & , & -T + pu + qv \\ v & , & -u & & 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} p\dfrac{\partial T}{\partial v} + sT & , & q\dfrac{\partial T}{\partial v} + tT + 1 & , & -\dfrac{\partial T}{\partial v} + q \\ pT + u & , & qT + v & , & -T + pu + qv \\ v & , & -u & & 0 \end{vmatrix}.$$

Sviluppando, si ha il sistema di Riccati

$$(22) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial u} = aT^2 + bT + c \\ \dfrac{\partial T}{\partial v} = a'T^2 + b'T + c' \end{cases}$$

coi seguenti valori pei coefficienti

$$(23)\quad \begin{cases} a = \dfrac{ur+vs}{\Omega}\,,\ b = \dfrac{(1+p^2)u+pqv-(pu+qv)(ur+vs)}{\Omega}\,,\ c = \dfrac{v(pv-qu)}{\Omega} \\ a' = \dfrac{us+vt}{\Omega}\,,\ b' = \dfrac{pqu+(1+q^2)v-(pu+qv)(us+vt)}{\Omega}\,,\ c' = -\dfrac{u(pv-qu)}{\Omega} \end{cases}$$

dove si è posto, per brevità,

$$(24)\qquad \Omega = (pu+qv)^2 + u^2 + v^2\,.$$

La condizione d'integrabilità per le (22) porta alla relazione di secondo grado in T

$$(25)\qquad AT^2 + BT + C = 0\,,$$

coi seguenti valori di A, B, C:

$$(25^*)\quad \begin{cases} A = \dfrac{\partial a}{\partial v} - \dfrac{\partial a'}{\partial u} + ab' - ba'\ ,\quad B = \dfrac{\partial b}{\partial v} - \dfrac{\partial b'}{\partial u} + 2ac' - 2ca'\,, \\ C = \dfrac{\partial c}{\partial v} - \dfrac{\partial c'}{\partial u} + bc' - cb'\,. \end{cases}$$

Nel caso nostro delle equazioni (22), se poniamo ancora

$$(26)\qquad \Theta = (us+vt)\,[(1+p^2)u+pqv] - (ur+vs)\,[pqu+(1+q^2)v]\,,$$

troviamo per A, B, C i valori

$$(27)\qquad A = \frac{\Theta}{\Omega^2}\ ,\quad B = -2(pu+qv)\frac{\Theta}{\Omega^2}\ ,\quad C = -(u^2+v^2)\frac{\Theta}{\Omega^2}\,.$$

Ora dobbiamo distinguere il caso generale $\Theta \neq 0$, dall'altro particolare $\Theta = 0$.

1° caso. $\Theta \neq 0$. In questo caso, la (25) diventa

$$T^2 - 2(pu+qv)\,T - (u^2+v^2) = 0\,,$$

ed ha le due radici

$$(28)\qquad \begin{cases} T_1 = pu+qv+\sqrt{\Omega} \\ T_2 = pu+qv-\sqrt{\Omega}\,, \end{cases}$$

che ambedue soddisfano alle equazioni differenziali del problema, come subito si verifica. La congruenza è dunque almeno due volte congruenza di rotolamento, come sopra abbiamo riconosciuto geometricamente. L'interpretazione geometrica delle (28) si ottiene osservando che, per $\bar{z} = z - T$, esse forniscono i due valori

$$\begin{cases} z_1 = z - (pu+qv) - \sqrt{\Omega} \\ z_2 = z - (pu+qv) + \sqrt{\Omega}\,. \end{cases}$$

Ora, $z - (pu+qv)$ è l'ordinata del punto P ove il piano tangente a Σ nel punto $M \equiv (x, y, z)$ incontra l'asse z, mentre $\sqrt{\Omega}$ è il tratto MP di tangente com

presa fra Σ e l'asse Oz. Possiamo, dopo ciò, formulare la costruzione seguente per le due superficie d'appoggio: *Si conduca in un punto generico* M *di* Σ *la tangente* MP *appoggiata in* P *all'asse* Oz, *e sopra* Oz *si segnino i due punti* P_1, P_2 *distanti da* P *della lunghezza* MP *della tangente; i due piani normali in* P_1, P_2 *all'asse* Oz *incontrano la normale in* M *a* Σ *in due punti* M_1, M_2 *che descrivono le due superficie d'appoggio cercate.*

Questa costruzione equivale, come facilmente si vede, all'altra formulata al principio del paragrafo.

2° caso, $\Theta = 0$. In questo caso la (25) è identicamente soddisfatta, le (22) formano un sistema illimitatamente integrabile, e la congruenza è quindi infinite volte di rotolamento.

Ciò avviene adunque quando la superficie Σ è un integrale dell'equazione a derivate parziali del secondo ordine

$$\Theta = (us + vt)\left[(1 + p^2)u + pqv\right] - (ur + vs)\left[pqu + (1 + q^2)v\right] = 0 .$$

Ora questa esprime appunto che le sezioni fatte nella superficie con piani per l'asse Oz, cioè le $\frac{v}{u} = \text{cost}$, sono linee di curvatura; essa è l'equazione a derivate parziali delle superficie di Joachimsthal, aventi per asse l'asse Oz. Ritroviamo così nuovamente il teorema: *Le congruenze di Joachimsthal sono infinite volte di rotolamento.*

§ 7.

Le superficie di Peterson.

Prima di procedere alla ricerca delle ∞^1 generazioni delle congruenze di Joachimsthal, come congruenze di rotolamento, esponiamo le proprietà fondamentali delle superficie di Peterson dalle quali essenzialmente dipendono. Considerando una superficie qualunque S_0, in relazione ad una retta fissa r, chiameremo, per brevità, *profili meridiani* di S_0 le sue sezioni coi piani per r, e *linee di livello* le sezioni di S_0 in piani normali alla r. Le superficie di Peterson sono caratterizzate dalla proprietà che, rispetto ad una conveniente retta r (asse della superficie), i profili meridiani e le linee di livello formano un sistema coniugato. Siccome per qualunque superficie le linee a tangenti coniugate dei profili meridiani, rispetto ad una retta r, sono le curve di contatto dei coni circoscritti dai punti di r alla superficie (König) si può anche dire che le superficie di Peterson sono caratterizzate da questo: che le tangenti ai profili meridiani nei punti di una linea di livello formano un cono col vertice sull'asse r.

Alle superficie di Peterson appartengono in particolare le superficie conoidali rette, nelle quali i profili meridiani e le linee di livello coincidono nelle generatrici (asintotiche); ma generalmente, nel seguito, questo caso particolare s'intenderà escluso. Alla classe di superficie di Peterson appartengono pure manifestamente le

superficie di rotazione col loro asse, ed ancora le *quadriche* rispetto ad uno qualunque dei loro tre assi.

Se si prende l'asse delle superficie di PETERSON per asse Oz, si forma subito l'equazione a derivate parziali del secondo ordine caratteristica di queste superficie. Basta invero esprimere che i profili meridiani, di equazione differenziale

$$dx : dy = x : y ,$$

sono coniugati alle linee di livello

$$\delta x : \delta y = q : -p ,$$

scrivendo la corrispondente condizione

$$(r\,dx + s\,dy)\,\delta x + (s\,dx + t\,dy)\,\delta y = 0 ;$$

e si ha, per la detta equazione del secondo ordine,

$$\text{(III)} \qquad q(rx + sy) = p(sx + ty) .$$

L'equazione in termini finiti delle superficie di PETERSON si forma nel modo più semplice, introducendo coordinate cilindriche ϱ , θ , z col porre

$$x = \varrho \cos\theta \quad , \quad y = \varrho \operatorname{sen} \theta .$$

Escluso il caso delle conoidi rette (nel quale z è funzione di θ), si possono prendere, per variabili indipendenti, θ , z, cioè a linee coordinate sulla superficie i profili meridiani e le linee di livello, onde risulterà ϱ funzione di θ , z. La (III) si traduce, per ϱ, nella equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial z\, \partial \theta} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial z} \frac{\partial \varrho}{\partial \theta} \quad , \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 \log \varrho}{\partial z\, \partial \theta} = 0 ,$$

onde risulta: *Escluse le conoidi rette, l'equazione della più generale superficie di* PETERSON, *in coordinate cilindriche* ϱ , θ , z, *si scrive*

$$\text{(29)} \qquad \varrho = Z . \Theta ,$$

dove Z *è una funzione (arbitraria) di* z, *e* Θ *è una funzione (arbitraria) di* θ.

Si vede che tutte le linee di livello $z = \text{cost}$, proiettate ortogonalmente sul piano xy, dànno curve omotetiche; e similmente i profili meridiani $\theta = \text{cost}$ sono curve affini coll'asse Oz come asse di affinità.

Geometricamente, per definire una superficie di PETERSON, basta dare (ad arbitrio) una linea di livello ed un profilo meridiano, che si incrocino in un punto, e restano così individuate le due funzioni arbitrarie da cui dipende la superficie.

In generale, cangiando il parametro z in un parametro arbitrario u, e il parametro θ in un parametro v, le equazioni parametriche della superficie di PETERSON si scrivono

$$\text{(Z0)} \qquad x = U_1 V_1 \quad , \quad y = U_1 V_2 \quad , \quad z = U_2 ,$$

dove U_1 , U_2 sono funzioni (arbitrarie) di u, e V_1 , V_2 funzioni (arbitrarie) di v.

