Sull' integrazione delle equazioni della propagazione del calore.

Memoria del prof. G. LAURICELLA

(presentata dal Socio V. Volterra, approvata dal Socio V. Cerruti).

INTRODUZIONE.

1. Il Poincaré nella sua celebre Memoria: *Sur les équations de la physique mathématique* (1), dopo di aver fatto rilevare la perfetta analogia di varie quistioni, che si presentano nella Fisica-matematica, con quella relativa all' integrazione delle equazioni della propagazione del calore, fa uno studio molto approfondito di queste equazioni, dando in pari tempo un metodo per dimostrare l' esistenza dei loro integrali regolari.

La Memoria del Poincaré ha dato luogo a varie altre pubblicazioni, quali principalmente quelle del Le Roy (2) e dello Stekloff (3). I lavori del Le Roy mirano specialmente ad estendere il noto metodo del *balayage*, dello stesso Poincaré, alle equazioni della propagazione del calore ed a costruire a posteriori le espressioni analitiche delle soluzioni di queste equazioni. I lavori dello Stekloff mirano alla sviluppabilità di una funzione arbitraria in serie di soluzioni eccezionali, analoghe alle *serie di Fourier*. Anche io ebbi ad occuparmi altra volta della integrazione delle equazioni della propagazione del calore in due Note: nella prima, *Sulle temperature stazionarie* (4), riprendendo i risultati del Poincaré, mi proponevo di completare lo studio delle equazioni in superficie delle temperature stazionarie; nella seconda, *Sulla propagazione del calore* (5), basandomi sul risultato ottenuto nella

(1) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, anno 1894.

(2) *Sur l'intégration des équations de la chaleur*. Thèse presentée à la Faculté des sciences de Paris, anno 1897. — *Sur le problème de Fourier*. Comptes rendus, 18 marzo 1895.

(3) *Sur un problème de la théorie analytique de la chaleur*. Comptes rendus, 4 aprile 1898. — *Sur le développement d'une fonction donnée suivant les fonctions harmoniques*. Ibid., 30 gennaio 1899. — *Sur l'existence des fonctions fondamentales*. Ibid., 27 marzo 1899.

(4) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, anno 1897.

(5) Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino, 19 giugno 1898.

prima Nota e sui risultati del POINCARÉ, dimostravo la sviluppabilità di una funzione arbitraria in serie di soluzioni eccezionali e l'esistenza dell'integrale regolare delle equazioni del raffreddamento dei corpi.

Riprendendo lo studio delle equazioni della propagazione del calore, ho dovuto riscontrare che la dimostrazione da me data nella Nota: *Sulle temperature stazionarie*, non è rigorosamente esatta (¹); che in varî lavori di questo genere si applicano i teoremi fondamentali sulle funzioni potenziali di superficie e di doppio strato, senza avere riguardo alle condizioni a cui deve soddisfare la densità; e che quasi sempre le difficoltà che si incontrano in questi studî dipendono dall'uso delle derivate della *funzione di Green* o di funzioni analoghe. Inoltre il procedimento stesso di NEUMANN per risolvere il *problema derivato di Dirichlet*, riportato dal POINCARÉ nella sua citata Memoria (§ VIII) e nel suo libro: *Théorie du potentiel newtonien* (§§ 157, ...) richiede in qualche punto una più rigida trattazione (²).

(¹) Volendo dimostrare, appunto come mi proponevo di fare in quella Nota, che la funzione v determinata dalla serie:

$$v = v_0 + v_1 h + v_2 h^2 + \cdots,$$

dove v_0 in generale è una funzione non armonica e dove $v_1, v_2, v_3, \ldots$ sono funzioni armoniche nel campo S, determinate con le condizioni nei punti della superficie limite σ:

$$(\xi) \qquad \frac{\partial v_0}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial v_i}{\partial n} + v_{i-1} = 0, \quad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

soddisfa alle equazioni in superficie del calore, basta applicare senz'altro il seguente teorema del VOLTERRA: *se si ha un gruppo di funzioni armoniche in uno spazio* S *e se la serie* u *dei valori che queste funzioni prendono nei punti di* σ *è convergente in ugual grado su* σ, *la serie* U *di queste funzioni armoniche nei punti di* S *sarà convergente in ugual grado, rappresenterà una funzione armonica e nei punti di* σ *coinciderà con la serie* u.

