Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde.

Memoria del Socio LUIGI BIANCHI.

PREFAZIONE.

Si sa come i teoremi fondamentali relativi alle deformate delle quadriche generate dal rotare di una conica *attorno all'asse focale*, scoperti da GUICHARD nel 1899, stabilendo un intimo legame fra la deformazione di queste quadriche e quella della sfera, hanno permesso di costruire una teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante *positiva* affatto analoga a quella già prima stabilita per le superficie a curvatura costante negativa (pseudosferiche), e di tradurre quindi i risultati di questa teoria in corrispondenti proprietà per la deformazione di quelle quadriche rotonde [1].

Ma, volendo restare nel campo reale, le teorie svolte fin qui si applicavano appunto soltanto alle quadriche di rotazione attorno all'asse focale, cioè all'*ellissoide allungato*, ed all'*iperboloide a due falde*, alle quali forme è da aggiungersi quella del *paraboloide*, le cui deformazioni dipendono dalle superficie d'area minima. Le ricerche che svolgo nella presente Memoria hanno precisamente per iscopo di completare queste teorie collo studio delle superficie *reali* applicabili sulle altre quadriche rotonde fin qui escluse, e cioè: *a*) *l'iperboloide rigato*; *b*) *l'ellissoide schiacciato*, alle quali forme dobbiamo aggiungere come terza forma: *c*) *l'ellissoide immaginario*. Esistono invero superficie *reali* applicabili sopra quest'ultimo ellissoide (da distinguersi del resto in più classi) e per esse valgono, come si vedrà, i medesimi teoremi come per le forme *a*) *b*). Per abbreviare indicheremo col nome comune di *quadriche di seconda specie* le quadriche della forma *a*) o *b*) o *c*); e diremo quadriche *di prima specie* le rimanenti sopra ricordate.

[1] Cfr. la mia Memoria: *Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante* (Annali di matematica, Serie 3ª, T. III, 1899) e i Capitoli XVII, XXIV e XXV delle mie *Lezioni di geometria differenziale* (2ª edizione in due volumi). Pisa, Spörri, 1902-1903.

La teoria delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde di prima specie si riconduce, come già abbiamo detto, a quella delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante positiva; l'altra che ci proponiamo di costruire per le quadriche di seconda specie viene a collocarsi ancor più vicina a quella delle trasformazioni delle superficie pseudosferiche, che fu il punto di partenza per tutta la teoria delle trasformazioni delle superficie di curvatura costante. E invero a base della teoria delle trasformazioni delle superficie pseudosferiche sta l'elemento geometrico delle congruenze rettilinee pseudosferiche, dotate delle seguenti proprietà caratteristiche: 1ª le due falde focali della congruenza sono applicabili l'una sull'altra e sulla pseudosfera (o sulla sfera immaginaria); 2ª sulle due falde focali della congruenza si corrispondono le linee assintotiche, ciò che esprimiamo dicendo che la congruenza è una congruenza W (*Lezioni*, § 242). Inoltre ha luogo la proprietà, di fondamentale importanza per la teoria delle trasformazioni, che ogni superficie pseudosferica appartiene, come prima falda focale, ad ∞^2 congruenze pseudosferiche. Orbene, per tutte le superficie applicabili sulle quadriche rotonde di seconda specie hanno luogo proprietà geometriche affatto analoghe, che si riassumono nella seguente proposizione fondamentale per la nuova teoria:

Teorema A). — *Ogni superficie applicabile sopra una quadrica rotonda* Q *di seconda specie appartiene, come prima falda focale, ad una doppia infinità di congruenze rettilinee reali* W, *la cui seconda falda focale è applicabile sulla medesima quadrica* Q.

Il passaggio da una deformata S_0 della quadrica Q ad un'altra deformata S'_0, la quale insieme con S_0 costituisca le due falde di una delle ∞^2 congruenze W di cui si parla nel teorema, sarà una delle ∞^2 *trasformazioni* della superficie S_0. E se supponiamo in particolare che la quadrica Q sia la sfera immaginaria (di raggio puramente immaginario), veniamo a ricadere appunto nella ordinaria teoria delle trasformazioni delle superficie pseudosferiche.

Quanto alle operazioni analitiche necessarie per costruire da una deformata *nota* S_0 della quadrica Q le ∞^2 superficie S'_0 trasformate, diciamo subito che consistono nella integrazione di un'equazione differenziale ordinaria del tipo di Riccati. Tanto risulta in effetto dal legame che presentano le indicate trasformazioni colle trasformazioni di Bäcklund di certe classi di superficie *immaginarie* di curvatura costante. Delle due costanti che entrano in una delle nostre trasformazioni per una data deformata S_0 della quadrica Q, una assegna il valore (reale od immaginario) della distanza focale nella corrispondente congruenza pseudosferica immaginaria. Indicheremo questa costante con τ e la trasformazione stessa, che fa passare dalla superficie primitiva S_0 ad una delle derivate S'_0, col simbolo B_τ. Ciò premesso, dal teorema di permutabilità per le trasformazioni di Bäcklund delle superficie di curvatura costante, e da alcune proprietà complementari che dimostreremo nel corso della Memoria, noi dedurremo la seconda proposizione fondamentale della teoria, che si dirà il

Teorema B) (teorema di permutabilità). — *Se da una superficie* S_0, *applicabile sopra una quadrica rotonda* Q *di seconda specie, si ottengono due nuove superficie* S'_0, S''_0 *applicabili sulla medesima quadrica* Q, *mediante due delle nostre trasformazioni* $B_{\tau'}$, $B_{\tau''}$ *a costanti* τ', τ'' *diseguali, esiste una quarta superficie*

S_0'' *della stessa specie, perfettamente determinata e costruibile in termini finiti da* S_0, S_0', S_0'', *che è legata alla sua volta alle medesime superficie* S_0', S_0'' *da due trasformazioni* $B_{\tau''}$, $B_{\tau'}$ *colle medesime costanti* τ'', τ' *invertite.*

Da questo teorema di permutabilità si deducono precisamente le medesime conseguenze come dall'analogo nella teoria delle superficie pseudosferiche e cioè che nell'applicazione successiva ed illimitata delle nostre trasformazioni alle superficie applicabili sulla quadrica Q, che via via si ottengono da una iniziale nota S_0, basta avere integrato la *prima* equazione di Riccati perchè lo siano insieme tutte le successive: anche qui adunque, dopo il primo passo, l'applicazione del metodo si effettua senza alcun nuovo calcolo d'integrazione (¹).

Le due proposizioni fondamentali A) B), alla cui dimostrazione completa saranno diretti gli sviluppi della presente Memoria, portano evidentemente la teoria delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde di seconda specie al punto stesso di sviluppo che la teoria delle superficie pseudosferiche aveva già da tempo raggiunta.

Converrà ora che all'enunciato di questi teoremi generali facciamo seguire alcune osservazioni per precisare l'estensione delle classi di superficie alle quali si applicano i teoremi stessi. E in primo luogo osserveremo che le superficie reali applicabili sopra una quadrica rotonda Q (di prima o di seconda specie) debbono propriamente distinguersi in due classi: quella delle superficie applicabili sulla regione reale di Q e quella delle superficie (reali) applicabili soltanto sopra una regione immaginaria, o ideale, di Q. Le prime sono le effettive superficie applicabili sopra Q *in senso ristretto*; le seconde, per usare di un termine la cui opportuna introduzione è dovuta al geometra russo Peterson, si diranno *applicabili sopra* Q *al di là o fuori dei limiti.*

Ora i nostri teoremi A) B) valgono indistintamente per tutte le classi di superficie applicabili sulle quadriche Q di seconda specie sia che l'applicabilità abbia luogo in senso ristretto (o dentro ai limiti) sia per un'applicabilità fuori dei limiti. E, per precisare ancor più, aggiungeremo che se la quadrica Q è un iperboloide ad una falda, ovvero un ellissoide immaginario, le superficie S_0' derivate con una delle nostre trasformazioni da una iniziale S_0 sono applicabili in senso ristretto l'una sull'altra e per ciò, rispetto alla quadrica Q, applicabili insieme entro o fuori dei limiti. Se invece la quadrica Q è un ellissoide schiacciato, una trasformazione semplice B_τ fa passare da una superficie S_0 applicabile sull'ellissoide entro ai limiti (fuori dei limiti) ad una contigua S_0' applicabile sullo stesso ellissoide fuori dei li-

(¹) Debbo qui avvertire che, per il caso particolare dell'iperboloide rotondo ad una falda, avevo già comunicato i teoremi A) B) del testo in una Nota inserita nei Rendiconti dei Lincei (maggio 1905). Successivamente è comparso nel Giornale di matematiche (vol. XLIII, 12° della 2ª serie) un interessante lavoro del dott. O. Chieffi dal titolo: *Sulle deformate dell'iperboloide rotondo ad una falda e su alcune superficie che se ne deducono*, ove per via affatto indipendente da quella da me seguita l'autore perviene a stabilire l'esistenza di trasformazioni per le dette deformate, ciò che deve equivalere, pel caso particolare dell'iperboloide ad una falda, ad una parte del teorema A) del testo. Però nella Memoria del dott. Chieffi non figura l'elemento essenziale geometrico delle congruenze W del teorema A), nè il teorema B) di permutabilità, dal quale principalmente dipende l'efficacia del metodo di trasformazione.

miti (entro ai limiti). Insomma per *una* trasformazione B_τ di una superficie applicabile sull'ellissoide schiacciato cangia la classe a cui la superficie appartiene nella opposta ed occorre quindi applicare un numero *pari* di trasformazioni per rimanere nella medesima classe.

È necessario poi avvertire che fra le superficie applicabili sull'iperboloide rotondo ad una falda richieggono una particolare trattazione le deformate *rigate* dell'iperboloide che, secondo una nota proposizione di LAGUERRE, dipendono dalle curve di BERTRAND, trasformate del circolo di gola dell'iperboloide. Quando la superficie S_0 applicabile sull'iperboloide è rigata, anche le sue ∞^2 superficie trasformate sono rigate e le nuove curve di BERTRAND che ne sono le linee di stringimento derivano dalla primitiva C linea di stringimento di S_0 (più precisamente dalla sua coniugata $\bar{C}$) con una di quelle trasformazioni delle curve di BERTRAND che, scoperte in un caso particolare dal DEMARTRES, furono poi generalizzate dal RAZZABONI.

Si può ora domandare se i teoremi A) B) siano veramente limitati alle sole quadriche rotonde di seconda specie o valgano piuttosto anche per quelle di prima. La risposta, come era facilmente prevedibile, è questa che: per renderli applicabili alle quadriche di prima specie conviene rinunziare alla *realità* delle congruenze W di cui parla il teorema A). Una trasformazione semplice B_τ fa allora passare da una superficie *reale* S_0 applicabile sulla quadrica Q di prima specie ad una contigua S_0' necessariamente immaginaria; ed è soltanto combinando opportunamente due trasformazioni B_τ successive, coniugate immaginarie, che si ottiene una nuova superficie reale.

Insomma la teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle varie specie di quadriche rotonde risulta così perfettamente assimilabile a quella delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante, che ne è alla sua volta un caso particolare. Le superficie applicabili sulle quadriche rotonde di seconda specie si comportano precisamente come le ordinarie superficie pseudosferiche (deformate della sfera immaginaria); quelle applicabili sulle quadriche di prima specie si comportano invece come le superficie di curvatura costante positiva (deformate della sfera reale).

Da ultimo avvertirò che mi sono limitato nella presente Memoria a trattare delle superficie applicabili sulle quadriche *rotonde* principalmente nell'intento di esporre risultati completi. Per altro alcune ricerche complementari mi hanno già dimostrato che i teoremi stessi valgono anche per classi di superficie applicabili sopra quadriche generali (reali od immaginarie). Ritengo pertanto molto probabile che i teoremi in discorso conservino la loro validità per tutte le superficie applicabili sopra quadriche. E scopo delle mie ricerche successive sarà appunto di accertare questo fatto che, ove trovi la desiderata conferma, verrà a dare, mi sembra, alla teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche generali il suo assetto definitivo [1].

[1] Nell'intervallo corso fra la presentazione e la stampa del presente lavoro ho potuto pienamente confermare queste previsioni per quanto riguarda le superficie applicabili sui *paraboloidi generali* ellittico ed iperbolico. Per esse valgono in effetto i medesimi teoremi A) e B) come per le quadriche rotonde di seconda specie ed anzi, nel caso dei paraboloidi, i processi di dimostrazione sono più semplici e rapidi. Queste nuove ricerche verranno presto pubblicate negli *Annali di matematica* (V. anche Rendiconti dei Lincei, settembre 1905).

§ 1.

Le superficie complementari delle quadriche a centro rotonde.

Alle nostre ricerche conviene premettere un esame accurato delle relazioni che intercedono fra una deformata qualunque S_0 di una quadrica rotonda Q e la sua superficie complementare $\bar{S}_0$, presa rispetto alle geodetiche di S_0 deformate dei meridiani della quadrica: di tale studio ci occupiamo in questo primo paragrafo. Prendendo per asse delle z l'asse di rotazione della quadrica Q, indichiamo con r, z le coordinate rettangolari di un punto mobile sulla curva meridiana, la cui equazione scriviamo

$$\frac{r^2}{A} + \frac{z^2}{B} = 1,$$

significando A, B due costanti reali, che supponiamo però diseguali, a fine di escludere il caso già trattato di superficie a curvatura costante. Poichè r è il raggio del parallelo, l'elemento lineare della quadrica Q, ossia della superficie S_0, sarà dato dalla formola

$$(1) \qquad ds_0^2 = \frac{A^2 + (B - A) r^2}{A (A - r^2)} dr^2 + r^2 dv^2,$$

il parametro v indicando la longitudine. Pel calcolo dell'elemento lineare $\bar{ds}_0$ della superficie complementare $\bar{S}_0$ ricorriamo alla formola generale data al § 136* delle mie *Lezioni* (vol. I, pag. 296) ed avremo

$$\bar{ds}_0^2 = r^2 d\varrho^2 + \varrho^2 dv_1^2,$$

ove si ponga

$$(2) \qquad \varrho = \sqrt{\frac{A^2 + (B - A) r^2}{A (A - r^2)}}.$$

Di qui, eliminando r, troviamo

$$(3) \qquad \bar{ds}_0^2 = \frac{A^2 (\varrho^2 - 1)}{A\varrho^2 + (B - A)} d\varrho^2 + \varrho^2 dv_1^2.$$

Ora se poniamo

$$\varrho = k\bar{r}, \; v_1 = \frac{\bar{v}}{k}$$

e prendiamo convenientemente la costante k, potremo ridurre nuovamente la (3) alla forma stessa (1):

$$\bar{ds}_0^2 = \frac{A^2 + (B - A) \bar{r}^2}{A (A - \bar{r}^2)} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\bar{v}^2.$$

Basta invero assumere per questo $k^2 = \frac{A-B}{A}$ e quindi:

$$(4) \qquad \bar{r} = \sqrt{\frac{A^2 + (B-A)\,r^2}{A - r^2} \cdot \frac{A}{A-B}} \quad , \quad \bar{v} = \frac{A}{\sqrt{A-B}}\, v.$$

I due elementi lineari ds_0, $\bar{ds}_0$ sono dunque riducibili l'uno all'altro per mezzo di queste relazioni (4), le quali possono del resto, secondo i casi, rappresentare formole di trasformazione reali od immaginarie. Se consideriamo l'applicabilità di due superficie dal punto di vista generale analitico come equivalenza dei loro elementi lineari per trasformazioni reali od immaginarie, possiamo dire: *La superficie complementare di una superficie* S_0 *applicabile sopra una quadrica rotonda è applicabile sulla quadrica stessa* (¹).

Ben diversamente però si comportano le cose dal punto di vista *reale*, ove noi ci collochiamo. Diventa allora necessario esaminare singolarmente le cinque forme possibili per le quadriche rotonde (a centro) (²) e discutere le formole (4) non solo riguardo alla loro *realità* o meno, ma anche riguardo ai limiti entro i quali variano i nostri parametri, supposti reali. Distinguendo così le cinque forme di quadriche rotonde a centro, troviamo i risultati seguenti.

a) Ellissoide allungato: $A = a^2$, $B = b^2$, con $a^2 < b^2$ (³).

Le formole (4) dimostrano che $\bar{r}$, $\bar{v}$ sono puramente immaginarî quando r, v sono reali; per ciò l'applicabilità di questa quadrica sulla complementare ha luogo solo *fuori dei limiti*.

b) Ellissoide schiacciato: $A = a^2$, $B = b^2$, con $a^2 < b^2$.

Allora $\bar{r}$, $\bar{v}$ sono bensì reali per r, v reali; però mentre nella regione reale dell'ellissoide $r^2 < a^2$, dalla (4) si ha invece

$$\bar{r}^2 = \frac{a^2}{a^2 - b^2}\,\frac{a^4 - (a^2 - b^2)\,r^2}{a^2 - r^2},$$

quindi $\bar{r}^2 > \frac{a^4}{a^2 - b^2} > a^2$. Anche qui adunque, sebbene le formole di trasformazione siano reali, l'applicabilità della quadrica sulla sua complementare ha luogo soltanto al di là dei limiti.

c) Iperboloide a due falde: $A = -a^2$, $B = b^2$.

Le quantità $\bar{r}$, $\bar{v}$ sono immaginarie per r, v reali e la superficie è applicabile sulla complementare fuori dei limiti.

d) Iperboloide ad una falda: $A = a^2$, $B = -b^2$.

Le formole (4) diventano

$$\bar{r} = a\sqrt{\frac{(a^2 + b^2)\,r^2 - a^4}{(a^2 + b^2)\,(r^2 - a^2)}} \quad , \quad \bar{v} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\, v$$

(¹) Questo ci dà il primo e più semplice esempio di congruenze W della specie indicata nella prefazione, le due superficie complementari costituendo le due falde della congruenza. È questo l'unico caso in cui le nostre congruenze sono normali.

(²) Per il paraboloide, che a noi qui non occorre considerare, l'applicabilità della superficie S_0 sulla complementare ha luogo solo fuori dei limiti.

(³) Qui, come in seguito, a, b denotano costanti reali e positive.

e danno valori reali per $\bar{r}, \bar{v}$ quando r, v sono reali; ma di più, essendo nella regione reale dell'iperboloide $r^2 > a^2$, ne risulta anche evidentemente $\bar{r}^2 > a^2$. Dunque: *Ogni deformata dell'iperboloide rotondo ad una falda è applicabile in senso ristretto sopra la sua superficie complementare.*

D'altra parte però osserviamo che l'elemento lineare di questa quadrica

$$ds_0^2 = \frac{(a^2+b^2)r^2 - a^4}{a^2(r^2-a^2)} dr^2 + r^2 dv^2$$

riveste forma reale anche quando

$$r^2 < \frac{a^4}{a^2+b^2} < a^2,$$

cioè al di là dei limiti della regione reale dell'iperboloide. Per ciò noi dovremo considerare una seconda classe di superficie *reali* applicabili sull'iperboloide fuori dei limiti e per esse converrà scrivere il ds_0^2 sotto la forma

$$ds_0^2 = \frac{a^4 - (a^2+b^2)r^2}{a^2(a^2-r^2)} dr^2 + r^2 dv^2$$

per ridurre positivi il numeratore ed il denominatore del coefficiente di dr^2. Ed anche per questa classe di superficie applicabili avremo evidentemente: *ogni superficie reale applicabile fuori dei limiti sull'iperboloide rotondo ad una falda ha per complementare una superficie della medesima specie.*

c) Ellissoide immaginario: $A = -a^2$, $B = -b^2$.

Qui abbiamo

$$ds_0^2 = \frac{a^4 + (a^2-b^2)r^2}{a^2(a^2+r^2)} dr^2 + r^2 dv^2$$

e le formole (4) di trasformazione sono:

$$\bar{r} = a\sqrt{\frac{a^4+(a^2-b^2)r^2}{(b^2-a^2)(a^2+r^2)}}, \quad v = \frac{a^2}{\sqrt{b^2-a^2}} v.$$

Ma bisogna ancora suddistinguere, come per l'ellissoide reale, secondo che $a^2 > b^2$ ovvero $a^2 < b^2$.

c_1) Per la prima forma $a^2 > b^2$ si ha che $\bar{r}, \bar{v}$ sono puramente immaginarî per r, v reali ed inversamente. Come superficie normale del primo tipo con r, v reali si può prendere il *sinusoide iperbolico* (cfr. *Lezioni*, vol. II, pag. 109):

$$r = \sqrt{a^2-b^2}\ \operatorname{senh}\left(\frac{z}{b}\right)$$

e per quella del secondo tipo (r, v puramente immaginarî) la sua complementare. L'applicabilità dell'una sull'altra ha luogo fuori dei limiti.

c_2) Per la seconda forma $a^2 < b^2$ si ha che $\bar{r}, \bar{v}$ sono reali ovvero puramente immaginarî insieme con r, v, onde due nuovi casi da suddistinguere.

Sottocaso e_2'). Quando r, v sono reali si ha

$$ds_0^2 = \frac{a^4 - (b^2 - a^2) r^2}{a^2 (a^2 + r^2)} dr^2 + r^2 dv^2$$

colla limitazione $r^2 < \frac{a^4}{b^2 - a^2}$, ed alla medesima limitazione soddisfa, come subito si vede, $\bar{r}^2$. Per questa classe di deformate dell'ellissoide immaginario l'applicabilità sulla complementare ha luogo dunque dentro ai limiti. Osserviamo poi che l'elemento lineare precedente appartiene alla classe di quelli che ammettono un elemento lineare *coniugato in deformazione* (¹), il quale anzi coincide nel caso attuale coll'elemento stesso. Le deformazioni delle superficie di questa classe si presentano per ciò a coppie di deformazioni coniugate.

Sottocaso e_2''). Venendo all'ultimo caso di r, v puramente immaginarî, cangiamoli in ir, iv (e così $\bar{r}, \bar{v}$ in $i\bar{r}, i\bar{v}$) ed avremo

$$ds_0^2 = \frac{a^4 + (b^2 - a^2) r^2}{a^2 (r^2 - a^2)} dr^2 + r^2 dv^2$$

colla limitazione $r^2 > a^2$. Come superficie tipica della classe possiamo prendere il *catenoide accorciato* (*Lezioni*, vol. II, pag. 109):

$$\varrho = \sqrt{b^2 - a^2} \cosh\left(\frac{z}{b}\right) \quad (\varrho \text{ raggio del parallelo}),$$

ove si è posto

$$r = \frac{a\varrho}{\sqrt{b^2 - a^2}} = a \cosh\left(\frac{z}{b}\right).$$

Come nel caso precedente, la superficie è applicabile in senso ristretto sulla propria complementare.

§ 2.

Deformazione di inviluppi di sfere colle due falde a curvatura costante.

A base delle presenti ricerche porrò, come già per la dimostrazione e lo sviluppo dei risultati di Guichard, quei teoremi sulla deformazione delle congruenze rettilinee e degli inviluppi di sfere che ho esposto nella mia Memoria sopra citata degli Annali (1899) e riportato nel Cap. XVII delle *Lezioni*. Quivi è risoluto il problema fondamentale della determinazione di tutti quegli inviluppi di sfere pei quali, deformando comunque la superficie S_0 luogo dei centri, l'una falda dell'inviluppo serba sempre la medesima curvatura costante K, il che porta di conseguenza che anche la seconda falda conserva la medesima curvatura K. Ma mentre allora si supponeva reale non solo la superficie S_0 luogo dei centri delle sfere ma anche reali le sfere

(¹) Vedi la mia Nota: *Sopra un problema relativo alla teoria della deformazione delle superficie* (Rendiconti dei Lincei, aprile 1902).

stesse e di più le due falde dell'inviluppo, qui diventa essenziale per le nuove ricerche riprendere la discussione da un punto più generale di vista. Riterremo per ciò solo la prima condizione che *sia reale la superficie* S_0 *luogo dei centri delle sfere*, ma ammetteremo che le sfere stesse possano avere raggio reale od immaginario e, pur quando questo raggio sia reale, possano le due falde dell'inviluppo essere immaginarie (coniugate) anzichè reali.

Nella discussione così completata del problema vedremo presentarsi come possibili configurazioni di S_0 tutte le superficie applicabili sulle quadriche a centro rotonde delle varie specie. La parte analitica della trattazione, come è esposta nei §§ 253-259 delle *Lezioni*, resta naturalmente inalterata; solo converrà riprendere la discussione delle formole finali al § 259 dal punto più generale di vista attuale. Intanto, nell'ipotesi che l'una e quindi anche l'altra falda dell'inviluppo, in ogni deformazione della superficie S_0 luogo dei centri delle sfere, conservi la curvatura costante K, dovrà la S_0 essere applicabile sopra una superficie di rotazione ed il suo elemento lineare ds_0 avrà la forma (vol. II, pag. 107) [1]:

$$(5) \qquad ds_0^2 = \frac{d\sigma^2}{c\,\mathrm{sen}^4\sigma\left(1+\frac{c}{K}\mathrm{sen}^2\sigma\right)} + \cot^2\sigma\, dv^2,$$

dove σ, v sono i parametri dei paralleli e dei meridiani rispettivamente nella configurazione rotonda di S_0, e c indica una costante arbitraria. Il raggio T della sfera, invariabile lungo ogni singolo parallelo, è dato poi dalla formola

$$(6) \qquad T = \sqrt{\frac{1}{K} + \frac{1}{c\,\mathrm{sen}^2\sigma}}.$$

Ora, per ipotesi, la S_0 deve essere reale ed il suo ds_0^2 ridursi quindi alla forma reale di superficie di rotazione:

$$ds_0^2 = du^2 + r^2\, dv_1^2.$$

Paragonando colla (5), si ha

$$r = k\cot\sigma,$$

indicando k una costante, indi

$$du^2 = \frac{k^2+r^2}{k^2c\left(\frac{k^2c}{K}+k^2+r^2\right)}\, dr^2;$$

dunque l'espressione

$$\frac{k^2+r^2}{k^2c\left(\frac{k^2c}{K}+k^2+r^2\right)}$$

[1] Per abbreviare adopererò nel seguito citazioni come questa riferendomi al volume ed alla pagina relativa delle *Lezioni*.

deve assumere valori reali variando r in un certo intervallo reale, per la qual cosa è evidentemente necessario che le tre costanti K, c, k^2 siano tutte reali. Ne segue che nella (5) il parametro σ dovrà assumere tali valori che $\cot^2\sigma$ sia reale, positiva o negativa, e corrispondentemente il parametro v sarà reale ovvero puramente immaginario. La formola (6) dimostra poi che in ogni caso il *quadrato* T^2 del raggio della sfera sarà reale; e per ciò T stesso sarà, secondo i casi, reale o puramente immaginario.

Siccome poi nella (5) possiamo aumentare σ di un multiplo di π senza alterarla, così la condizione che $\cot^2\sigma$, o $\operatorname{sen}^2\sigma$, sia reale dà luogo soltanto alle tre possibilità seguenti: 1ª σ reale; 2ª σ puramente immaginario; 3ª $\sigma - \frac{\pi}{2}$ puramente immaginario. Il primo caso è quello già completamente discusso nelle *Lezioni* e noi qui lo trascureremo per occuparci degli altri due che diremo:

Caso α): $\sigma = i\tau$ (τ reale).

Caso β): $\sigma = \frac{\pi}{2} + i\tau$ (τ reale).

§ 3.

Proprietà comuni ai tre casi.