Calcoliamo dalle (30) i coefficienti E, F, G del ds^2 della superficie

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 .$$

Indicando con accenti le derivate, abbiamo

$$(31)\quad \begin{cases} E = U_1'^2(V_1^2 + V_2^2) + U_2'^2 \,,\; F = U_1 U_1'(V_1 V_1' + V_2 V_2') \,,\; G = U_1^2(V_1'^2 + V_2'^2) \,, \\ EG - F^2 = U_1^2 U_2'^2 (V_1 V_2' - V_2 V_1')^2 + U_1^2 U_2'^2 (V_1'^2 + V_2'^2) \,. \end{cases}$$

Su queste formole, lasciando da parte il caso ovvio delle superficie di rotazione nelle quali

$$V_1^2 + V_2^2 = \text{cost} \quad , \quad V_1 V_1' + V_2 V_2' = 0 \,,$$

facciamo le semplici osservazioni seguenti, ricercando le traiettorie ortogonali delle linee di livello $u = \text{cost}$, o dei profili meridiani $v = \text{cost}$, colle rispettive equazioni differenziali

$$F\,du + G\,dv = 0 \quad , \quad E\,du + F\,dv = 0 \,.$$

A causa delle (31), nella prima si separano subito le variabili, scrivendola

$$\frac{U_1'}{U_1}\,du + \frac{V_1'^2 + V_2'^2}{V_1 V_1' + V_2 V_2'}\,dv = 0 \,,$$

e la seconda, posto $\Phi = V_1^2 + V_2^2$, assume la forma lineare del primo ordine

$$\frac{d\Phi}{du} + \frac{2}{U_1 U_1'}(U_1'^2 \Phi + U_2'^2) = 0 \,,$$

e si integra per quadrature; dunque: *In ogni superficie di* Peterson *le traiettorie ortogonali delle linee di livello (linee di pendenza) e quelle dei profili meridiani si hanno con quadrature.*

Un'altra proprietà notevole del sistema coniugato, formato dai profili meridiani e dalle linee di livello in una superficie di Peterson, si trova calcolando i coefficienti D, D′, D″ della seconda forma fondamentale, pei quali si ha

$$(31^*)\quad D = \frac{U_1 (U_1' U_2'' - U_1'' U_2')(V_1 V_2' - V_2 V_1')}{\sqrt{EG - F^2}} \,,\; D' = 0 \,,\; D'' = \frac{U_1^2 U_2'(V_1' V_2'' - V_2' V_1'')}{\sqrt{EG - F^2}} \,.$$

La media di queste $D' = 0$ esprime la proprietà nota che il sistema (u, v) è coniugato; di più risulta, dalle estreme, che $\frac{D}{D''}$ è il quoziente di una funzione di u per una funzione di v. Basta quindi cangiare convenientemente i parametri u, v per rendere eguali, in valore assoluto, i coefficienti D, D″, e ne concludiamo la proprietà in vista:

In ogni superficie di Peterson *i profili meridiani e le linee di livello formano un sistema isotermo-coniugato.*

La stessa proprietà si può anche riferire alla equazione differenziale delle asintotiche $D\,du^2 + D''\,dv^2 = 0$, nella quale si separano le variabili, ed enunciare così:

Le linee asintotiche di una superficie di Peterson *si hanno con quadrature.*

§ 8.

Deformabilità delle superficie di Peterson.

Veniamo ora alla più importante proprietà di queste superficie, data dal teorema (Peterson):

Ogni superficie di Peterson *è applicabile sopra* ∞^1 *superficie della stessa specie in modo che i profili meridiani e le linee di livello dell'una si distendano rispettivamente sui profili meridiani e sulle linee di livello dell'altra.*

Le formole effettive che determinano le ∞^1 deformate di una superficie di Peterson, dipendenti da una costante arbitraria k, sono date da Peterson [1] sotto la forma seguente: Supponiamo p. es. definita la superficie S di Peterson in coordinate cilindriche dalla (29); onde, pel ds^2, avremo

$$(32) \qquad ds^2 = (1 + Z'^2\,\Theta^2)\,dz^2 + 2ZZ'\,\Theta\Theta'\,dz\,d\theta + Z^2(\Theta'^2 + \Theta^2)\,d\theta^2 .$$

Se con ϱ_1, θ_1, z_1 indichiamo le coordinate cilindriche del punto di una deformata S_1 che corrisponde al punto (ϱ, θ, z) di S, avremo

$$(33) \qquad \varrho_1 = Z\sqrt{\Theta^2 + k}\ ,\ z_1 = \int \sqrt{1 - kZ'^2}\,dz\ ,\ \theta_1 = \int \frac{\sqrt{\Theta^4 + k(\Theta'^2 + \Theta^2)}}{\Theta^2 + k}\,d\theta,$$

dove k indica una costante arbitraria; e in effetto si verifica subito che si ha

$$d\varrho_1^2 + \varrho_1^2\,d\theta_1^2 + dz_1^2 = ds^2 .$$

Si osservi che, supponendo $\Theta = \text{cost}$, le (33) diventano le ben note formole che dànno le ∞^1 superficie di rotazione applicabili sopra una superficie data. Manifestamente, nel caso generale, il profilo meridiano della superficie di Peterson si deforma, secondo le (33), indipendentemente dalla forma della linea di livello, come se si trattasse del meridiano di una superficie di rotazione.

Le superficie di Peterson rientrano nella classe generale delle superficie deformabili in modo continuo con conservazione di un sistema coniugato (u, v), che, nel caso attuale, è formato dai profili meridiani e dalle linee di livello.

In generale si sa che le superficie con sistema coniugato permanante (u, v) in una deformazione continua sono le *associate*, nelle deformazioni infinitesime, a

[1] Ved. K. M. Peterson, *Sur la déformation des surfaces du second ordre*, § 16 (trad. par M. Davaux). Annales de l'École Normale Supérieure, tome VII, 2ème Série.

quelle superficie, la cui curvatura K, espressa pei parametri u, v delle linee asintotiche, ha la forma

$$\text{(C)} \qquad K = -\frac{1}{[\psi(u) + \psi(v)]^2}$$

(ved. *Lezioni*, vol. II, § 252).

Quali sono le superficie della classe (C) associate alle superficie di Peterson? Per rispondere alla domanda, riferiamoci, per es., alle formole generali (30), ed osserviamo che i coseni di direzione della normale alla superficie risultano proporzionali alle tre quantità ξ, η, ζ definite dalle formole

$$\xi = \frac{V_2'}{V_2 V_1' - V_1 V_2'}, \quad \eta = -\frac{V_1'}{V_2 V_1' - V_1 V_2'}, \quad \zeta = \frac{U_1'}{U_2'},$$

delle quali le due prime sono funzioni di v, e l'ultima di u soltanto; scriviamo

$$\xi = W_1, \quad \eta = W_2, \quad \zeta = U.$$

Ne segue che ξ, η, ζ sono soluzioni delle equazioni di Moutard

$$\text{(34)} \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \, \partial v} = 0,$$

ed inoltre

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \varphi(u) + \psi(v).$$

Applicando le formole di Lelieuvre (*Lezioni*, vol. I, § 72), costruiamo la superficie $\overline{S}$ che ha le linee (u, v) per asintotiche, e ξ, η, ζ per coseni *normalizzati* di direzione della normale. Per le equazioni parametriche di questa superficie $\overline{S}$ si trova subito

$$\overline{x} = -UW_2, \quad \overline{y} = UW_1, \quad \overline{z} = \int (W_1 W_2' - W_2 W_1')\, dv,$$

onde si vede che la $\overline{S}$ è una conoide retta con le $v = \text{cost}$ per generatrici e le $u = \text{cost}$ per asintotiche curvilinee, e inoltre la $\overline{S}$ non varia se cangia soltanto il profilo meridiano della superficie di Peterson. In fine, cercando quella soluzione Φ della equazione (34) delle deformazioni infinitesime che corrisponde alla superficie associata di Peterson, si vede che Φ è funzione di u soltanto. Invertendo, come è facile, queste considerazioni, si ottiene il risultato finale:

Le superficie di Peterson *sono le superficie associate delle conoidi rette in quelle deformazioni infinitesime di queste conoidi che corrispondono alle soluzioni della equazione* (34) *per le deformazioni infinitesime della forma* $\Phi = \Phi(u)$.

§ 9.

Le superficie di Peterson in relazione a quelle di Joachimsthal.

Torniamo ora al nostro problema di trovare le ∞^1 generazioni di una congruenza di Joachimsthal come congruenza di rotolamento; ma prima consideriamo quelle due particolari superficie d'appoggio S_1, S_2 che si deducono, in termini finiti, dalla superficie Σ di Joachimsthal con la costruzione al § 6.

Scriviamo le equazioni parametriche della superficie Σ di Joachimsthal (avente per asse l'asse Oz), espresse pei parametri u, v delle linee di curvatura, con le formole (*Lezioni*, vol. II, § 320)

$$(35) \qquad x = R \operatorname{sen}\theta \cos v \quad , \quad y = R \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} v \quad , \quad z = u + R(1 + \cos\theta),$$

nelle quali $R = R(u)$ è il raggio della sfera che contiene la linea di curvatura $u = \text{cost}$, e l'angolo θ è dato da

$$(36) \qquad \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = RV\, e^{\int \frac{du}{R}},$$

essendo $V = V(v)$ una funzione arbitraria della sola v. Osservando che dalla (36) segue, derivando,

$$(36^*) \qquad \frac{\partial\theta}{\partial u} = \frac{R' + 1}{R} \operatorname{sen}\theta \quad , \quad \frac{\partial\theta}{\partial v} = \frac{V'}{V} \operatorname{sen}\theta \qquad \left(R' = \frac{dR}{du} \, , \, V = \frac{dV}{dv}\right),$$

si vede che i coseni di direzione della normale sono proporzionali alle tre quantità

$$\cos\theta \cos v + \frac{V'}{V} \operatorname{sen} v \quad , \quad \cos\theta \operatorname{sen} v - \frac{V'}{V} \cos v \quad , \quad -\operatorname{sen}\theta .$$

Le coordinate $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ di un punto qualunque di questa normale si scrivono quindi

$$(37) \qquad \begin{cases} \bar{x} = R \operatorname{sen}\theta \cos v + T\left(\cos\theta \cos v + \dfrac{V'}{V} \operatorname{sen} v\right) \\ \bar{y} = R \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} v + T\left(\cos\theta \operatorname{sen} v - \dfrac{V'}{V} \cos v\right) \\ \bar{z} = u + R(1 + \cos\theta) - T \operatorname{sen}\theta , \end{cases}$$

dove T è una funzione (arbitraria) di u, v. Calcoliamo i valori T_1, T_2 di T che appartengono ai due punti M_1, M_2 sulla normale, ottenuti colla costruzione del § 6.