Infatti dalle (ξ) si ha nei punti di σ:

$$(\eta) \qquad \frac{\partial v_0}{\partial n} + \frac{\partial v_1}{\partial n} h + \frac{\partial v_2}{\partial n} h^2 + \cdots = -(v_0 h + v_1 h^2 + v_2 h^3 + \cdots) = -hv;$$

e siccome la serie al secondo membro è convergente in ugual grado da per tutto, così la serie al primo membro sarà certamente convergente in ugual grado su σ. Ora le funzioni $\frac{\partial v_1}{\partial n} h, \frac{\partial v_2}{\partial n} h^2, \frac{\partial v_3}{\partial n} h^3, \ldots$ sono, come le $v_1 h, v_2 h^2, v_3 h^3, \ldots$, funzioni armoniche nel campo S; quindi, in forza dell'enunciato teorema del VOLTERRA, la serie:

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v_0}{\partial n} + \frac{\partial v_1}{\partial n} h + \frac{\partial v_2}{\partial n} h^2 + \cdots$$

sarà convergente in ugual grado nei punti di S (i punti di σ compresi) e nei punti di σ coinciderà con la serie al primo membro della (η). Ciò dimostra appunto che la $\frac{\partial v}{\partial n}$ è finita e continua anche quando dai punti dell'interno di S si va ai punti di σ e che nei punti di σ la v soddisfa all'equazione:

$$\frac{\partial v}{\partial n} + hv = 0. \qquad \text{c.d.d.}$$

(²) Analoga osservazione va fatta riguardo alla mia Nota: *Sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio elastico* (Annali di Mat. pura ed appl., anno 1895). Debbo per altro notare che la lieve modificazione da me apportata nel presente lavoro al metodo di NEUMANN si estende senz'altro ai calcoli di questa mia citata Nota.

Per altro il metodo di POINCARÉ è sempre quello che maggiormente interessa; perchè oltre ad essere semplice e diretto, offre il vantaggio, convenientemente adoperato, di darci ogni volta i risultati espressi per mezzo di funzioni potenziali, ammessa *la sola continuità* delle funzioni date ad arbitrio nei punti della superficie limite.

Volendo rifare la via tenuta dal POINCARÉ, è necessario anzitutto di fissare senza ambiguità e di semplificare, finchè è possibile, le condizioni a cui deve soddisfare la densità nelle funzioni potenziali di superficie e di doppio strato, per essere sicuri della validità dei relativi teoremi fondamentali. Appunto questo è lo scopo della mia Nota: *Intorno alle derivate normali della funzione potenziale di superficie* (¹) e dell'Appendice alla mia Memoria: *Su di una classe di equazioni alle derivate parziali del secondo ordine* (²). Le altre difficoltà, come mi propongo di mostrare nel presente lavoro, si superano facilmente introducendo, invece della *funzione di Green* e delle funzioni analoghe, la *serie di Neumann* relativa al *problema di Dirichlet* e quelle analoghe che ne risultano, e che si esprimono sempre per mezzo di funzioni potenziali di superficie e di doppio strato.

È nota la geniale estensione, fatta dal POINCARÉ (³), del *metodo di Neumann* ai corpi semplicemente connessi; è noto ancora come questa estensione possa farsi senza supporre conosciuto il *principio di Dirichlet* (⁴). In tal modo l'utilità di avere ogni volta la soluzione del *problema di Dirichlet* espressa per funzioni potenziali di superficie e di doppio strato conferma sempre più l'importanza del *metodo di Neumann*; e quantunque, per amore di brevità e anche perchè l'estensione del POINCARÉ non ha raggiunto ancora un conveniente grado di semplicità, consideri nel presente lavoro solamente corpi limitati da superficie convesse; pure i miei calcoli valgono senz'altro anche nel caso di corpi limitati da superficie di qualsiasi natura.