Prima di intraprendere la indicata discussione è opportuno che ricordiamo, dai §§ 265, 266 delle *Lezioni*, alcune proprietà fondamentali che valgono in tutti tre i casi. Indichiamo con x_0, y_0, z_0 le coordinate di un punto M_0 mobile sulla superficie S_0, con X_0, Y_0, Z_0 i coseni di direzione della sua normale; siano poi $M \equiv (x, y, z)$, $M_3 \equiv (x_3, y_3, z_3)$ i due punti, simmetrici rispetto al piano tangente di S_0, ove la sfera col centro in M_0 e di raggio $= T$ tocca le due falde dell'inviluppo, le quali indicheremo rispettivamente con S, S_3. Le coordinate di M saranno date da

$$x = x_0 - T V(T, x_0) + T\sqrt{1 - \Delta_1 T}\,.\,X_0 \text{ (1)}. \tag{7}$$

colle formole analoghe per y, z, dove i parametri differenziali $V(T, x_0)$, $\Delta_1 T$ si intendono calcolati rispetto all'elemento lineare di S_0, e pel radicale $\sqrt{1 - \Delta_1 T}$ è scelto uno dei suoi valori; cangiando nelle (7) il segno del radicale si hanno le coordinate x_3, y_3, z_3 di M_3. Siccome poi, nel caso nostro, T è reale o puramente immaginario, segue dalle (7) la proprietà già evidente per sè: *Le due falde* S, S_3 *dell'inviluppo sono reali ovvero coniugate immaginarie.*

Ora sappiamo, dagli indicati §§ 265, 266 delle *Lezioni*, che le due superficie S, S_3 di curvatura costante K sono contigue, per trasformazione di Bäcklund, a due altre superficie S_1, S_2 colla medesima curvatura. Le quattro superficie S, S_1, S_2, S_3 sono fra loro nella relazione del teorema di permutabilità (vol. II, pag. 411), ed il

(1) Queste sono una facile trasformazione delle formole (b) a pag. 88, vol. II delle *Lezioni*.

quadrilatero sghembo $M M_1 M_2 M_3$ coi vertici in quattro punti corrispondenti di S, S_1, S_2, S_3 è una losanga coi quattro lati della medesima lunghezza costante

$$d = \sqrt{\frac{1}{c}}.$$

Le coordinate x_1, y_1, z_1 di M_1 e quelle x_2, y_2, z_2 di M_2 sono date dalle formole:

$$(8) \qquad \begin{cases} x_1 = x_0 + \dfrac{T}{\cos\sigma} X_1 + \operatorname{tg}\sigma \sqrt{-\dfrac{1}{K} - \dfrac{1}{c}} \cdot X_2 \\ x_2 = x_0 + \dfrac{T}{\cos\sigma} X_1 - \operatorname{tg}\sigma \sqrt{-\dfrac{1}{K} - \dfrac{1}{c}} \cdot X_2, \end{cases}$$

e dalle analoghe, indicando rispettivamente X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2 i coseni di direzione (reali) delle tangenti alle deformate dei meridiani e dei paralleli sopra S_0. E come le normali a S, S_2 in due punti corrispondenti M, M_2 si incontrano nel punto corrispondente M_0 di S_0, così le normali a S_1, S_2 in punti corrispondenti M_1, M_2 si incontrano in un punto $\overline{M}_0$ le cui coordinate $\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0$ si trovano date dalla:

$$(9) \qquad \overline{x}_0 = x_0 + \frac{\cos\sigma}{cT \operatorname{sen}^2\sigma} X_1$$

colle analoghe per $\overline{y}_0, \overline{z}_0$ [1]. Il luogo di questo punto $\overline{M}_0$ è precisamente la superficie complementare $\overline{S}_0$ della S_0, come risulta anche dalle (9) stesse, e le sfere descritte col centro in $\overline{M}_0$ e con raggio $\overline{T}$ dato dalla formola:

$$(10) \qquad \overline{T} = \frac{\sqrt{\dfrac{1}{K}\left(\dfrac{1}{K} + \dfrac{1}{c}\right)}}{T}$$

toccano in M_1, M_2 rispettivamente le due superficie S_1, S_2, le quali formano dunque l'inviluppo del secondo sistema di sfere.

Ricordiamo poi esplicitamente l'importante proprietà: *Sulle quattro superficie a curvatura costante* S, S_1, S_2, S_3 *i sistemi coniugati si corrispondono fra loro e a quelli delle superficie* $S_0, \overline{S}_0$.

In particolare alle linee assintotiche di S, S_1, S_2, S_3 corrispondono le assintotiche di $S_0, \overline{S}_0$. E siccome dalla forma (5) dell'elemento lineare di S_0, indicandone con K_0 la curvatura, risulta

$$(11) \qquad K_0 = \frac{c^2}{K} \operatorname{sen}^4\sigma,$$

[1] Queste formole si stabiliscono subito tenendo presente che i coseni di direzione delle normali a S_1, S_2 sono rispettivamente proporzionali ai binomi

$$T \operatorname{sen}\sigma X_2 \mp \sqrt{-\frac{1}{K} - \frac{1}{c}}\, X_1, \quad T \operatorname{sen}\sigma Y_2 \mp \sqrt{-\frac{1}{K} - \frac{1}{c}}\, Y_1, \quad T \operatorname{sen}\sigma Z_2 \mp \sqrt{-\frac{1}{K} - \frac{1}{c}}\, Z_1.$$

mentre $c^2 \operatorname{sen}^4 \sigma$ è reale positiva, ne segue che le linee assintotiche di S_0, $\bar{S}_0$ sono reali od immaginarie secondo che la curvatura K è negativa o positiva [1]. Di un'altra proprietà molto importante diamo per ora soltanto l'enunciato, riserbandone a più tardi la dimostrazione (vedi § 8):

Il sistema coniugato di S_0 *(o di* $\bar{S}_0$*) che corrisponde alle linee di curvatura delle quattro superficie* (S, S_1, S_2, S_3) *è precisamente quello che si conserva coniugato quando la superficie* S_0 *si applica sulla corrispondente quadrica* Q.

§ 4.

Caso α) *con* K *negativa*

(Regione reale dell'iperboloide ad una falda).

Volgiamoci ora all'esame dei singoli casi possibili, cominciando dal caso indicato con α) alla fine del § 2, ove σ è puramente immaginario $= i\tau$, indi:

$$\operatorname{sen} \sigma = i \operatorname{senh} \tau \quad , \quad \cos \sigma = \cosh \tau .$$

Allora nella (5) deve anche v essere puramente immaginario e noi lo cangiamo in ikv, essendo la costante k ed il nuovo parametro v reali; così la (5) diventa:

$$(12) \qquad ds_0^2 = \frac{d\tau^2}{c \operatorname{senh}^4 \tau \left(\frac{c}{K} \operatorname{senh}^2 \tau - 1 \right)} + k^2 \coth^2 \tau \, dv^2 ,$$

e la (6) dà l'altra

$$(13) \qquad T = \sqrt{\frac{\frac{c}{K} \operatorname{senh}^2 \tau - 1}{c \operatorname{senh}^2 \tau}}$$

Sotto il segno radicale abbiamo qui una quantità che ha il segno stesso del coefficiente di $d\tau^2$ nella (12) ed è per ciò positiva; dunque nel caso attuale le quantità

$$T \quad e \quad \frac{T}{\cos \sigma}$$

sono reali. Ora dobbiamo scindere la discussione in due, secondo che la curvatura K è negativa o positiva. Trattando in questo paragrafo il primo caso, poniamo

$$K = -\frac{1}{b^2} ,$$

con b reale (positiva), Manifestamente perchè il ds_0, dato dalla (12), risulti reale, occorre che c sia negativa, e noi poniamo

$$c = -\frac{1}{a^2} ,$$

[1] Quando S, S_1, S_2, S_3 sono reali la proprietà osservata è già per sè evidente.

onde risulta

$$(14)\qquad ds_0^2 = \frac{a^4\, d\tau^2}{\operatorname{senh}^4 \tau\,(a^2 - b^2 \operatorname{senh}^2 \tau)} + k^2 \coth^2 \tau\, dv^2 .$$

Se diamo alla costante arbitraria k il valore

$$k = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

e poniamo

$$(15)\qquad r = k \coth \tau = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \coth \tau ,$$

la (14) diventa

$$(14^*)\qquad ds_0^2 = \frac{(a^2 + b^2)\, r^2 - a^4}{a^2 (r^2 - a^2)}\, dr^2 + r^2\, dv^2 .$$

Questo elemento lineare, secondo la (1) § 1, appartiene all'*iperboloide ad una falda* coll'iperbola meridiana

$$\frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 .$$

E poichè, per la (14), deve essere $\operatorname{senh}^2 \tau < \frac{a^2}{b^2}$, indi $\coth^2 \tau > \frac{a^2 + b^2}{a^2}$, segue dalla (15): $r^2 > a^2$. Dunque la superficie S_0 è nel caso attuale applicabile sulla regione reale dell'iperboloide (entro ai limiti). Osserviamo poi che la formola (13) per T ci dà

$$T = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \sqrt{r^2 - a^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}\, z ;$$

il valore del secondo membro ha un significato geometrico semplicissimo, eguagliando, come subito si vede, il tratto di generatrice dell'iperboloide dal punto M_0 che si considera fino al circolo di gola.

Si avverta ora che, sebbene il sistema ∞^2 o congruenza di sfere sia in questo caso reale, pure le due falde S, S_3 dell'inviluppo sono immaginarie (coniugate) perchè dalla formola $\Delta_1 T = \cos^2 \sigma = \cosh^2 \tau$ risulta $\Delta_1 T > 1$, onde il terzo termine nel secondo membro delle (7) § 3 è puramente immaginario. In fine la superficie $\overline{S}_0$ complementare di S_0 è applicabile entro ai limiti sopra S_0, cioè sull'iperboloide, e le due falde dell'inviluppo di sfere descritte colla medesima legge, attorno ai punti di $\overline{S}_0$ come centri, cioè col raggio $\overline{T} = \frac{b\sqrt{a^2 + b^2}}{T}$, sono le altre due superficie pseudosferiche S_1, S_2 immaginarie (coniugate) che completano con S, S_3 la quaderna (S, S_1, S_2, S_3) del teorema di permutabilità associata alla S_0 (o alla $\overline{S}_0$). Riassumiamo per questo primo caso i risultati ottenuti nella proposizione seguente: *Se*

attorno ad ogni punto di un iperboloide rotondo ad una falda come centro e con raggio eguale al tratto di generatrice che intercede fra il detto punto ed il circolo di gola, si descrive una sfera, indi si deforma comunque per flessione l'iperboloide che seco trascini le sfere, l'inviluppo di questo sistema ∞^2 di sfere, in ogni configurazione S_0 *dell'iperboloide, consta di due superficie immaginarie coniugate* S, S_2 *colla curvatura costante negativa* $K = -\frac{1}{b^4}$, *essendo* b *la lunghezza del semiasse immaginario dell'iperboloide. Queste due superficie pseudosferiche sono completate ad una quaderna* (S, S_1, S_2, S_3) *del teorema di permutabilità da altre due superficie pseudosferiche* S_1, S_2, *colla medesima curvatura, ottenute nel medesimo modo dalla superficie complementare* $\bar{S}_0$ *di* S_0. In fine si osserverà che la lunghezza d dei lati della losanga del teorema di permutabilità ha qui il valore

$$d = \sqrt{\frac{1}{c}} = ia,$$

essendo a il raggio del circolo di gola dell'iperboloide.

§ 5.

Caso α) *con* K *positiva.*

(Regione ideale dell'ellissoide schiacciato).

Supponiamo ora sempre $\sigma = i\tau$, però K positiva, poniamo

$$K = \frac{1}{b^2},$$

e la formola (12) diverrà

$$ds_0^2 = \frac{d\tau^2}{c \operatorname{senh}^4 \tau (cb^2 \operatorname{senh}^2 \tau - 1)} + k^2 \coth^2 \tau \, dv^2, \tag{16}$$

Qui conviene suddistinguere secondo che la quantità

$$-\frac{1}{K} - \frac{1}{c} = -b^2 - \frac{1}{c},$$

che figura sotto il segno radicale nelle (8) § 3 è positiva, negativa o nulla.

Cominciando dal primo caso con $\frac{1}{c} < -b^2$, poniamo

$$c = -\frac{1}{a^2}, \quad \text{con } a^2 > b^2,$$

ed avremo

$$ds_0^2 = \frac{a^4 \, d\tau^2}{\operatorname{senh}^4 \tau \, (a^2 + b^2 \operatorname{senh}^2 \tau)} + k^2 \coth^2 \tau \, dv^2.$$

Se poniamo

$$k = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad , \quad r = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \coth \tau ,$$

questo elemento lineare rientra nella formola (1) § 1, ove si faccia

$$A = a^2 \quad , \quad B = b^2 ,$$

ed appartiene quindi all'ellissoide schiacciato rotondo di ellisse meridiana

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \qquad (a^2 > b^2).$$

Però, siccome $r^2 = \frac{a^4}{a^2 - b^2} \coth^2 \tau > \frac{a^4}{a^2 - b^2} > a^2$, la superficie S_0 è applicabile soltanto sulla regione ideale dell'ellissoide; la complementare $\overline{S}_0$ sarà invece applicabile sulla regione reale dell'ellissoide stesso (§ 1). Si osservi poi che nel caso attuale il raggio T delle sfere del primo sistema, coi centri nei punti di S_0, è reale; al contrario quello $\overline{T}$ del sistema complementare è puramente immaginario. Le quattro superficie S, S_1, S_2, S_3 di curvatura costante $K = \frac{1}{b^2}$ sono due a due coniugate immaginarie (S con S_3 , S_1 con S_2) e la lunghezza dei lati d della losanga ha il valore

$$d = ia .$$

Restano da considerare i due casi $\frac{1}{c} > -b^2$, $\frac{1}{c} = -b^2$; ma vediamo subito che essi conducono a risultati già noti e dei quali non occorre più occuparsi. E infatti se $\frac{1}{c} > -b^2$, tutte le quantità che figurano nelle formole (8) § 3 sono reali, e reali sono quindi le due falde S_1, S_2 del secondo inviluppo di sfere coi centri nei punti di $\overline{S}_0$ e col raggio $\overline{T}$ reale. Rispetto alla superficie $\overline{S}_0$ siamo dunque nel caso affatto reale discusso nelle *Lezioni*, onde $\overline{S}_0$ è applicabile sull'ellissoide allungato o sull'iperboloide a due falde. Precisamente avviene la prima cosa o la seconda secondo che la costante c è negativa o positiva [1]. In fine nel caso limite $\frac{1}{c} = -b^2$ le due superficie S_1, S_2 vengono a coincidere fra loro e colla $\overline{S}_0$, la quale è adunque una superficie a curvatura costante positiva.

[1] Si constata subito quest'asserzione ponendo nella (3) § 1, che dà l'elemento lineare della complementare:

$$k = 1 \ , \ \varrho = \coth \tau \ , \ A = -\frac{1}{c} \ , \ B = b^2 ,$$

perchè allora la (3) si converte appunto nell'attuale (16).

§ 6.

Caso β): $\sigma = \frac{\pi}{2} + i\tau$

(*Regione reale dell'ellissoide schiacciato. Regione ideale dell'iperboloide. Ellissoide immaginario*).

Qui abbiamo

$$\operatorname{sen}\sigma = \cosh\tau \quad , \quad \cos\sigma = -i \operatorname{senh}\tau ,$$

indi

$$ds_0^2 = -\frac{d\tau^2}{c\cosh^4\tau\left(1+\frac{c}{K}\cosh^2\tau\right)} + k^2 \operatorname{tgh}^2\tau\, dv^2 \tag{17}$$

$$T = \sqrt{\frac{1+\frac{c}{K}\cosh^2\tau}{c\cosh^2\tau}} . \tag{18}$$

Il raggio T della sfera è puramente immaginario, per ciò $\frac{T}{\cos\sigma} = i\frac{T}{\operatorname{senh}\tau}$ reale.

Per non ricadere nel caso già trattato nelle *Lezioni* di S_1, S_2 reali, dovremo dunque supporre

$$\frac{1}{K} + \frac{1}{c} < 0 ; \tag{19}$$

altrimenti nei secondi membri delle (8) § 3 figurerebbero quantità tutte reali.

Ciò premesso, distinguiamo anche qui due casi, secondo che K è positiva o negativa.

Caso β_1): K positiva. Poniamo ancora

$$K = \frac{1}{b^2}$$

e dalla diseguaglianza (19) (ovvero anche da ciò che il coefficiente di $d\tau^2$ nella (17) deve essere positivo) risulta che la costante c dovrà avere un valore negativo, diciamo

$$c = -\frac{1}{a^2} ,$$

e sarà per la (19)

$$a^2 > b^2 . \tag{19*}$$

La (17) diventa

$$ds_0^2 = \frac{a^4\, d\tau^2}{\cosh^4\tau\,(a^2 - b^2\cosh^2\tau)} + k^2 \operatorname{tgh}^2\tau\, dv^2 , \tag{20}$$

e se prendiamo

$$k = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad , \quad r = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{tgh} \tau \, , \tag{21}$$

avremo

$$ds_0^2 = \frac{a^4 - (a^2 - b^2) r^2}{a^2 (a^2 - r^2)} dr^2 + r^2 dv^2 \, ,$$

formola che coincide colla (1) § 1, ove si ponga $A = a^2$, $B = b^2$. La S_0 è dunque applicabile sull'ellissoide schiacciato ($a^2 > b^2$); ma questa volta siccome, a causa della (20), il parametro τ deve assumere soltanto valori pei quali

$$\cosh^2 \tau = < \frac{a^2}{b^2} \quad , \quad \operatorname{tgh}^2 \tau < \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

risulta dalla (21) $r^2 < a^2$, e l'applicabilità della S_0 sull'ellissoide ha luogo entro ai limiti. Manifestamente il caso attuale non differisce da quello già trovato al paragrafo precedente; solo sono scambiate fra loro S_0, $\bar{S}_0$.

Caso β_2): K negativa. Poniamo

$$K = -\frac{1}{b^2}$$

e le (17), (18) diventano:

$$ds_0^2 = \frac{d\tau^2}{c \cosh^2 \tau (cb^2 \cosh^2 \tau - 1)} + k^2 \operatorname{tgh}^2 \tau \, dv^2 \tag{22}$$

$$T = \sqrt{-\frac{cb^2 \cosh^2 \tau - 1}{c \cosh^2 \tau}} \, . \tag{23}$$

Per la diseguaglianza (19) dobbiamo poi avere $\frac{1}{c} < b^2$, e siamo ancora condotti a suddistinguere secondo che c è negativa, ovvero positiva.

Caso β_2'): Sia c negativa, poniamo $c = -\frac{1}{a^2}$; la (22) diventa

$$ds_0^2 = \frac{a^4 \, d\tau^2}{\cosh^4 \tau \, (a^2 + b^2 \cosh^2 \tau)} + k^2 \operatorname{tgh}^2 \tau \, dv^2 \, ,$$

e, ponendo

$$k = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad , \quad r = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{tgh} \tau \, ,$$

combina coll'elemento lineare

$$ds_0^2 = \frac{a^4 - (a^2 + b^2) r^2}{a^2 (a^2 - r^2)} dr^2 + r^2 dv^2$$

dell'iperboloide ad una falda. Però, siccome qui

$$r^2 = \frac{a^4}{a^2 + b^2} \operatorname{tgh}^2 \tau < \frac{a^4}{a^2 + b^2} < a^2 \, ,$$

l'applicabilità di S_0 sull'iperboloide ha luogo fuori dei limiti e lo stesso avviene per la complementare $\bar{S}_0$ (cf. § 1). Come nel caso del § 4 ove S_0, $\bar{S}_0$ erano applicabili sulla regione reale dell'iperboloide, si ha ancor qui per il lato d della losanga $d = ia$; ma mentre allora il raggio T della sfera era reale, attualmente è puramente immaginario secondo la formola

$$T = i\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\sqrt{a^2-r^2}.$$

Caso β_2''): Supponiamo ora c positiva e poniamo $c = \frac{1}{a^2}$, dove per la diseguaglianza (19) sarà

$$a^2 < b^2.$$

Dalla (22) avremo

$$ds_0^2 = \frac{a^4\, d\tau^2}{\cosh^4\tau\,(b^2\cosh^2\tau - a^2)} + k^2\,\mathrm{tgh}^2\tau\, dv^2,$$

che, ponendo

$$k = \frac{a^2}{\sqrt{b^2-a^2}} \quad ; \quad r = \frac{a^2}{\sqrt{b^2-a^2}}\,\mathrm{tgh}\,\tau,$$

si converte nella

$$ds_0^2 = \frac{a^4-(b^2-a^2)r^2}{a^2(a^2+r^2)}\,dr^2 + r^2\,dv^2.$$

Il ds_0^2 ora scritto appartiene precisamente a quella classe di superficie applicabili sull'ellissoide immaginario coll'ellisse meridiana

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = -1 \quad (a^2 < b^2),$$

che è la penultima del § 1 (caso e_2'). Il valore T del raggio della sfera è dato, secondo la (18), da

$$T = i\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}\sqrt{a^2+r^2}$$

ed il lato d della losanga del teorema di permutabilità ha la lunghezza reale $d = a$.

§ 7.

Riepilogo dei risultati.

Terminata la nostra discussione, ci conviene, per maggior chiarezza delle ricerche seguenti, riepilogare i risultati ottenuti e specialmente quelli concernenti le quadriche di seconda specie, poichè sono queste che attualmente ci interessano.

Riunendo i risultati ottenuti nei precedenti paragrafi con quelli già stabiliti nelle *Lezioni*, vediamo che nella risoluzione del problema fondamentale relativo alla deformazione degli inviluppi di sfere, come configurazioni possibili della superficie S_0

luogo dei centri, si presentano tutte le quadriche rotonde di prima e di seconda specie. Quelle di prima specie insieme alle due forme di seconda specie, applicabili sull'ellissoide immaginario, rappresentate dal sinusoide iperbolico e dal catenoide accorciato, figurano già nelle *Lezioni*; le rimanenti di seconda specie abbiamo successivamente incontrate nei paragrafi precedenti. Possiamo quindi concludere che ad ogni quadrica a centro rotonda Q può associarsi un sistema ∞^2 di sfere, reali od immaginarie, coi centri distribuiti sopra Q e tali che dando per flessione alla quadrica Q una configurazione qualunque S_0, le due falde S, S_2 dell'inviluppo di sfere sono due superficie colla medesima curvatura costante. Un secondo sistema di sfere, avente i centri distribuiti sulla complementare $\overline{S}_0$ di S_0, ha alla sua volta le due falde dell'inviluppo S_1, S_3 colla medesima curvatura di S, S_2. Le quattro superficie S, S_1, S_2, S_3 formano una quaderna del teorema di permutabilità, relativa a due trasformazioni di Bäcklund $B_\sigma, B_{-\sigma}$ con costanti eguali e di segno contrario; diciamo per abbreviare (S, S_1, S_2, S_3) la *quaderna associata* alla superficie S_0 (ed alla sua complementare $\overline{S}_0$).

Per quanto poi riguarda il caso che ora più ci interessa delle quadriche Q di seconda specie è da osservarsi: 1°) che se la superficie S_0 è deformata del catenoide accorciato, tutte quattro le superficie (S, S_1, S_2, S_3) della quaderna associata sono reali; 2°) se S_0 è deformata del sinusoide iperbolico, S, S_2 sono reali, S_1, S_3 coniugate immaginarie; 3°) in tutti gli altri casi di una quadrica Q di seconda specie le due superficie estreme S, S_3, come le due medie S_1, S_2 della quaderna, sono coniugate immaginarie. E poichè adunque il problema della deformazione delle quadriche di seconda specie risulta essenzialmente collegato allo studio delle dette quaderne associate di superficie a curvatura costante, costituite di coppie di superficie coniugate immaginarie, noi dovremo esaminare le proprietà caratteristiche di siffatte superficie, le quali formano evidentemente classi *particolari* entro la totalità delle superficie a curvatura costante reali ed immaginarie di curvatura costante [1]. Separando poi il reale dall'immaginario, noi dovremo presentare ogni volta i risultati relativi al nostro problema reale sotto forma definitiva reale. Prima di accingerci all'accennata ricerca converrà esaminare alcune proprietà valevoli in tutti i casi ed indipendenti dall'essere immaginarie piuttosto che reali le superficie di cui si tratta. E in primo luogo converrà approfondire maggiormente le formole relative alla composizione di due trasformazioni di Bäcklund $B_\sigma, B_{-\sigma}$, a costanti eguali ed opposte, di cui tratta il § 390 delle *Lezioni* (II, pag. 429); indi una proposizione complementare all'ordinario teorema di permutabilità ci condurrà finalmente a stabilire, al § 10, il principio fondamentale per la nostra teoria delle trasformazioni.

Qui intanto riassumiamo in una tabella i risultati relativi alle varie forme di quadriche di seconda specie, ove si deve tener presente che le lettere

$$K, T, \overline{T}, d$$

hanno il significato seguente:

[1] Per convincersene basta riflettere che le superficie di data curvatura costante immaginarie dipendono da *quattro* funzioni arbitrarie; quelle delle classi considerate nel testo da *due* funzioni arbitrarie soltanto, come le deformate della quadrica Q a cui sono relative.

K curvatura comune (costante) delle superficie S, S_1, S_2, S_3 costituenti la quaderna associata a S_0;

$T, \overline{T}$ i raggi delle sfere coi rispettivi centri in punti corrispondenti della superficie S_0 e della sua complementare $\overline{S}_0$;

d lunghezza (costante) del lato della losanga coi vertici in quattro punti corrispondenti di S, S_1, S_2, S_3.

TABELLA.

(A₁)

Regione reale dell'iperboloide ad una falda: $\frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$

$$K = -\frac{1}{b^2}, \quad T = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\sqrt{r^2-a^2}, \quad \overline{T} = \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{T}, \quad d = a\sqrt{-1}$$

$S_0, \overline{S}_0$ applicabili sulla regione reale dell'iperboloide

(A₂)

Regione ideale del medesimo iperboloide

$$K = -\frac{1}{b^2}, \quad T = i\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\sqrt{a^2-r^2}, \quad \overline{T} = \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{T}, \quad d = a\sqrt{-1}$$

$S_0, \overline{S}_0$ applicabili sulla regione ideale

(B)

Ellissoide immaginario: $\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = -1 \quad (a^2 < b^2)$

$$K = -\frac{1}{b^2}, \quad T = i\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}\sqrt{a^2+r^2}, \quad \overline{T} = \frac{b\sqrt{b^2-a^2}}{T}, \quad d = a$$

$S_0, \overline{S}_0$ applicabili l'una sull'altra entro ai limiti

(C)

Ellissoide (reale) schiacciato: $\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (a^2 > b^2)$

$$K = +\frac{1}{b^2}, \quad T = \frac{i\sqrt{a^2-b^2}}{a}\sqrt{a^2-r^2},$$

$$\overline{T} = \frac{ib\sqrt{a^2-b^2}}{T} = \frac{ab}{\sqrt{a^2-r^2}}, \quad d = a\sqrt{-1}$$

S_0 applicabile sulla regione reale
$\overline{S}_0$ applicabile sulla regione ideale } dell'ellissoide

In fine, per completare questa tabella relativa alle quadriche di seconda specie, converrà intendervi aggiunti i due tipi (appartenenti al caso dell'ellissoide immaginario) rappresentati dal catenoide accorciato e dal sinusoide iperbolico. Essi ci forniranno, ai §§ 11 e 12, il primo e più semplice esempio per la dimostrazione dei teoremi fondamentali A) e B) della prefazione.

§ 8.

Formole relative alla composizione di due trasformazioni opposte di Bäcklund.

Sia S una superficie di curvatura costante $K = -\frac{1}{R^2}$, che riferita alle sue linee di curvatura u, v abbia l'elemento lineare

$$ds^2 = R^2(\cos^2\theta\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, dv^2)$$

ed i raggi principali di curvatura

$$r_1 = -R \operatorname{tg}\theta \quad , \quad r_2 = R \cot\theta;$$

riteniamo poi tutte le altre notazioni del § 373 delle *Lezioni* (vol. II, pag. 390). Siano ora S_1, S_2 due nuove superficie, colla medesima curvatura $K = -\frac{1}{R^2}$, derivate da S con due trasformazioni di Bäcklund $B_\sigma, B_{-\sigma}$ a costanti eguali e di segno contrario, e siano

$$ds_1^2 = R^2(\cos^2\theta_1\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta_1\, dv^2) \quad , \quad ds_2^2 = R^2(\cos^2\theta_2\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta_2\, dv^2)$$

i loro rispettivi elementi lineari. La quarta superficie S_3 del teorema di permutabilità, dopo S, S_1, S_2 avrà l'elemento lineare

$$ds_3^2 = R^2(\cos^2\theta_3\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta_3\, dv^2),$$

dove θ_3 è determinata dalla formola

$$\operatorname{tg}\frac{\theta_3 - \theta}{2} = \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\operatorname{tg}\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}. \tag{24}$$

La losanga $M M_1 M_2 M_3$ coi vertici in quattro punti corrispondenti di S, S_1, S_2, S_3 ha il lato d di lunghezza costante dato da

$$d = R\cos\sigma.$$

Le normali in M, M_3 alle S, S_3 si incontrano in un punto M_0, similmente quelle a S_1, S_2 nei punti M_1, M_2 si incontrano in un punto $\overline{M}_0$ e questi due punti $M_0, \overline{M}_0$ descrivono due superficie complementari applicabili sopra una medesima superficie di rotazione. Se poniamo:

$$\Omega = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \quad , \quad \Phi = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \tag{25}$$

le coordinate x_0, y_0, z_0 di M_0 sono date dalle formole

$$x_0 = x + R \operatorname{sen}\sigma \cot\Omega\, X_3 \text{ ecc. (vol. II, pag. 430).} \tag{25*}$$

Pel calcolo dell'elemento lineare di S_0 introduciamo le quantità A, B definite dalle formole

$$(26)\qquad \begin{cases} A = \cos\theta \operatorname{sen}\Omega + \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\theta \cos\Omega \\ B = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\Omega - \operatorname{sen}\sigma \cos\theta \cos\Omega \end{cases}$$

ed il *differenziale esatto* dV dato da

$$(27)\qquad dV = A \operatorname{sen}\Phi\, du - B \cos\Phi\, dv,$$

mentre pel differenziale $d\Omega$ si ha

$$(27^*)\qquad \cos\sigma\, d\Omega = A \cos\Phi\, du + B \operatorname{sen}\Phi\, dv;$$

indicando con ds_0 l'elemento lineare di S_0, si ha allora

$$(28)\qquad ds_0^2 = R^2 \left[\frac{\operatorname{sen}^2\sigma + \cos^2\sigma \operatorname{sen}^2\Omega}{\operatorname{sen}^4\Omega} d\Omega^2 + \frac{dV^2}{\operatorname{sen}^2\Omega} \right].$$

A queste formole, riportate dal § 390 delle *Lezioni*, conviene ora che aggiungiamo quella relativa alla seconda forma quadratica fondamentale

$$F_0 = D_0\, du^2 + 2 D_0'\, du\, dv + D_0''\, dv^2$$

della superficie S_0. Per ciò bisogna tener conto dei valori dei coseni di direzione X_0, Y_0, Z_0 della normale alla S_0, dati da

$$(28^*)\qquad X_0 = \frac{\operatorname{sen}\sigma \cos\Phi\, X_1 + \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\Phi\, X_2 + \cos\sigma \operatorname{sen}\Omega . X_3}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\sigma + \cos^2\sigma \operatorname{sen}^2\Omega}}, \text{ ecc.}$$

ed allora calcolando $F_0 = -\Sigma\, dx_0\, dX_0$, col far uso delle formole fondamentali date a pag. 391 del vol. II e delle precedenti, si trova facilmente per la formola richiesta

$$(29)\qquad F_0 = \frac{RAB}{\cos\sigma \operatorname{sen}\Omega \sqrt{A^2 + B^2}} (dv^2 - du^2).$$

Appoggiandoci su queste formole, dimostriamo ora l'importante teorema, di cui alla fine del § 3 abbiamo dato l'enunciato. L'elemento lineare (28) appartiene alla quadrica Q di rotazione colla conica meridiana definita dalle formole

$$r = \frac{i R \cos\sigma}{\operatorname{sen}\Omega}, \quad z = R \cot\Omega$$

e colla longitudine v_1 data da

$$v_1 = \frac{i V}{\cos\sigma}.$$

Se indichiamo con $\overline{F}$ la seconda forma quadratica fondamentale di questa quadrica, troviamo

$$\overline{F} = \frac{iR}{\cos\sigma \operatorname{sen}\Omega \sqrt{A^2 + B^2}} [\cos^2\sigma\, d\Omega^2 + dV^2]$$

ossia per le (27), (27*)

$$F = \frac{iR}{\cos\sigma \operatorname{sen}\Omega \sqrt{A^2 + B^2}} (A^2\, du^2 + B^2\, dv^2).$$

Mancando qui il termine in $du\, dv$, come nella F_0, ne concludiamo appunto che vale il teorema enunciato al § 3: *Il sistema* (u, v) *che corrisponde sulla superficie* S_0 *alle linee di curvatura delle superficie a curvatura costante della quaderna associata* (S, S_1, S_2, S_3) *dà precisamente il sistema coniugato comune della* S_0 *e della quadrica* Q.