Siccome l'ordinata z_0 del punto P, ove il piano tangente a Σ incontra l'asse, è data da $z_0 = u + R$, e d'altra parte R è appunto la lunghezza del segmento MP di tangente, si vede che le ordinate dei due punti P_1, P_2 sull'asse O_z, ottenuti colla costruzione del § 6, sono

$$z_1 = u \quad , \quad z_2 = u + 2R .$$

Dopo ciò, sostituendo, nella terza delle (37), prima $\bar{z} = z_1$, poi $\bar{z} = z_2$, otteniamo, pei valori cercati di T_1, T_2,

$$\begin{cases} T_1 = R \dfrac{1 + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = R \cot\dfrac{\theta}{2} \\ T_2 = R \dfrac{\cos\theta - 1}{\operatorname{sen}\theta} = - R \operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2} , \end{cases}$$

e le formole (37) dànno, per le equazioni parametriche cercate delle superficie S_1, S_2,

$$S_1) \begin{cases} x_1 = R \cot\dfrac{\theta}{2}\left(\cos v + \dfrac{V'}{V} \operatorname{sen} v\right) \\ y_1 = R \cot\dfrac{\theta}{2}\left(\operatorname{sen} v - \dfrac{V'}{V} \cos v\right) \\ z_1 = u \end{cases} \qquad S_2) \begin{cases} x_2 = R \operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}\left(\cos v - \dfrac{V'}{V} \operatorname{sen} v\right) \\ y_2 = R \operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}\left(\operatorname{sen} v + \dfrac{V'}{V} \cos v\right) \\ z_2 = u + 2R . \end{cases}$$

Secondo la (36), ciascuna delle due funzioni

$$R \cot\frac{\theta}{2} = \frac{1}{V} e^{-\int \frac{du}{R}} \quad , \quad R \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = VR^2 e^{\int \frac{du}{R}}$$

è il prodotto di una funzione di v per una funzione di u, onde risulta (§ 7):

Le due superficie S_1, S_2, dedotte da una superficie Σ di Joachimsthal *con la costruzione del § 6, sono superficie di* Peterson *con l'asse stesso della Σ; i loro profili meridiani corrispondono alle linee di curvatura piane $v = cost$ di Σ, e le linee di livello corrispondonoalle linee di curvatura sferiche $u = cost$ della superficie di* Joachimsthal.

Anche è da osservarsi che, dipendentemente dalle due funzioni arbitrarie $R(u)$ e $V(v)$ inerenti alla Σ, la superficie S_1 (o la S_2) può essere una *qualunque* superficie di Peterson, onde possiamo formulare la dipendenza geometrica fra le superficie di Joachimsthal e quelle di Peterson così:

Se dell'asse di una superficie di Peterson *si prendono le rette simmetriche rispetto ai singoli piani tangenti della superficie, queste ∞^2 rette (appoggiate all'asse) sono le tangenti alle linee di curvatura piane di una superficie di* Joachimsthal.

§ 10.

Le ∞^1 generazioni di una congruenza di Joachimsthal come congruenza di rotolamento.

Le due superficie di Peterson S_1, S_2, dedotte nel modo del paragrafo precedente dalla superficie Σ di Joachimsthal, non sono che due particolari superficie d'appoggio nelle ∞^1 generazioni della congruenza di Joachimsthal come congruenza di rotolamento; ed anche osserviamo che, secondo il § 6, le due rispettive superficie rotolanti sono le simmetriche di S_1, S_2, e però nuovamente superficie di Peterson. Ora passiamo a dimostrare che anche in tutte le ∞^1 generazioni ricordate si presenta una proprietà analoga.

Per cercare in generale la superficie $\overline{S}$ d'appoggio, bisogna, nelle (37), prendere per T una tale funzione di u, v che il piano tangente della $\overline{S}$, con le equazioni parametriche (37), venga a passare per la normale alla prima falda focale ridotta all'asse Oz. Di qui si calcolano subito i tre coseni di direzione $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ della normale alla S come proporzionali alle tre quantità

$$\overline{X} = (T \operatorname{sen}\theta - R\cos\theta)\cos v \ , \ \overline{Y} = (T\operatorname{sen}\theta - R\cos\theta)\operatorname{sen} v \ , \ \overline{Z} = T\cos\theta + R\operatorname{sen}\theta ;$$

e le condizioni cui deve soddisfare T sono date dalle due equazioni

$$\mathcal{S}\,\overline{X}\,\frac{\partial\overline{x}}{\partial u} = 0 \quad , \quad \mathcal{S}\,\overline{X}\,\frac{\partial\overline{x}}{\partial v} = 0 .$$

Calcolandole con le formole del § 9, si trova per T il sistema di Riccati

$$(38) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial u} + \dfrac{R'+1}{R^2}\operatorname{sen}\theta\, T^2 - \dfrac{(R'+1)\cos\theta + R'}{R}\, T = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial T}{\partial v} + \dfrac{V'}{V}\cos\theta\, T + \dfrac{V'}{V}\, R\operatorname{sen}\theta = 0 . \end{cases}$$

Sappiamo già che questo sistema è completamente integrabile, e ne conosciamo le due soluzioni particolari (§ 9)

$$T_1 = R\cot\frac{\theta}{2} \quad , \quad T_2 = -R\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} ;$$

per la soluzione generale T, ove si ponga

$$\frac{1}{U} = C R e^{\int\frac{du}{R}} - \frac{1}{R} \qquad (C = \text{costante arbitraria}),$$

si trova

$$T = R \cot \frac{\theta}{2} + \frac{U}{\operatorname{sen} \theta}. \tag{39}$$

Sostituendo questo valore di T nelle (37), coll'osservare che si ha identicamente

$$R \cot \frac{\theta}{2} + \frac{U}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{C + 2V^2}{C - 2V^2} \left(R \cot \frac{\theta}{2} + U \cot \theta \right),$$

si hanno le equazioni parametriche della $\overline{S}$ sotto la forma

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{x} &= \left(R \cot \frac{\theta}{2} + U \cot \theta \right) \cdot \left[\cos v + \frac{C + 2V^2}{C - 2V^2} \frac{V'}{V} \operatorname{sen} v \right] \\ \overline{y} &= \left(R \cot \frac{\theta}{2} + U \cot \theta \right) \cdot \left[\operatorname{sen} v - \frac{C + 2V^2}{C - 2V^2} \frac{V'}{V} \cos v \right] \\ \overline{z} &= u - U. \end{aligned} \right. \tag{40}$$

Basta osservare che la funzione

$$R \cot \frac{\theta}{2} + U \cot \theta = \frac{RU}{V} e^{-\int \frac{du}{U}} \left(C - \frac{V^2}{2} \right)$$

è il prodotto di una funzione di u per una funzione di v, per dedurne che la $\overline{S}$ è una superficie di Peterson con l'asse Oz, avente le $v = \text{cost}$ per profili meridiani, e le $u = \text{cost}$ per linee di livello.

La superficie $\overline{S}$ d'appoggio è adunque una superficie di Peterson; ma ora dimostriamo facilmente che lo stesso avviene per la superficie rotolante S_0. Per questo basta osservare che le linee (u, v) della superficie $\overline{S}$ d'appoggio corrispondono alle sviluppabili della congruenza, ed anche, per una proprietà generale delle congruenze di rotolamento [(M) § 6], alle linee cinematicamente coniugate ai profili meridiani ed alle linee di livello della superficie rotolante S_0 rispetto alla retta satellite. Ne segue che il sistema (u, v) è pure coniugato sulla superficie rotolante S_0, che è adunque una superficie di Peterson.

Riassumendo i risultati, abbiamo: *Nelle ∞^1 generazioni di una congruenza di Joachimsthal come congruenza di rotolamento, la superficie d'appoggio S e la superficie rotolante S_0 sono due superficie di Peterson (applicabili), e la retta satellite è l'asse di S_0.*

§ 11.

Ricerca diretta della superficie rotolante.

Ci proponiamo ora di dimostrare che sussiste il teorema inverso: *Se una superficie di Peterson rotola sopra una qualunque delle sue ∞^1 deformate di Peterson, l'asse descrive una congruenza di Joachimsthal.*

Ma qui, invece di servirci dei risultati ottenuti, seguiremo una nuova via cercando di determinare direttamente la superficie rotolante dalla condizione che la

congruenza generata dalla retta satellite risulti infinite volte di rotolamento. Per questo ci serviamo delle formole fondamentali sviluppate in (M) §§ 1-5, e supponiamo, secondo la nostra ipotesi, che si possa scegliere *in* ∞^1 *modi*, sopra ciascuna normale alla seconda falda focale S_2, un punto $\overline{M}$ in guisa che il piano tangente alla superficie $\overline{S}$ (luogo di $\overline{M}$) passi per la corrispondente normale alla prima falda S_1. Scrivendo le coordinate $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ sotto la forma

$$\overline{x} = x + T(x_2 - x) \ , \ \overline{y} = y + T(y_2 - y) \ , \ \overline{z} = z + T(z_2 - z) \, .$$

occorrerà, per questo, che si possa determinare la funzione incognita T, contenente una costante arbitraria, in guisa che si annullino i due determinanti [(M) § 13):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \overline{x}}{\partial u} , & \frac{\partial \overline{y}}{\partial u} , & \frac{\partial \overline{z}}{\partial u} \\ x_2 - x , & y_2 - y , & z_2 - z \\ \alpha , & \beta , & \gamma \end{vmatrix} \ , \ \begin{vmatrix} \frac{\partial \overline{x}}{\partial v} , & \frac{\partial \overline{y}}{\partial v} , & \frac{\partial \overline{z}}{\partial v} \\ x_2 - x , & y_2 - y , & z_2 - z \\ \alpha , & \beta , & \gamma \end{vmatrix}$$

Calcoleremo più rapidamente queste condizioni per T, moltiplicando (per linee) i due determinanti precedenti pel determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

e tenendo conto delle idèntità seguenti. In primo luogo si ha [(M) § 4)

$$x_2 - x = (pu + qv)\,\alpha - u \frac{\partial x}{\partial u} - v \frac{\partial x}{\partial v} \, , \text{ ecc.,}$$

indi

$$S(x_2 - x) \frac{\partial x}{\partial u} = -u \ , \ S(x_2 - x) \frac{\partial x}{\partial v} = -v \ , \ S(x_2 - x)\, X = \frac{pu + qv}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \, .$$

Derivando queste rapporto ad u, v, si hanno le altre

$$\begin{cases} S \frac{\partial (x_2 - x)}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} = -(pu + qv)\,\Delta - 1 \ , \ S \frac{\partial (x_2 - x)}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = -(pu + qv)\,\Delta' \\ S \frac{\partial (x_2 - x)}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} = -(pu + qv)\,\Delta' \ , \ S \frac{\partial (x_2 - x)}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} = -(pu + vv)\,\Delta'' - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} SX \frac{\partial (x_2 - x)}{\partial u} = \frac{pqv - (1 + q^2)u}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \Delta + \frac{pqu - (1 + p^2)v}{\sqrt{1 + p^2 + y^2}} \Delta' + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \\ SX \frac{\partial (x_2 - x)}{\partial v} = \frac{pqv - (1 + q^2)u}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \Delta' + \frac{pqu - (1 + p^2)v}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \Delta'' + \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \, . \end{cases}$$

Servendoci di questa identità nell'eseguire la detta moltiplicazione, si trova per T il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial u} = a\,T^2 + b\,T \\ \dfrac{\partial T}{\partial v} = a'T^2 + b'T\,, \end{cases}$$

ove si ponga

$$(41)\quad \begin{cases} a = -\dfrac{u\Delta + v\Delta'}{pu + pv}\,, & b = \dfrac{(1+q^2)\,u - pqv}{pu + qv}\Delta + \dfrac{(1+p^2)\,v - pqu}{pu + pv}\Delta' \\ a' = -\dfrac{u\Delta' + v\Delta''}{pu + qv}\,, & b' = \dfrac{(1+q^2)\,u - pqv}{pu + qv}\Delta' + \dfrac{(1+p^2)\,v - pqu}{pu + qv}\Delta''\,, \end{cases}$$

il denominatore delle (41) essendo, ben inteso, diverso da zero, perchè, nel caso $pu + qv = 0$, la S_0 sarebbe una conoide retta, ciò che abbiamo escluso.