2. Le equazioni a cui deve soddisfare la temperatura ϑ di un corpo isotropo ed omogeneo S, nell'interno del quale c'è una sorgente di calore costante rispetto al tempo, e che alla superficie limite σ trovasi a contatto di un ambiente, il quale nei punti di σ ha la temperatura ϑ' costante rispetto al tempo, sono:

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \text{(nei punti di S)}\ \dfrac{\partial\vartheta}{\partial t} = \mathrm{K}\Delta^2\vartheta + \varphi, \qquad \text{(nei punti di } \sigma)\ \dfrac{\partial\vartheta}{\partial n} = h(\vartheta - \vartheta'), \\ (\vartheta)_{t=0} = \psi, \end{cases}$$

dove $\Delta^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$; t indica il tempo variabile; n la normale nei punti di σ nella direzione che entra in S; K una costante proporzionale al coefficiente di conducibilità interna; h una costante proporzionale al potere emissivo; φ una fun-

(¹) Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino, 11 febbraio 1900.

(²) Annali di Mat. pura ed appl., Serie III, T. IV.

(³) Acta Mathematica, t. XX. — Cfr. pure LE ROY, l. c., 2ᵉ partie.

(⁴) STEKLOFF, *Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique*. Comptes rendus, 6 marzo 1899. — *Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet*. Ibid., 12 febbr. 1900. — *Les méthodes générales pour résoudre les problèmes foudamentaux de la physique mathématique*. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 2ᵉ S., II. — KORN, *Lehrbuch der Potentialtheorie*. Berlino, 1899.

zione dei punti di S, che dipende dalla sorgente di calore e che, nel caso in cui il campo S è indefinito, si mantiene diversa da zero soltanto in una regione anche comunque grande, ma finita, di S; ψ una funzione dei punti di S, che rappresenta la temperatura iniziale del corpo S e che nei punti di σ soddisfa, come la ϑ, alla equazione:

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = h(\psi - \vartheta').$$

Sia ϑ_1 l'integrale regolare delle equazioni:

$$(\beta) \qquad \text{(nei punti di S)}\ o = \mathrm{K}\Delta^2\vartheta_1 + \varphi, \qquad \text{(nei punti di } \sigma)\ \frac{\partial\vartheta_1}{\partial n} = h(\vartheta_1 - \vartheta'),$$

e ϑ_2 l'integrale regolare delle equazioni:

$$(\alpha)' \quad \begin{cases} \text{(nei punti di S)}\ \dfrac{\partial\vartheta_2}{\partial t} = \mathrm{K}\Delta^2\vartheta_2, \qquad \text{(nei punti di } \sigma)\ \dfrac{\partial\vartheta_2}{\partial n} = h\vartheta_2, \\ (\vartheta_2)_{t=0} = \psi - \vartheta_1. \end{cases}$$

Si verifica immediatamente che l'espressione:

$$\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$$

è l'integrale regolare delle equazioni (α). Adunque *l'integrazione delle equazioni* (α) *si può ridurre all'integrazione delle equazioni più semplici* (β), $(\alpha)'$.