§ 9.

Trasformazioni di Bäcklund *per le quaderne* (S, S_1, S_2, S_3) *del teorema di permutabilità.*

Come ultima preparazione all'oggetto proprio della nostra ricerca ci occorre ancora un teorema relativo alle trasformazioni di Bäcklund, applicate alle quaderne *generali* di superficie a curvatura costante nella relazione del teorema di permutabilità, che si può enunciare brevemente così: *Ogni quaderna* (S, S_1, S_2, S_3) *di superficie a curvatura costante, nella relazione generale del teorema di permutabilità* (vol. II, pag. 411), *è cangiata da una qualunque trasformazione di* Bäcklund, *che cangi la prima superficie* S *in un'altra* S', *in una seconda quaderna* (S', S'_1, S'_2, S'_3) *della medesima specie.*

Ho già dimostrato incidentalmente questa proposizione in altra mia Memoria [1] come corollario di una proprietà generale delle equazioni di Moutard dotate di gruppi di soluzioni quadratiche e qui, per non rimandare il lettore a quella più ampia teoria, credo utile ripetere la dimostrazione limitata al caso attuale.

Cominciamo dal dare alla nostra proposizione un'altra forma equivalente, ma più opportuna per la dimostrazione. Cangiamo la superficie S, mediante tre trasformazioni $B_{\sigma_1}, B_{\sigma_2}, B_{\sigma_3}$ a costanti $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ distinte, in tre altre S_1, S_2, S_3 e consideriamo le tre terne

$$(S, S_2, S_3) \quad , \quad (S, S_3, S_1) \quad , \quad (S, S_1, S_2)$$

ciascuna delle quali sarà completata, secondo il teorema di permutabilità, a quaderna da una superficie perfettamente determinata, e indichiamo queste tre nuove superficie rispettivamente con S', S'', S'''. La proposizione da dimostrarsi consiste in questo: *Le tre terne di superficie* (S_1, S'', S'''), (S_2, S''', S'), (S_3, S', S'') *sono alla loro volta completate a quaderne del teorema di permutabilità da una medesima quarta superficie* $\bar{S}$. Si ha così insomma un ciclo chiuso di 8 superficie colla medesima

[1] V. il § 9 della Memoria: *Sulle varietà a tre dimensioni deformabili entro lo spazio euclideo a quattro dimensioni*, nel tomo precedente della presente Raccolta (t. XIII, 1905).

curvatura costante, ciascuna delle quali è legata a tre contigue del ciclo da tre trasformazioni di Bäcklund colle costanti $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ in ordine conveniente [1].

Per dimostrare il teorema basterà provare che se si considera p. es. la quarta superficie del teorema di permutabilità dopo la terna (S_1, S'', S''') e si indica con $\bar{S}_1$, gli elementi relativi a questa $\bar{S}_1$ si compongono *simmetricamente* con quelli relativi a S_1, S_2, S_3. E basterà dimostrar questo prendendo per elementi i coseni di direzione della normale, poichè ne risulterà così che se $\bar{S}_2$ è la superficie completante la terna (S_2, S''', S') le due superficie $\bar{S}_1, \bar{S}_2$ avranno la medesima rappresentazione sferica e quindi, essendo legate alla S''' da due trasformazioni di Bäcklund colla stessa costante σ_3, assolutamente coincideranno. Ora indichiamo con: (X, Y, Z) i coseni di direzione della normale alla S, con (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3) quelli delle S_1, S_2, S_3 rispettivamente, in fine con (X', Y', Z'), (X'', Y'', Z''), (X''', Y''', Z''') quelli di S', S'', S'''. Dalle formole al § 251 delle *Lezioni* segnate (59) (vol. II, pag. 81) deduciamo subito:

$$(30)\qquad \begin{cases} X'' = X + \dfrac{\Sigma XX_3 - \Sigma XX_1}{1 - \Sigma X_1 X_3}(X_1 - X_3) \\[2ex] X''' = X + \dfrac{\Sigma XX_2 - \Sigma XX_1}{1 - \Sigma X_1 X_2}(X_1 - X_2) \end{cases}$$

e quindi pei coseni di direzione $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ della normale alla $\bar{S}_1$:

$$\bar{X} = X_1 + \frac{\Sigma X_1 X''' - \Sigma X_1 X''}{1 - \Sigma X'' X'''}(X'' - X''').$$

Ma si ha notoriamente

$$\Sigma X_1 X''' = \Sigma XX_2 \quad , \quad \Sigma X_1 X'' = \Sigma XX_3 ,$$

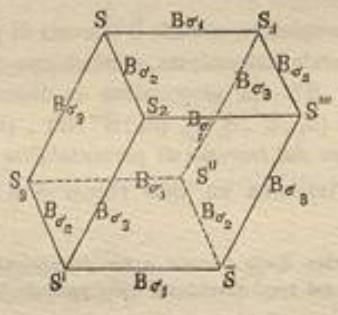
onde le precedenti si scrivono

$$(31)\qquad \bar{X} = X_1 + \frac{\Sigma XX_2 - \Sigma XX_3}{1 - \Sigma X'' X'''}(X'' - X''').$$

Pongasi ora simmetricamente:

$$\Sigma XX_1 = e_1 \quad , \quad \Sigma XX_2 = e_2 \quad , \quad \Sigma XX_3 = e_3$$
$$\Sigma X_2 X_3 = \varepsilon_1 \quad , \quad \Sigma X_3 X_1 = \varepsilon_2 \quad , \quad \Sigma X_1 X_2 = \varepsilon_3 ,$$

[1] Per seguire meglio le relazioni fra le 8 superficie del ciclo giova tener presente la seguente figura schematica



e le (30) si scriveranno

$$(30^*)\qquad \begin{cases} X'' = X + \dfrac{e_3 - e_1}{1 - \varepsilon_2}(X_1 - X_3) \\ X''' = X + \dfrac{e_2 - e_1}{1 - \varepsilon_3}(X_1 - X_2). \end{cases}$$

Di qui, calcolando la quantità $1 - \Sigma X'' X'''$ che figura al denominatore delle (31), troviamo:

$$1 - \Sigma X'' X''' = \frac{(e_2 - e_1)^2(1 - \varepsilon_2) + (e_3 - e_1)^2(1 - \varepsilon_3) - (e_2 - e_1)(e_3 - e_1)(1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{(1 - \varepsilon_2)(1 - \varepsilon_3)}.$$

Indicando con Ω la quantità al numeratore di questa formola e ordinando in altro modo i termini, vediamo che Ω ha la forma simmetrica:

$$\Omega = e_1^2(1 - \varepsilon_1) + e_2^2(1 - \varepsilon_2) + e_3^2(1 - \varepsilon_3) - e_1 e_2(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3) - \\ - e_2 e_3(1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_1) - e_3 e_1(1 - \varepsilon_3 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

od anche

$$\Omega = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)(1 - \varepsilon_1) + (e_2 - e_3)(e_2 - e_1)(1 - \varepsilon_2) + \\ + (e_3 - e_1)(e_3 - e_2)(1 - \varepsilon_3).$$

In fine sostituendo nella (31), troviamo la formola definitiva:

$$X = \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)(1 - \varepsilon_1)X_1 + (e_2 - e_3)(e_2 - e_1)(1 - \varepsilon_2)X_2 + (e_3 - e_1)(e_3 - e_2)(1 - \varepsilon_3)X_3}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)(1 - \varepsilon_1) + (e_2 - e_3)(e_2 - e_1)(1 - \varepsilon_2) + (e_3 - e_1)(e_3 - e_2)(1 - \varepsilon_3)},$$

che è perfettamente simmetrica nei tre sistemi di quantità

$$(X_1, Y_1, Z_1) \quad , \quad (X_2, Y_2, Z_2) \quad , \quad (X_3, Y_3, Z_3).$$

onde risulta la verità della proposizione enunciata.

§ 10.

Congruenze W con falde focali applicabili su quadriche rotonde.

Dopo tutti questi studî preliminari, arriviamo ora al punto fondamentale per la nostra ricerca: *alla dimostrazione dell'esistenza di congruenze W le cui due falde sono applicabili sopra una medesima quadrica rotonda.*

A questo scopo prendiamo una di quelle particolari quaderne (S, S_1, S_2, S_3), considerate al § 8, associate ad una deformata S_0 di una quadrica rotonda, e nelle quali le due trasformazioni di Bäcklund relative alla quaderna hanno costanti σ eguali e di segno contrario. A questa quaderna applichiamo, secondo la proposizione generale del paragrafo precedente, una trasformazione arbitraria B_τ di Bäcklund che la cangierà in una quaderna (S', S'_1, S'_2, S'_3) della medesima specie. E come le normali ad S, S_3 in punti corrispondenti si incontrano nel punto M_0 che descrive la

superficie S_0 applicabile sulla quadrica rotonda d'elemento lineare dato dalla (28) § 8, così le normali alle superficie trasformate S', S'_3 in punti corrispondenti si incontreranno in un punto M'_0 che descriverà una superficie S'_0 dello stesso elemento lineare.

Le due superficie S_0, S'_0, deformate della medesima quadrica Q, hanno nello spazio una posizione relativa perfettamente determinata e si trovano poste, pel loro modo di generazione geometrica, in corrispondenza di punto a punto, al punto M_0 di S_0 dove si incontrano le normali a S, S_3 corrispondendo quel punto M'_0 di S'_0 ove si incontrano le normali corrispondenti di S', S'_3 (¹). Ciò posto, noi dimostreremo la seguente proprietà fondamentale:

Le rette congiungenti le coppie (M_0, M'_0) *di punti corrispondenti delle due superficie* S_0, S'_0 *generano una congruenza* W, *di cui* S_0, S'_0 *sono le due falde focali.*

Siccome già, nella detta corrispondenza, alle assintotiche di S_0 corrispondono quelle di S'_0 perchè le une e le altre corrispondono a quelle delle 8 superficie a curvatura costante (S, S_1, S_2, S_3), (S', S'_1, S'_2, S'_3), basterà dimostrare che S_0, S'_0 sono le due falde focali della congruenza: che cioè il segmento $M_0 M'_0$ tocca in M_0 la S_0, in M'_0 la S'_0, anzi basterà verificare la prima cosa chè la seconda ne segue allora scambiando le due quaderne.

Per ciò, conservando tutte le notazioni del § 8, indichiamo con accenti le quantità relative alle quattro nuove superficie S', S'_1, S'_2, S'_3 dedotte rispettivamente da S, S_1, S_2, S_3 colla trasformazione B_τ di Bäcklund. La formola fondamentale del teorema di permutabilità [vol. II, pag. 416, formola (C)], ci dà, applicata al caso attuale, le quattro seguenti (²):

$$
(32)\quad \begin{cases}
\operatorname{tg}\dfrac{\theta'_1-\theta}{2}=\dfrac{\cos\dfrac{\sigma+\tau}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{\sigma-\tau}{2}}\operatorname{tg}\dfrac{\theta_1-\theta'}{2}\ , \quad \operatorname{tg}\dfrac{\theta'_2-\theta}{2}=-\dfrac{\cos\dfrac{\sigma-\tau}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{\sigma+\tau}{2}}\operatorname{tg}\dfrac{\theta_2-\theta'}{2} \\[2ex]
\operatorname{tg}\dfrac{\theta'_3-\theta_2}{2}=\dfrac{\cos\dfrac{\sigma+\tau}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{\sigma-\tau}{2}}\operatorname{tg}\dfrac{\theta_3-\theta'_2}{2}\ , \quad \operatorname{tg}\dfrac{\theta'_3-\theta_1}{2}=-\dfrac{\cos\dfrac{\sigma-\tau}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{\sigma+\tau}{2}}\operatorname{tg}\dfrac{\theta_3-\theta'_1}{2}\ .
\end{cases}
$$

Se calcoliamo delle due prime (32) il valore di

$$\operatorname{tg}\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{\theta'_1-\theta}{2}-\frac{\theta'_2-\theta}{2}\right)$$

deduciamo, con semplici trasformazioni trigonometriche, la formola seguente impor-

(¹) È quasi superfluo avvertire che tale corrispondenza fra i punti di S_0, S'_0 è ben distinta dalla corrispondenza d'applicabilità.

(²) In questa applicazione della citata formola si tenga presente che S'_1 è la quarta superficie del teorema di permutabilità dopo S, S_1, S', e similmente S'_2 la quarta dopo S, S_2, S' e che le trasformazioni di Bäcklund nel passaggio dalla S alle S_1, S_2, S' sono rispettivamente una B_σ, una $B_{-\sigma}$ e una B_τ. Così si hanno le due prime (32), e similmente le altre due.

tante pel nostro scopo:

$$(33)\qquad \operatorname{tg}\frac{\theta_1'-\theta_2'}{2}=\frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\tau\operatorname{sen}\left(\theta'-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)-\cos\sigma\operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}{\cos\sigma\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}-\cos\tau\cos\left(\theta'-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}.$$

Ma, secondo le (25*) § 8, abbiamo per le coordinate di M_0

$$x_0=x+R\operatorname{sen}\sigma\cot\frac{\theta_1-\theta_2}{2}X_3,$$

analogamente per quelle di M_0'

$$x_0'=x'+R\operatorname{sen}\sigma\cot\frac{\theta_1'-\theta_2'}{2}X_3'.$$

Ora, poichè si passa dalla S alla S' con una B_τ, si hanno le formole (vol. II, pagg. 391, 392):

$$x'=x+R\cos\tau(\cos\theta'X_1+\operatorname{sen}\theta'X_2)$$
$$X_3'=\cos\tau\operatorname{sen}\theta'X_1-\cos\tau\cos\theta'X_2-\operatorname{sen}\tau X_3,$$

e le precedenti ci danno quindi:

$$(34)\qquad \begin{aligned} x_0'-x_0=&R\cos\tau\left[\cos\theta'+\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta'\cot\frac{\theta_1'-\theta_2'}{2}\right]X_1+\\ &+R\cos\tau\left[\operatorname{sen}\theta'-\operatorname{sen}\sigma\cos\theta'\cot\frac{\theta_1'-\theta_2'}{2}\right]X_2-\\ &-R\operatorname{sen}\sigma\left[\cot\frac{\theta_1-\theta_2}{2}+\operatorname{sen}\tau\cot\frac{\theta_1'-\theta_2'}{2}\right]X_3. \end{aligned}$$

D'altra parte pei coseni di direzione della normale alla S_0 si hanno le (28*) § 8

$$(34^*)\qquad X_0=\frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}X_1+\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\frac{\theta_1+\theta_2}{2}X_2+\cos\sigma\operatorname{sen}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}X_3}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\sigma+\cos^2\sigma\operatorname{sen}^2\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}};$$

ed ora, se dalle (34), (34*) formiamo l'espressione $\Sigma X_0(x_0'-x_0)$, troviamo che si ha identicamente, a causa appunto della (33):

$$X_0(x_0'-x_0)+Y_0(y_0'-y_0)+Z_0(z_0'-z_0)=0.$$

Questa ci esprime precisamente che: *il segmento* M_0, M_0' *tocca in* M_0 *la* S_0, *c.d.d.*

A complemento della proposizione fondamentale dimostrata, osserviamo che le altre due superficie $\bar{S}_0, \bar{S}_0'$, luogo la prima del punto d'incontro delle normali alle S_1, S_2, la seconda delle normali a S_1', S_2' si trovano nelle medesime condizioni di S_0, S_0', delle quali sono rispettivamente complementari. Il quadrilatero sghembo $M_0 M_0' \bar{M}_0' \bar{M}_0$ coi vertici in quattro punti corrispondenti di $S_0, S_0', \bar{S}_0', \bar{S}_0$ genera coi

suoi quattro lati quattro congruenze W, di cui quelle relative ai due lati opposti $M_0 M_0$, $M'_0 M'_0$ sono inoltre normali; sopra ogni lato i due vertici sono i fuochi della relativa congruenza e i piani condotti pel lato e per ciascuno dei consecutivi i due piani focali. Si ha qui un caso particolare notevole delle circostanze geometriche che si presentano in generale nella composizione delle trasformazioni di MOUTARD (vol. II, pag. 74).

Ritornando alla proposizione stabilita, e prescindendo dapprima dalla distinzione fra reale ed immaginario, osserviamo come ne segua già che qualunque superficie S_0, applicabile sopra una quadrica a centro rotonda, è falda focale di infinite congruenze W dipendenti da due costanti (complesse), la cui seconda falda focale è applicabile sulla quadrica stessa. E infatti una tale superficie S_0 individua la quaderna associata (S, S_1, S_2, S_3) di superficie a curvatura costante; se a questa quaderna applichiamo una trasformazione B_τ di BÄCKLUND, che dipende appunto da due costanti, la trasformiamo in una seconda quaderna (S', S'_1, S'_2, S'_3) e la superficie S'_0 luogo del punto d'incontro delle normali a S', S'_3 è applicabile sulla S_0 e con questa forma appunto le due falde focali di una congruenza W.

Dal punto di vista generale analitico abbiamo già dimostrato così il teorema A) della prefazione, prescindendo per altro dalle condizioni di realità. Ma noi, collocandoci dal punto di vista reale, vogliamo ora suddistinguere i varî casi per arrivare a stabilire in ciascuno di essi il teorema A) ed il teorema B) nel loro senso preciso reale.

§ 11.

Il teorema A) *per le deformate del catenoide accorciato e del sinusoide iperbolico.*

Le nostre ricerche nel campo reale comincieranno da quelle due classi di superficie applicabili sull'ellissoide immaginario, che sono rappresentate dalle forme tipiche del catenoide accorciato e del sinusoide iperbolico (cf. § 1 e § 7 in fine); per queste due classi bastano alcune poche osservazioni complementari allo scopo nostro finale di dimostrare i teoremi A) B) della prefazione; e questi sviluppi ci serviranno poi di punto di partenza per le ricerche successive.

Sia dapprima S_0 una deformata del catenoide accorciato e sia (S, S_1, S_2, S_3) la quaderna associata di superficie pseudosferiche, che saranno tutte quattro reali e legate fra loro da due trasformazioni di BÄCKLUND reali ed opposte B_σ, $B_{-\sigma}$. Trasformiamo la S mediante una qualunque trasformazione reale B_τ di BÄCKLUND in un'altra superficie pseudosferica reale S'; pel teorema al § 9 questa B_τ trasformerà la quaderna (S, S_1, S_2, S_3) in un'altra (S', S'_1, S'_2, S'_3) della medesima specie, che sarà manifestamente costituita anch'essa di quattro superficie reali. Sarà quindi pure reale la superficie S'_0 luogo del punto d'incontro delle normali a S', S'_3; inoltre la S'_0 sarà applicabile sopra S_0 e costituirà con questa le due falde focali di una congruenza W. Poichè ora nella B_τ entra, insieme alla costante τ, una seconda costante, che dà in un punto M iniziale di S la direzione del raggio MM' della congruenza

pseudosferica relativa, così vediamo che ogni *data* superficie S_0 apparterrà, come prima falda focale, ad ∞^2 congruenze W della specie descritta. Questo è appunto il teorema A) per le superficie applicabili sul catenoide accorciato.

E qui non lascieremo d'osservare che il teorema stesso A) vale anche per il *catenoide ordinario*, come risulta da note proprietà osservate da Darboux e relative alle falde dell'evoluta di due superficie pseudosferiche trasformate di Bäcklund l'una dell'altra (vol. II, pag. 400). Anticipando su quanto dimostreremo prossimamente per l'iperboloide ad una falda, possiamo aggiungere che le medesime proprietà valgono ancora per il *catenoide allungato*, che è una deformata di rotazione dell'iperboloide stesso.

Passando ora al caso che la S_0 sia deformata di un sinusoide iperbolico, avremo che nella quaderna associata (S, S_1, S_2, S_3) le superficie pseudosferiche estreme S, S_3 saranno reali, le medie S_1, S_2 coniugate immaginarie e la costante σ delle due relative trasformazioni di Bäcklund $B_\sigma, B_{-\sigma}$ sarà puramente immaginaria (vol. II, § 398, pag. 448). Ora mediante una trasformazione B_τ a costante reale τ trasformiamo, come sopra, la S in un'altra superficie reale S'; la quaderna (S, S_1, S_2, S_3) verrà cangiata dalla B_τ in una nuova (S', S'_1, S'_2, S'_3) nella quale, la S' essendo reale, sarà pure reale la S'_3 e le S'_1, S'_2 di nuovo coniugate immaginarie. E in fatti ricorriamo alle formole (32) del § 10 e cangiamo nella prima di esse i in $-i$, osservando che si ha per ipotesi

$$\overline{\theta} = \theta \ , \ \overline{\theta}_1 = \theta_2 \ , \ \overline{\theta}_2 = \theta_1 \ , \ \overline{\theta}_3 = \theta_3 \ ; \ \overline{\theta}' = \theta' \ ; \ \overline{\sigma} = -\sigma \ , \ \overline{\tau} = \tau ;$$

ne deduciamo

$$\operatorname{tg} \frac{\overline{\theta}'_1 - \theta}{2} = - \frac{\cos \dfrac{\sigma - \tau}{2}}{\operatorname{sen} \dfrac{\sigma + \tau}{2}} \operatorname{tg} \frac{\theta_2 - \theta'}{2} ,$$

che confrontata colla seconda delle (32) stesse ci dà $\overline{\theta}'_1 = \theta'_2$. Similmente operando sulle due seconde (32), vediamo che $\overline{\theta}'_3 = \theta'_3$. Ciò posto, le normali ad S', S'_3 in punti corrispondenti si incontreranno in un punto M'_0, il cui luogo S'_0 sarà una superficie applicabile sul sinusoide iperbolico, che insieme con S_0 costituirà le due falde di una congruenza W. Concludiamo: *Per le superficie applicabili sul catenoide accorciato, come per quelle applicabili sul sinusoide iperbolico, vale il teorema* A) *della prefazione.*

§ 12.

Il teorema B) *di permutabilità per le deformate del catenoide accorciato e del sinusoide iperbolico.*

Passiamo ora al secondo teorema fondamentale della nostra teoria, al teorema B) di permutabilità. Come il teorema A) che stabilisce l'esistenza delle nostre trasformazioni dipendeva dalle trasformazioni di Bäcklund per le quaderne (S, S_1, S_2, S_3) di superficie a curvatura costante del teorema di permutabilità, così il teorema B)

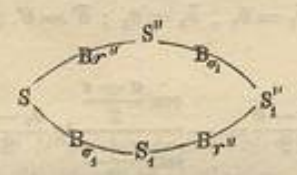
di permutabilità dipende alla sua volta da un analogo teorema per le trasformazioni delle quaderne (S, S_1, S_2, S_3). E sebbene pel nostro scopo basti considerare le quaderne speciali (S, S_1, S_2, S_3) in cui le trasformazioni componenti di BÄCKLUND $B_{\sigma_1}, B_{\sigma_2}$ hanno costanti eguali e di segno contrario, sarà opportuno dimostrare il teorema stesso in tutta la sua generalità come risulta dall'enunciato seguente:

Si consideri una quaderna (S, S_1, S_2, S_3) *di superficie a curvatura costante nella relazione generale del teorema di permutabilità* (vol. II, pag. 411) *e mediante due trasformazioni* $B_{\tau'}, B_{\tau''}$ *a costanti* τ', τ'' *differenti si trasformi, secondo il* § 9, *in altre due quaderne* (S', S_1', S_2', S_3'), $(S'', S_1'', S_2'', S_3'')$ *della medesima specie: esisterà una quarta quaderna* $(S''', S_1''', S_2''', S_3''')$ *perfettamente determinata, legata alle due medesime* (S', S_1', S_2', S_3'), $(S'', S_1'', S_2'', S_3'')$ *rispettivamente da due trasformazioni* $B_{\tau''}, B_{\tau'}$ *colle costanti* τ'', τ' *invertite* (¹).

Per dimostrare questo teorema applichiamo l'ordinario teorema di permutabilità e indichiamo rispettivamente con $S''', S_1''', S_2''', S_3'''$ le quattro superficie che completano a quaderne del teorema di permutabilità le quattro terne

$$(S, S', S''), \quad (S_1, S_1', S_1''), \quad (S_2, S_2', S_2''), \quad (S_3, S_3', S_3'').$$

Siano $B\sigma_1, B\sigma_2$ le trasformazioni che cangiano S rispettivamente in S_1, S_2. Pel teorema al § 9 le quattro superficie S, S_1, S'', S_1'' formano una quaderna del teorema di permutabilità relativa alle due trasformazioni di BÄCKLUND $B_{\sigma_1}, B_{\tau''}$ nel modo indicato schematicamente nella seguente figura:



Ora la $B_{\tau'}$ che cangia S in S' cangierà tutta questa quaderna in una nuova e precisamente S'' nella quarta superficie dopo S, S', S'' cioè in S''', la S_1 nella quarta dopo S, S', S_1 cioè in S_1', in fine la S_1'' nella quarta dopo S_1, S_1', S_1'' cioè in S_1'''; dunque la $B_{\tau'}$ cangia la quaderna (S, S_1, S'', S_1'') nella (S', S_1', S''', S_1'''). Poichè adunque S_1''' è la quarta superficie dopo S', S_1', S''', la trasformazione $B_{\tau''}$ che cangia S' in S''' trasformerà la quaderna (S', S_1', S_2', S_3') in una nuova quaderna, nella quale la trasformata di S_1' sarà appunto la S_1'''. Per analoga ragione questa $B_{\tau''}$ trasformerà S_2' in S_2''', S_3' in S_3'''; dunque la quaderna $(S''', S_1''', S_2''', S_3''')$ è legata alla (S', S_1', S_2', S_3') da questa $B_{\tau''}$, e similmente alla $(S'', S_1'', S_2'', S_3'')$ da una $B_{\tau'}$, c. d. d.

(¹) Si può dare al teorema del testo quest'altra forma equivalente (cfr. § 9): *Si trasformi una superficie a curvatura costante* S, *mediante quattro trasformazioni di* BÄCKLUND *a costanti distinte* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, *in altre quattro* S_1, S_2, S_3, S_4; *da queste cinque superficie viene determinato un ciclo chiuso di* $2^4 = 16$ *superficie ciascuna delle quali è legata a quattro consecutive nel ciclo da quattro trasformazioni di* BÄCKLUND *colle medesime costanti* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$. La generalizzazione al caso in cui si applichino alla S un numero qualunque n di trasformazioni si presenta spontaneamente e conduce ad un ciclo di 2^n superficie. Per $n = 3$ si ha il caso del § 9, per $n = 4$ l'attuale.