Ora, nella nostra ipotesi, dovranno identicamente verificarsi le condizioni di integrabilità

$$(42)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial v} - \dfrac{\partial a'}{\partial u} + ab' - ba' = 0\,. \\ \dfrac{\partial b}{\partial v} = \dfrac{\partial b'}{\partial u} \end{cases}$$

con la sostituzione dei valori (41).

§ 12.

Caso delle congruenze pseudosferiche.

Per il calcolo delle condizioni (42) di integrabilità occorre tener conto che $\Delta, \Delta', \Delta''$ soddisfano alle due equazioni di Codazzi

$$(43)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Delta'}{\partial u} - \dfrac{\partial \Delta}{\partial v} = \dfrac{q}{1+p^2+q^2}(t\Delta - 2s\Delta' + r\Delta'') \\ \dfrac{\partial \Delta'}{\partial v} - \dfrac{\partial \Delta''}{\partial u} = \dfrac{p}{1+p^2+q^2}(t\Delta - 2s\Delta' + r\Delta'')\,, \end{cases}$$

e, insieme, alla equazione di Gauss

$$(48^*)\qquad \Delta'^2 - \Delta\Delta'' = \frac{t\Delta - 2s\Delta' + r\Delta''}{1+p^2+q^2}\,.$$

La prima delle (42), calcolata, diventa

$$(44)\quad u(us+vt+q)\Delta+(v^2t-u^2r+qv-pu)\Delta'-v(ur+vs+p)\Delta''=0,$$

e l'altra risulta

$$\begin{aligned}&\left\{[u^2+q^2(u^2+v^2)]s+[uv-pq(u^2+v^2)]t+qu(1+p^2+q^2)\right\}\Delta+\\&+\left\{[v^2+p^2(u^2+v^2)]t-[u^2+q^2(u^2+v^2)]r+(qv-pu)(1+p^2+q^2)\right\}\Delta'+\\&+\left\{[pq(u^2+v^2)-uv]r-[v^2+p^2(u^2+v^2)]s-pv(1+p^2+q^2)\right\}\Delta''=0.\end{aligned}$$

Se a quest'ultima si sottrae la (44), moltiplicata per $1+p^2+q^2$, indi si sopprime il fattore non nullo $pu+qv$, si dà la forma equivalente

$$\begin{aligned}(45)\quad &\left\{(qv-pu)s-(qu+pv)t\right\}\Delta+(pu-qv)(r+t)\Delta'+\\&+[(qu+pv)r+(qv-pu)s]\Delta''=0.\end{aligned}$$

La nostra congruenza sarà infinite volte di rotolamento solo quando si verifichino insieme le (44), (45). Supponendo dapprima che ciò accada *su qualunque superficie applicabile rotoli la* S_0, dovranno annullarsi, nelle (44), (45), i singoli coefficienti di Δ, Δ', Δ'', e questo porta al sistema simultaneo delle tre equazioni di secondo ordine

$$(46)\qquad r=\frac{qv-pu}{u^2+v^2}\ ,\quad s=-\frac{pv+qu}{u^2+v^2}\ ,\quad t=\frac{pu-qv}{u^2+v^2}\ ,$$

e si riscontra subito [1] che la superficie più generale che soddisfa alle (46) è l'elicoide logaritmico

$$z=c\log\varrho+m\theta+h\qquad (c\,,m\,,h\ \text{costanti}).$$

Questo viene a confermare risultati già noti, e intanto dimostra che *Le uniche congruenze di rotolamento che rimangono infinite volte di rotolamento, comunque si deformi la superficie d'appoggio, sono le superficie pseudosferiche.*

§ 13.

Caso delle congruenze di Joachimsthal.

Lasciando da parte il caso delle congruenze pseudosferiche, sappiamo (§ 5) che la nostra congruenza, come infinite volte di rotolamento, deve appartenere alla classe di Joachimsthal, e, perciò, la sua prima falda focale S_1 deve ridursi ad

[1] Basta trasformare in coordinate cilindriche il sistema (46), ovvero anche osservare che dalle (46) segue, ad un tempo, che la superficie appartiene alla classe di superficie di Peterson e a quella delle elicoidi con l'asse Oz come asse.

una linea (all'asse). Questo porta che nelle formole con la segnatura (22) in (M) debbono valere le proporzioni

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} : \frac{\partial y_1}{\partial u} : \frac{\partial z_1}{\partial u} = \frac{\partial x_1}{\partial v} : \frac{\partial y_1}{\partial v} : \frac{\partial z_1}{\partial v},$$

ossia deve sussistere l'equazione

$$\frac{u\,\mathrm{D} + v\,\mathrm{D}'}{ur + vs} = \frac{u\mathrm{D}' + v\mathrm{D}''}{us + vt},$$

alla quale possiamo dare la forma equivalente

$$(47) \qquad u(us + vt)\,\Delta + (v^2 t - u^2 r)\,\Delta' - v(ur + vs)\,\Delta'' = 0.$$

Questa, sottratta dalla (44), dà l'altra

$$(47^*) \qquad qu\Delta + (qv - pu)\,\Delta' - pv\Delta'' = 0.$$

Nelle due equazioni (47) (47*), lineari omogenee in $\Delta, \Delta', \Delta''$, i tre minori della matrice dei coefficienti sono dati da

$$\Delta v^2 \quad , \quad -\Delta uv \quad , \quad \Delta u^2 ,$$

avendo posto

$$\Delta = q(ur + vs) - p(us + vt).$$

Ora, se non fosse $\Delta = 0$, ne risulterebbe

$$\Delta : \Delta' : \Delta'' = v^2 : -uv : u^2 ,$$

indi anche $\Delta\Delta'' - \Delta'^2 = 0$, caso da escludersi [(M) § 3]. Avremo dunque $\Delta = 0$, cioè

$$q(ur + vs) = p(us + vt),$$

equazione a derivate parziali caratteristica delle superficie di Peterson (§ 7), onde vediamo che *la superficie rotolante* S_e *è necessariamente una superficie di* Peterson *con la retta satellite per asse.*

Supposto, inversamente, che la S_e sia una tale superficie di Peterson, le due condizioni (34), (45) per le congruenze infinite volte di rotolamento si riducono all'unica

$$q(u\Delta + v\Delta') = p(u\Delta' + v\Delta''),$$

o all'equivalente

$$q(u\,\mathrm{D} + v\,\mathrm{D}') = p(u\,\mathrm{D}' + v\,\mathrm{D}'').$$

Quest'ultima esprime che, dopo la deformazione, i profili meridiani di equazione differenziale

$$du : dv = u : v$$

e le linee di livello

$$du : dv = q : -p$$

debbono formare ancora un sistema coniugato. Ma noi sappiamo appunto che una superficie di PETERSON ammette una deformazione continua che conserva il detto sistema coniugato (§ 8), e la superficie si mantiene sempre della classe di PETERSON. Il teorema enunciato al principio del § 11 resta, così, completamente stabilito.

§ 14.

Ulteriori proprietà delle superficie di Peterson.

Si è visto che, se una superficie di PETERSON S_0 rotola sopra una sua deformata S di PETERSON, l'asse di S_0 descrive una congruenza di JOACHIMSTHAL, la cui prima falda focale si riduce ad una retta. Ma supponiamo di far rotolare la superficie S_0 di PETERSON sopra una *qualunque* delle sue superficie applicabili, e l'asse descriverà una congruenza la cui prima falda focale sarà un'effettiva superficie S_1. Dalle ricerche fatte in (M) § 22 risulta che in tutte queste congruenze la prima falda focale S_1 e la superficie d'appoggio S si corrispondono per sistemi coniugati. Anzi, questa proprietà è *caratteristica* per le congruenze generate nel rotolamento dall'asse di una superficie di PETERSON, come precisiamo nel teorema

A) *La condizione necessaria e sufficiente affinchè, rotolando una superficie S_0 sopra una qualunque delle sue deformate, una retta satellite di S_0 descriva sempre una congruenza la cui prima falda focale corrisponda, per sistemi coniugati, alla superficie* S *d'appoggio, è che la S_0 sia una superficie di* PETERSON *e la retta satellite sia il suo asse.*

Altre classi speciali di superficie di PETERSON abbiamo incontrato in (M) §§ 14 e 15, ricercando: *a*) le congruenze di rotolamento con angolo costante dei piani focali; *b*) le congruenze di rotolamento a distanza focale costante. I risultati quivi ottenuti possiamo ora enunciare così:

a) *Le congruenze di rotolamento con angolo costante non retto dei piani focali sono descritte dall'asse di quelle superficie di* PETERSON (*rotolanti su qualunque deformata*) *che hanno per linea di livello una spirale logaritmica col polo sull'asse* (*e profilo meridiano arbitrario*).