Ora indichiamo con p un punto qualsiasi del campo S e con r il vettore che, partendo da p, va ad un altro punto qualsiasi dello spazio; supponiamo che la funzione φ sia finita e continua insieme alle sue derivate prime in tutto il campo S, i punti di σ al più esclusi per queste derivate, e poniamo:

$$\vartheta_1' = \frac{1}{4\pi\mathrm{K}}\int_s \frac{\varphi}{r}\, dS.$$

Il *teorema di Poisson* ci dà:

$$\text{(nei punti di S)} \quad o = \mathrm{K}\Delta^2\vartheta_1' + \varphi.$$

Ciò premesso, sia ϑ_1'' l'integrale regolare delle equazioni:

$$(\beta)' \quad \text{(nei punti di S)}\ o = \Delta^2\vartheta_1'', \quad \text{(nei punti di } \sigma)\ \frac{\partial\vartheta_1''}{\partial n} = h\vartheta_1'' + \left(h\vartheta_1' - h\vartheta' - \frac{\partial\vartheta_1'}{\partial n}\right).$$

È chiaro allora che l'espressione:

$$\vartheta_1 = \vartheta_1' + \vartheta_1''$$

rappresenterà l'integrale regolare delle equazioni (β); sicchè *l'integrazione delle equazioni* (β) *si può ridurre a quella delle equazioni* $(\beta)'$.

In conclusione abbiamo che *l'integrazione delle equazioni* (α) *dipende dall'integrazione delle equazioni* $(\alpha)'$, $(\beta)'$.

Le equazioni $(\beta)'$ sono della forma:

$$(a) \qquad \text{(nei punti di S)} \quad \Delta^2 v = 0, \qquad \text{(nei punti di } \sigma) \quad \frac{\partial v}{\partial n} = hv + f;$$

e v rappresenta la temperatura stazionaria del corpo S, corrispondente al caso in cui la temperatura dell'ambiente, nel quale si trova S, è data nei punti di σ dalla espressione $\frac{f}{h}$ [1].

Le equazioni $(\alpha)'$ sono della forma:

$$(b) \quad \text{(nei punti di S)} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = K\Delta^2 v, \qquad \text{(nei punti di } \sigma) \quad \frac{\partial v}{\partial n} = hv, \qquad (v)_{t=0} = f,$$

con f funzione nota dei punti di S, la quale nei punti di σ soddisfa alla condizione:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = hf.$$

L'integrale regolare v di queste equazioni rappresenta la temperatura al tempo t, corrispondente alla temperatura iniziale f, dei punti del corpo S, il quale si trova immerso in un ambiente la cui temperatura nei punti di σ è uguale allo *zero*.

Io dimostrerò qui, nel modo detto al § 1, l'esistenza dell'integrale regolare delle equazioni (a), tanto nel caso di un campo finito S, quanto in quello di un campo S indefinito. Dimostrerò ancora l'esistenza dell'integrale regolare delle equazioni (b), limitandomi al caso in cui il campo S è finito. A dir vero la maggior parte dei miei calcoli si estende senz'altro al caso di campi indefiniti; ma il *lemma del Poincaré* (l. c., § III), che io qui riporto e che è fondamentale in questo studio, almeno così come sta, non vale che per i soli campi finiti.

3. Alcuni casi semplici, come ad esempio quello di un parallelepipedo rettangolo, di un cilindro circolare retto, ecc., sfuggono alla trattazione generale; e quindi ho creduto opportuno di occuparmi in un ultimo capitolo degli sviluppi in serie di soluzioni eccezionali della propagazione del calore nei casi in cui il campo è formato di un segmento o di un rettangolo. Questa trattazione è guida sufficiente per la trattazione dei casi del parallelepipedo rettangolo, del cilindro circolare retto e di altri analoghi.

Il metodo che ho tenuto in tale studio è quello classico di Cauchy, modificato in modo da uniformarlo, per quanto fosse conveniente e possibile, alla trattazione generale. Lo sviluppo delle funzioni nel caso di un campo rettangolare è stato qui ottenuto per due vie: sia, cioè, applicando successivamente gli sviluppi in serie delle funzioni di una variabile, come suole ordinariamente farsi; sia estendendo direttamente il metodo tenuto in questi stessi sviluppi.