Ciò premesso, supponiamo che la quaderna primitiva (S, S_1, S_2, S_3) sia la particolare quaderna associata ad una deformata S_0 del catenoide accorciato ed applichiamo il nostro teorema. Le tre nuove quaderne (S', S_1', S_2', S_3'), $(S'', S_1'', S_2'', S_3'')$, $(S''', S_1''', S_2''', S_3''')$ si troveranno nelle medesime condizioni ed avremo tre nuove superficie S_0', S_0'', S_0''' applicabili sopra S_0 e luoghi rispettivamente del punto d'incontro delle normali in punti corrispondenti alle coppie (S', S_3'), (S'', S_3''), (S''', S_3'''). Da quanto precede risulta che mentre S_0 è legata ad S_0', S_0'' rispettivamente da una $B_{\tau'}, B_{\tau''}$, la S_0''' è legata alle S_0', S_0'' stesse da due trasformazioni $B_{\tau''}, B_{\tau'}$ a costanti τ'', τ' invertite. E poichè le medesime osservazioni si applicano evidentemente al caso in cui S_0 sia deformata del sinusoide iperbolico, possiamo concluderne: *Per le nostre trasformazioni delle superficie applicabili sul catenoide accorciato o sul sinusoide iperbolico vale il teorema* B) *di permutabilità.*

È chiaro poi che le medesime proprietà valgono per le superficie applicabili sul catenoide ordinario, come risulta dall'ordinario teorema di permutabilità per le trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche evolventi.

§ 13.

Prime osservazioni sulle deformate dell'iperboloide rotondo ad una falda.

Siamo ora in grado di intraprendere le ricerche per la teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle altre quadriche rotonde di seconda specie che più ci interessano, quelle enumerate nella tabella al § 7. Seguendo l'ordine stabilito in questa tabella, comincieremo dal caso, ivi segnato A_1), delle superficie applicabili sull'iperboloide rotondo ad una falda in senso ristretto, cioè entro ai limiti.

Convien subito avvertire che si debbono distinguere le deformate (reali) S_0 dell'iperboloide in tre specie a seconda della natura del sistema coniugato permanente nel passaggio dalla configurazione S_0 alla forma iperboloidica. Diremo S_0 una deformata di *1ª specie* dell'iperboloide se i due sistemi di linee che formano il sistema coniugato permanente sono reali e distinti, di *2ª specie* quando sono immaginari (coniugati), in fine di *3ª specie* quando sono reali e coincidenti. In quest'ultimo caso si tratta delle deformate rigate dell'iperboloide [1]; per esse valgono ancora i medesimi teoremi, ma le dimostrazioni richieggono una trattazione speciale, che verrà data nei §§ 22-24.

Per le deformate delle prime due specie sappiamo che il sistema coniugato permanente di S_0 corrisponde precisamente (§ 3) alle linee di curvatura delle superficie (S, S_1, S_2, S_3), che formano la quaderna associata ad S_0, e sono quattro superficie di curvatura costante $K = -\frac{1}{b^2}$, essendo b il semiasse immaginario dell'iper-

[1] In generale se per due superficie reali applicabili Σ, Σ' il sistema coniugato comune è costituito da due sistemi di linee coincidenti queste sono linee rette. Cfr. il § 2 della mia Memoria: *Sulla deformazione dei paraboloidi* (Annali di matematica, t. IX della serie 3ª, 1903).

boloide. Noi *facciamo per semplicità* $b = 1$, indi $K = -1$ e nelle formole del § 8 $R = 1$. Dobbiamo ora vedere quale valore è da attribuirsi alla costante σ delle trasformazioni B_σ, $B_{-\sigma}$ di Bäcklund, in relazione col raggio a del circolo di gola dell'iperboloide, e per ciò basta osservare la doppia espressione pel lato d della losanga dato da

$$d = a\sqrt{-1} = \cos\sigma .$$

Se introduciamo dunque una costante c, reale e positiva, tale che sia $a = \operatorname{senh} c$, potremo prendere

$$\sigma = \frac{\pi}{2} - ic , \tag{35}$$

indi

$$\operatorname{sen}\sigma = \cosh c \quad , \quad \cos\sigma = i \operatorname{senh} c . \tag{35*}$$

Ora ricordiamo che le due superficie S, S_1 debbono essere coniugate immaginarie, come pure le altre due S_1, S_2, onde dovranno sussistere le formole:

$$\begin{cases} \cos^2\bar\theta \; d\bar u^2 + \operatorname{sen}^2\bar\theta \; d\bar v^2 = \cos^2\theta_2 \, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta_2 \, dv^2 \\ \cos^2\bar\theta_1 \, d\bar u^2 + \operatorname{sen}^2\bar\theta_1 \, d\bar v^2 = \cos^2\theta_2 \, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta_2 \, dv^2 . \end{cases} \tag{36}$$

Se la deformata S_0 dell'iperboloide che si considera è di prima specie, le linee $u = \text{cost}$, $v = \text{cost}$ debbono essere reali sopra S_0 e quindi $\bar u$ funzione di u e $\bar v$ funzione di v; se invece la deformata è di seconda specie sarà $\bar u$ funzione di v, e $\bar v$ di u. Ma allora, ricorrendo alle (36), si vede facilmente che nel primo caso deve aversi $d\bar u = \pm du$, $d\bar v = \pm dv$ e nel secondo $d\bar u = \pm dv$, $d\bar v = \pm du$, e perciò, disponendo di costanti additive in u, v, si può supporre senz'altro

$$\bar u = \pm u \; , \; \bar v = \pm v \text{ per le deformate di 1ª specie} \tag{37}$$

$$\bar u = \pm v \; , \; \bar v = \pm u \text{ per le deformate di 2ª specie.} \tag{37*}$$

In questo secondo caso i segni debbono essere evidentemente presi in coincidenza e si può quindi supporre

$$\bar u = v \quad , \quad \bar v = u , \tag{38}$$

l'altro caso ($\bar u = -v$, $\bar{\ } = -u$) equivalendo a mutare p. es. v in $-v$. Dimostreremo che anche per le deformate di prima specie nelle (37) i segni debbono essere presi in coincidenza, ricorrendo alle formole per le trasformazioni di Bäcklund B_σ, $B_{-\sigma}$ che legano θ, θ_1, θ_2, θ_3; queste, a causa dei valori (35*) di $\operatorname{sen}\sigma$, $\cos\sigma$ si scrivono (vol. II, pp. 412 e 416):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta_1}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \dfrac{\cos\theta \operatorname{sen}\theta_1 + \cosh c \operatorname{sen}\theta \cos\theta_1}{i \operatorname{senh} c} \\ \dfrac{\partial\theta_1}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta \cos\theta_1 + \cosh c \cos\theta \operatorname{sen}\theta_1}{i \operatorname{senh} c} \end{cases} \tag{σ}$$

$$(a_1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_3}{\partial u}+\dfrac{\partial\theta_2}{\partial v}=\dfrac{\cos\theta_2\,\mathrm{sen}\,\theta_3+\cosh c\,\mathrm{sen}\,\theta_2\cos\theta_3}{i\,\mathrm{senh}\,c} \\[2ex] \dfrac{\partial\theta_3}{\partial v}+\dfrac{\partial\theta_2}{\partial u}=-\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta_2\cos\theta_3+\cosh c\cos\theta_2\,\mathrm{sen}\,\theta_3}{i\,\mathrm{senh}\,c} \end{cases}$$

$$(b)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_2}{\partial u}+\dfrac{\partial\theta}{\partial v}=\dfrac{\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta_2-\cosh c\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta_2}{i\,\mathrm{senh}\,c} \\[2ex] \dfrac{\partial\theta_2}{\partial v}+\dfrac{\partial\theta}{\partial u}=-\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta_2-\cosh c\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta_2}{i\,\mathrm{senh}\,c} \end{cases}$$

$$(b_1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_3}{\partial u}+\dfrac{\partial\theta_1}{\partial v}=\dfrac{\cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_3-\cosh c\,\mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_3}{i\,\mathrm{senh}\,c} \\[2ex] \dfrac{\partial\theta_3}{\partial v}+\dfrac{\partial\theta_1}{\partial u}=-\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_3-\cosh c\cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_3}{i\,\mathrm{senh}\,c}. \end{cases}$$

Ora le condizioni (36), essendo attualmente $d\bar{u}^2=du^2$, $d\bar{v}^2=dv^2$, danno

$$\cos 2\bar{\theta}=\cos 2\theta_3 \quad , \quad \cos 2\bar{\theta}_1=\cos 2\theta_2$$

e quindi, trascurando come sottinderemo sempre in seguito multipli di 2π, avremo:

$$(39)\qquad \theta_3=\varepsilon\pi\pm\bar{\theta} \quad , \quad \theta_2=\varepsilon'\pi\pm\bar{\theta}_1,$$

dove ε, ε' hanno ciascuna il valore *zero* o l'*unità*. L'incertezza del segno in queste formole si toglie ricorrendo alla formola che risulta dal § 8:

$$\mathrm{T}=\mathrm{sen}\,\sigma\cot\frac{\theta_1-\theta_2}{2}=\cosh c\cot\frac{\theta_1-\theta_2}{2}=\cot\frac{\theta_3-\theta}{2},$$

che dà il raggio T delle sfere coi centri distribuiti sopra S_0 e ricordando che T deve essere qui reale (tabella § 7) e per ciò $\cot\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$, $\cot\frac{\theta_3-\theta}{2}$ debbono pure essere reali. Ne segue che nell'una e nell'altra delle (39) vale necessariamente il segno inferiore, cioè

$$(40)\qquad \theta_3=\varepsilon\pi-\bar{\theta} \quad , \quad \theta_2=\varepsilon'\pi-\bar{\theta}_1.$$

Ed ora, siccome le formole coniugate delle (b), (b) debbono coincidere colle (a_1), (b_1) basta confrontare i loro primi membri per dedurne appunto, come si voleva, che nelle (37) valgono insieme i segni superiori o gli inferiori. Siamo così condotti per le deformate di prima specie dell'iperboloide a suddistinguere i due casi seguenti:

$$(41)\qquad \bar{u}=u \quad , \quad \bar{v}=v \quad (u, v \text{ reali})$$

$$(41^*)\qquad \bar{u}=-u \quad , \quad \bar{v}=-v \quad (u, v \text{ puramente immaginari}),$$

laddove per le deformate di seconda specie abbiamo l'unico caso (38) con u, v immaginari coniugati.

§ 14.

Deformate di prima specie dell'iperboloide corrispondenti ad u, v reali.

In questo primo caso dei parametri u, v reali cominciamo dal trasformare le formole $(a), (b)$, $(a_1), (b_1)$ in coordinate assintotiche α, β ponendo

$$u = \alpha + \beta \quad , \quad v = \alpha - \beta ;$$

esse diventano così:

$$(\alpha) \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta_1 + \theta)}{\partial\alpha} = \dfrac{1 - \cosh c}{i \operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta) \\ \dfrac{\partial(\theta_1 - \theta)}{\partial\beta} = \dfrac{1 + \cosh c}{i \operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta) \end{cases} \qquad (\alpha_1) \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta_3 + \theta_2)}{\partial\alpha} = \dfrac{1 - \cosh c}{i \operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_2) \\ \dfrac{\partial(\theta_3 - \theta_2)}{\partial\beta} = \dfrac{1 + \cosh c}{i \operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_3 + \theta_2) \end{cases}$$

$$(\beta) \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta_2 + \theta)}{\partial\alpha} = \dfrac{1 + \cosh c}{i \operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta) \\ \dfrac{\partial(\theta_2 + \theta)}{\partial\beta} = \dfrac{1 - \cosh c}{i \operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_2 + \theta) \end{cases} \qquad (\beta_1) \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta_3 + \theta_1)}{\partial\alpha} = \dfrac{1 + \cosh c}{i \operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_1) \\ \dfrac{\partial(\theta_3 - \theta_1)}{\partial\beta} = \dfrac{1 - \cosh c}{i \operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_3 + \theta_1). \end{cases}$$

Ora se cangiamo nelle $(\alpha), (\beta)$ i in $-i$, osservando le (40), e confrontiamo colle $(\alpha_1), (\beta_1)$, ne deduciamo $\varepsilon = \varepsilon'$ (mod. 2), quindi o

$$(42) \qquad \theta_3 = -\bar{\theta} \quad , \quad \theta_2 = -\bar{\theta}_1$$

oppure

$$\theta_3 = \pi - \bar{\theta} \quad , \quad \theta_2 = \pi - \bar{\theta}_1 .$$

Ma questo secondo caso si riduce al primo scambiando S con S_1 ed S_2 con S_3, come si rileva dall'osservare che le $(\alpha), (\beta)$, $(\alpha_1), (\beta_1)$ non mutano cangiando rispettivamente $\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ in $\theta_1, \theta + \pi, \theta_3, \theta_2 + \pi$. Possiamo dunque limitarci a considerare il primo caso (42); e scindendo in θ, θ_1 il reale dall'immaginario porremo $\theta = \omega + i\varphi$, $\theta_1 = \omega_1 + i\varphi_1$, indi:

$$(43) \quad \theta = \omega + i\varphi \ , \ \theta_1 = \omega_1 + i\varphi_1 \ , \ \theta_2 = -\omega_1 + i\varphi_1 \ , \ \theta_3 = -\omega + i\varphi .$$

Dopo questo noi formiamo le condizioni *necessarie e sufficienti* cui debbono soddisfare le quattro nostre funzioni incognite $\omega, \omega_1, \varphi, \varphi_1$ di α, β sostituendo questi valori (43) nelle $(\alpha), (\beta)$ e separando il reale dall'immaginario. Così troviamo in primo luogo la relazione *in termini finiti* fra ω, ω_1:

$$(\mathrm{I}) \qquad \operatorname{sen}\omega_1 \cos\omega + \cosh c \cos\omega_1 \operatorname{sen}\omega = 0 \quad , \quad \text{o } \operatorname{tg}\omega_1 = -\cosh c \operatorname{tg}\omega ,$$

la quale non è altro che la formola (24) § 8 del teorema di permutabilità appli-

cata alla quaderna $(\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Tenendo poi conto di questa relazione (I), le rimanenti condizioni sono date dal seguente sistema differenziale:

$$
(\mathrm{II})\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial\omega}{\partial\alpha} = \dfrac{\cos\omega}{\operatorname{senh} c \cos\omega_1} \operatorname{senh}(\varphi_1 - \varphi)\,, \quad \dfrac{\partial\omega_1}{\partial\alpha} = \dfrac{\operatorname{sen}\omega_1}{\operatorname{senh} c \operatorname{sen}\omega} \operatorname{senh}(\varphi_1 - \varphi) \\[2ex]
\dfrac{\partial\omega}{\partial\beta} = -\dfrac{\cos\omega}{\operatorname{senh} c \cos\omega_1} \operatorname{senh}(\varphi_1 + \varphi)\,, \quad \dfrac{\partial\omega_1}{\partial\beta} = -\dfrac{\operatorname{sen}\omega_1}{\operatorname{senh} c \operatorname{sen}\omega} \operatorname{senh}(\varphi_1 + \varphi) \\[2ex]
\dfrac{\partial(\varphi_1 + \varphi)}{\partial\alpha} = -\operatorname{senh} c \cos\omega_1 \operatorname{sen}\omega \cosh(\varphi_1 - \varphi)\,, \\[2ex]
\dfrac{\partial(\varphi_1 + \varphi)}{\partial\beta} = \operatorname{senh} c \cos\omega_1 \operatorname{sen}\omega \cosh(\varphi_1 + \varphi)\,.
\end{cases}
$$

Osserviamo subito che, nel sistema (II), le equazioni per ω_1 sono una conseguenza di quelle per ω e della relazione (I) fra ω, ω_1. È poi facile eliminare dal sistema (I), (II) le incognite $\omega_1, \varphi, \varphi_1$ e formare *un'unica equazione a derivate parziali del 2° ordine* per la funzione incognita ω, da cui tutto il problema dipende. Basta per ciò trarre dalle (II)

$$
\operatorname{senh}(\varphi_1 - \varphi) = \frac{\operatorname{senh} c \cos\omega_1}{\cos\omega} \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\,, \quad \operatorname{senh}(\varphi_1 + \varphi) = -\frac{\operatorname{senh} c \cos\omega_1}{\cos\omega} \frac{\partial\omega}{\partial\beta}
$$

esprimendo così φ, φ_1 per ω e le sue derivate prime. Sostituendo poi nell'una o nell'altra delle due ultime (II) si ottiene l'indicata equazione del 2° ordine, che è la seguente:

$$
(\mathrm{II}^*)\qquad \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\cos\omega_1}{\cos\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\right] =
$$

$$
= \cos\omega_1 \operatorname{sen}\omega \sqrt{\frac{\operatorname{senh}^2 c \cos^2\omega_1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\right)^2 + 1}\sqrt{\frac{\operatorname{senh}^2 c \cos^2\omega_1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\right)^2 + 1}\,,
$$

dove ω_1 s'intende espressa per ω colla (I).

Da questa equazione del 2° ordine per ω dipende la ricerca delle attuali deformate dell'iperboloide rotondo ad una falda. Propriamente, da quanto abbiamo detto fin qui, risulta soltanto che ad ogni tale deformata corrisponde una soluzione della (II*). Ma noi andiamo ora a verificare inversamente che ad ogni soluzione ω della (II*), ossia ad ogni quaderna $\omega, \omega_1, \varphi, \varphi_1$ di funzioni che soddisfino il sistema (I), (II), corrisponde una tale deformata S_0 dell'iperboloide.

§ 15.

Verifiche relative alla superficie S_0.

Procedendo all'indicata verifica, cominciamo dall'osservare che se $\omega, \omega_1, \varphi, \varphi_1$ soddisfano, come è supposto, il sistema (I), (II), le funzioni $\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ date dalle (43) soddisferanno conseguentemente le $(\alpha), (\beta), (\alpha_1), (\beta_1)$, e definiranno per ciò quattro

superficie pseudosferiche S, S_1, S_2, S_3 costituenti una quaderna del teorema di permutabilità relativa alle due trasformazioni di BÄCKLUND $B_\sigma, B_{-\sigma}$ ove σ ha il valore (35) $\sigma = \frac{\pi}{2} - ic$. Le superficie (S, S_3), come le (S_1, S_2), saranno, a causa delle (42), coniugate immaginarie e le normali alle S, S_3 in punti corrispondenti si incontreranno in un punto M_0. Noi dobbiamo dimostrare che: *La superficie* S_0 *luogo di questo punto* M_0 *è reale ed applicabile sulla regione reale dell' iperboloide rotondo ad una falda coi semiassi* $a = \operatorname{senh} c$, $b = 1$.

Per ciò, applicando le formole generali del § 8, calcoliamo le due forme quadratiche fondamentali della superficie S_0, e prima di tutto osserviamo che le quantità Ω, Φ, ivi definite dalle (25), hanno qui, a causa delle (43), i valori seguenti:

$$\Omega = \omega_1 \quad , \quad \Phi = \varphi_1 ,$$

indi le A, B date dalle (26) ibid., tenendo conto delle (35*) e della relazione (I) fra ω, ω_1, diventano:

$$\text{(44)} \qquad A = -\frac{i \operatorname{sen} \omega_1}{\operatorname{sen} \omega} \operatorname{senh} \varphi \quad , \quad B = \frac{\operatorname{sen} \omega_1}{\operatorname{sen} \omega} \cosh \varphi ,$$

onde segue

$$\text{(45)} \qquad \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{\operatorname{sen} \omega_1}{\operatorname{sen} \omega} .$$

Pel differenziale esatto dV definito dalle (27) § 8 troviamo qui il valore *reale*

$$dV = \frac{\operatorname{sen} \omega_1}{\operatorname{sen} \omega} (\operatorname{senh} \varphi_1 \operatorname{senh} \varphi \, du - \cosh \varphi_1 \cosh \varphi \, dv) ,$$

ovvero in coordinate assintotiche α, β:

$$\text{(46)} \qquad dV = \frac{\operatorname{sen} \omega_1}{\operatorname{sen} \omega} [\cosh(\varphi_1 + \varphi) \, d\beta - \cosh(\varphi_1 - \varphi) \, d\alpha] .$$

Dopo ciò il ds_0^2 della S_0, calcolato dalla (28) § 8, diventa

$$ds_0^2 = \frac{\cosh^2 c - \operatorname{senh}^2 c \operatorname{sen}^2 \omega_1}{\operatorname{sen}^4 \omega_1} d\omega_1^2 + \frac{dV^2}{\operatorname{sen}^2 \omega_1} ;$$

esso ha forma reale definita positiva, e ponendo

$$\text{(47)} \qquad r = \frac{\operatorname{senh} c}{\operatorname{sen} \omega_1} \quad , \quad v_1 = \frac{V}{\operatorname{senh} c} \quad \text{(cfr. § 8)}$$

si riduce alla forma

$$ds_0^2 = \frac{\cosh^2 c \, . \, r^2 - \operatorname{senh}^4 c}{\operatorname{senh}^2 c (r^2 - \operatorname{senh}^2 c)} dr^2 + r^2 dv_1^2 ,$$

che appartiene appunto (§ 1) all'iperboloide rotondo ad una falda di semiassi

$a = \operatorname{senh} c$, $b = 1$. Di più, siccome dalla (47) risulta $r^2 > \operatorname{senh}^2 c > a^2$, vediamo trattarsi della regione reale dell'iperboloide.

La seconda forma quadratica fondamentale F_0 di S_0 è data poi dalla (29) § 8, la quale avendosi qui $\cos\sigma = i \operatorname{senh} c$, $\operatorname{sen}\Omega = \operatorname{sen}\omega_1$ e sussistendo le (44), (45), diventa

$$F_0 = \frac{\operatorname{senh}\varphi \cosh\varphi}{\operatorname{senh} c \operatorname{sen}\omega}(du^2 - dv^2),$$

ovvero in coordinate assintotiche α, β:

$$F_0 = \frac{2 \operatorname{senh} 2\varphi}{\operatorname{senh} c \operatorname{sen}\omega} d\alpha\, d\beta.$$

Questo conferma che sopra S_0 le linee α, β sono assintotiche. Ma di più, essendo le due forme quadratiche fondamentali di S_0 ambedue reali e la prima definita positiva, come si è visto, facilmente ne deduciamo che *la superficie* S_0 *è reale*. Invero i teoremi fondamentali della teoria delle superficie dimostrano che in tali condizioni se S_0 non fosse reale, si potrebbe certamente render tale con un movimento immaginario; ma poichè questo movimento dovrebbe tradurre le due coppie (S, S_3), (S_1, S_2) di superficie coniugate immaginarie in altre due tali coppie, il movimento è necessariamente reale, e reale è quindi la S_0, c. d. d.

In modo leggiermente diverso possiamo arrivare alla medesima conclusione così: Le due forme quadratiche fondamentali ds_0^2 e F_0, sopra calcolate, soddisfano alle equazioni di Gauss e Codazzi, come si può direttamente constatare osservando le (I), (II); esse definiscono quindi *intrinsecamente* una deformata reale S_0 dell'iperboloide. La quaderna di superficie pseudosferiche associata a questa S_0 coincide necessariamente colla (S, S_1, S_2, S_3) corrispondente alle quattro funzioni $\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ definite dalle formole (43).

§ 16.

Considerazioni preliminari sulle trasformazioni.

Applicando i risultati generali del § 10, convenientemente precisati nel campo reale, perverremo ora al risultato finale in vista cioè alla dimostrazione dei teoremi A) B) per le deformate dell'iperboloide che stiamo studiando. Sia S_0 una tale deformata e sia (S, S_1, S_2, S_3) la quaderna associata di superficie pseudosferiche, due a due coniugate immaginarie. Vogliamo dimostrare che, mediante una trasformazione B_τ di Bäcklund, si può, *in* ∞^2 *modi reali*, trasformare questa quaderna in un'altra (S', S_1', S_2', S_3') della medesima specie con (S', S_3'), (S_1', S_2') coniugate immaginarie. Allora sarà in effetto dimostrata l'esistenza delle ∞^2 trasformazioni richieste per la deformata S_0 poichè la superficie S_0', luogo del punto d'incontro delle normali a S', S_3', sarà applicabile, per quanto sopra abbiamo visto, sull'iperboloide medesimo e formerà insieme con S_0 le due falde focali di una congruenza W. Ora, perchè la

nuova quaderna (S', S'_1, S'_2, S'_3) si trovi nelle medesime condizioni della primitiva, è necessario e sufficiente, come si è visto al § 14, che siano soddisfatte le condizioni corrispondenti alle (42)

$$\theta'_3 = -\bar{\theta}' \quad , \quad \theta'_2 = -\bar{\theta}'_1 \tag{48}$$

oppure le altre due

$$\theta'_3 = \pi - \bar{\theta}' \quad , \quad \theta'_2 = \pi - \bar{\theta}'_1 \, , \tag{48*}$$

e qui bisognerà trattare separatamente i due casi perchè conducono in effetto a due gruppi di trasformazioni distinte.

Se riprendiamo le formole (32) § 10 e cangiamo nelle due prime di esse i in $-i$, ricordando che per le (42): $\theta_3 = -\bar{\theta}, \theta_2 = -\bar{\theta}_1$, dal confronto colle due seconde (32) deduciamo che nel caso (48) debbono sussistere le formole

$$\left\{\begin{aligned} &\cos\frac{\sigma-\tau}{2}\cos\frac{\bar{\sigma}-\bar{\tau}}{2} = \operatorname{sen}\frac{\sigma+\tau}{2}\operatorname{sen}\frac{\bar{\sigma}+\bar{\tau}}{2} \\ &\operatorname{sen}\frac{\sigma-\tau}{2}\operatorname{sen}\frac{\bar{\sigma}-\bar{\tau}}{2} = \cos\frac{\sigma+\tau}{2}\cos\frac{\bar{\sigma}+\bar{\tau}}{2} \end{aligned}\right. \tag{49}$$

e nel caso (48*) le altre

$$\left\{\begin{aligned} &\cos\frac{\sigma+\tau}{2}\operatorname{sen}\frac{\bar{\sigma}-\bar{\tau}}{2} = \cos\frac{\bar{\sigma}+\bar{\tau}}{2}\operatorname{sen}\frac{\sigma-\tau}{2} \\ &\cos\frac{\bar{\sigma}-\bar{\tau}}{2}\operatorname{sen}\frac{\sigma+\tau}{2} = \cos\frac{\sigma-\tau}{2}\operatorname{sen}\frac{\bar{\sigma}+\bar{\tau}}{2} . \end{aligned}\right. \tag{49*}$$

Le (49), sommate e sottratte, danno le equivalenti:

$$\left\{\begin{aligned} &\cos\left(\frac{\sigma-\bar{\sigma}}{2}-\frac{\tau-\bar{\tau}}{2}\right) - \cos\left(\frac{\sigma-\bar{\sigma}}{2}+\frac{\tau-\bar{\tau}}{2}\right) = 0 \\ &\cos\left(\frac{\sigma+\bar{\sigma}}{2}-\frac{\tau+\bar{\tau}}{2}\right) + \cos\left(\frac{\sigma+\bar{\sigma}}{2}+\frac{\tau+\bar{\tau}}{2}\right) = 0 \end{aligned}\right. \tag{50}$$

e le (49*) le altre

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma+\bar{\sigma}}{2}+\frac{\tau-\bar{\tau}}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\sigma+\bar{\sigma}}{2}-\frac{\tau-\bar{\tau}}{2}\right) = 0 \\ &\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma-\bar{\sigma}}{2}+\frac{\tau+\bar{\tau}}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\sigma-\bar{\sigma}}{2}-\frac{\tau+\bar{\tau}}{2}\right) = 0 . \end{aligned}\right. \tag{50*}$$

Ma, siccome $\sigma = \frac{\pi}{2} - ic$ indi $\frac{\sigma+\bar{\sigma}}{2} = \frac{\pi}{2}$, la seconda delle (50) e la prima delle (50*) sono identità, per cui nel primo caso rimane solo da soddisfare la condizione $\operatorname{sen}\frac{\tau-\bar{\tau}}{2} = 0$ e nel secondo l'altra $\cos\frac{\tau+\bar{\tau}}{2} = 0$. Ne concludiamo intanto: *Se*

valgono le (48) *la costante* τ *della trasformazione* B_τ *di* Bäcklund *deve essere reale, mentre nel caso delle* (48*) *si potrà porre* $\tau = \frac{\pi}{2} - i\tau'$ *con* τ' *reale.*

Ora, siccome la B_τ trasforma, per ipotesi, $\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ rispettivamente in $\theta', \theta'_1, \theta'_2, \theta'_3$, dovranno sussistere le formole della trasformazione di Bäcklund:

$$(\bar{\alpha}) \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta'+\theta)}{\partial\alpha} = \dfrac{1-\operatorname{sen}\tau}{\cos\tau}\operatorname{sen}(\theta'-\theta) \\ \dfrac{\partial(\theta'-\theta)}{\partial\beta} = \dfrac{1+\operatorname{sen}\tau}{\cos\tau}\operatorname{sen}(\theta'+\theta) \end{cases} \qquad (\bar{\beta}) \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta'_1+\theta_1)}{\partial\alpha} = \dfrac{1-\operatorname{sen}\tau}{\cos\tau}\operatorname{sen}(\theta'_1-\theta_1) \\ \dfrac{\partial(\theta'_1-\theta_1)}{\partial\beta} = \dfrac{1+\operatorname{sen}\tau}{\cos\tau}\operatorname{sen}(\theta'_1-\theta_1) \end{cases}$$

$$(\bar{\alpha}_1) \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta'_2+\theta_3)}{\partial\alpha} = \dfrac{1-\operatorname{sen}\tau}{\cos\tau}\operatorname{sen}(\theta'_2-\theta_3) \\ \dfrac{\partial(\theta'_2-\theta_3)}{\partial\beta} = \dfrac{1+\operatorname{sen}\tau}{\cos\tau}\operatorname{sen}(\theta'_2+\theta_3) \end{cases} \qquad (\bar{\beta}_1) \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta'_2+\theta_2)}{\partial\alpha} = \dfrac{1-\operatorname{sen}\tau}{\cos\tau}\operatorname{sen}(\theta'_2-\theta_2) \\ \dfrac{\partial(\theta'_2-\theta_2)}{\partial\beta} = \dfrac{1+\operatorname{sen}\tau}{\cos\tau}\operatorname{sen}(\theta'_2+\theta_2). \end{cases}$$

E intanto si vede subito che, essendo $\theta_3 = -\bar{\theta}$, $\theta_2 = -\bar{\theta}_1$, quando abbiano luogo le (48) con τ reale le formole $(\bar{\alpha}_1)$, $(\bar{\beta}_1)$ sono appunto le coniugate delle $(\bar{\alpha})$ $(\bar{\beta})$; e lo stesso avviene se sussistono invece le (48*) ed è $\tau = \frac{\pi}{2} - i\tau'$, indi $\bar{\tau} = \pi - \tau$. Ma l'osservazione per noi più importante, come quella che conduce alla conclusione in vista, è la seguente: basterà che le (48), o le (48*) siano soddisfatte *inizialmente*, per un sistema particolare α_0, β_0 di valori delle variabili α, β perchè risultino verificate anche per α, β variabili. E infatti avendosi le relazioni (42)

$$\bar{\theta} = -\theta_3 \quad , \quad \bar{\theta}_1 = -\theta_2 \qquad \text{per } \alpha, \beta \text{ variabili,}$$

dalle $(\bar{\alpha})$ $(\bar{\beta})$ cangiandovi i in $-i$ e supposto τ reale risulta che $-\bar{\theta}'$, $-\bar{\theta}'_1$ sono legate a θ_2, θ_3 dalle stesse equazioni differenziali $(\bar{\alpha}_1)$ $(\bar{\beta}_1)$ come θ'_3, θ'_2 per cui se *inizialmente* supponiamo $-\bar{\theta}' = \theta'_3$, $-\bar{\theta}'_1 = \theta'_2$ varranno le medesime relazioni per α, β variabili. E, se invece siamo nel secondo caso $\tau = \frac{\pi}{2} - i\tau'$, si trae la medesima conclusione per $\pi - \bar{\theta}'$, $\pi - \bar{\theta}'_1$ (anzichè per $-\bar{\theta}_1$, $-\bar{\theta}'_1$) e basta quindi che le (48*) valgano per $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ perchè sussistano anche per α, β variabili.