Se l'angolo dei piani focali è retto (congruenze normali), la spirale logaritmica è da sostituirsi con un circolo col centro sull'asse, e la superficie di PETERSON diventa di rotazione [(M) § 14).

b) *Le congruenze di rotolamento, a distanza focale costante, sono descritte dall'asse di quelle superficie di* Peterson *(rotolanti su qualunque superficie applicabile) che hanno per profilo meridiano una curva logaritmica il cui asintoto sia l'asse (e linea di livello arbitraria).*

Osserviamo in particolare quello che accade quando una superficie di Peterson, della classe *a*) o *b*), rotola sopra una sua deformata *di* Peterson. In tal caso la congruenza sarà quella delle tangenti alle linee di curvatura piane di una superficie di Joachimsthal Σ, la quale, nel caso *a*), avrà per linee di curvatura sferiche $u =$ cost delle *lossodromiche* delle sfere su cui sono tracciate; e, nel caso *b*), avrà per linee di curvatura piane altrettante trattrici eguali, con l'asse per asintoto.

Notevole è il caso particolare in cui la superficie di Peterson appartenga ad ambedue le classi *a*) *b*): sia, cioè, l'elicoide logaritmico; nel qual caso la superficie di Joachimsthal Σ diventa un'elicoide pseudosferica del Dini:

Se l'elicoide logaritmico rotola sopra una qualunque delle sue ∞^1 *superficie di* Peterson *applicabili, l'asse descrive la congruenza delle tangenti alle linee di curvatura piane (trattrici) di un'elicoide pseudosferica del* Dini.

In particolare, se l'elicoide logaritmico si riduce alla superficie logaritmica di rotazione, le sue deformate di Peterson sono le superficie di rotazione aventi per meridiano una trattrice allungata (*Lezioni*, vol. I, § 136); onde abbiamo:

Se la superficie logaritmica di rotazione rotola sopra una pseudosfera allungata applicabile, l'asse descrive la congruenza delle tangenti ai meridiani di una pseudosfera ordinaria.

§ 15.

Congruenze di rotolamento con corrispondenza dei sistemi coniugati sopra S, S_1.

Nelle congruenze di rotolamento del teorema A) (§ 14), la corrispondenza dei sistemi coniugati sopra la superficie S d'appoggio e la prima falda focale S_1 si mantiene, *comunque si deformi la superficie* S *d'appoggio*. Ora dimostriamo che, se si toglie quest'ultima condizione, esistono altre classi di congruenze di rotolamento soddisfacenti, nelle quali la superficie d'appoggio e la superficie rotolante sono ancora, in certo modo, superficie di Peterson; soltanto, l'asse è diventato una retta impropria.

Ritorniamo perciò ai calcoli eseguiti in (M) § 22, dove, per esprimere la corrispondenza dei sistemi coniugati sopra S ed S_1, abbiamo trovato le due equazioni ivi numerate (60), le quali, come facilmente si osserva, possono scriversi sotto la forma

$$\{q(ur+vs)-p(us+vt)\}(sD-rD')=0$$

$$\{q(ur+vs)-p(us+vt)\}(tD'-sD'')=0\,.$$

L'annullarsi del fattore esterno

$$q(ur+vs)-p(us+vt)$$

le rende verificate per tutte le flessioni di S, nel qual caso la superficie rotolante S_0 è una superficie di Peterson e si hanno le soluzioni del problema considerato nel teorema A).

Le altre eventuali soluzioni del problema si otterranno quando si verifichino insieme le due condizioni

$$(48)\qquad \begin{cases} s\,D = r\,D' \\ s\,D'' = t\,D'. \end{cases}$$

Ne segue che dovrà essere $s=0$, altrimenti ne conseguirebbe

$$D : D' : D'' = r : s : t,$$

e per l'equazione di Gauss, $DD''-D'^2=\dfrac{rt-s^2}{1+p^2+q^2}$, avremmo

$$D=\pm\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\ ,\quad D'=\pm\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\ ,\quad D''=\pm\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

onde la deformata S sarebbe congruente o simmetrica della rotolante S_0: casi da escludersi [1]. Essendo dunque $s=0$, le (48) dànno $D'=0$; la prima dice che la superficie rotolante S_0 ha l'equazione $z=f(x)+\varphi(y)$, ossia è una superficie *di traslazione* con curve generatrici in piani perpendicolari; la seconda dice che sulla superficie d'appoggio S il sistema delle curve di traslazione si è conservato coniugato. Ma si sa che, in effetto, ogni tale superficie di traslazione S_0 è deformabile con continuità, conservandosi coniugato il sistema delle curve di traslazione, e le deformate sono superficie della stessa specie (*Lezioni*, vol. II, pag. 85). Queste superficie di traslazione sono perfettamente caratterizzate dall'ammettere un sistema coniugato di linee piane situate in due sistemi di piani paralleli, fra loro perpendicolari, e possono manifestamente riguardarsi come *superficie di Peterson il cui asse sia trasportato a distanza infinita*. Concludiamo che esistono due classi di congruenze di rotolamento, nelle quali la prima falda focale e la superficie d'appoggio si corrispondono per sistemi coniugati; e sono:

1) *le congruenze generate dall'asse di una superficie di Peterson, che rotola su qualunque sua superficie applicabile*;

2) *le congruenze generate nel rotolamento di una superficie di traslazione con curve generatrici in piani perpendicolari sopra una delle ∞^1 superficie di traslazione applicabili, quando per retta satellite si prenda una retta parallela ad ambedue i sistemi di piani.*

[1] Nel primo caso la retta satellite resterebbe immobile; nel secondo descriverebbe una congruenza con la prima falda focale S, ridotta ad una retta (§ 6), ciò che non corrisponde al nostro problema.

Il primo caso si distingue per questo: che la proprietà di corrispondenza fra i sistemi coniugati di S, S_1 si mantiene deformando comunque la superficie S d'appoggio; ciò che non ha più luogo nel secondo caso. Quest'ultimo è alla sua volta notevole per l'altra proprietà che ogni piano normale ad ambedue le giaciture (alla retta satellite) inviluppa una superficie con ambedue i sistemi di linee di curvatura piane [1].

§ 16.

Condizioni per le congruenze W di rotolamento.

Passiamo ora ad occuparci di speciali superficie di Peterson, notevoli per le loro proprietà, alle quali siamo condotti da particolari problemi di rotolamento. Il primo problema di cui ci vogliamo occupare è il seguente: *Trovare le superficie* S_0 *tali che, rotolando* S_0 *sopra una sua qualunque deformata, una retta fissa satellite di* S_0 *generi sempre una congruenza* W. Sappiamo già che l'elicoide logaritmico, con l'asse come retta satellite, dà una soluzione del problema; e negli ultimi paragrafi in (M) (§§ 20-26) abbiamo trovato altre sei superficie di Peterson, applicabili su quadriche rotonde, che dànno ancora soluzioni del problema. Dimostreremo che non ne esistono altre.

Riferendoci alle formole fondamentali in (M), esprimiamo che la congruenza è una congruenza W (cioè che si corrispondono, sulle due falde S_1, S_2, i sistemi coniugati), ponendo la condizione che una delle due falde, per es. S_2, ammetta una deformazione infinitesima nella quale gli spostamenti dei punti avvengono parallelamente alla normale nel punto corrispondente dell'altra falda S_1 (*Lezioni*, vol. II, pag. 58).

I coseni di direzione della normale a questa prima falda S_1 sono proporzionali [(M) § 4] ai tre binomii

$$(49) \qquad \xi = q\frac{\partial x}{\partial u} - p\frac{\partial x}{\partial v}\ , \quad \eta = q\frac{\partial y}{\partial u} - p\frac{\partial y}{\partial v}\ , \quad \zeta = q\frac{\partial z}{\partial u} - p\frac{\partial z}{\partial v},$$

onde le componenti dei detti spostamenti saranno $\varrho\xi$, $\varrho\eta$, $\varrho\zeta$, dove $\varrho = \varrho(u, v)$ sia un conveniente fattore di proporzionalità. Le condizioni a cui ϱ deve assoggettarsi sono date dalle tre equazioni seguenti:

$$(50) \qquad S\frac{\partial(\varrho\xi)}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial u} = 0\ , \quad S\frac{\partial(\varrho\xi)}{\partial v}\frac{\partial x_2}{\partial v} = 0\ , \quad S\frac{\partial(\varrho\xi)}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v} + S\frac{\partial(\varrho\xi)}{\partial v}\frac{\partial x_2}{\partial u} = 0.$$

[1] Vedi la mia Nota *Sulle superficie a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura come inviluppi di rotolamento*, Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, seduta del 7 marzo 1919.

Ora, per le derivate di ξ, η, ζ troviamo

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial u} &= \frac{pqr + (1+q^2)\,s}{1+p^2+q^2}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{(1+p^2)\,r + pqs}{1+p^2+q^2}\frac{\partial x}{\partial v} + (q\mathrm{D} - p\mathrm{D}')\,\mathrm{X} \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} &= \frac{(1+q^2)\,t + pqs}{1+p^2+q^2}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{(1+p^2)\,s + pqt}{1+p^2+q^2}\frac{\partial x}{\partial v} + (q\mathrm{D}' - p\mathrm{D}'')\,\mathrm{X}, \end{aligned}\right.$$

con le analoghe per η, ζ. Da queste formole risultano successivamente le identità

$$\mathrm{S}\,\xi\,\frac{\partial x_1}{\partial u} = (pu+qv)(p\Delta' - q\Delta) \quad , \quad \mathrm{S}\,\xi\,\frac{\partial x_1}{\partial v} = (pu+qv)(p\Delta'' - q\Delta')$$

$$\mathrm{S}\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u} = (p\Delta' - q\Delta)\,\{ur + vs - p + u[(1+q^2)\Delta - pq\Delta'] + \\ + v[(1+p^2)\Delta' - pq\Delta]\}$$

$$\mathrm{S}\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v} = (p\Delta'' - q\Delta')\,\{us + vt - q + u[(1+q^2)\Delta' - pq\Delta''] + \\ + v[(1+p^2)\Delta'' - pq\Delta']\}$$

$$\mathrm{S}\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} = (p\Delta'' - q\Delta')(ur + vs) + (q\Delta - p\Delta')\,\{q + \\ + u[pq\Delta'' - (1+q^2)\Delta'] + v[pq\Delta' - (1+p^2)\Delta'']\}$$

$$\mathrm{S}\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u} = (p\Delta' - q\Delta)(us + vt) + (q\Delta' - p\Delta'')\,\{p + \\ + u[pq\Delta' - (1+p^2)\Delta] + v[pq\Delta - (1+p^2)\Delta']\}.$$

Calcolando con queste formole le condizioni (50), troviamo che, ove si ponga

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{A} &= (pu+qv)\frac{\partial \log \varrho}{\partial u} + ur + vs - p + u[(1+q^2)\Delta - pq\Delta'] + \\ &\qquad + v[(1+p^2)\Delta' - pq\Delta] \\ \mathrm{B} &= (pu+qv)\frac{\partial \log \varrho}{\partial v} + us + vt - q + u[(1+q^2)\Delta' - pq\Delta''] + \\ &\qquad + v[(1+p^2)\Delta'' - pq\Delta'], \end{aligned}\right.$$

esse si scrivono

$$(p\Delta' - q\Delta)\,\mathrm{A} = 0 \quad , \quad (p\Delta'' - q\Delta')\,\mathrm{B} = 0$$

$$(p\Delta'' - q\Delta')\,\mathrm{A} + (p\Delta' - q\Delta)\,\mathrm{B} = 0.$$

Ma i due binomii $p\Delta' - q\Delta$, $p\Delta'' - q\Delta'$ non possono annullarsi insieme, perchè allora ci troveremmo nel caso escluso $\Delta\Delta'' - \Delta'^2 = 0$ [(M) § 4], onde le (50) daranno $\mathrm{A} = 0$, $\mathrm{B} = 0$. Dunque la nostra congruenza di rotolamento sarà una con-

gruenza W allora ed allora soltanto che siano compatibili le due equazioni simultanee per l'incognita ϱ

$$(52)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\log[(pu+qv)\varrho]=\dfrac{2p}{pu+qv}+\dfrac{pqv-(1+q^2)u}{pu+pv}\Delta+\dfrac{pqu-(1+p^2)v}{pu+qv}\Delta' \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\log[(pu+qv)\varrho]=\dfrac{2q}{pu+qv}+\dfrac{pqv-(1+q^2)u}{pu+qv}\Delta'+\dfrac{pqu-(1+q^2)v}{pu+qv}\Delta''. \end{cases}$$

Derivando la prima di queste rapporto a v, la seconda rapporto ad u, e sottraendo con l'aver riguardo alle equazioni (43) e (43*) di Codazzi e Gauss (§ 12), troviamo la seguente condizione d'integrabilità:

$$(53)\quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{pqv-(1+q^2)u}{pu+qv}\right)\cdot\Delta+\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{pqu-(1+q^2)v}{pu+qv}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{pqv-(1+q^2)u}{pu+qv}\right)\right\}\cdot\Delta'+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{(1+p^2)v-pqu}{pu+qv}\right)\cdot\Delta''+$$

$$+\frac{qu-pv}{pu+qv}(t\Delta-2s\Delta'+r\Delta'')+\frac{2q(ur+vs)-2p(us+vt)}{(pu+qv)^2}=0.$$

Se $\Delta, \Delta', \Delta''$ soddisfano a questa, oltre che alle equazioni di Codazzi e Gauss, avremo una congruenza W di rotolamento. Ma nella nostra ipotesi, che la proprietà debba sussistere per qualunque deformazione della superficie d'appoggio, la (53) deve verificarsi identicamente.

§ 17.

Le superficie di Peterson applicabili su quadriche rotonde.

L'annullarsi, nella (53), del termine indipendente da $\Delta, \Delta', \Delta''$, dà l'equazione

$$(54)\qquad q(ur+vs)=p(us+vt),$$

e pertanto (§ 7): *la superficie rotolante* S_0 *deve essere una superficie di* Peterson *e la retta satellite il suo asse.* A questo punto potremmo proseguire aggregando alla (54) le altre equazioni del secondo ordine che risultano dall'eguagliare a zero i coefficienti di $\Delta, \Delta', \Delta''$ nella (53), e si troverebbe così una sola equazione, oltre la (54), onde il problema è ricondotto alla ricerca delle soluzioni comuni a queste due equazioni del secondo ordine. L'integrazione effettivamente ricondurrebbe nuovamente alle sei superficie di Peterson dei §§ 24-26 (M).

Ma, una volta ottenuta la (54), possiamo procedere più brevemente servendoci di risultati noti nella teoria degli inviluppi di sfere (*Lezioni*, vol. II, cap. XVII).

Essendo la superficie rotolante S_0 una superficie di Peterson, con l'asse per retta satellite, ai sistemi coniugati della prima falda focale S_1 corrispondono (§ 14) i sistemi coniugati della superficie S d'appoggio, onde questi corrispondono anche, nel caso attuale, ai sistemi coniugati della seconda falda focale S_2. D'altronde la S_2 è anche una falda di un inviluppo di sfere aventi i centri distribuiti sulla superficie S d'appoggio [(M) § 12], e la corrispondenza dei sistemi coniugati sopra S, S_2 si mantiene comunque, deformando la superficie S dei centri. Dai teoremi dimostrati al § 264, vol. II, delle *Lezioni*, segue quindi:

1°) la seconda falda S_2 conserva sempre la medesima curvatura costante;

2°) la superficie S d'appoggio è applicabile sopra una quadrica di rotazione (reale od immaginaria).

E dalle ricerche contenute in (M) §§ 24-26, segue ancora che la superficie rotolante è una delle sei superficie di Peterson ivi determinate [cf. (M) § 26 in fine]. Si trovò in (M) che queste sei superficie di Peterson hanno a comune, con le superficie elicoidali, la proprietà che le deformate dei paralleli delle superficie di rotazione, su cui sono applicabili, sono tracciate sopra cilindri di rotazione attorno al loro asse. Possiamo anche caratterizzare queste superficie così: *Esse sono le uniche superficie di Peterson sulle quali le curve d'intersezione della superficie coi cilindri retti coassiali sono geodeticamente parallele.*

Per dimostrarlo, scriviamo l'equazione della superficie di Peterson sotto la forma (29) § 7, $\varrho = Z\Theta$, talchè il ds^2 sarà dato dalla (32) § 8. Calcolando il parametro differenziale primo di ϱ, abbiamo

$$\Delta_1 \varrho = \Delta_1 (Z\Theta) = \frac{\Theta'^2 + Z'^2 \Theta^4}{\Theta'^2 + \Theta^2 + Z'^2 \Theta^4},$$

e dovendo, nella nostra ipotesi, risultare $\Delta_1 \varrho$ funzione di ϱ, dovranno essere legate da una relazione le due funzioni

$$\frac{\Theta'^2}{\Theta^2} + Z'^2 \Theta^2 \quad , \quad Z\Theta .$$

Scrivendo che è nullo il loro determinante funzionale, si trova

$$ZZ'' - Z'^2 = \frac{\Theta\Theta'' - \Theta'^2}{\Theta^4},$$

e però, indicando con h una costante, avremo separatamente

$$\begin{cases} ZZ'' - Z'^2 = h \\ \Theta\Theta'' - \Theta'^2 = h\Theta^4, \end{cases}$$

la quale ultima si scrive anche

$$\frac{1}{\Theta}\left(\frac{1}{\Theta}\right)'' - \left(\frac{1}{\Theta}\right)'^2 = -h.$$

L'integrazione di queste due equazioni differenziali per Z e Θ, che determinano rispettivamente il profilo meridiano e la linea di livello delle superficie di PETERSON cercate, si compie immediatamente, e suddistinguendo i varii casi a seconda dei valori delle costanti, si ritrovano nuovamente le sei superficie di PETERSON ricordate.

Osserviamo ancora che per ogni congruenza generata dall'asse di una delle sei superficie di PETERSON, che rotoli sopra una qualunque sua deformata S, esistono [(M) § 20) ∞^1 congruenze della stessa specie aventi a comune la superficie d'appoggio e la seconda falda focale. Questa proprietà, come risulta dalle ricerche del § 265, vol. II, delle *Lezioni*, caratterizza completamente le congruenze di rotolamento in discorso.

Da ultimo consideriamo fra queste congruenze di rotolamento quelle particolari in cui la superficie S d'appoggio sia una delle deformate di PETERSON. Allora la prima falda focale S_1 si riduce all'asse, e la seconda S_2 sarà una superficie di JOACHIMSTHAL a curvatura costante, cioè una superficie d'ENNEPER (*Lezioni*, vol. II, § 332). Dunque:

Se una delle sei superficie di PETERSON, *deformate di quadriche rotonde, rotola sopra una delle sue deformate di* PETERSON, *l'asse descrive la congruenza delle tangenti alle linee di curvatura piane di una superficie d'*ENNEPER *a curvatura costante.*

In particolare, se la superficie rotolante S_0 diventa l'elicoide logaritmico, la superficie d'ENNEPER si riduce ad un'elicoide pseudosferica del DINI (§ 14).

§ 18.

Caso in cui la prima falda S_1 rimane a curvatura costante.

Nelle congruenze di rotolamento sopra considerate, la *seconda* falda focale S_2 rimane sempre a curvatura costante, per qualunque flessione della superficie S d'appoggio, e questa proprietà le caratterizza completamente. Ci proponiamo di risolvere il problema analogo nel caso della prima falda S_1: *Trovare le superficie* S_0 *tali che, rotolando* S_0 *sopra qualunque sua deformata, una conveniente retta satellite di* S_0 *generi una congruenza, la cui prima falda focale* S_1 *serbi sempre la medesima curvatura costante.*

Intanto osserviamo che di questo problema sono già note due soluzioni date dall'elicoide logaritmico e dalle superficie di rotazione complementari delle superficie di rotazione a curvatura costante. Troveremo che ne esistono altre, date sempre da superficie di PETERSON, che hanno la retta satellite per asse e sono applicabili sopra quadriche immaginarie (di DARBOUX) tangenti all'assoluto.

Trattiamo il problema enunciato, ricorrendo alle formole stabilite in (M) per il calcolo degli elementi relativi alla prima falda focale S_1 in una congruenza di rotolamento.