§ 17.

Formole definitive per le trasformazioni.

Ciò premesso, ecco come arriviamo alla fine delle nostre deduzioni. Prendiamo la formola (33) § 10:

$$(51) \qquad \operatorname{tg}\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2} = \frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\tau\operatorname{sen}\left(\theta'-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) - \cos\sigma\operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}{\cos\sigma\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2} - \cos\tau\cos\left(\theta'-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)},$$

la quale esprime, secondo quanto abbiamo dimostrato in quel paragrafo, che la congiungente due punti corrispondenti M_0, M'_0 di S_0, S'_0 tocca in M_0 la S_0 ed in M'_0 la S'_0, e ricordiamo che nel caso nostro il valore di $\operatorname{tg}\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2}$ deve essere reale. Posto $\theta'=\omega'+i\varphi'$, separiamo nel secondo membro della (51) il reale dall'immaginario ed eguagliamo a zero la parte immaginaria. Troveremo una relazione fra $\omega', \varphi', \omega_1, \varphi_1$ e noi dimostreremo che: *basta soddisfarla inizialmente per* $\alpha=\alpha_0$, $\beta=\beta_0$ perchè ne risultino pur soddisfatte inizialmente, e quindi pel paragrafo precedente anche per α, β variabili, le (48) o le (48*) secondo che $\bar{\tau}=\tau$, ovvero $\bar{\tau}=\pi-\tau$.

1° caso: $\bar{\tau}=\tau$ (τ reale). — Ponendo in evidenza il reale e l'immaginario nella (51) abbiamo

$$\operatorname{tg}\frac{\theta'_1-\theta'_1}{2}=$$

$$=\frac{\cosh c\cos\tau\operatorname{sen}\omega'\cosh(\varphi'-\varphi_1)+i[\cosh c\cos\tau\cos\omega'\operatorname{senh}(\varphi'-\varphi_1)-\operatorname{senh}c\operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\omega_1]}{-\cos\tau\cos\omega'\cosh(\varphi'-\varphi_1)+i[\operatorname{senh}c\cos\omega_1-\cos\tau\operatorname{sen}\omega'\operatorname{senh}(\varphi'-\varphi_1)]},$$

ed, eguagliando a zero la parte immaginaria del secondo membro, otteniamo la formola

$$\text{(A)}\quad \cosh c\cos\tau\operatorname{senh}(\varphi'-\varphi_1)=\operatorname{senh}c[\operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\omega_1\cos\omega'-\cosh c\cos\omega_1\operatorname{sen}\omega'],$$

dopo di che la precedente si riduce semplicemente alla formola

$$\text{(52)}\qquad \operatorname{tg}\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2}=-\cosh c\operatorname{tg}\omega',$$

Ora supponiamo soltanto la (A) soddisfatta *inizialmente* dalla trasformata $\theta'=\omega'+i\varphi'$ di θ mediante la B_τ: sarà pur soddisfatta inizialmente la (52), e confrontando questa colla formola del teorema di permutabilità

$$\operatorname{tg}\frac{\theta'_3-\theta'}{2}=\frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\operatorname{tg}\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2}=\frac{1}{\cosh c}\operatorname{tg}\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2},$$

ne deduciamo

$$\operatorname{tg}\frac{\theta'-\theta'_3}{2}=\operatorname{tg}\omega'\quad\text{per } \alpha=\alpha_0\ ,\ \beta=\beta_0\ ,$$

ossia

$$\theta'_3=\theta'-2\omega'=-\bar{\theta}',\quad\text{per } \alpha=\alpha_0\ ,\ \beta=\beta_0.$$

Così intanto è soddisfatta *inizialmente* la prima delle (48); ma allora basta ricorrere alle (32) § 10, prendere la coniugata della prima e confrontare colla terza per dedurne che sarà altresì inizialmente $\theta'_2=-\bar{\theta}'_1$. Dunque le (48) saranno soddisfatte anche per α, β variabili.

2° caso: $\tau=\frac{\pi}{2}-i\tau'$, indi $\operatorname{sen}\tau=\cosh\tau'$, $\cos\tau=i\operatorname{senh}\tau'$. — In questo caso abbiamo

$$\operatorname{tg}\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2}=\frac{\cosh c\operatorname{senh}\tau'\operatorname{sen}[\omega'+i(\varphi'-\varphi_1)]-\operatorname{senh}c\cosh\tau'\operatorname{sen}\omega_1}{\operatorname{senh}c\cos\omega_1-\operatorname{senh}\tau'\cos[\omega'+i(\varphi'-\varphi_1)]},$$

ed eguagliando a zero la parte immaginaria, ne deduciamo la

$$(A^*) \quad \cosh c \operatorname{senh} \tau' \cosh(\varphi' - \varphi_1) = \operatorname{senh} c \left[\cosh c \cos\omega_1 \cos\omega' + \cosh \tau' \operatorname{sen}\omega_1 \operatorname{sen}\omega'\right],$$

per cui la precedente resta

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_1' - \theta_2'}{2} = \cosh c \cot \omega',$$

ovvero per la formola del teorema di permutabilità:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_2' - \theta'}{2} = \cot \omega',$$

da cui $\theta_2' - \theta' = \pi - 2\omega'$, cioè $\theta_2' = \pi - \overline{\theta}'$. Soddisfatta la (A*) inizialmente, è dunque pur soddisfatta la prima delle (48*), dopo di che, ricorrendo nuovamente alle (32) § 10, vediamo che lo stesso vale per la seconda delle (48*), e vale quindi anche in questo secondo caso la proprietà enunciata.

Riepiloghiamo i risultati ottenuti nella proposizione seguente: *Per trasformare la quaderna* $(\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ *relativa ad una deformata di 1ª specie dell'iperboloide in un'altra* $(\theta', \theta_1', \theta_2', \theta_3')$ *della medesima specie con una* B_τ, *basterà trasformare, con una* B_τ, θ *in* $\theta' = \omega' + i\varphi'$ *in guisa che siano soddisfatte le une o le altre delle condizioni seguenti:* 1° *sia* τ *reale e i valori iniziali di* ω', φ' *soddisfino la* (A); 2° *sia* $\tau = \frac{\pi}{2} - i\tau'$, *con* τ' *reale, ed i valori iniziali di* ω', φ' *soddisfino la* (A*).

§ 18.

I teoremi A) *e* B) *per le deformate di 1ª specie dell'iperboloide (con* u, v *reali).*

I risultati superiori provano che tanto nelle trasformazioni del primo gruppo come in quelle del secondo entrano due costanti arbitrarie e cioè la τ (ovvero τ') e uno dei valori iniziali di ω' o φ', l'altro deducendosene mediante la (A) o la (A*). Ed ora prendendo la quaderna (S', S_1', S_2', S_3') di superficie a curvatura costante relativa ad una delle ∞^2 quaderne trasformate $(\theta', \theta_1', \theta_2', \theta_3')$, la superficie S_0' luogo del punto d'incontro delle normali a S', S_3' formerà con S_0 le due falde focali di una congruenza W. Per le attuali deformate di 1ª specie dell'iperboloide il teorema A) della prefazione è dunque perfettamente stabilito. Non tralascieremo di osservare che nel secondo gruppo delle ∞^2 congruenze W colla prima falda focale S_0 assegnata, corrispondente alla formola (A*), è compresa la speciale congruenza W costituita dalla S_0 e dalla sua complementare $\overline{S}_0$. Essa corrisponde al caso singolare che si faccia $\tau' = c$ (od anche $\tau' = -c$) il che porta, per la (A*) stessa, che si abbia $\varphi' = \varphi_1$, $\omega' = \omega_1$, ossia $\theta' = \theta_1$, indi per le (32), essendo $\sigma = \tau$, $\theta_2' = \theta_3$ e per le (48*) $\theta_1' = \pi + \theta_1$, $\theta_3' = \pi + \theta_2$. La quaderna (S, S_1, S_2, S_3) è così trasformata nella quaderna stessa, permutata S con S_1 ed S_2 con S_3.

Veniamo in fine al teorema B) di permutabilità per le nostre trasformazioni. Cominciando da quelle del primo gruppo, corrispondenti alla formola (A) del paragrafo precedente, trasformiamo la quaderna $(\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ in altre due $(\theta', \theta'_1, \theta'_2, \theta'_3)$, $(\theta'', \theta''_1, \theta''_2, \theta''_3)$ mediante due trasformazioni $B_{\tau'}$, $B_{\tau''}$ a costanti τ', τ'' *reali e distinte* e per le quali sia soddisfatta la (A). Nelle due nuove quaderne avremo, come per la prima, che le coppie (θ', θ'_3), (θ'_1, θ'_2), (θ'', θ''_3), (θ''_1, θ''_2) saranno di funzioni coniugate opposte, cioè sussisteranno le formole

$$(\gamma) \quad \bar{\theta} = -\theta_3, \ \bar{\theta}_1 = -\theta_2 \ ; \ \bar{\theta}' = -\theta'_3, \ \bar{\theta}'_1 = -\theta'_2 \ ; \ \bar{\theta}'' = -\theta''_3, \ \bar{\theta}''_1 = -\theta''_2.$$

Ora, pei risultati del § 12, esisterà una quarta quaderna $(\theta''', \theta'''_1, \theta'''_2, \theta'''_3)$ perfettamente determinata e legata alla $(\theta', \theta'_1, \theta'_2, \theta'_3)$ da una $B_{\tau''}$, alla $(\theta'', \theta''_1, \theta''_2, \theta''_3)$ da una $B_{\tau'}$. Noi vogliamo dimostrare che: *anche in questa quarta quaderna saranno* θ''', θ'''_3 *coniugate opposte, e così* θ'''_1, θ'''_2.

E infatti, poichè $(\theta, \theta', \theta'', \theta''')$, $(\theta_3, \theta'_3, \theta''_3, \theta'''_3)$ sono due quaderne del teorema di permutabilità relative alle trasformazioni $B_{\tau'}$, $B_{\tau''}$ sussisteranno le due formole:

$$(53) \quad \operatorname{tg}\frac{\theta''' - \theta}{2} = \frac{\cos\frac{\tau' + \tau''}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\tau' - \tau''}{2}} \operatorname{tg}\frac{\theta' - \theta''}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{\theta'''_3 - \theta_3}{2} = \frac{\cos\frac{\tau' + \tau''}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\tau' - \tau''}{2}} \operatorname{tg}\frac{\theta'_3 - \theta''_3}{2}.$$

Ora se cangiamo nella prima i in $-i$, ricordando che τ', τ'' sono reali ed osservando le (γ), ne deduciamo

$$(54) \qquad \operatorname{tg}\frac{\bar{\theta}''' + \theta_3}{2} = \frac{\cos\frac{\tau' + \tau''}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\tau' - \tau''}{2}} \operatorname{tg}\frac{\theta''_3 - \theta'_3}{2},$$

la quale formola confrontata colla seconda delle (53) dà subito $\bar{\theta}''' = -\theta'''_3$. E similmente si vedrà che $\bar{\theta}'''_1 = -\theta'''_2$, c. d. d.

Per le trasformazioni del secondo gruppo si procederà in modo del tutto analogo ricordando che qui

$$\bar{\tau}' = \pi - \tau', \quad \bar{\tau}'' = \pi - \tau''$$

ed invece delle (γ) si hanno le altre

$$\bar{\theta} = -\theta_3, \quad \bar{\theta}' = \pi - \theta'_3, \quad \bar{\theta}'' = \pi - \theta''_3$$
$$\bar{\theta}_1 = -\theta_2, \quad \bar{\theta}'_1 = \pi - \theta'_2, \quad \bar{\theta}''_1 = \pi - \theta''_2.$$

Prendendo la coniugata della prima delle (53) segue ancora la (54) onde deduciamo nuovamente $\bar{\theta}''' = -\theta'''_3$, e così pure $\bar{\theta}'''_1 = -\theta'''_2$. La quarta quaderna viene dunque a trovarsi nelle medesime condizioni della prima.

A questo punto noi abbiamo così dimostrato che: *per le trasformazioni delle deformate di 1ª specie dell'iperboloide con* u, v *reali sussistono i teoremi* A) *e* B) *della prefazione.*

Avendo così minutamente discusso per questo primo caso tutti i punti della trattazione, potremo procedere più speditamente in tutti i seguenti, che comportano una trattazione analoga, e ci limiteremo quindi a rilevare i punti principali e le differenze dal primo caso esaminato.

§ 19.

Deformate di 1ª specie dell'iperboloide corrispondenti ad u, v puramente immaginari.

In questo caso poniamo

$$u = i(\alpha + \beta) \qquad v = i(\alpha - \beta)$$

e le (α), (β), (α_1), (β_1) § 14 diventeranno:

$$(\alpha') \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta_1 + \theta)}{\partial\alpha} = \dfrac{1 - \cosh c}{\operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta) \\ \dfrac{\partial(\theta_1 - \theta)}{\partial\beta} = \dfrac{1 + \cosh c}{\operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta) \end{cases} \qquad (\beta') \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta_2 + \theta)}{\partial\alpha} = \dfrac{1 + \cosh c}{\operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta) \\ \dfrac{\partial(\theta_2 - \theta)}{\partial\beta} = \dfrac{1 - \cosh c}{\operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_2 + \theta) \end{cases}$$

$$(\alpha_2') \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta_3 + \theta_2)}{\partial\alpha} = \dfrac{1 - \cosh c}{\operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_2) \\ \dfrac{\partial(\theta_3 - \theta_2)}{\partial\beta} = \dfrac{1 + \cosh c}{\operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_3 + \theta_2) \end{cases} \qquad (\beta_1') \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta_3 + \theta_1)}{\partial\alpha} = \dfrac{1 + \cosh c}{\operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_1) \\ \dfrac{\partial(\theta_3 - \theta_1)}{\partial\beta} = \dfrac{1 - \cosh c}{\operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_3 + \theta_1). \end{cases}$$

Valendo sempre le formole (40) § 13:

$$\bar\theta = \varepsilon\pi - \theta_3 \quad , \quad \bar\theta_1 = \varepsilon'\pi - \theta_2 .$$

se cangiamo nelle (α') (β') i in $-i$, dal confronto colle (α_1'), (β_1') segue questa volta

$$\varepsilon' \equiv \varepsilon + 1 \qquad (\text{mod. } 2),$$

indi $\varepsilon = 0$, $\varepsilon' = 1$, ovvero $\varepsilon = 1$, $\varepsilon' = 0$. Ma il secondo caso, per le ragioni stesse addotte al principio del § 14, non differisce sostanzialmente dal primo e possiamo quindi supporre senz'altro

$$(55) \qquad \bar\theta = -\theta_3 \quad , \quad \bar\theta_1 = \pi - \theta_2 .$$

Separando il reale dall'immaginario col porre

$$(56) \quad \theta = \omega + i\varphi \ , \ \theta_1 = \omega_1 + i\varphi_1 \ , \ \theta_2 = \pi - \omega_1 + i\varphi_1 \ , \ \theta_3 = -\omega + i\varphi ,$$

vediamo che il sistema (I), (II) del § 14 verrà ora sostituito dall'analogo seguente:

$$(\mathrm{I}_1) \qquad \cos\omega_1 \cos\omega - \cosh c \operatorname{sen}\omega_1 \operatorname{sen}\omega = 0$$

$$
(\mathrm{II}_1)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial\omega}{\partial\alpha} = \dfrac{\cos\omega}{\operatorname{senh} c \operatorname{sen}\omega_1}\cosh(\varphi_1-\varphi) \qquad \dfrac{\partial\omega_1}{\partial\alpha} = -\dfrac{\cos\omega_1}{\operatorname{senh} c \operatorname{sen}\omega}\cosh(\varphi_1-\varphi) \\[2ex]
\dfrac{\partial\omega}{\partial\beta} = -\dfrac{\cos\omega}{\operatorname{senh} c \operatorname{sen}\omega_1}\cosh(\varphi_1+\varphi) \qquad \dfrac{\partial\omega_1}{\partial\beta} = \dfrac{\cos\omega_1}{\operatorname{senh} c \operatorname{sen}\omega}\cosh(\varphi_1+\varphi) \\[2ex]
\dfrac{\partial(\varphi_1+\varphi)}{\partial\alpha} = -\operatorname{senh} c \operatorname{sen}\omega_1 \operatorname{sen}\omega \operatorname{senh}(\varphi_1-\varphi) \\[2ex]
\dfrac{\partial(\varphi_1-\varphi)}{\partial\beta} = \operatorname{senh} c \operatorname{sen}\omega_1 \operatorname{sen}\omega \operatorname{senh}(\varphi_1+\varphi),
\end{cases}
$$

la relazione (I_1) in termini finiti fra ω, ω_1 coincidendo al solito colla formola del teorema di permutabilità. Anche qui il sistema si riduce ad un'unica equazione a derivate parziali del secondo ordine per ω, e cioè alla seguente:

$$
(\mathrm{II}_1^*)\qquad \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\operatorname{sen}\omega_1}{\cos\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\right] =
$$

$$
= \operatorname{sen}\omega_1 \operatorname{sen}\omega \sqrt{\frac{\operatorname{senh}^2 c \operatorname{sen}^2\omega_1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\right)^2 - 1} \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{senh}^2 c \operatorname{sen}^2\omega_1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\right)^2 - 1}\,.
$$

Supposto inversamente che $\omega, \omega_1, \varphi, \varphi_1$ soddisfino le equazioni precedenti, per la superficie S_0 luogo del punto d'incontro delle normali a S, S_1 troviamo, applicando nuovamente le formole del § 8, i risultati seguenti. Per la prima forma quadratica fondamentale di S_0 si ha

$$
ds_0^2 = \frac{\cosh^2 c - \operatorname{senh}^2 c \cos^2\omega_1}{\cos^4\omega_1}\, d\omega_1^2 + \frac{dV^2}{\cos^2\omega_1},
$$

con dV reale, dato da

$$
dV = \frac{\cos\omega_1}{\cos\omega}\left[\operatorname{senh}(\varphi_1-\varphi)\, d\alpha - \operatorname{senh}(\varphi_1+\varphi)\, d\beta\right],
$$

indi per la seconda forma F_0:

$$
F_0 = \frac{2 \operatorname{senh} 2\varphi}{\operatorname{senh} c \operatorname{sen}\omega}\, d\alpha\, d\beta\,.
$$

Ne concludiamo, come al § 15, che la S_0 è reale ed applicabile sulla regione reale dell'iperboloide.

Per dimostrare poi anche in questo caso i teoremi A) e B) procediamo come al § 16 e seguenti e cerchiamo di trasformare, mediante una B_T, la quaderna $(\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ in una nuova $(\theta', \theta_1', \theta_2', \theta_3')$ in guisa che dalla nuova quaderna vengano soddisfatte le condizioni stesse (55) della prima

$$
\overline{\theta}' = -\theta_3' \quad , \quad \overline{\theta}_1' = \pi - \theta_2'
$$

oppure le altre egualmente ammissibili

$$
\overline{\theta}' = \pi - \theta_3' \quad , \quad \theta_1' = -\theta_2';
$$

in ambedue i casi avremo in effetto una delle cercate trasformazioni. Ora noi troviamo (cf. § 16) che nel secondo caso deve essere τ reale, nel primo invece $\tau = \frac{\pi}{2} - i\tau'$ con τ' reale. Nel caso di τ reale saranno soddisfatte tutte le condizioni richieste ponendo $\theta' = \omega' + i\varphi'$ e vincolando i valori *iniziali* di ω', φ' (per $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$) colla relazione

$$\text{(B)} \quad \cosh c \cos\tau \operatorname{senh}(\varphi' - \varphi_1) = \operatorname{senh} c\,[\cosh c \operatorname{sen}\omega_1 \cos\omega' - \operatorname{sen}\tau \cos\omega_1 \operatorname{sen}\omega'],$$

e nel caso $\tau = \frac{\pi}{2} - i\tau'$ coll'altra

$$\text{(B*)} \quad \cosh c \operatorname{senh}\tau' \cosh(\varphi' - \varphi_1) = \operatorname{senh} c\,[\cosh\tau' \cos\omega_1 \cos\omega' + \cosh c \operatorname{sen}\omega_1 \operatorname{sen}\omega'].$$

Ed ora, colle considerazioni stesse svolte al § 18, seguono nuovamente i teoremi A) B) per le deformate dell'iperboloide che ora consideriamo. Possiamo riepilogare i risultati ottenuti fin qui concludendo: *Per qualsiasi deformata di prima specie dell'iperboloide rotondo ad una falda (con sistema coniugato permanente reale) valgono i teoremi* A) *e* B) *della prefazione.*

§ 20.

Formole per le deformate di seconda specie dell'iperboloide.

Passando alle deformate di seconda specie dell'iperboloide, avremo da considerare soltanto il caso rappresentato dalle (38*) § 13, che cioè u, v siano immaginarie coniugate e noi poniamo allora

$$u = \alpha + i\beta \quad , \quad v = \alpha - i\beta,$$

dove α, β sono i parametri reali delle linee assintotiche. Dopo ciò, trasformando le (a), (b), (a_1), (b_1) § 13 in coordinate α, β ricordando che si ha $\operatorname{sen}\sigma = \cosh c$, $\cos\sigma = i \operatorname{senh} c$, otteniamo le seguenti:

$$(a') \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta_1 + \theta)}{\partial\alpha} = \dfrac{1 - \cosh c}{i \operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta) \\[2ex] \dfrac{\partial(\theta_1 - \theta)}{\partial\beta} = \dfrac{1 + \cosh c}{\operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta) \end{cases} \qquad (b') \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta_2 + \theta)}{\partial\alpha} = \dfrac{1 + \cosh c}{i \operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta) \\[2ex] \dfrac{\partial(\theta_2 - \theta)}{\partial\beta} = \dfrac{1 - \cosh c}{\operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_2 + \theta) \end{cases}$$

$$(a_1') \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta_3 + \theta_2)}{\partial\alpha} = \dfrac{1 - \cosh c}{i \operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_2) \\[2ex] \dfrac{\partial(\theta_3 - \theta_2)}{\partial\beta} = \dfrac{1 + \cosh c}{\operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_3 + \theta_2) \end{cases} \qquad (b_1') \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta_3 + \theta_1)}{\partial\alpha} = \dfrac{1 + \cosh c}{i \operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_1) \\[2ex] \dfrac{\partial(\theta_3 - \theta_1)}{\partial\beta} = \dfrac{1 - \cosh c}{\operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_3 + \theta_1). \end{cases}$$

Dalle (36) § 13, essendo attualmente $d\bar{u}^2 = dv^2$, $d\bar{v}^2 = du^2$, deduciamo

$$\cos 2\theta_3 = -\cos 2\bar{\theta} \quad , \quad \cos 2\theta_3 = -\cos 2\bar{\theta}_1,$$

da cui

$$\theta_3 = \varepsilon\pi + \frac{\pi}{2} \pm \bar{\theta} \quad , \quad \theta_2 = \varepsilon'\pi + \frac{\pi}{2} \pm \bar{\theta}_1 ,$$

avendo ε, ε' il solito significato del § 13. L'incertezza del segno nelle formole superiori si toglie, precisamente come al § 13, dalla condizione che $\operatorname{tg}\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\theta_3 - \theta}{2}$ debbono essere reali, onde si vede che valgono i segni inferiori, cioè:

$$\theta_3 = \varepsilon\pi + \frac{\pi}{2} - \bar{\theta} \quad , \quad \theta_2 = \varepsilon'\pi + \frac{\pi}{2} - \bar{\theta}_1 .$$

Ricorrendo ora alle (a'), (b') e confrontando le coniugate di queste colle (a'_1), (b'_1) troviamo $\varepsilon \equiv \varepsilon'$ (mod. 2), onde senza alterare la generalità potremo fare $\varepsilon = \varepsilon' = 0$ (cf. § 14); avremo così:

$$\theta_3 = \frac{\pi}{2} - \bar{\theta} \quad , \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \bar{\theta}_1 . \tag{57}$$

Separiamo il reale dall'immaginario ponendo:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta = \frac{\pi}{4} - \omega + i\varphi & \theta_3 = \frac{\pi}{4} + \omega + i\varphi \\ \theta_1 = \frac{\pi}{4} - \omega_1 + i\varphi_1 & \theta_2 = \frac{\pi}{4} + \omega_1 + i\varphi_1 , \end{array} \right. \tag{57*}$$

e sostituendo nelle (a'), (b') otteniamo per le funzioni incognite ω, ω_1, φ, φ_1 il sistema seguente:

$$\operatorname{sen}\omega_1 \cos\omega + \cosh c \cos\omega_1 \operatorname{sen}\omega = 0 \tag{III}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} = -\frac{\cos\omega}{\operatorname{senh} c \cos\omega_1} \operatorname{senh}(\varphi_1 - \varphi) \quad , \quad \frac{\partial\omega_1}{\partial\alpha} = -\frac{\operatorname{sen}\omega_1}{\operatorname{senh} c \operatorname{sen}\omega} \operatorname{senh}(\varphi_1 - \varphi) \\ \frac{\partial\omega}{\partial\beta} = \frac{\cos\omega}{\operatorname{senh} c \cos\omega_1} \cosh(\varphi_1 + \varphi) \quad , \quad \frac{\partial\omega_1}{\partial\beta} = \frac{\operatorname{sen}\omega_1}{\operatorname{senh} c \operatorname{sen}\omega} \cosh(\varphi_1 + \varphi) \\ \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi)}{\partial\alpha} = \operatorname{senh} c \operatorname{sen}\omega \cos\omega_1 \cosh(\varphi_1 - \varphi) , \\ \frac{\partial(\varphi_1 - \varphi)}{\partial\beta} = -\operatorname{senh} c \operatorname{sen}\omega \cos\omega_1 \operatorname{senh}(\varphi_1 + \varphi) ; \end{array} \right. \tag{IV}$$

di queste la prima relazione (III) in termini finiti fra ω, ω_1 rappresenta al solito la formola del teorema di permutabilità.

L'eliminazione di φ, φ_1, ω_1 porta anche qui ad un'unica equazione del 2° ordine per ω che si scrive:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\cos\omega_1}{\cos\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\right] = \tag{IV*}$$

$$= \operatorname{sen}\omega \cos\omega_1 \sqrt{\frac{\operatorname{senh}^2 c \cos^2\omega_1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\right)^2 + 1} \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{senh}^2 c_1 \cos^2\omega_1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\right)^2 - 1} ,$$

e dalla quale viene così a dipendere la ricerca delle deformate di 2ª specie dell'iperboloide ad una falda.

§ 21.

Verifiche e teoremi A) B) *per le deformate di 2ª specie dell'iperboloide.*

Dimostriamo ora che se $\omega, \omega_1, \varphi, \varphi_1$ soddisfano il sistema (III), (IV), la superficie S_0 luogo del punto d'incontro delle normali a S, S_1 sarà una deformata *reale* di seconda specie dell'iperboloide. Ricorriamo per ciò al solito alle formole del § 8 nelle quali è da farsi, per le (57*): $\Omega = -\omega_1$, $\Phi = \frac{\pi}{4} + i\varphi_1$. Calcolando le quantità A, B dalle (26) ibid., troviamo

$$A = -\frac{\operatorname{sen}\omega_1}{\sqrt{2}\operatorname{sen}\omega}(\cosh\varphi + i\operatorname{senh}\varphi) \quad , \quad B = \frac{\operatorname{sen}\omega_1}{\sqrt{2}\operatorname{sen}\omega}(\cosh\varphi - i\operatorname{senh}\varphi),$$

indi pel differenziale esatto dV della formola (27) ibid., espresso in coordinate α, β, abbiamo l'espressione *reale*

$$dV = \frac{\operatorname{sen}\omega_1}{\operatorname{sen}\omega}[\operatorname{senh}(\varphi_1 + \varphi)\, d\beta - \cosh(\varphi_1 - \varphi)\, d\alpha].$$

Dopo ciò le formole (28), (29) § 8 diventano:

$$ds_0^2 = \frac{\cosh^2 c - \operatorname{senh}^2 c \operatorname{sen}^2\omega_1}{\operatorname{sen}^4\omega_1} d\omega_1^2 + \frac{dV^2}{\operatorname{sen}^2\omega_1}$$

$$F_0 = \frac{2\cosh 2\varphi}{\operatorname{senh} c \operatorname{sen}\omega} d\alpha\, d\beta,$$

onde risulta appunto che la S_0 è una deformata reale (di seconda specie) dell'iperboloide (cf. § 15).

Passando alle trasformazioni di queste deformate, noi dovremo ora cercare di cangiare con una trasformazione B_τ di Bäcklund la quaderna $(\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ in un'altra $(\theta', \theta'_1, \theta'_2, \theta'_3)$ per la quale siano soddisfatte o le condizioni stesse (57)

$$(58) \qquad \theta'_3 = \frac{\pi}{2} - \bar{\theta}' \quad , \quad \theta'_2 = \frac{\pi}{2} - \bar{\theta}'_1,$$

oppure anche le altre

$$(58^*) \qquad \theta'_3 = -\frac{\pi}{2} - \bar{\theta}' \quad , \quad \theta'_2 = -\frac{\pi}{2} - \bar{\theta}'_1,$$

poichè anche in questo secondo caso sarà raggiunto pel § 20 il nostro scopo [1]. Le formole (32) del § 10 dimostrano allora, ripetendo le osservazioni al principio del § 16, che: *nel caso* (58) *la costante* τ *deve essere reale e nel caso* (58*) $\tau = \frac{\pi}{2} - i\tau'$ *con* τ' *reale.*

[1] Questo caso (58*) corrisponde invero per la seconda quaderna $(\theta', \theta'_1, \theta'_2, \theta'_3)$ a prendere nelle formole del § 20 $\varepsilon = \varepsilon' = -1$.

Ed ora, precisamente come al § 17, si dimostrerà che vengono soddisfatte tutte le condizioni richieste prendendo il valore *iniziale* di θ' in guisa che risulti reale il valore di $\operatorname{tg}\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2}$ dato dalla formola (33) § 10. Se in analogia colla prima formola (57*) per θ, poniamo

$$\theta' = \frac{\pi}{4} - \omega' + i\varphi',$$

troviamo che per τ reale la condizione iniziale richiesta si traduce nella seguente:

$$\text{(C)} \quad \cosh c \cos\tau \operatorname{senh}(\varphi'-\varphi_1) = \operatorname{senh} c\,[\cosh c \cos\omega_1 \cos\omega' - \operatorname{sen}\tau \operatorname{sen}\omega_1 \cos\omega']$$

e quando invece $\tau = \frac{\pi}{2} - i\tau'$ nell'altra:

$$\text{(C*)} \quad \cosh c \operatorname{senh}\tau' \cosh(\varphi'-\varphi_1) = \operatorname{senh} c\,[\cosh c \cos\omega_1 \cos\omega' + \cosh\tau' \operatorname{sen}\omega_1 \operatorname{sen}\omega'].$$

Anche qui adunque, come nel caso delle deformate di prima specie, le congruenze W con falde focali applicabili sull'iperboloide si ripartiscono in due gruppi distinti e per ciascuno di essi, assegnata la prima falda focale, si hanno ∞^2 congruenze della specie.

Vale dunque certamente anche nel caso delle deformate di seconda specie il teorema A). E le considerazioni stesse svolte al § 18, con lievi modificazioni, dimostrano che sussiste pure il teorema B) di permutabilità.

§ 22.

Deformate rigate dell'iperboloide e quaderna associata di superficie pseudosferiche.

Per compiere le nostre ricerche sulle trasformazioni delle superficie applicabili sull'iperboloide rotondo ad una falda altro più non resta che occuparsi delle deformate di terza specie, cioè delle deformate rigate.

Per queste ricerche complementari non potremo più valerci delle formole relative alle trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche, perchè le ordinarie formole suppongono essenzialmente distinti i due sistemi di linee di curvatura di queste superficie ed invece nel caso attuale essi coincidono, come già può prevedersi dal teorema alla fine del § 7 e come risulterà confermato dalle ricerche seguenti. Ma noi potremo fondarci più semplicemente sulla conoscenza di tutte le deformate rigate dell'iperboloide come dipendenti, secondo un teorema di Laguerre, dalle *curve di Bertrand* che sono le trasformate del circolo di gola dell'iperboloide (vol. I, pag. 270). Particolarmente dovremo ricorrere alla costruzione data da Bioche per queste rigate colla proposizione seguente: *Le deformate rigate dell'iperboloide rotondo ad una falda sono il luogo delle parallele tirate per i punti di una curva qualunque* C *di Bertrand alle binormali nei punti corrispondenti della sua curva*

coniugata $\overline{C}$ (*che ha a comune con* $\overline{C}$ *le normali principali*) (Cf. vol. II, pag. 573, Nota I).

Dovremo altresì ricordare la proprietà dimostrata al luogo ora citato delle *Lezioni*, secondo la quale la seconda deformata dell'iperboloide che si ottiene dalla costruzione di Bioche scambiando C con $\overline{C}$ è precisamente la complementare della primitiva (cf. § 1).

Ciò premesso, cominciamo dal ricercare la natura delle quattro superficie pseudosferiche che, secondo i risultati generali del § 4, formano la quaderna associata a due deformate rigate complementari S_0, $\overline{S}_0$ dell'iperboloide. Indichiamo con v l'arco della prima curva C di Bertrand, contato da un punto fisso, e ritenendo per la curva C le solite notazioni del cap. I delle *Lezioni*, indichiamo con

$$\frac{\operatorname{sen} c}{\varrho} - \frac{\cos c}{T} = \frac{1}{k} \tag{59}$$

la relazione lineare che lega le due curvature $\frac{1}{\varrho}$, $\frac{1}{T}$ di C, indicando k, c due costanti. I semiassi a, b dell'iperboloide su cui è applicabile la rigata S_0, ottenuta da C colla costruzione di Bioche (e la complementare $\overline{S}_0$ ottenuta dalla coniugata $\overline{C}$), hanno i valori

$$a = k \operatorname{sen} c \quad , \quad b = k \cos c. \tag{59*}$$

Siccome poi i coseni $\overline{\lambda}$, $\overline{\mu}$, $\overline{\nu}$ di direzione della binormale alla coniugata $\overline{C}$ di C sono dati dalle formole

$$\overline{\lambda} = \alpha \operatorname{sen} c - \lambda \cos c \quad , \quad \overline{\mu} = \beta \operatorname{sen} c - \mu \cos c \quad , \quad \overline{\nu} = \gamma \operatorname{sen} c - \nu \cos c, \tag{60}$$

se per ogni punto $M = (x, y, z)$ di C tiriamo, colla costruzione di Bioche, un segmento MM_0 nella direzione $(\overline{\lambda}, \overline{\mu}, \overline{\nu})$ e indichiamo con $u = \overline{MM_0}$ il valore algebrico di questo segmento, le coordinate x_0, y_0, z_0 dell'estremo M_0 saranno date dalle formole

$$x_0 = x + u(\alpha \operatorname{sen} c - \lambda \cos c), \text{ ecc.} \tag{61}$$

Queste formole esprimono in funzione dei due parametri u, v le coordinate del punto M_0 mobile sulla deformata rigata S_0 dell'iperboloide. Formando le derivate delle (61) rapporto ad u, v, abbiamo per le formole di Frenet:

$$\frac{\partial x_0}{\partial u} = \alpha \operatorname{sen} c - \lambda \cos c \quad , \quad \frac{\partial x_0}{\partial v} = \alpha + \frac{u}{k} \xi$$

$$ds_0^2 = du^2 + 2 \operatorname{sen} c \, du \, dv + \left(\frac{u^2}{k^2} + 1\right) dv^2 \tag{62}$$

e pei coseni di direzione della normale alla S_0:

$$X_0 = \frac{u \cos c \,.\, \alpha - k \cos c \,.\, \xi + u \operatorname{sen} c \,.\, \lambda}{\sqrt{u^2 + k^2 \cos^2 c}}, \text{ ecc.} \tag{62*}$$

Poichè u è il tratto di generatrice di S_0 dal punto M_0 fino alla trasformata C del circolo di gola, la sfera mobile col centro in M_0, l'inviluppo delle cui ∞^2 posizioni sono le due superficie pseudosferiche S, S_3 che ricerchiamo, avrà precisamente il raggio $T = u$. Se indichiamo con $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ le coordinate del punto $\dot{M}$ ove la detta sfera tocca la prima falda dell'inviluppo, dalle formole (7) del § 3 e dalle precedenti deduciamo facilmente:

$$\dot{x} = x + \frac{iku \operatorname{sen} c}{u + ik \cos c}[\cos c \,.\, \alpha - i\xi + \operatorname{sen} c \,.\, \lambda], \tag{63}$$

colle analoghe per $\dot{y}, \dot{z}$. Naturalmente cangiando in queste i in $-i$ si avrebbero le coordinate $\dot{x}_3, \dot{y}_3, \dot{z}_3$ del punto di contatto della sfera colla seconda falda S_3 dell'inviluppo. Ora dalle (63) e dalle (60) seguono le due formole

$$(\dot{x} - x)^2 + (\dot{y} - y)^2 + (\dot{z} - z)^2 = 0$$
$$\bar{\lambda}(\dot{x} - x) + \bar{\mu}(\dot{y} - y) + \bar{\nu}(\dot{z} - z) = 0;$$

queste ci dicono che le linee $v = \text{cost.}$ sulla superficie S sono rette isotrope (appoggiate al circolo immaginario all'infinito) che partono dal punto M di C e giacciono nel piano osculatore della coniugata $\bar{C}$.

Se, per abbreviare, nelle (63) al posto di $\dfrac{iku \operatorname{sen} c}{u + ik \cos c}$ scriviamo $\bar{u}$, la nostra superficie rigata isotropa S è definita dalle formole

$$\dot{x} = x + \bar{u}\,[\cos c\, \alpha - i\xi + \operatorname{sen} c \,.\, \lambda],$$

da cui derivando abbiamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \dot{x}}{\partial \bar{u}} = \cos c \,.\, \alpha - i\xi + \operatorname{sen} c \,.\, \lambda \\[2ex] \dfrac{\partial \dot{x}}{\partial v} = \left(1 + \dfrac{i\bar{u}}{\varrho}\right) . \alpha + \left(\dfrac{\cos c}{\varrho} + \dfrac{\operatorname{sen} c}{T}\right) \bar{u} . \xi + \dfrac{i\bar{u}}{T} \lambda \end{cases}$$

e pei coseni di direzione della normale $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$ alla S:

$$\dot{X} = \frac{i\bar{u}}{k} . \alpha + \left(\frac{\bar{u}}{k \cos c} - i \operatorname{tg} c\right) . \xi + \left(\frac{1}{\cos c} - \frac{i\bar{u} \operatorname{tg} c}{k}\right) . \lambda .$$

I coefficienti E, F, G ; D, D', D'' della prima e seconda forma quadratica fondamentale di S hanno per ciò i valori seguenti:

$$\begin{cases} E = 0 \;,\quad F = \cos c \;,\quad G = 1 + \dfrac{2i\bar{u}}{\varrho} + \dfrac{\bar{u}^2}{k^2} \\[2ex] D = 0 \;,\quad D' = -\dfrac{i}{k} \;,\quad D'' = \dfrac{i}{k^2 \cos c}\bar{u}^2 - \dfrac{i \operatorname{tg} c}{\varrho}, \end{cases}$$

onde segue intanto per la curvatura K di S

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{k^2 \cos^2 c} = -\frac{1}{b^2},$$

dove b per la seconda delle (59*) è appunto il semiasse immaginario dell'iperboloide. Questa è una conferma dei risultati generali al § 4; ma vi ha di più che se calcoliamo i raggi principali di curvatura r_1, r_2 troviamo

$$r_1 = r_2 = -ib.$$

Le superficie (immaginarie) S, S_2 hanno dunque, come la sfera, eguali i loro raggi principali di curvatura e le loro linee di curvatura formano un unico sistema costituito da rette isotrope: queste singolari superficie immaginarie, già incontrate dal SERRET si presentano qui come collegate alle curve di BERTRAND colla costruzione geometrica seguente:

Presa una coppia $(C, \bar{C})$ *di curve coniugate di* BERTRAND *si conduca per ogni punto di una di esse* C *e nel piano osculatore dell'altra* $\bar{C}$ *la coppia di rette isotrope. Ciascuna di queste rette genera una superficie di curvatura costante negativa, con raggi principali di curvatura eguali fra loro e linee di curvatura coincidenti nel sistema delle generatrici isotrope.*

Notiamo poi che le due superficie pseudosferiche coniugate immaginarie così ottenute sono le due falde dell'inviluppo di sfere coi centri distribuiti sulla deformata rigata S_0 dell'iperboloide ottenuta da C colla costruzione di BIOCHE, e di raggio eguale al tratto di generatrice di S_0 dal punto che si considera (centro della sfera) fino alla curva C. Le altre due superficie pseudosferiche S_1, S_2 che completano con S, S_2 la quaderna del teorema di permutabilità si ottengono colla costruzione stessa scambiando la curva C colla sua coniugata $\bar{C}$.

§ 23.

Le trasformazioni di RAZZABONI *e* DEMARTRES *delle curve di* BERTRAND.

Raggiungeremo il nostro scopo di dimostrare anche per le deformate rigate dell'iperboloide il teorema A) della prefazione, ed anzi perverremo a costruire effettivamente le ∞^2 congruenze W che hanno per prima falda focale un'assegnata deformata rigata S_0 dell'iperboloide e la seconda falda focale della medesima specie, utilizzando quelle trasformazioni delle curve di BERTRAND che furono trovate in un caso particolare dal DEMARTRES [1], indi opportunamente generalizzate dal RAZZABONI [2].

La costruzione data dal RAZZABONI per dedurre da una curva C di BERTRAND ∞^2 curve *della medesima famiglia* (cioè coi medesimi parametri c, k nella relazione (59) che vincola le curvature) è la seguente:

Indicando con σ *un angolo arbitrario costante, si conduca per ogni punto* M *della curva* C, *e nel piano osculatore della coniugata* $\bar{C}$ *un segmento* MM' *di*

(1) Comptes Rendus de l'Académie, 1888.

(2) *Un teorema del sig.* DEMARTRES *generalizzato.* Atti del Reale Istituto Veneto. Anno 1900-1901, t. LX, parte 2ª.

lunghezza costante $= k\cos\sigma$ *ed inclinato sulla normale principale di* C *di un tale angolo* $\varphi = \varphi(v)$ *da verificare l'equazione differenziale (del tipo di* Riccati*):*

$$\frac{d\varphi}{dv} = \frac{\cos c}{\varrho} + \frac{\operatorname{sen} c}{T} + \frac{\operatorname{sen} c - \cos\sigma\cos\varphi}{k(\cos c + \operatorname{sen}\sigma)}. \tag{64}$$

La curva C′ *luogo del punto* M′, *le cui coordinate* x', y', z', *sono*

$$x' = x + k\cos\sigma\,[\cos c \operatorname{sen}\varphi \,.\, \alpha + \cos\varphi \,.\, \xi + \operatorname{sen} c \operatorname{sen}\varphi \,.\, \lambda], \text{ ecc.} \tag{64*}$$

sarà una curva di Bertrand *della medesima famiglia di* C.

In questa trasformazione entrano due costanti arbitrarie, cioè la costante σ e quella proveniente dalla integrazione della (64). In particolare per $\sigma = 0$ si ha la trasformazione di Demartres, nella quale le ∞^1 trasformate C′ di C sono descritte sulla superficie canale di raggio $= k$ coll'asse curvilineo C e sono geodetiche di questa superficie, e traiettorie dei circoli sotto l'angolo costante $\frac{\pi}{2} - c$.

È indispensabile pel nostro scopo trascrivere dalla citata nota di Razzaboni le formole che danno gli elementi $\alpha', \xi', \lambda' \ldots$ della curva C′ trasformata, il cui arco indicheremo con v', corrispondenti agli elementi $\alpha, \xi, \lambda \ldots$ della primitiva C.

Ponendo

$$\Delta = 1 + \operatorname{sen}\sigma\cos c - \cos\sigma\operatorname{sen} c\cos\varphi, \tag{65}$$

si ha in primo luogo

$$\frac{dv'}{dv} = \frac{\Delta}{\cos c + \operatorname{sen}\sigma}, \tag{65*}$$

indi pei valori di α', ξ', λ' le formole seguenti:

$$\left\{\begin{aligned}
\alpha' = {} & \frac{1}{\Delta}[\cos c + \operatorname{sen}\sigma - \cos\sigma\cos\varphi(\cos c\cos\sigma\cos\varphi + \operatorname{sen} c\operatorname{sen}\sigma)] \,.\, \alpha + \\
& + \frac{1}{\Delta}\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi(\cos\sigma\cos\varphi - \operatorname{sen} c) \,.\, \xi + \cos\sigma\cos\varphi \,.\, \lambda \\
\xi' = {} & \frac{1}{\Delta}\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\,[\cos c\cos\sigma\cos\varphi + \operatorname{sen} c\operatorname{sen}\sigma] \,.\, \alpha + \\
& + \frac{1}{\Delta}[\cos\sigma\cos\varphi(\cos\sigma\cos\varphi - \operatorname{sen} c) + \operatorname{sen}\sigma(\operatorname{sen}\sigma + \cos c)] \,.\, \xi - \cos\sigma\operatorname{sen}\varphi \,.\, \lambda \\
\lambda' = {} & -\frac{1}{\Delta}\cos\sigma(\cos c\operatorname{sen}\sigma\cos\varphi - \operatorname{sen} c\cos\sigma + \cos\varphi) \,.\, \alpha + \\
& + \frac{1}{\Delta}\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi(\operatorname{sen}\sigma + \cos c) \,.\, \xi + \operatorname{sen}\sigma \,.\, \lambda.
\end{aligned}\right. \tag{66}$$

§ 24.

Il teorema A) *per le rigate applicabili sull'iperboloide.*

Ciò premesso, noi dimostreremo la proposizione seguente che dà il passaggio dalle trasformazioni di Razzaboni-Demartres delle curve di Bertrand a quelle delle rigate applicabili sull'iperboloide, conformemente al teorema A) della prefazione:

Siano C, C' *due curve di* Bertrand, *della medesima famiglia, dedotte l'una dall'altra con una trasformazione di* Razzaboni *e siano* $\overline{C}$, $\overline{C}'$ *le loro rispettive coniugate. Si considerino le due superficie rigate* S_0, S'_0 *applicabili sull'iperboloide, di cui la prima* S_0 *sia ottenuta colla costruzione di* Bioche *conducendo pei punti della* $\overline{C}$ *le parallele alle binormali nei punti corrispondenti della primitiva* C, *e la seconda* S'_0 *similmente conducendo pei punti di* C' *le parallele alle binormali di* $\overline{C}'$: *le due superficie* S_0, S'_0 *sono le due falde focali di una congruenza* W.

Per le coordinate x_0, y_0, z_0 di un punto M_0 della superficie S_0 sopra definita, indicando con u il tratto $\overline{M}\,M_0$ di generatrice, abbiamo:

$$x_0 = \overline{x} + u \,.\, \lambda = x + k \operatorname{sen} c \,.\, \xi + u \,.\, \lambda \,, \text{ ecc.} \tag{67}$$

e analogamente per le coordinate x'_0, y'_0, z'_0 di un punto M'_0 di S'_0 abbiamo:

$$x'_0 = x' + u'(\operatorname{sen} c \,.\, \alpha' - \cos c \,.\, \lambda') \,, \text{ ecc.} \tag{67*}$$

dove u' è il tratto $M'\,M'_0$ di generatrice.

Da queste formole, con semplici derivazioni, deduciamo pei coseni di direzione delle normali a S_0, S'_0 le rispettive formole

$$\left\{\begin{aligned} X_0 &= \frac{u \,.\, \alpha + k \cos c \,.\, \xi}{\sqrt{u^2 + k^2 \cos^2 c}} \,, \text{ per } S_0 \\ X'_0 &= \frac{u' \cos c \,.\, \alpha' - k \cos c \,.\, \xi' + u' \operatorname{sen} c \,.\, \lambda'}{\sqrt{u'^2 + k^2 \cos^2 c}} \text{ per } S'_0 \,. \end{aligned}\right. \tag{68}$$

Ora, servendoci delle (64*) e delle (66), possiamo porre con facili trasformazioni le differenze $x'_0 - x_0$, $y'_0 - y_0$, $z'_0 - z_0$ sotto le due forme equivalenti seguenti, esprimendole una prima volta per gli elementi α, ξ, λ di C, una seconda volta per quelli α', ξ', λ' di C'

$$\begin{aligned} x'_0 - x_0 = {} & k[\cos\sigma \cos c \operatorname{sen}\varphi \,.\, \alpha + (\cos\sigma \cos\varphi - \operatorname{sen} c) \,.\, \xi + \cos\sigma \operatorname{sen} c \operatorname{sen}\varphi \,.\, \lambda] - u\lambda + \\ & + u'[(\operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen} c + \cos\sigma \cos c \cos\varphi) \,.\, \alpha - \cos\sigma \operatorname{sen}\varphi \,.\, \xi + (\cos\sigma \operatorname{sen} c \cos\varphi - \operatorname{sen}\sigma \cos c) \,.\, \lambda] \end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned} x'_0 - x_0 = {} & k[\cos\sigma \operatorname{sen}\varphi \,.\, \alpha' + (\cos\sigma \cos\varphi - \operatorname{sen} c) \,.\, \xi'] + u'(\operatorname{sen} c \,.\, \alpha' - \cos c \,.\, \lambda') \\ & - u[\cos\sigma \cos\varphi \,.\, \alpha' - \cos\sigma \operatorname{sen}\varphi \,.\, \xi' + \operatorname{sen}\sigma \,.\, \lambda'] \,. \end{aligned} \tag{69*}$$

Dopo ciò, cerchiamo di determinare u' in funzione di u, v in guisa che sussistano insieme le due relazioni

$$\left\{\begin{aligned} & X_0(x'_0 - x_0) + Y_0(y'_0 - y_0) + Z_0(z'_0 - z_0) = 0 \\ & X'_0(x'_0 - x_0) + Y'_0(y'_0 - y_0) + Z'_0(z'_0 - z_0) = 0 \,. \end{aligned}\right. \tag{70}$$

Se per calcolare la prima di queste adoperiamo le (69) e per la seconda le (69*), troviamo che esse coincidono nella seguente relazione bilineare fra u, u' (con coefficienti funzioni di v):

$$\begin{aligned} & (\operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen} c + \cos\sigma \cos c \cos\varphi)\, u u' + k \cos\sigma \cos c \operatorname{sen}\varphi\,(u - u') + \\ & + k^2 \cos c(\cos\sigma \cos\varphi - \operatorname{sen} c) = 0 \,. \end{aligned} \tag{71}$$

Questa formola (71) stabilisce una tale corrispondenza di punto a punto fra le due superficie S_0, S'_0 che ne risultano soddisfatte le (70) e per ciò il segmento $M_0 M'_0$ che unisce due punti corrispondenti M_0, M'_0 tocca in M_0 la S_0, in M'_0 la S'_0; dunque S_0, S'_0 sono le due falde focali di una medesima congruenza. In fine noi dimostriamo che questa è una congruenza W semplicemente osservando che già alle generatrici $v =$ cost. di S_0 corrispondono le generatrici $v' =$ cost. di S'_0 (¹).

Così è stabilita la proposizione enunciata, dalla quale, applicando alla curva iniziale C di Bertrand le ∞^2 trasformazioni di Razzaboni, segue che il teorema A) vale ancora per le deformate rigate dell'iperboloide. Sarebbe poi facile dedurre dalle nostre formole che la nuova quaderna (S', S'_1, S'_2, S'_3) associata alla S'_0, formata di quattro superficie pseudosferiche rigate isotrope, è legata alla primitiva da una trasformazione di Bäcklund. Insomma si viene così a constatare che anche le particolari superficie pseudosferiche immaginarie a linee di curvatura coincidenti ammettono trasformazioni di Bäcklund, e precisamente: *Le trasformazioni di Bäcklund di queste superficie pseudosferiche rigate isotrope corrispondono alle trasformazioni di Razzaboni delle curve di Bertrand.*

Dopo ciò è facile intendere che non solo il teorema A) ma anche il teorema B) di permutabilità vale per le trasformazioni delle rigate applicabili sopra l'iperboloide. Ma di questa come di molte altre questioni, che nascono spontaneamente dalle cose esposte, non vogliamo qui indugiare a trattare e soltanto osserveremo che al detto teorema B) corrisponde *un teorema di permutabilità per le trasformazioni delle curve di Bertrand*, teorema che sarebbe facile stabilire direttamente.

In fine notiamo che i risultati ottenuti nel presente paragrafo conservano la loro validità nel caso particolare che le curve di Bertrand si riducano a curve di *torsione costante*, annullandosi la costante c nella formola (59). Vale quindi per le deformate rigate del catenoide ordinario (o dell'elicoide rigata ad area minima) il teorema A):

Ogni rigata applicabile sul catenoide appartiene come prima falda focale ad ∞^2 congruenze rettilinee W *la cui seconda focale è una rigata della medesima specie.* Così viene anche completata l'osservazione già fatta al § 11 per le deformate *non rigate* del catenoide stesso.

§ 25.

Superficie applicabili sulla regione ideale dell'iperboloide.

Esaurita così la trattazione della nostra teoria per le deformate della regione reale dell'iperboloide, volgiamoci al caso seguente, il caso A_2) della tabella al § 7, delle superficie *reali* applicabili sulla regione ideale dell'iperboloide. Dobbiamo per

(¹) Si ha infatti in generale: Affinchè una congruenza rettilinea sia W basta che sulle due falde focali si corrispondano le assintotiche *di un sistema*. La dimostrazione è semplicissima, perchè in questa ipotesi vi sono *due* diversi sistemi coniugati che si corrispondono sulle due falde e cioè: 1° quelli intercettati dalle sviluppabili della congruenza, 2° quelli a linee coincidenti, rappresentati dalle assintotiche del detto sistema. Dunque tutti i sistemi coniugati si corrispondono e in particolare le assintotiche del secondo sistema.

ciò riprendere la discussione sviluppata nel § 13 e seguenti, colla modificazione però che nel caso attuale la quantità

$$T = \cosh c \cot \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = \cot \frac{\theta_3 - \theta}{2}$$

deve essere puramente immaginaria, anzichè reale. Come al § 13, si presentano dapprima come possibili i casi (37) e (37*):

$$\bar{u} = \pm u \quad , \quad \bar{v} = \pm v \tag{72}$$

$$\bar{u} = v \quad , \quad \bar{v} = u . \tag{73}$$

Colle (72) valgono necessariamente le (39) § 13

$$\theta_3 = \varepsilon\pi \pm \bar{\theta} \quad , \quad \theta_2 = \varepsilon'\pi \pm \bar{\theta}_1 ;$$

ma ora la condizione che $\operatorname{tg} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\theta_3 - \theta}{2}$ siano puramente immaginarie porta che invece degli inferiori, come al § 13, valgano i segni superiori:

$$\theta_3 = \varepsilon\pi + \bar{\theta} \quad , \quad \theta_2 = \varepsilon'\pi + \bar{\theta}_1 . \tag{74}$$

Dopo ciò, ricorrendo ancora alle formole (a), (b), (a_1), (b_1) di quel paragrafo, si vede che le (72) si scindono nei due casi

$$\bar{u} = u \quad , \quad \bar{v} = v \tag{72'}$$

$$\bar{u} = -u \quad , \quad \bar{v} = -v . \tag{72''}$$

Ma il caso (72') deve essere escluso perchè le considerazioni stesse fatte al principio del § 14 dimostrerebbero doversi supporre $\varepsilon = \varepsilon'$ (mod. 2) nelle (74) e la formola (28) § 8 pel ds_0^2 di S_0 assegnerebbe a questo ds_0^2 il primo termine negativo, ciò che è incompatibile colla realità della S_0. Egualmente si esclude il caso (73) di u, v coniugati immaginarî perchè le considerazioni al principio del § 20 darebbero nuovamente le formole

$$\theta_3 = \varepsilon\pi + \frac{\pi}{2} \pm \bar{\theta} \quad , \quad \theta_2 = \varepsilon'\pi + \frac{\pi}{2} \pm \bar{\theta}_1 ,$$

e $\operatorname{tg} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\theta_3 - \theta}{2}$ non potrebbero essere puramente immaginarie.