Le formole (22) § 4 (M) dànno, per i coefficienti E_1, F_1, G_1 dell'elemento lineare della S_1,

$$\begin{cases} E_1 = (uD + vD')^2 + \dfrac{(ur + vs)^2 (p^2 + q^2)}{1 + p^2 + q^2} \\ F_1 = (uD + vD')(uD' + vD'') + \dfrac{(ur + vs)(us + vt)(p^2 + q^2)}{1 + p^2 + q^2} \\ G_1 = (uD' + vD'')^2 + \dfrac{(us + vt)^2 (p^2 + q^2)}{1 + p^2 + q^2}, \end{cases}$$

e conseguentemente

$$E_1 G_1 - F_1^2 = \frac{p^2 + q^2}{1 + p^2 + q^2} \left\{ (us + vt)(uD + vD') - (ur + vs)(uD' + vD'') \right\}^2.$$

D'altra parte, dalle formole (58) al § 22 (M), pei coefficienti D_1, D_1', D_1'' della seconda forma fondamentale di S_1, risulta

$$\begin{aligned} (p^2 + q^2)(1 + p^2 + q^2)(D_1 D_1'' - D_1'^2) = {} & (pt - qs)(us + vt)(Dq - D'p)(uD + vD') + \\ & + (ps - qr)(ur + vs)(D'q - D''p)(uD' + vD'') - \\ & - (pt - qs)(ur + vs)(Dq - D'p)(uD' + vD'') - \\ & - (ps - qr)(us + vt)(D'q - D''p)(uD + vD'). \end{aligned}$$

La curvatura K_1 della S_1 essendo data da $K_1 = \dfrac{D_1 D_1'' - D_1'^2}{E_1 G_1 - F_1^2}$, noi esprimeremo che essa è una costante k scrivendo l'equazione

$$\begin{aligned} (55) \qquad (pt - qs(us + vt)(Dq - D'p)(uD + vD') + & \\ + (ps - qr)(ur + vs)(D'q - D''p)(uD' + vD'') - & \\ - (pt - qs)(ur + vs)(Dq - D'p)(uD' + vD'') - & \\ - (ps - qr)(us + vt)(D'q - D''p)(uD + vD') = & \\ = k(p^2 + q^2)^2 \left\{ u(us + vt) D + (v^2 t - u^2 r) D' - v(ur + vs) D'' \right\}^2, & \end{aligned}$$

che dovrà sussistere in tutte le flessioni di S, cioè per tutti i valori di D, D', D'' che verificano l'equazione di Gauss $DD'' - D'^2 = \dfrac{rt - s^2}{1 + p^2 + q^2}$. Considerando i varii termini della (55), si vede che le condizioni a ciò necessarie e sufficienti si esprimono con le proporzioni

$$(56) \qquad r : s : t = p^2 + k(p^2 + q^2)^2 v^2 : pq - k(p^2 + q^2)^2 uv : q^2 + k(p^2 + q^2) u^2,$$

onde il problema è ricondotto a ricercare le soluzioni comuni a queste due equazioni del secondo ordine. Ma, invece di compiere questa ricerca coi metodi generali, seguiamo qui un'altra via che meglio si presta alla interpretazione geometrica.

§ 19.

Le soluzioni del problema come superficie di Peterson.

Dalla (56) segue subito la (55): $q(ur+vs)=p(us+vt)$, e per ciò: *le superficie cercate sono superficie di* Peterson *aventi la retta satellite per asse.*

Dalla (56) stessa risulta che l'equazione differenziale delle asintotiche

$$r du^2 + 2s\, du\, dv + t dv^2 = 0\,,$$

si scrive

$$(p du + q dv)^2 + k(p^2+q^2)^2 (u dv - v du)^2 = 0\,,$$

ovvero, in coordinate cilindriche

$$dz^2 + k(p^2+q^2)^2 \varrho^4 d\theta^2 = 0\,. \tag{57}$$

Ma se $\varrho = Z\Theta$ è l'equazione della superficie di Peterson, il coseno dell'angolo dalla normale con l'asse Oz è dato da

$$\frac{Z'\Theta^2}{\sqrt{\Theta'^2+\Theta^2+Z'^2\Theta^4}}\,,$$

e nello stesso tempo da $\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, onde segue

$$p^2+q^2 = \frac{\Theta'^2+\Theta^2}{Z'^2\Theta^4}\,.$$

La (57) diventa quindi

$$dz^2 + k\frac{(\Theta'^2+\Theta^2)^2}{\Theta^4}\frac{Z^4}{Z'^4} d\theta^2 = 0\,,$$

ed è da identificarsi con la equazione differenziale delle asintotiche data, secondo le formole del § 4, da

$$dz^2 + \frac{Z}{Z''}\frac{\Theta\Theta''-2\Theta'^2-\Theta^2}{\Theta^2} d\theta^2 = 0\,,$$

il che dà, per la condizione richiesta,

$$\frac{kZ''Z^3}{Z'^4} = \frac{(\Theta\Theta''-2\Theta'^2-\Theta^2)\Theta^2}{(\Theta^2+\Theta'^2)^2}\,.$$

Ma a sinistra abbiamo una funzione di z, a destra una funzione di θ, e però dovranno sussistere le due equazioni

$$Z'' Z^3 = \frac{h}{k} Z'^4, \tag{58}$$

$$(\Theta\Theta'' - 2\Theta'^2 - \Theta^2)\,\Theta^2 = h(\Theta'^2 + \Theta^2)^2, \tag{59}$$

dove h è una costante arbitraria (non nulla).

Viceversa, determinando il profilo meridiano della superficie di Peterson dalla (58), e la linea di livello dalla (59), le condizioni sono soddisfatte e troviamo così tutte le soluzioni del problema.

Ora l'integrazione della (58) è immediata se si osserva che possiede l'integrale primo

$$\frac{k}{Z'^2} = \frac{h}{Z^2} + c \qquad (c \text{ costante})$$

e, proseguendo l'integrazione, si riconosce facilmente che *i profili meridiani di queste superficie di* Peterson *sono i meridiani delle superficie di rotazione complementari di quelle a curvatura costante.* La stessa cosa si deduce a priori dall'osservare che, ponendo $h = -1$, la (59) è soddisfatta da $\Theta = \text{cost}$, ciò che riduce la superficie di Peterson a superficie di rotazione, dopo di che dall'enunciato stesso del problema segue che la sua complementare è a curvatura costante.

Similmente si integra la (59) partendo dall'integrale intermediario

$$\frac{\Theta^4}{\Theta'^2 + \Theta^2} + h\Theta^2 = c' \qquad (c' \text{ costante}), \tag{60}$$

e l'integrazione si compie per quadrature con funzioni ordinarie.

Determinate così completamente le superficie di Peterson soluzioni del problema, si potrebbe dimostrare che esse sono applicabili sopra quadriche immaginarie tangenti all'assoluto. Ma val meglio ricondursi a risultati noti nella teoria della deformazione delle congruenze *al modo di* Ribaucour [1], ciò che ci procurerà nel tempo stesso le equazioni in termini finiti delle nostre superficie.

Per questo osserviamo che, nelle attuali congruenze di rotolamento, la prima falda focale S_1 è sempre a curvatura costante (positiva o negativa), comunque si fletta la superficie S d'appoggio. D'altronde, per le proprietà generali delle congruenze di rotolamento, la normale alla S_1 giace nel piano corrispondente della S ed ha ivi una posizione invariabile per deformazione, onde la congruenza delle normali alla S_1 si deforma al modo di Ribaucour al flettersi della S, sui cui piani tangenti giacciono individualmente i suoi raggi. Ci troviamo quindi appunto nel caso considerato nella Memoria, ora citata, del tomo VI degli Annali, e la discussione ivi effettuata dimostra che la superficie S d'appoggio è applicabile sopra una quadrica (immaginaria) tangente all'assoluto, e per ciò anche la superficie rotolante S_0 di Peterson.

Il corrispondente ds^2 offrirà l'una o l'altra delle due forme (II) o (III) del § 7 nella Memoria citata, secondo che la quadrica fondamentale tocca semplicemente, ovvero oscula l'assoluto.

Inversamente, dimostreremo che tutti i ds^2 di questa forma appartengono a superficie reali di Peterson, soluzioni del nostro problema, delle quali troveremo le equazioni in termini finiti, mediante le formole generali d'inversione stabilite nella Memoria citata, formole che insegnano a dedurre, da ogni superficie Σ a curvatura costante k, una tripla infinità di superficie applicabili sulle dette quadriche. Soltanto bisognerà porsi qui nel caso limite che la superficie a curvatura costante Σ si riduca ad una retta.

§ 20.

Caso delle quadriche osculanti l'assoluto.

Cominciamo dal caso delle superficie applicabili su quadriche *osculanti l'assoluto*, che dipendono nel noto modo (*Lezioni*, vol. II, § 447) dalle famiglie di Lamé a curvatura costante. Distinguiamo i due casi di k positiva o negativa, ponendo per semplicità $k = \pm 1$.

1° caso, $k = -1$. La superficie pseudosferica Σ di raggio $= 1$ sia definita (vol. II, § 373) dal suo ds^2 riferito alle linee (u, v) di curvatura

$$ds^2 = \cos^2\theta\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, dv^2 .$$

Si consideri, nelle tre funzioni incognite λ, μ, ψ, il sistema lineare

$$(61)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial v} = \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\mu + \cos\theta\,.\,\psi - c\operatorname{sen}\theta\ , & \dfrac{\partial\mu}{\partial u} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\lambda\ , & \dfrac{\partial\psi}{\partial u} = \cos\theta\,.\,\lambda \\[2ex] \dfrac{\partial\lambda}{\partial v} = \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\mu\ , & \dfrac{\partial\mu}{\partial v} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\lambda + \operatorname{sen}\theta\,.\,\psi + c\cos\theta\ , & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} = \operatorname{sen}\theta\,.\,\mu\,, \end{cases}$$

dove c indica una costante arbitraria. Da ogni terna (λ, μ, ψ) soluzione di questo sistema (completamente integrabile) deriva una superficie S_0 applicabile sulla detta quadrica osculante l'assoluto, e le formole per le equazioni parametriche di S_0 sono le seguenti:

$$(62)\quad \begin{cases} x_0 = x - \dfrac{1}{\psi}(\lambda X_1 + \mu X_2 + c X_3) \\[2ex] y_0 = y - \dfrac{1}{\psi}(\lambda Y_1 + \mu Y_2 + c Y_3) \\[2ex] z_0 = z - \dfrac{1}{\psi}(\lambda Z_1 + \mu Z_2 + c Z_3)\,. \end{cases}$$