Resta dunque possibile il solo caso (72'') di u, v puramente immaginarî; poniamo nuovamente

$$u = i(\alpha + \beta) \quad , \quad v = i(\alpha - \beta) .$$

Procedendo come al § 19 ne deduciamo

$$\bar{\theta} = \varepsilon\pi + \theta_3 \quad , \quad \bar{\theta}_1 = \varepsilon'\pi + \theta_2 \tag{75}$$

con $\varepsilon = \varepsilon' + 1$ (mod. 2), onde potremo fare

$$\theta_2 = \pi + \bar{\theta}_1 \quad , \quad \theta_3 = \bar{\theta} \tag{75*}$$

oppure

$$\theta_2 = \bar{\theta}_1 \quad , \quad \theta_3 = \pi + \bar{\theta} .$$

Questo secondo caso non differisce però dal primo (cfr. § 14) e noi faremo quindi:

$$(76) \qquad \theta = \omega + i\varphi \ , \ \theta_1 = \omega_1 + i\varphi_1 \ , \ \theta_2 = \pi + \omega_1 - i\varphi_1 \ , \ \theta_3 = \omega - i\varphi \ ,$$

Separando nelle (α'), (β') § 19 il reale dall'immaginario, troviamo per le nostre funzioni incognite il sistema di equazioni seguenti:

$$(V) \qquad \cosh\varphi \cosh\varphi_1 + \cosh c \operatorname{senh}\varphi \operatorname{senh}\varphi_1 = 0$$

$$(VI) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = -\dfrac{\cosh\varphi}{\operatorname{senh} c \operatorname{senh}\varphi_1}\cos(\omega_1 - \omega) \ , \quad \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha} = \dfrac{\cosh\varphi_1}{\operatorname{senh} c \operatorname{senh}\varphi}\cos(\omega_1 - \omega) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\beta} = \dfrac{\cosh\varphi}{\operatorname{senh} c \operatorname{senh}\varphi_1}\cos(\omega_1 + \omega) \ , \quad \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\beta} = -\dfrac{\cosh\varphi_1}{\operatorname{senh} c \operatorname{senh}\varphi}\cos(\omega_1 + \omega) \\ \dfrac{\partial(\omega_1 + \omega)}{\partial\alpha} = \operatorname{senh} c \operatorname{senh}\varphi \operatorname{senh}\varphi_1 \operatorname{sen}(\omega_1 - \omega) \ , \\ \dfrac{\partial(\omega_1 - \omega)}{\partial\beta} = -\operatorname{senh} c \operatorname{senh}\varphi \operatorname{senh}\varphi_1 \operatorname{sen}(\omega_1 + \omega) \ , \end{cases}$$

delle quali la (V), in termini finiti fra φ, φ_1, è la formola del teorema di permutabilità.

L'intero sistema equivale anche qui ad un'unica equazione del 2° ordine per la funzione φ, che si scrive:

$$(VI^*) \qquad \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\operatorname{senh}\varphi_1}{\cosh\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right] +$$

$$+ \operatorname{senh}\varphi \operatorname{senh}\varphi_1 \sqrt{1 - \frac{\operatorname{senh}^2 c \operatorname{senh}^2\varphi_1}{\cosh^2\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{\operatorname{senh}^2 c \operatorname{senh}^2\varphi_1}{\cosh^2\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2} = 0,$$

dove φ_1 si esprime per φ colla (V).

§ 26.

Verifiche e teoremi A) *e* B) *per queste deformate.*

Supposto inversamente che ω, ω_1, φ, φ_1 soddisfino le equazioni precedenti, dalle solite formole del § 8 deduciamo che la superficie S_0, luogo del punto d'incontro delle normali a S, S_2, ha l'elemento lineare:

$$ds_0^2 = \frac{\operatorname{senh}^2 c \cosh^2\varphi_1 - \cosh^2 c}{\cosh^4\varphi_1} d\varphi_1^2 + \frac{dV^2}{\cosh^2\varphi_1} \ ,$$

ove dV è reale, dato da:

$$dV = \frac{\cosh\varphi_1}{\operatorname{senh}\varphi}\left[\operatorname{sen}(\omega_1 - \omega)\, d\alpha + \operatorname{sen}(\omega_1 + \omega)\, d\beta\right].$$

Per la seconda forma quadratica fondamentale F_0 di S_0 si ha poi

$$F_0 = \frac{2 \operatorname{sen} 2\omega}{\operatorname{senh} c \operatorname{senh} \varphi} d\alpha \, d\beta .$$

Ora se poniamo

$$r = \frac{\operatorname{senh} c}{\cosh \varphi_1} \quad , \quad V = \operatorname{senh} c \, . \, v_1 ,$$

il ds_0^2 diventa

$$ds_0^2 = \frac{\operatorname{senh}^4 c - \cosh^2 c \, . \, r^2}{\operatorname{senh}^2 c (\operatorname{senh}^2 c - r^2)} dr^2 + r^2 dv_1^2$$

ed appartiene all'iperboloide rotondo ad una falda coi semiassi

$$a = \operatorname{senh} c \quad , \quad b = 1 ;$$

però siccome dalla relazione (V) fra φ, φ_1 segue $\coth^2 \varphi_1 < \cosh^2 c$, indi

$$r^2 < \frac{\operatorname{senh}^4 c}{\cosh^2 c} < \operatorname{senh}^2 c ,$$

è la regione ideale dell'iperboloide di cui qui si tratta. In fine, poichè anche F_0 è reale, la superficie S_0 è reale ed applicabile sull'iperboloide al di là dei limiti.

Veniamo alla esistenza delle ∞^3 trasformazioni per questa classe di superficie applicabili S_0. Si tratta per ciò di cangiare mediante una B_τ la quaderna primitiva $(\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ in un'altra $(\theta', \theta_1', \theta_2', \theta_3')$ per la quale, o siano soddisfatte le condizioni stesse (75*):

(77) $$\theta_2' = \pi + \bar{\theta}_1' \quad , \quad \theta_3' = \bar{\theta}' ,$$

oppure anche le altre

(77*) $$\theta_2' = \bar{\theta}_1' \quad , \quad \theta_3' = \pi + \bar{\theta}' .$$

Nel solito modo, deduciamo dalle (32) § 10 che τ deve essere reale nel secondo caso, mentre nel primo può supporsi $\tau = \frac{\pi}{2} - i\tau'$ (τ' reale). Viceversa se ponendo $\theta' = \omega' + i\varphi'$, assoggettiamo i valori iniziali di ω', φ' a soddisfare alla condizione

(D) $$\cosh c \cos \tau \operatorname{sen}(\omega' - \omega_1) =$$
$$= \operatorname{senh} c \left[\operatorname{sen} \tau \cosh \varphi_1 \operatorname{senh} \varphi' - \cosh c \operatorname{senh} \varphi_1 \cosh \varphi' \right] , \quad \textit{per } \tau \textit{ reale}$$

e invece all'altra:

(D*) $$\cosh c \operatorname{senh} \tau' \cos(\omega' - \omega_1) =$$
$$= \operatorname{senh} c \left[\cosh \tau' \cosh \varphi_1 \cosh \varphi' - \cosh c \operatorname{senh} \varphi_1 \operatorname{senh} \varphi' \right] , \quad \textit{per } \tau = \frac{\pi}{2} - i\tau'$$

la nuova quaderna $(\theta', \theta_1', \theta_2', \theta_3')$ verrà in effetto a soddisfare a tutte le condizioni richieste. La superficie S_0', luogo del punto d'incontro delle normali a S', S_1', sarà quindi applicabile sopra S_0 e con questa darà le due falde focali di una congruenza W.

In ciascuno dei due gruppi di trasformazioni (77), (77*) entrano così due costanti arbitrarie ed abbiamo per ciò anche in questo caso il teorema A).

In fine dalle formole (53) § 18 si stabilirà, nel solito modo, il teorema B) di permutabilità.

§ 27.

Le deformate dell'ellissoide immaginario (3° tipo).

Secondo l'ordine stabilito nella tabella al § 7, andiamo ora ad occuparci dell'ultimo caso, ivi segnato (B), in cui la quaderna (S, S_1, S_2, S_3) associata alla deformata S_0 della quadrica rotonda è costituita ancora di superficie a curvatura costante negativa. È questo il caso delle superficie (reali) del terzo tipo e_2') al § 1 applicabili sull'ellissoide immaginario; degli altri due tipi, egualmente applicabili sull'ellissoide immaginario, rappresentati dal catenoide accorciato e dal sinusoide iperbolico, ci siamo già occupati ai §§ 11, 12 dimostrando per essi i teoremi A), B). Vedremo ora che le stesse proprietà si mantengono ancora pel terzo tipo.

Facciamo ancora qui $=1$ il semiasse b dell'ellissoide, sicchè le superficie S, S_1, S_2, S_3 della quaderna associata ad S_0 saranno pseudosferiche di raggio $R=1$, ed il lato d della losanga avrà il valore reale e minore dell'unità (tabella § 7):

$$d = a < b < 1.$$

Qui adunque la costante σ delle due trasformazioni di Bäcklund B_σ, $B_{-\sigma}$ relative alla quaderna (S, S_1, S_2, S_3) *sarà reale*.

È facile a vedersi che ora le deformate S_0 da considerarsi saranno tutte di prima specie, cioè il sistema coniugato di S_0 corrispondente ad un sistema coniugato sull'ellissoide immaginario Q sarà necessariamente reale. Se infatti indichiamo con $D_0 du^2 + 2D_0' du\,dv + D_0'' dv^2$, $D du^2 + 2D' du\,dv + D'' dv^2$ le due seconde forme quadratiche fondamentali appartenenti alle superficie S_0 e Q in coordinate *reali* qualunque u, v, abbiamo che D_0, D_0', D_0'' sono reali ed invece D, D', D'' puramente immaginarî con $DD'' - D'^2 < 0$. Per ciò la forma quadratica $\frac{1}{i}(D du^2 + 2D' du\,dv + D'' dv^2)$ è reale definita ed in conseguenza sono reali e distinte le linee integrali dell'equazione differenziale

$$\begin{vmatrix} D_0 du + D_0' dv & , & D_0' du + D_0'' dv \\ i(D du + D' dv) & , & i(D' du + D'' dv) \end{vmatrix} = 0,$$

che danno appunto il sistema coniugato permanente.

Riprendendo dopo ciò le considerazioni del § 13, vediamo che i parametri u, v delle linee di curvatura delle superficie S, S_1, S_2, S_3 potranno essere o reali o puramente immaginarî. Questo secondo caso va però escluso perchè dagli sviluppi stessi che ora daremo per il primo ne seguirebbe immaginaria la S_0, trovandosi negativo il primo termine del ds_0^2 nella (28) § 8.

Resta dunque soltanto il primo caso: $\bar{u} = u$, $\bar{v} = v$ e noi, introducendo al solito i parametri reali α, β delle linee assintotiche, porremo

$$u = \alpha + \beta \quad , \quad v = \alpha - \beta .$$

Le formole della trasformazione di Bäcklund danno quindi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\theta_1 + \theta)}{\partial\alpha} = \dfrac{1 - \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta) \\ \dfrac{\partial(\theta_1 - \theta)}{\partial\beta} = \dfrac{1 + \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta_2 + \theta)}{\partial\alpha} = \dfrac{1 + \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta) \\ \dfrac{\partial(\theta_2 - \theta)}{\partial\beta} = \dfrac{1 - \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} \operatorname{sen}(\theta_2 + \theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\theta_3 + \theta_2)}{\partial\alpha} = \dfrac{1 - \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_2) \\ \dfrac{\partial(\theta_3 - \theta_2)}{\partial\beta} = \dfrac{1 + \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} \operatorname{sen}(\theta_3 + \theta_2) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta_3 + \theta_1)}{\partial\alpha} = \dfrac{1 + \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_1) \\ \dfrac{\partial(\theta_3 - \theta_1)}{\partial\beta} = \dfrac{1 - \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} \operatorname{sen}(\theta_3 + \theta_1), \end{cases}$$

dove è da ricordarsi che σ è reale.

Per le considerazioni stesse del § 13, valgono ora le formole (39)

$$\theta_3 = \varepsilon\pi \pm \bar{\theta} \quad , \quad \theta_2 = \varepsilon'\pi \pm \bar{\theta}_1 ; \tag{78}$$

ma attualmente il raggio T della sfera:

$$T = \operatorname{sen}\sigma \cot\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = \cot\frac{\theta_3 - \theta}{2}$$

deve essere puramente immaginario, indi puramente immaginarie $\operatorname{tg}\dfrac{\theta_1 - \theta_2}{2}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\theta_3 - \theta}{2}$. Questo porta che nelle (78) valgono i segni superiori; di più perchè le coniugate delle (c), (d) siano le (c_1), (d_1) occorre che si abbia $\varepsilon = \varepsilon' + 1$ (mod. 2), quindi $\varepsilon = 1$, $\varepsilon' = 0$, oppure $\varepsilon = 0$, $\varepsilon' = 1$. Il secondo caso però non differisce dal primo che per cangiamento di notazione (cfr. § 14) e possiamo supporre per ciò

$$\theta_2 = \bar{\theta}_1 \quad , \quad \theta_3 = \pi + \bar{\theta} . \tag{79}$$

Poniamo dunque

$$\theta = \omega + i\varphi \ , \ \theta_1 = \omega_1 - i\varphi_1 \ , \ \theta_2 = \omega_1 - i\varphi_1 \ , \ \theta_3 = \pi + \omega - i\varphi \tag{80}$$

e sostituendo nelle (c) (d) col separare il reale dall'immaginario, ne dedurremo per le funzioni incognite ω, ω_1, φ, φ_1 il sistema seguente:

$$\operatorname{senh}\varphi_1 \operatorname{senh}\varphi + \operatorname{sen}\sigma \cosh\varphi_1 \cosh\varphi = 0 \tag{VII}$$

$$\text{(VIII)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = -\dfrac{\operatorname{senh}\varphi}{\cos\sigma \cosh\varphi_1} \cos(\omega_1 - \omega) \quad , \quad \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha} = \dfrac{\operatorname{senh}\varphi_1}{\cos\sigma \cosh\varphi} \cos(\omega_1 - \omega) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\beta} = -\dfrac{\operatorname{senh}\varphi}{\cos\sigma \cosh\varphi_1} \cos(\omega_1 + \omega) \quad , \quad \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\beta} = \dfrac{\operatorname{senh}\varphi_1}{\cos\sigma \cosh\varphi} \cos(\omega_1 + \omega) \\ \dfrac{\partial(\omega_1 + \omega)}{\partial\alpha} = \cos\sigma \cosh\varphi \cosh\varphi_1 \operatorname{sen}(\omega_1 - \omega) , \\ \dfrac{\partial(\omega_1 - \omega)}{\partial\beta} = \cos\sigma \cosh\varphi \cosh\varphi_1 \operatorname{sen}(\omega_1 + \omega) , \end{cases}$$

delle quali equazioni la prima coincide al solito colla formola del teorema di permutabilità. L'eliminazione di ω, ω_1 da questo sistema porta all'equazione di 2° ordine per la funzione φ:

$$\text{(VIII*)} \qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\cosh\varphi_1}{\operatorname{senh}\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right] =$$

$$= \cosh\varphi\cosh\varphi_1\sqrt{1-\frac{\cos^2\sigma\cosh^2\varphi_1}{\operatorname{senh}^2\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\frac{\cos^2\sigma\cosh^2\varphi_1}{\operatorname{senh}^2\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2},$$

intendendo φ_1 espresso per φ colla (VII).

§ 28.

Verifiche e teoremi A) *e* B) *per queste deformate.*

Supponiamo inversamente che ω, ω_1, φ, φ_1 soddisfino il sistema (VII), (VIII), e dimostriamo che la corrispondente superficie S_0 sarà una deformata reale dell'ellissoide immaginario (3° tipo). Applicando le formole del § 8, dobbiamo porre in queste, a causa delle (80):

$$\Omega = i\varphi_1 \quad , \quad \Phi = \omega_1 ,$$

onde le quantità A, B [(26) § 8], tenendo conto della (VII), diventano

$$A = i\cos\omega\frac{\operatorname{senh}\varphi_1}{\cosh\varphi} \quad , \quad B = i\operatorname{sen}\omega\frac{\operatorname{senh}\varphi_1}{\cosh\varphi} ;$$

e ne segue

$$\sqrt{A^2+B^2} = i\frac{\operatorname{senh}\varphi_1}{\cosh\varphi} .$$

Pel differenziale esatto dV la (27) § 8 dà il valore puramente immaginario

$$dV = \frac{i\operatorname{senh}\varphi_1}{\cosh\varphi}[\cos\omega\operatorname{sen}\omega_1\,du - \operatorname{sen}\omega\cos\omega_1\,dv],$$

e ponendo $V = iv_1$ sarà v_1 reale e le (28), (29) ibid. ci danno

$$\text{(81)} \qquad ds_0^2 = \frac{\cos^2\sigma\operatorname{senh}^2\varphi_1 - \operatorname{sen}^2\sigma}{\operatorname{senh}^4\varphi_1}d\varphi_1^2 + \frac{dv_1^2}{\operatorname{senh}^2\varphi_1}$$

$$\text{(82)} \qquad F_0 = \frac{\operatorname{sen}\omega\cos\omega}{\cos\sigma\cosh\varphi}(du^2 - dv^2).$$

Ora, a causa delle (VII) è

$$\coth^2\varphi_1 < \frac{1}{\operatorname{sen}^2\sigma} , \text{ o } \operatorname{senh}^2\varphi_1 > \operatorname{tg}^2\sigma ;$$

per ciò la (81) è una forma quadratica definita positiva. Se poniamo

$$r = \frac{\cos\sigma}{\operatorname{senh}\varphi_1}.$$

la (81) diventa

$$ds_0^2 = \frac{\cos^4\sigma - \operatorname{sen}^2\sigma\, r^2}{\cos^2\sigma(\cos^2\sigma + r^2)}\, dr^2 + \frac{r^2}{\cos^2\sigma}\, dv_1^2$$

ed appartiene appunto (cfr. § 1) all'ellissoide immaginario con $a = \cos\sigma$, $b = 1$; di più, essendo $r^2 < \frac{\cos^4\sigma}{\operatorname{sen}^2\sigma}$, si tratta del 3° tipo. In fine l'essere reale la F_0 per la (82) assicura che la deformata S_0 dell'ellissoide immaginario è reale.

Per trovare le trasformazioni dobbiamo cercare al solito di trasformare con una B_τ la quaderna $(\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ in un'altra $(\theta', \theta_1', \theta_2', \theta_3')$ della medesima specie, per la quale si dovranno quindi verificare, o le (79) stesse:

$$\theta_2' = \overline{\theta}_1' \quad , \quad \theta_3' = \pi + \overline{\theta}', \tag{83}$$

oppure le altre

$$\theta_2' = \pi + \overline{\theta}_1' \quad , \quad \theta_3' = \overline{\theta}'. \tag{83*}$$

Tenendo presenti le (32) § 10 e le $(\overline{\alpha})$, $(\overline{\beta})$, $(\overline{\alpha}_1)$, $(\overline{\beta}_1)$ § 16, troveremo anche qui che nel caso (83) deve essere τ reale, nel caso (83*) avremo $\tau = \frac{\pi}{2} - i\tau'$ (τ' reale). E, col solito metodo dei §§ 16, 17, vediamo che posto $\theta' = \omega' + i\varphi'$ basta legare i valori *iniziali* di ω', φ' colla relazione esprimente che è nulla la parte reale di $\operatorname{tg}\frac{\theta_1' - \theta_2'}{2}$ per soddisfare a tutte le condizioni volute. L'indicata relazione si scrive:

$$\begin{aligned} &\operatorname{sen}\sigma\cos\tau\cos(\omega' - \omega_1) = \\ &= \cos\sigma\,[\operatorname{sen}\sigma\cosh\varphi_1\cosh\varphi' - \operatorname{sen}\tau\operatorname{senh}\varphi_1\operatorname{senh}\varphi'], \ \textit{per } \tau \textit{ reale}; \end{aligned} \tag{E}$$

$$\begin{aligned} &\operatorname{sen}\sigma\operatorname{senh}\tau'\operatorname{sen}(\omega' - \omega_1) = \\ &= \cos\sigma\,[\cosh\tau'\operatorname{senh}\varphi_1\cosh\varphi' - \operatorname{sen}\sigma\cosh\varphi_1\operatorname{senh}\varphi'], \ \textit{per } \tau = \frac{\pi}{2} - i\tau'. \end{aligned} \tag{E*}$$

Così è dimostrato che vale per l'uno e per l'altro gruppo di trasformazioni il teorema A).

Medesimamente, ripetendo con leggiere modificazioni quanto è esposto alla fine del § 18, si dimostra il teorema B) di permutabilità.

§ 29.

Composizione di due trasformazioni opposte di Bäcklund per le superficie a curvatura costante positiva.

Ormai non ci resta che l'ultimo caso della tabella al § 7 da trattare, quello dell'ellissoide schiacciato. E poichè le superficie S, S_1, S_2, S_3 della quaderna associata ad una deformata S_0 dell'ellissoide sono a curvatura costante positiva, e pei

risultati al § 402 delle *Lezioni*, le due relative trasformazioni di Bäcklund possono supporsi a costanti eguali ed opposte, sarà opportuno che sviluppiamo un sistema di formole, corrispondenti a quelle del § 8, pel caso attuale di K positiva.

Sia S una superficie, reale od immaginaria, di curvatura costante positiva $K = \frac{1}{R^2}$, che, riferita alle linee di curvatura u, v abbia l'elemento lineare (vol. II, § 399)

$$ds^2 = R^2(\operatorname{senh}^2\theta\, du^2 + \cosh^2\theta\, dv^2)$$

ed i raggi principali di curvatura

$$r_1 = R \coth\theta \quad , \quad r_2 = R \operatorname{tgh}\theta ;$$

riteniamo poi tutte le altre notazioni del § 399 delle *Lezioni*.

Siano ora S_1, S_2 due nuove superficie di curvatura $K = \frac{1}{R^2}$ derivate da S con due trasformazioni di Bäcklund $B_\sigma, B_{-\sigma}$ a costanti σ opposte, e indichiamo con

$$ds_1^2 = R^2(\operatorname{senh}^2\theta_1\, du^2 + \cosh^2\theta_1\, dv^2) \quad , \quad ds_2^2 = R^2(\operatorname{senh}^2\theta_2\, du^2 + \cosh^2\theta_2\, dv^2)$$

i loro rispettivi elementi lineari. La quarta superficie S_3 del teorema di permutabilità dopo S, S_1, S_2 avrà l'elemento lineare

$$ds_3^2 = R^2(\operatorname{senh}^2\theta_3\, du^2 + \cosh^2\theta_3\, dv^2),$$

dove θ_3 è determinata dalla formola (vol. II, pag. 458)

$$\operatorname{tgh}\frac{\theta_3 - \theta}{2} = \operatorname{tgh}\sigma \coth\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} . \tag{84}$$

Le funzioni $\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ saranno poi legate fra loro dalle corrispondenti formole della trasformazione di Bäcklund (vol. II, pag. 454, formole (B)):

$$(e) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_1}{\partial u} + i\dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \operatorname{senh}\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1 + \cosh\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1 \\ i\dfrac{\partial\theta_1}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\cosh\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1 - \operatorname{senh}\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1 \end{cases}$$

$$(f) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_2}{\partial u} + i\dfrac{\partial\theta}{\partial v} = -\operatorname{senh}\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_2 + \cosh\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_2 \\ i\dfrac{\partial\theta_2}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\cosh\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_2 + \operatorname{senh}\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_2 \end{cases}$$

$$(e_1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_2}{\partial u} + i\dfrac{\partial\theta_3}{\partial v} = \operatorname{senh}\sigma\cosh\theta_3\operatorname{senh}\theta_2 + \cosh\sigma\operatorname{senh}\theta_3\cosh\theta_2 \\ i\dfrac{\partial\theta_2}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta_3}{\partial u} = -\cosh\sigma\cosh\theta_3\operatorname{senh}\theta_2 - \operatorname{senh}\sigma\operatorname{senh}\theta_3\cosh\theta_2 \end{cases}$$

$$(f_1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_1}{\partial u} + i\dfrac{\partial\theta_3}{\partial v} = -\operatorname{senh}\sigma\cosh\theta_3\operatorname{senh}\theta_1 + \cosh\sigma\operatorname{senh}\theta_3\cosh\theta_1 \\ i\dfrac{\partial\theta_1}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta_3}{\partial u} = -\cosh\sigma\cosh\theta_3\operatorname{senh}\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma\operatorname{senh}\theta_3\cosh\theta_1 . \end{cases}$$

Ora le normali alle S, S_1 in punti corrispondenti M, M_1 si incontrano in un punto M_0 che descrive una superficie S_0 applicabile sopra una quadrica rotonda Q Il valore (algebrico) del segmento $\overline{MM_0} = T$ è dato da

$$T = R \operatorname{tgh} \sigma \coth \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = R \operatorname{tgh} \frac{\theta_2 - \theta}{2}, \tag{85}$$

e le coordinate x_0, y_0, z_0 di M_0 sono quindi:

$$x_0 = x + R \operatorname{tgh} \sigma \coth \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} X_3, \text{ ecc.}$$

Ora, se poniamo

$$\Omega = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}, \quad \Phi = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2i} \tag{86}$$

$$\begin{cases} A = \operatorname{senh} \sigma \operatorname{senh} \theta \cosh \Omega + \cosh \sigma \cosh \theta \operatorname{senh} \Omega \\ B = \operatorname{senh} \sigma \cosh \theta \cosh \Omega + \cosh \sigma \operatorname{senh} \theta \operatorname{senh} \Omega, \end{cases} \tag{87}$$

dalle formole sviluppate al § 403 delle *Lezioni* (vol. II, pag. 463) risulta che l'elemento lineare ds_0 della S_0 è dato dalla formola:

$$ds_0^2 = \frac{\operatorname{senh}^2 \sigma - \operatorname{senh}^2 \Omega}{\cosh^2 \sigma \operatorname{senh}^4 \Omega} d\Omega^2 + \frac{dV^2}{\cosh^2 \sigma \operatorname{senh}^2 \Omega}, \tag{88}$$

dove dV è il differenziale esatto

$$dV = B \cos \Phi \, du - A \operatorname{sen} \Phi \, dv. \tag{89}$$

Per la seconda forma quadratica fondamentale F_0 di S_0 troviamo poi

$$F_0 = \frac{RAB}{\operatorname{senh} \Omega \sqrt{A^2 + B^2}} (du^2 + dv^2). \tag{90}$$

In fine ricordiamo che il valore d del lato della solita losanga è dato qui dalla formola

$$d = \frac{i}{\cosh \sigma} \tag{91}$$

§ 30.

Le deformate dell'ellissoide schiacciato corrispondenti ad u, v reali.

Supponiamo ora che la superficie S_0 sia applicabile sull'ellissoide rotondo schiacciato di semiassi a, b e facciamo per semplicità $b = 1$, talchè sarà $a > 1$, e le superficie S, S_1, S_2, S_3 della quaderna associata ad S_0 avranno la curvatura $K = +1$.

Dalla formola (91), confrontata colla $d = ia$ della tabella al § 7, deduciamo

$$a = \frac{1}{\cosh \sigma}$$

e poichè $a > 1$ potremo porre $a = \frac{1}{\cos c}$, con c costante reale, ed avremo $\sigma = ic$ e

(92) $$\cosh \sigma = \cos c \qquad \operatorname{senh} \sigma = i \operatorname{sen} c .$$

Le superficie S, S_2 dovendo essere immaginarie coniugate, e così S_1, S_2, avremo le formole:

(93) $$\begin{cases} \operatorname{senh}^2 \bar{\theta}\ d\bar{u}^2 + \cosh^2 \bar{\theta}\ d\bar{v}^2 = \operatorname{senh}^2 \theta_2\, du^2 + \cosh^2 \theta_2\, dv^2 \\ \operatorname{senh}^2 \bar{\theta}_1\, d\bar{u}^2 + \cosh^2 \bar{\theta}_1\, d\bar{v}^2 = \operatorname{senh}^2 \theta_2\, du^2 + \cosh^2 \theta_2\, dv^2 . \end{cases}$$

Siccome poi sulla deformata S_0 dell'ellissoide, essendo positiva la curvatura, il sistema coniugato permanente (u, v) nel passaggio alla forma ellissoidica è certamente reale, osservando le (93), deduciamo (cfr. § 13)

(93*) $$\bar{u} = \pm u \quad , \quad \bar{v} = \pm v .$$

Le condizioni (93) ci danno

$$\cosh 2\bar{\theta} = \cosh 2\theta_2 \quad , \quad \cosh 2\bar{\theta}_1 = \cosh 2\theta_2 ,$$

indi:

(94) $$\bar{\theta} = \varepsilon \pi i \pm \theta_2 \quad , \quad \bar{\theta}_1 = \varepsilon' \pi i \pm \theta_2 .$$

In queste l'incertezza del segno si toglie osservando che il raggio T della sfera

$$T = \operatorname{tgh} \sigma \coth \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = i \operatorname{tg} c \coth \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = \operatorname{tgh} \frac{\theta_2 - \theta}{2}$$

deve essere puramente immaginario (tabella § 7) e per ciò $\operatorname{tgh} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$ deve essere reale, $\operatorname{tgh} \frac{\theta_2 - \theta}{2}$ puramente immaginario, onde segue che nella prima delle (94) vale il segno superiore, nella seconda l'inferiore:

(94*) $$\bar{\theta} = \varepsilon \pi i + \theta_2 \quad , \quad \bar{\theta}_1 = \varepsilon' \pi i - \theta_2 .$$

Ed allora, affinchè cangiando i in $-i$ i primi membri delle (e), (f) si cangino (salvo il segno) in quelli delle (e_1), (f_1), debbono nelle (93*) valere insieme o i segni superiori o gli inferiori; avremo cioè da distinguere due casi: 1° u, v reali; 2° u, v puramente immaginari. Occupiamoci in questo paragrafo del primo caso.

Ricorrendo nuovamente al confronto delle (e), (f) colle (e_1), (f_1), ed osservando le (92), (94*) segue $\varepsilon' \equiv \varepsilon + 1$ (mod. 2); per ciò avremo:

(95) $$\bar{\theta} = \theta_2 \quad , \quad \bar{\theta}_1 = \pi i - \theta_2$$

o

(95*) $$\bar{\theta} = \pi i + \theta_2 \quad , \quad \bar{\theta}_1 = -\theta_2 .$$

Ma questo secondo caso è da escludersi perchè allora $\Omega = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$ sarebbe reale ed il primo termine del ds_0^2 nella (88) avrebbe il valore negativo

$$-\frac{\operatorname{sen}^2 c + \operatorname{senh}^2 \Omega}{\cos^2 c \operatorname{senh}^4 \Omega}\, d\Omega^2 ;$$

la S_0 non potrebbe dunque essere reale.

Così resta il solo caso (95) che, per separare il reale dall'immaginario, conduce a porre:

$$(96)\qquad \theta = \omega + i\varphi\ ,\ \theta_1 = \omega_1 + i\varphi_1\ ,\ \theta_2 = \pi i - \omega_1 + i\varphi_1\ ,\ \theta_3 = \omega - i\varphi\,.$$

Decomponendo in fine le formole (e), (f) nella loro parte reale ed immaginaria, abbiamo per le funzioni incognite $\omega, \omega_1, \varphi, \varphi_1$ di u, v il sistema seguente:

$$(\mathrm{IX})\qquad \cosh\omega_1 \operatorname{sen}\varphi + \operatorname{tg} c \operatorname{senh}\omega_1 \cos\varphi = 0$$

$$(\mathrm{X})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = \dfrac{\cos c \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{senh}\omega_1} \operatorname{senh}\omega \cos\varphi_1\ , & \dfrac{\partial\omega_1}{\partial u} = \dfrac{\cos c \cosh\omega_1}{\cos\varphi} \operatorname{senh}\omega \cos\varphi_1 \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = -\dfrac{\cos c \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{senh}\omega_1} \cosh\omega \operatorname{sen}\varphi_1\ , & \dfrac{\partial\omega_1}{\partial v} = -\dfrac{\cos c \cosh\omega_1}{\cos\varphi} \cosh\omega \operatorname{sen}\varphi_1 \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u} + \dfrac{\partial\omega}{\partial v} = \dfrac{\operatorname{senh}\omega_1 \cos\varphi}{\cos c} \operatorname{senh}\omega \operatorname{sen}\varphi_1\ , & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v} - \dfrac{\partial\omega}{\partial u} = \dfrac{\operatorname{senh}\omega_1 \cos\varphi}{\cos c} \cosh\omega \cos\varphi_1\,. \end{cases}$$

In fine osserviamo che l'eliminazione di ω, φ_1 porta all'unica equazione del 2° ordine per φ:

$$(\mathrm{X}^*)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\operatorname{senh}\omega_1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\operatorname{senh}\omega_1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right] + \operatorname{senh}\omega_1 \cos\varphi \times$$

$$\times \sqrt{1 + 2\frac{\operatorname{senh}^2\omega_1}{\cos^2 c \operatorname{sen}^2\varphi}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2\right] + \frac{\operatorname{senh}^4\omega_1}{\cos^4 c \operatorname{sen}^4\varphi}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2\right]^2} = 0,$$

dove ω_1 deve intendersi espressa per φ colla (IX).

§ 31.

Verifiche e prime formole per le trasformazioni.

Supponiamo inversamente che $\omega, \omega_1, \varphi, \varphi_1$ soddisfino le equazioni (IX), (X) e dimostriamo che la corrispondente superficie S_0 sarà reale ed applicabile sulla regione reale dell'ellissoide schiacciato, indi (§ 1) la sua complementare $\bar{S}_0$ sarà applicabile sulla regione ideale dell'ellissoide stesso.

A causa delle (96), le quantità Ω, Φ del § 29 hanno i valori

$$\Omega = \omega_1 - \frac{\pi i}{2}\ ,\quad \Phi = \frac{\pi}{2} + \varphi_1$$

e per ciò le quantità A, B (ibid.) sono date da

$$\mathrm{A} = -\frac{i\cos c}{\cos\varphi}\cosh\omega\cosh\omega_1\ ,\quad \mathrm{B} = -\frac{i\cos c}{\cos\varphi}\operatorname{senh}\omega\cosh\omega_1\,,$$

da cui

$$\sqrt{\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2} = \frac{i\cos c}{\cos\varphi}\cosh\omega_1\,.$$

Pel differenziale esatto dV abbiamo dalle (89) il valore puramente immaginario

$$dV = \frac{i \cos c \cosh \omega_1}{\cos \varphi} [\operatorname{senh} \omega \operatorname{sen} \varphi_1 \, du + \cosh \omega \cos \varphi_1 \, dv],$$

e se poniamo $V = i v_1 . \cos c$ con v_1 reale, la (88) diventa

$$ds_0^2 = \frac{\cosh^2 \omega_1 - \operatorname{sen}^2 c}{\cos^2 c \cosh^4 \omega_1} d\omega_1^2 + \frac{dv_1^2}{\cosh^2 \omega_1},$$

e la (90) ci dà

$$F_0 = \frac{\cos c \operatorname{senh} \omega \cosh \omega}{\cos \varphi} (du^2 + dv^2).$$

Ora, ponendo $r = \frac{1}{\cos c \cosh \omega_1}$, si riconosce subito che il ds_0^2 precedente appartiene all'ellissoide rotondo schiacciato coi semiassi $a = \frac{1}{\cos c}$, $b = 1$ (cfr. § 1), ed essendo inoltre F_0 reale, così è reale la superficie S_0. Di più siccome $r^2 < \frac{1}{\cos^2 c} < a^2$, l'applicabilità di S_0 sull'ellissoide schiacciato ha luogo entro i limiti.

Passando ora alle trasformazioni delle attuali superficie, dobbiamo cercare di cangiare, con una trasformazione B_τ la quaderna $(\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ in una nuova $\theta', \theta'_1, \theta'_2, \theta'_3)$ della medesima specie. Avremo intanto le quattro formole del teorema di permutabilità:

$$(97) \begin{cases} \operatorname{tgh} \frac{\theta'_1 - \theta}{2} = \operatorname{tgh} \frac{\sigma - \tau}{2} \cdot \coth \frac{\theta_1 - \theta'}{2}, \quad \operatorname{tgh} \frac{\theta'_2 - \theta}{2} = - \operatorname{tgh} \frac{\sigma + \tau}{2} \cdot \coth \frac{\theta_2 - \theta'}{2} \\ \operatorname{tgh} \frac{\theta'_3 - \theta_2}{2} = \operatorname{tgh} \frac{\sigma - \tau}{2} \coth \frac{\theta_3 - \theta'_2}{2}, \quad \operatorname{tgh} \frac{\theta'_3 - \theta_1}{2} = - \operatorname{tgh} \frac{\sigma + \tau}{2} \coth \frac{\theta_3 - \theta'_1}{2}, \end{cases}$$

inoltre dovranno essere soddisfatte le relazioni differenziali per la trasformazione B_τ di Bäcklund:

$$(g) \begin{cases} \frac{\partial \theta'}{\partial u} + i \frac{\partial \theta}{\partial v} = \operatorname{senh} \tau \cosh \theta \operatorname{senh} \theta' + \cosh \tau \operatorname{senh} \theta \cosh \theta' \\ i \frac{\partial \theta'}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} = - \cosh \tau \cosh \theta \operatorname{senh} \theta' - \operatorname{senh} \tau \operatorname{senh} \theta \cosh \theta' \\ \frac{\partial \theta'_1}{\partial u} + i \frac{\partial \theta_1}{\partial v} = \operatorname{senh} \tau \cosh \theta_1 \operatorname{senh} \theta'_1 + \cosh \tau \operatorname{senh} \theta_1 \cosh \theta'_1 \\ i \frac{\partial \theta'_1}{\partial v} + \frac{\partial \theta_1}{\partial u} = - \cosh \tau \cosh \theta_1 \operatorname{senh} \theta'_1 - \operatorname{senh} \tau \operatorname{senh} \theta_1 \cosh \theta'_1 \end{cases}$$

$$(g_1) \begin{cases} \frac{\partial \theta'_2}{\partial u} + i \frac{\partial \theta_2}{\partial v} = \operatorname{senh} \tau \cosh \theta_2 \operatorname{senh} \theta'_2 + \cosh \tau \operatorname{senh} \theta_2 \cosh \theta'_2 \\ i \frac{\partial \theta'_2}{\partial v} + \frac{\partial \theta_2}{\partial u} = - \cosh \tau \cosh \theta_2 \operatorname{senh} \theta'_2 - \operatorname{senh} \tau \operatorname{senh} \theta_2 \cosh \theta'_2 \\ \frac{\partial \theta'_3}{\partial u} + i \frac{\partial \theta_3}{\partial v} = \operatorname{senh} \tau \cosh \theta_3 \operatorname{senh} \theta'_3 + \cosh \tau \operatorname{senh} \theta_3 \cosh \theta'_3 \\ i \frac{\partial \theta'_3}{\partial v} + \frac{\partial \theta_3}{\partial u} = - \cosh \tau \cosh \theta_3 \operatorname{senh} \theta'_3 - \operatorname{senh} \tau \operatorname{senh} \theta_3 \cosh \theta'_3. \end{cases}$$

Noi vogliamo ora che delle quattro superficie S', S'_1, S'_2, S'_3 corrispondenti alla nuova quaderna $(\theta', \theta'_1, \theta'_2, \theta'_3)$ le due estreme, come le medie, siano coniugate immaginarie; di più, per le ragioni addotte al paragrafo precedente, una delle due quantità

$$\operatorname{tgh}\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2} \quad , \quad \operatorname{tgh}\frac{\theta'_3-\theta'}{2}$$

deve essere reale, l'altra puramente immaginaria (¹). Ne segue, come al paragrafo precedente

$$\overline{\theta}' = \varepsilon\pi i \pm \theta'_3 \quad , \quad \overline{\theta}'_1 = \varepsilon'\pi i \mp \theta'_2,$$

corrispondendosi i segni superiori o gli inferiori. Ma il caso dei segni superiori si escluda osservando che pel cangiamento di i in $-i$ debbono le (g) mutarsi nelle (g_1); per ciò valgono gli inferiori e

$$\overline{\theta}' = \varepsilon\pi i - \theta'_3 \quad , \quad \overline{\theta}'_1 = \varepsilon'\pi i + \theta'_2,$$

ma di più, a causa delle (e), (f), (e_1), (f_1) del § 29 scritte per la seconda quaderna, deve essere ancora qui $\varepsilon' = \varepsilon + 1$ (mod. 2). Così avremmo i due casi

$$\overline{\theta}' = \pi i - \theta'_3 \quad , \quad \overline{\theta}'_1 = \theta'_2 \tag{98}$$

$$\overline{\theta}' = -\theta'_3 \quad , \quad \theta'_1 = \pi i + \theta'_2, \tag{98*}$$

il secondo dei quali però si esclude per la medesima ragione che al paragrafo precedente ci ha fatto escludere il caso (95*), cioè perchè la superficie S'_3 ne risulterebbe necessariamente immaginaria per la (88).

§ 32.

Teoremi A) *e* B) *per queste deformate.*

Ridotti così al solo caso (98), noi confrontiamo le coniugate delle due prime (97) colle due seconde e ne concludiamo che: *la costante* τ *deve essere puramente immaginaria*, come σ, poniamo

$$\tau = i\tau' \quad (\tau' \text{ reale}).$$

Tutte le condizioni richieste risultano allora soddisfatte assoggettando il valore *iniziale* di $\theta' = \omega' + i\varphi$ a rendere puramente immaginaria $\operatorname{tgh}\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2}$, come deve

(¹) Si noti bene che, esaminando come facciamo sia l'una sia l'altra di queste ipotesi, noi veniamo a ricercare l'eventuale esistenza di congruenze W colle due falde applicabili sia ambedue sulla regione reale dell'ellissoide (od ambedue sull'ideale), sia colle due falde applicabili l'una sulla regione reale l'altra sull'ideale dell'ellissoide. Ma le ricerche seguenti nel testo dimostrano che esistono soltanto congruenze della seconda specie.

essere per la seconda delle (98). Ma dalle (97) abbiamo

$$\begin{cases} \operatorname{tgh}\dfrac{\theta'_1-\theta}{2} = \quad i\operatorname{tg}\dfrac{c-\tau'}{2}\coth\dfrac{\theta_1-\theta'}{2} \\ \operatorname{tgh}\dfrac{\theta'_2-\theta}{2} = -i\operatorname{tg}\dfrac{c+\tau'}{2}\coth\dfrac{\theta_2-\theta'}{2}, \end{cases}$$

e quindi

$$\operatorname{tgh}\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2} = i\,\frac{\operatorname{tg}\dfrac{c-\tau'}{2}\coth\dfrac{\theta_1-\theta'}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{c+\tau'}{2}\coth\dfrac{\theta_2-\theta'}{2}}{1-\operatorname{tg}\dfrac{c-\tau'}{2}\operatorname{tg}\dfrac{c+\tau'}{2}\coth\dfrac{\theta_1-\theta'}{2}\coth\dfrac{\theta_2-\theta'}{2}},$$

formola che, con semplici trasformazioni, si cangia nell'altra:

$$\operatorname{tgh}\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2} = i\,\frac{\operatorname{sen}c\cosh[\omega'+i(\varphi'-\varphi_1)]-\operatorname{sen}\tau'\cosh\omega_1}{-\cos c\operatorname{senh}[\omega'+i(\varphi'-\varphi_1)]+\cos\tau'\operatorname{senh}\omega_1}.$$

La condizione richiesta diventa quindi:

(F) $\operatorname{sen}c\cos c\cos(\varphi'-\varphi_1) = \cos c\operatorname{sen}\tau'\cosh\omega_1\cosh\omega' - \operatorname{sen}c\cos\tau'\operatorname{senh}\omega_1\operatorname{senh}\omega'$;

a questa basta che soddisfino i valori iniziali di ω', φ'.

Si conclude di qui che la primitiva superficie S_0, applicabile sull'ellissoide, ammette ∞^2 trasformate S'_0 applicabili sull'ellissoide stesso, ciascuna delle quali forma con S_0 le due falde focali di una congruenza W. Si osservi però che dalle (98), confrontate colla (95), risulta per la seconda quaderna invertito l'ufficio delle due coppie (S', S'_3) (S'_1, S'_2) rispetto alle prime due $(S, S_3), (S_1, S_2)$ [1]. Per ciò mentre S_0 era applicabile sull'ellissoide *entro ai limiti*, la trasformata S'_0 è bensì applicabile sull'ellissoide stesso ma *fuori dei limiti*.

Passando in fine al teorema di permutabilità, supponiamo di avere cangiata la quaderna primitiva $(\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$, per la quale

$$(\delta) \qquad \bar\theta = \theta_2 \quad , \quad \bar\theta_1 = \pi i - \theta_2$$

nelle altre due $(\theta', \theta'_1, \theta'_2, \theta'_3)$, $(\theta'', \theta''_1, \theta''_2, \theta''_3)$ mediante due trasformazioni $B_{\tau'}, B_{\tau''}$ a costanti τ', τ'' puramente immaginarie differenti ed in guisa da soddisfare le (98)

$$(\delta^*) \qquad \bar\theta' = \pi i - \theta'_2 \quad , \quad \bar\theta'_1 = \theta'_2 \quad ; \quad \bar\theta'' = \pi i - \theta''_2 \quad , \quad \bar\theta''_1 = \theta''_2,$$

e consideriamo la quarta quaderna $(\theta''', \theta'''_1, \theta'''_2, \theta'''_3)$ del teorema di permutabilità al § 9. Applicando alle due quaderne $(\theta, \theta', \theta'', \theta''')$, $(\theta_2, \theta'_2, \theta''_2, \theta'''_2)$ la formola del teorema di permutabilità (vol. II, pag. 458 (C)), avremo:

$$\operatorname{tgh}\frac{\theta'''-\theta}{2} = \operatorname{tgh}\frac{\tau'-\tau''}{2}\coth\frac{\theta'-\theta''}{2} \quad , \quad \operatorname{tgh}\frac{\theta'''_2-\theta_2}{2} = \operatorname{tgh}\frac{\tau'-\tau''}{2}\coth\frac{\theta'_2-\theta''_2}{2}.$$

[1] In particolare $\operatorname{tgh}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$ è reale, invece $\operatorname{tgh}\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2}$ puramente immaginario.

Cangiando i in $-i$ nella prima di queste, coll'osservare le (δ), (δ^*) e l'altra $\bar{\tau}' - \bar{\tau}'' = -(\tau' - \tau'')$, ne deduciamo

$$\operatorname{tgh}\frac{\bar{\theta}''' - \theta_3}{2} = -\operatorname{tgh}\frac{\tau' - \tau''}{2}\coth\frac{\theta_3'' - \theta_3'}{2} = \operatorname{tgh}\frac{\theta_3''' - \theta_4}{2},$$

e quindi $\bar{\theta}''' = \theta_3'''$; similmente si dimostra che $\bar{\theta}_1''' = \pi i - \theta_2'''$. Dunque la quarta quaderna $(\theta''', \theta_1''', \theta_2''', \theta_3''')$ si trova nelle medesime condizioni della prima, ed il teorema B) di permutabilità è così dimostrato.

§ 33.

Le deformate dell'elliszoide schiacciato corrispondenti ad u, v puramente immaginari.

Trattiamo in fine l'ultimo caso di u, v puramente immaginarî e poniamo

$$u = iu_1 \quad , \quad v = iv_1 ,$$

con u_1, v_1 reali. Varranno sempre le formole (94*) § 30:

$$\bar{\theta} = \varepsilon\pi i + \theta_2 \quad , \quad \bar{\theta}_1 = \varepsilon'\pi i - \theta_2 ;$$

ma, avendosi attualmente $\bar{u} = -u$, $\bar{v} = -v$, le considerazioni stesse di quel paragrafo applicate alle (e), (f), (e_1), (f_1) del § 29 dimostrano che sarà qui $\varepsilon' \equiv \varepsilon$ (mod. 2). Sarebbero dunque da distinguersi i due casi

$$\bar{\theta} = \theta_3 \quad , \quad \bar{\theta}_1 = -\theta_2$$

$$(99) \qquad \bar{\theta} = \pi i + \theta_3 \quad , \quad \bar{\theta}_1 = \pi i - \theta_2 ,$$

però il primo è da escludersi per la medesima ragione del caso (95*) al § 30, cioè perchè dalla (88) § 29 risulterebbe negativo il primo termine del ds_0^2 e la S_0 sarebbe immaginaria. Resta dunque il solo caso (99), onde poniamo:

$$(99^*) \quad \theta = \omega + i\varphi \ , \ \theta_1 = \omega_1 + i\varphi_1 \ , \ \theta_2 = \pi i - \omega_1 + i\varphi_1 \ , \ \theta_3 = \pi i + \omega - i\varphi .$$

Sostituendo nelle (e), (f) § 29, calcolate nei *parametri reali* u_1, v_1, e separando il reale dall'immaginario, otteniamo per le funzioni incognite ω, ω_1, φ, φ_1 il seguente sistema:

$$(\mathrm{XI}) \qquad \cos\varphi\cosh\omega_1 = \operatorname{tg} c \operatorname{sen}\varphi \operatorname{senh}\omega_1$$

$$(\mathrm{XII}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1} = \dfrac{\operatorname{sen} c \operatorname{sen}\varphi}{\cosh\omega_1}\cosh\omega\cos\varphi_1 \ , \quad \dfrac{\partial\omega_1}{\partial u_1} = -\dfrac{\operatorname{sen} c \operatorname{senh}\omega_1}{\cos\varphi}\cosh\omega\cos\varphi_1 \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial v_1} = -\dfrac{\operatorname{sen} c \operatorname{sen}\varphi}{\cosh\omega_1}\operatorname{senh}\omega\operatorname{sen}\varphi_1 \ , \quad \dfrac{\partial\omega_1}{\partial v_1} = \dfrac{\operatorname{sen} c \operatorname{senh}\omega_1}{\cos\varphi}\operatorname{senh}\omega\operatorname{sen}\varphi_1 \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u_1} + \dfrac{\partial\omega}{\partial v_1} = -\dfrac{\cos\varphi\cosh\omega_1}{\operatorname{sen} c}\cosh\omega\operatorname{sen}\varphi_1 , \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v_1} - \dfrac{\partial\omega}{\partial u_1} = -\dfrac{\cos\varphi\cosh\omega_1}{\operatorname{sen} c}\operatorname{senh}\omega\cos\varphi_1 , \end{cases}$$

dove al solito la relazione (XI) in termini finiti fra ω_1, φ coincide colla formola del teorema di permutabilità.

L'eliminazione di ω, φ_1 porta anche qui ad un' unica equazione del 2° ordine per φ che, analogamente alla (X*) § 30, si scrive:

$$\text{(XII*)} \qquad \frac{\partial}{\partial u_1}\left[\frac{\cosh\omega_1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\right]+\frac{\partial}{\partial v_1}\left[\frac{\cosh\omega_1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial v_1}\right]=\cosh\omega_1\cos\varphi\times$$

$$\times\sqrt{1+\frac{2\cosh^2\omega_1}{\operatorname{sen}^2 c\operatorname{sen}^2\varphi}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v_1}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\right)^2\right]+\frac{\cosh^4\omega}{\operatorname{sen}^4 c\operatorname{sen}^4\varphi}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v_1}\right)^2\right]^2}.$$

Inversamente supposto che $\omega, \omega_1, \varphi, \varphi_1$ soddisfino il sistema precedente, precisamente come al § 31, si verifica che la corrispondente superficie S_0 è reale ed applicabile sulla regione reale dell'ellissoide schiacciato.

Passando da ultimo alle trasformazioni di questa classe di superficie applicabili sull'ellissoide, dobbiamo mediante una B_τ cangiare la quaderna $(\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ in una nuova $(\theta', \theta'_1, \theta'_2, \theta'_3)$ che soddisfi alle condizioni stesse della prima. Dovremo per ciò avere, come al § 31

$$\overline{\theta}' = \varepsilon\pi i \pm \theta'_3 \quad , \quad \overline{\theta}'_1 = \varepsilon'\pi i \mp \theta'_2$$

coi segni in corrispondenza. Il caso dei segni superiori si esclude però per la medesima ragione che al § 31 e resta quindi il solo caso

$$\overline{\theta}' = \varepsilon\pi i - \theta'_3 \quad , \quad \overline{\theta}'_1 = \varepsilon'\pi i + \theta'_2.$$

Questa volta la sostituzione nelle (e), (f), (e_1), (f_1) § 29 dimostra che deve essere $\varepsilon' \equiv \varepsilon$ (mod. 2) e quindi dapprima i due casi possibili:

$$\text{(100)} \qquad \overline{\theta}' = \pi i - \theta'_3 \quad , \quad \overline{\theta}'_1 = \pi i + \theta'_2$$

$$\overline{\theta}' = -\theta'_3 \quad , \quad \overline{\theta}'_1 = \theta'_2.$$

Ma il secondo è da escludersi perchè S'_0 ne risulterebbe immaginaria e resta quindi solo il primo. Allora le (97) ci dimostrano che la costante τ deve essere puramente immaginaria, poniamo $\tau = i\tau'$. In fine le solite considerazioni provano che sarà raggiunto il nostro scopo solo che si vincolino i valori *iniziali* di ω', φ' (posto $\theta' = \omega' + i\varphi'$) in guisa da rendere puramente immaginaria $\operatorname{tgh}\frac{\theta'_1 - \theta'_2}{2}$. Basta confrontare le formole (100) colle (98) § 31 per dedurne che la condizione richiesta assume precisamente la stessa forma (F) del § 32.

Così abbiamo dimostrato, anche in questo caso, il teorema (A) per le nostre deformate. E si osservi che il confronto delle (99) colle (100) dimostra anche qui invertito l'ufficio delle due coppie (S', S'_3), (S'_1, S'_2) rispetto alle due primitive (S, S_3) (S_1, S_2), onde consegue che mentre S_0 era applicabile sull'ellissoide *entro ai limiti*

la trasformata contigua S'_0 sarà invece applicabile sull'ellissoide stesso *fuori dei limiti*. In fine la dimostrazione del teorema B) di permutabilità si compie in questo ultimo caso nel medesimo modo come pel caso precedente al § 32.

E così, riepilogando i risultati ottenuti per le superficie applicabili sull'ellissoide schiacciato, abbiamo il teorema A) della prefazione così precisato:

A) *Ogni superficie reale* S_0 *applicabile sulla regione reale ovvero sulla regione ideale dell'ellissoide rotondo schiacciato appartiene come prima falda focale ad* ∞^2 *congruenze reali* W *la cui seconda falda focale* S'_0 *è applicabile rispettivamente sulla regione ideale ovvero sulla reale dell'ellissoide stesso.*

Ed in fine si ha che: *Per le trasformazioni delle superficie applicabili sull'ellissoide, la cui esistenza è stabilita dalla proposizione precedente, vale il teorema* B) *di permutabilità.*

INDICE DELLA MEMORIA

Pag.

Prefazione 3

§ 1. Le superficie complementari delle quadriche a centro rotonde 7

§ 2. Deformazione di inviluppi di sfere colle due falde a curvatura costante 10

§ 3. Proprietà comuni ai tre casi 12

§ 4. Caso α) con K negativa (Regione reale dell'iperboloide ad una falda) 14

§ 5. Caso α) con K positiva (Regione ideale dell'ellissoide schiacciato) 16

§ 6. Caso β): $\sigma = \frac{\pi}{2} + ir$ (Regione reale dell'ellissoide schiacciato. Regione ideale dell'iperboloide. Ellissoide immaginario) 18

§ 7. Riepilogo dei risultati 20

§ 8. Formole relative alla composizione di due trasformazioni opposte di Bäcklund 23

§ 9. Trasformazioni di Bäcklund per le quaderne (S, S_1, S_2, S_3) del teorema di permutabilità. 25

§ 10 Congruenze W con falde focali applicabili su quadriche rotonde 27

§ 11. Il teorema A) per le deformate del catenoide accorciato e del sinusoide iperbolico . . 30

§ 12. Il teorema B) di permutabilità per le deformate del catenoide accorciato e del sinusoide iperbolico 31

§ 13. Prime osservazioni sulle deformate dell'iperboloide rotondo ad una falda 33

§ 14. Deformate di prima specie dell'iperboloide corrispondenti ad u, v reali 36

§ 15. Verifiche relative alla superficie S_3 37

§ 16. Considerazioni preliminari sulle trasformazioni 39

§ 17. Formole definitive per le trasformazioni 41

§ 18. I teoremi A) e B) per le deformate di 1ª specie dell'iperboloide (con u, v reali). . . 43

§ 19. Deformate di 1ª specie dell'iperboloide corrispondenti ad u, v puramente immaginari . 45

§ 20. Formole per le deformate di seconda specie dell'iperboloide 47

§ 21. Verifiche e teoremi A) e B) per le deformate di 2ª specie dell'iperboloide 49

§ 22. Deformate rigate dell'iperboloide e quaderna associata di superficie pseudosferiche . . 50

§ 23. Le trasformazioni di Razzaboni e Demartres delle curve di Bertrand. 53

§ 24. Il teorema A) per le rigate applicabili sull'iperboloide 54

§ 25. Superficie applicabili sulla regione ideale dell'iperboloide 56

§ 26. Verifiche e teoremi A) e B) per queste deformate. 58

§ 27. Le deformate dell'ellissoide immaginario (3° tipo). 60

§ 28. Verifiche e teoremi A) e B) per queste deformate. 62

§ 29. Composizione di due trasformazioni opposte di Bäcklund per le superficie a curvatura costante positiva 63

§ 30. Le deformate dell'ellissoide schiacciato corrispondenti ad u, v reali 65

§ 31. Verifiche e prime formole per le trasformazioni 67

§ 32. Teoremi A) e B) per queste deformate. 69

§ 33. Le deformate dell'ellissoide schiacciato corrispondenti ad u, v puramente immaginari . 71