Esse conservano la loro validità anche nel caso limite che la superficie Σ si riduca ad una retta, per la qual cosa basta prendere $\theta = 0$ e porre (cf. *Lezioni*, vol. II, pag. 420)

$$(63)\quad \begin{cases} x = 0 \;,\; y = 0 \;,\; z = u \\ X_1 = 0 \;,\; Y_1 = 0 \;,\; Z_1 = 1 \\ X_2 = \operatorname{sen} v \;,\; Y_2 = -\cos v \;,\; Z_2 = 0 \\ X_3 = \cos v \;,\; Y_3 = \operatorname{sen} v \;,\; Z_3 = 0 \,. \end{cases}$$

Ma allora, essendo $\theta = 0$, le (61) diventano

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} = \psi \;,\; \frac{\partial \mu}{\partial u} = 0 \;,\; \frac{\partial \psi}{\partial u} = \lambda$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} = 0 \;,\; \frac{\partial \mu}{\partial v} = c \;,\; \frac{\partial \psi}{\partial v} = 0 \,,$$

e integrate dànno

$$\lambda = a \operatorname{senh} u + b \cosh u \;,\; \psi = a \cosh u + b \operatorname{senh} u \;,\; \mu = cv + c' \,,$$

con a, b, c' nuove costanti arbitrarie. Sostituendo nelle (62), abbiamo per le equazioni parametriche della S_0:

$$x_0 = -\frac{(cv + c') \operatorname{sen} v + c \cos v}{a \cosh u + b \operatorname{senh} u} \;,\; y_0 = \frac{(cv + c') \cos v - c \operatorname{sen} v}{a \cosh u + b \operatorname{senh} u} \,,$$

$$z_0 = u - \frac{a \operatorname{senh} u + b \cosh u}{a \cosh u + b \operatorname{senh} u} \,,$$

che pongono in evidenza (§ 7) una superficie di Peterson con le $v = \text{cost}$ profili meridiani e le $u = \text{cost}$ linee di livello. Ma possiamo scrivere le precedenti sotto forma più semplice, disponendo di costanti additive nei parametri u, v. In primo luogo si osservi che se $c = 0$, la S_0 è di rotazione, precisamente la complementare di una superficie pseudosferica. Escluso questo caso ovvio, essendo $c \neq 0$, basta ruotare la superficie attorno al suo asse e cangiare v in $v + \text{cost}$, per ridurre $c' = 0$. Ed aumentando poi u di una costante, possiamo ridurci ad uno dei tre casi

$$b = 0 \;,\; a = 0 \;,\; a = b \,,$$

onde, per le corrispondenti superficie di Peterson, abbiamo i tre tipi seguenti, dove m indica una costante (arbitraria):

$$a)\quad x = \frac{m}{\cosh u}(v \operatorname{sen} v + \cos v) \;,\; y = \frac{m}{\cosh u}(v \cos v - \operatorname{sen} v) \;,\; z = u - \operatorname{tgh} u$$

$$b)\quad x = \frac{m}{\operatorname{senh} u}(v \operatorname{sen} v + \cos v) \;,\; y = \frac{m}{\operatorname{senh} u}(v \cos v - \operatorname{sen} v) \;,\; z = u - \coth u$$

$$c)\quad x = m e^{u} (v \operatorname{sen} v + \cos v) \;,\; y = m e^{u} (v \cos v - \operatorname{sen} v) \;,\; z = u \,.$$

I profili meridiani di queste superficie di PETERSON, applicabili sulla quadrica osculante l'assoluto, sono i meridiani delle superficie di rotazione complementari delle pseudosferiche. In particolare, nel tipo *c*), il profilo meridiano è la curva logaritmica.

2° caso, $k = +1$. Il ds^2 della superficie Σ si scrive

$$ds^2 = \operatorname{senh}^2\theta\, du^2 + \cosh^2\theta\, dv^2,$$

ed il sistema differenziale (61) è da sostituirsi coll'altro

$$(61^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial u} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\mu - \operatorname{senh}\theta.\psi - c\cosh\theta\,,\ \dfrac{\partial\mu}{\partial u} = \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\lambda\,,\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} = \operatorname{senh}\theta.\lambda \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial v} = \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\mu\,,\ \dfrac{\partial\mu}{\partial v} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\lambda - \cosh\theta.\psi - c\operatorname{senh}\theta\,,\ \dfrac{\partial\psi}{\partial v} = \cosh\theta.\mu, \end{cases} \qquad (c \text{ costante})$$

mentre le (62) diventano

$$x_0 = x + \frac{1}{\psi}(\lambda X_1 + \mu X_2 + c X_3)\,, \quad \text{ecc.}$$

Per ridurre Σ ad una retta, basta prendere $\theta = 0$ e assumere (*Lezioni*, vol. II, pag. 473).

$$(63^*)\quad \begin{cases} x = 0 & , y = 0 & , z = v \\ X_1 = -\operatorname{sen} u & , Y_1 = \cos u & , Z_1 = 0 \\ X_2 = 0 & , Y_2 = 0 & , Z_2 = 1 \\ X_3 = \cos u & , Y_3 = \operatorname{sen} u & , Z_3 = 0\,, \end{cases}$$

e integrando le (61*) per $\theta = 0$, risulta

$$\lambda = -cu + c' \quad , \quad \mu = a\operatorname{sen} v + b\cos v \quad , \quad \psi = -a\cos v + b\operatorname{sen} v\,,$$

con a, b, c' costanti. Senza alterare la generalità, si può fare $a = 0$, ed ancora $c' = 0$, ove si lasci da parte il caso $c = 0$ della complementare della sfera. La superficie S_0 di PETERSON diventa, in questo caso,

$$d)\quad x = m\,\frac{u\operatorname{sen} u + \cos u}{\operatorname{sen} v}\quad , \quad y = m\,\frac{-u\cos u + \operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} v}\quad , \quad z = v + \cot v\,,$$

dove le $u = \text{cost}$ sono qui i profili meridiani (meridiani della complementare della sfera) e le linee $v = \text{cost}$ quelle di livello.

§ 21.

Caso delle quadriche tangenti all'assoluto.

Nel caso delle quadriche semplicemente tangenti all'assoluto, i calcoli procedono in modo analogo al caso del paragrafo precedente, e basterà qui indicarli.

1° caso. $k = -1$. Il sistema differenziale (61) deve sostituirsi con l'altro omogeneo in *quattro* funzioni incognite λ, μ, φ, w:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial u} = (1-\gamma)\cos\theta.\varphi - \gamma\,\mathrm{sen}\,\theta.w + \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\mu\,, & \dfrac{\partial\lambda}{\partial v} = \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\mu \\ \dfrac{\partial\mu}{\partial u} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\lambda & \dfrac{\partial\mu}{\partial v} = (1-\gamma)\,\mathrm{sen}\,\theta.\varphi + \gamma\cos\theta.w - \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\lambda \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = \cos\theta.\lambda & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = \mathrm{sen}\,\theta.\mu \\ \dfrac{\partial w}{\partial u} = \mathrm{sen}\,\theta.\lambda & \dfrac{\partial w}{\partial v} = \cos\theta.\mu\,, \end{cases}$$

dove γ indica una costante arbitraria *differente da 1.* Ad ogni quaderna $(\lambda, \mu, \varphi, w)$ di soluzioni di questo sistema (completamente integrabile) corrisponde una superficie S_0 applicabile sopra una quadrica di Darboux, e definita parametricamente dalle formole

$$x_0 = x + \frac{1}{(\gamma-1)\varphi}(\lambda X_1 + \mu X_2 + \gamma w X_3)\,, \text{ ecc.} \tag{64}$$

Se ora, come al § 20, riduciamo la Σ ad una retta secondo le formole (63), il sistema differenziale in λ, μ, φ, w diventa, per $\theta = 0$,

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u} = (1-\gamma)\varphi\,,\quad \frac{\partial\mu}{\partial u} = 0\,,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial u} = \lambda\,,\quad \frac{\partial w}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial v} = 0\,,\quad \frac{\partial\mu}{\partial v} = \gamma w\,,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial v} = 0\,,\quad \frac{\partial w}{\partial v} = \mu\,,$$

e si integra, per funzioni circolari o iperboliche, a seconda dei segni di $\gamma, 1-\gamma$. Suddistinguendo i varii casi, e sostituendo nelle (64), si hanno, in termini finiti, le superficie di Peterson cercate.

2° caso, $k = +1$. Qui il sistema differenziale per λ, μ, φ, w diventa

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial u} = (\gamma-1)\operatorname{senh}\theta.\varphi - \gamma\cosh\theta.w - \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\mu\,, & \dfrac{\partial\lambda}{\partial v} = \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\mu \\ \dfrac{\partial\mu}{\partial u} = \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\lambda & , \dfrac{\partial\mu}{\partial v} = (\gamma-1)\cosh\theta.\varphi - \gamma\operatorname{senh}\theta.w - \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\lambda \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = \operatorname{senh}\theta.\lambda & , \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = \cosh\theta.\mu \\ \dfrac{\partial w}{\partial u} = \cosh\theta.\lambda & , \dfrac{\partial w}{\partial v} = \operatorname{senh}\theta.\mu\,. \end{cases}$$

e le formole (64) si sostituiscono con le altre

$$(64^*) \qquad x_0 = x + \frac{1}{(1-\gamma)\varphi}(\lambda X_1 + \mu X_2 + \gamma w X_3)\,, \text{ ecc.}$$

Se, nuovamente, con le formole (63*), si riduce la superficie Σ ad una retta, l'integrazione del sistema in λ, μ, φ, w si compie subito, e sostituendo in (64*) si hanno in termini finiti le corrispondenti superficie di Peterson.

Terminiamo con l'osservare quali specie di congruenze genera l'asse di una di queste superficie di Peterson, applicabile sopra una quadrica di Darboux, quando si faccia rotolare sopra una sua *deformata di Peterson*. La prima falda focale a curvatura costante si ridurrà ad una retta e la seconda sarà una superficie di Joachimsthal alle cui linee di curvatura piane saranno tangenti i raggi della congruenza. Basta ora applicare il teorema di Ribaucour sulle congruenze W (*Lezioni*, vol. II, pag. 59) per vedere che queste superficie di Joachimsthal godranno della proprietà espressa dalla formola

$$K = c\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma}{R}\right)^4 \quad (c \text{ costante})\,,$$

dove $\sigma = \sigma(v)$ è l'angolo sotto cui il piano di una linea di curvatura $v = \text{cost}$ taglia la superficie, ed $R = R(u)$ è il raggio della sfera che contiene la linea di curvatura $u = \text{cost}$.