In ultimo, invece di applicare questi risultati al problema del raffreddamento dei corpi, come avrei potuto pur fare, li ho applicati alla risoluzione del problema

[1] Nel caso della impermeabilità perfetta ($h = 0$) si deve avere, come è noto, $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$.

delle temperature stazionarie nel caso del rettangolo, mostrando in tal modo che il problema degli sviluppi in serie di soluzioni eccezionali e quello delle temperature stazionarie possono essere l'uno all'altro di sussidio.

CAPITOLO I.

Integrazione delle equazioni del tipo (a).

1. Sia S un campo finito a tre dimensioni, limitato da una superficie convessa σ, la quale abbia in ogni suo punto il piano tangente determinato e la curvatura finita e continua; sia S' lo spazio esterno a σ ed $u(m)$ una funzione finita e continua dei punti m di σ. Indichiamo con r la distanza di un punto p di S o di un punto p' di S' da un altro punto qualsiasi, con r' la distanza di un punto s di σ da un altro punto qualsiasi, e con n la normale a σ nella direzione che entra in S.

Posto:

$$U_1 = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma u(m)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\sigma, \qquad u_1(s) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma u(m)\frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial n}d\sigma,$$

si ha, come è noto,

$$\lim_{ps=0} U_1(p) = u_1(s) + u(s), \qquad \lim_{p's=0} U_1(p') = u_1(s) - u(s),$$

intendendo che i punti p e p' si avvicinino al punto s con una legge qualsiasi e mantenendosi il punto p sempre nell'interno di S, il punto p' sempre nell'interno di S'; e si ha inoltre che la $u_1(s)$ è una funzione finita e continua dai punti s di σ, che noi indicheremo con $u_1(m)$.

Similmente, posto:

$$U_2 = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma u_1(m)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\sigma, \qquad u_2(s) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma u_1(m)\frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial n}d\sigma,$$

risulterà:

$$\lim_{ps=0} U_2(p) = u_2(s) + u_1(s), \qquad \lim_{p's=0} U_2(p') = u_2(s) - u_1(s);$$

e così in generale all'i^{esima} operazione, posto:

$$(1) \qquad U_i = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma u_{i-1}(m)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\sigma, \qquad u_i(s) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma u_{i-1}(m)\frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial n}d\sigma,$$

sarà:

$$(2) \qquad \lim_{ps=0} U_i(p) = u_i(s) + u_{i-1}(s), \qquad \lim_{p's=0} U_i(p') = u_i(s) - u_{i-1}(s)$$

qualunque sia il valore intero e positivo dell'indice i.

Come è noto poi, se $M_0, M_1, M_2, \ldots$; $m_0, m_1, m_2, \ldots$ sono rispettivamente i massimi e i minimi delle funzioni finite e continue $u(m), u_1(m), u_2(m), \ldots$ su tutta la superficie σ, si potrà scrivere:

$$(3) \qquad M_{i+1} \leq M_i, \qquad m_{i+1} \geq m_i, \qquad M_i - m_i \leq \varrho^i (M_0 - m_0),$$

con ϱ quantità positiva inferiore all'unità; ed inoltre si avrà:

$$(4) \qquad \lim_{i=\infty} u_i(s) = \lim_{i=\infty} M_i = \lim_{i=\infty} m_i = C,$$

con C quantità costante indipendente dal punto s di σ.

2. Ora si supponga che, per una ragione qualsiasi, la costante C sia nulla. In questa ipotesi si avrà:

$$(4)' \qquad \lim_{i=\infty} u_i(s) = \lim_{i=\infty} M_i = \lim_{i=\infty} m_i = 0;$$

allora, avuto riguardo alla seconda delle (3), risulterà che le m_i sono tutte negative o nulle; e quindi, avuto riguardo alla terza delle (3), potremo scrivere:

$$(3)' \qquad M_i \leq M_i - m_i \leq \varrho^i (M_0 - m_0).$$

Ciò posto, si consideri la serie:

$$(5) \qquad \varphi(m) = u(m) + u_1(m) + u_2(m) + \cdots$$

Poichè si ha:

$$(3)'' \qquad |u_i(m)| \leq M_i \leq \varrho^i (M_0 - m_0), \qquad (\varrho < 1)$$

avremo che la serie (5) è convergente in ugual grado su tutta la superficie σ; e quindi l'integrale:

$$(6) \qquad \Phi = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \varphi(m) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma$$

sarà una funzione finita e continua dei punti di S o di S', secondo che il raggio vettore r parte dal punto p o dal punto p', e si mantiene tale anche quando i punti p o p' si avvicinano indefinitamente a σ. Essa poi è armonica tanto nello spazio S, quanto nello nello spazio S'; e all'infinito si annulla come $\frac{1}{r^2}$.

Supposto che si tratti del punto p' di S', si avrà, analogamente alla seconda delle (2),

$$\lim_{p'=0} \Phi(p') = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \varphi(m) \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial n} d\sigma - \varphi(s),$$

ossia, integrando per serie [1] e facendo uso della (5),

$$(7)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{p's=0} \Phi(p') = u_1(s) + u_2(s) + \cdots - \{u(s) + u_1(s) + u_2(s) + \cdots\} \\ \qquad\qquad = -u(s). \end{cases}$$

Finalmente, se si ammette che la funzione data $u(m)$ è tale che esistano e siano determinati, finiti e continui i due limiti:

$$\lim_{ps=0} \frac{\partial U_1}{\partial n}, \quad \lim_{p's=0} \frac{\partial U_1}{\partial n},$$

risulterà ancora [2]:

$$\lim_{ps=0} \frac{\partial U_i}{\partial n} - \lim_{p's=0} \frac{\partial U_i}{\partial n} = 0,$$

$$(8)\qquad \lim_{ps=0} \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \lim_{p's=0} \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0.$$

3. Premessi questi risultati, proponiamoci la ricerca di un integrale regolare delle equazioni:

$$(9)\qquad \Delta^2 v = o \ \text{(nei punti di S)}, \qquad \frac{\partial v}{\partial n} = f(m) \ \text{(nei punti di } \sigma)$$

con $f(m)$ funzione arbitraria, che però soddisfa alla condizione:

$$(10)\qquad \int_\sigma f(m)\, d\sigma = 0$$

ed è finita e continua su tutta la superficie σ.

Intanto, posto:

$$(11)\qquad Q = -\frac{1}{4\pi} \int_\sigma \frac{f(m)}{r}\, d\sigma,$$

si avrà, in forza della continuità di $f(m)$ e delle condizioni geometriche poste per la superficie σ [3], che le espressioni $\lim\limits_{ps=0} \frac{\partial Q}{\partial n}$, $\lim\limits_{p's=0} \frac{\partial Q}{\partial n}$ sono funzioni finite e continue dei punti s di σ, e inoltre:

$$(12)\qquad \lim_{ps=0} \frac{\partial Q}{\partial n} - \lim_{p's=0} \frac{\partial Q}{\partial n} = f(s).$$

[1] Quantunque la funzione $\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial n}$ divenga infinita nel punto s di σ, pure il teorema dell'integrazione per serie in questo caso è valevole (cfr. per il caso degli integrali semplici: Dini, *Fondamenti per la teorica delle funzioni*..., pag. 394, n. 285).

[2] Cfr. l'Appendice della mia cit. Memoria degli Annali di Matematica.

[3] Cfr. mia cit. Nota dell'Acc. delle Sc. di Torino, Art. II.

È noto poi che, se esiste un integrale regolare v delle (9), ne esisteranno infiniti altri, i quali si possono ottenere aggiungendo alla funzione v una costante; e che la condizione (10) è necessaria per l'esistenza di un integrale regolare v delle equazioni (9).

4. Supponiamo ora che la funzione $u(m)$, introdotta al § 1, sia la funzione:

$$Q = -\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f(m)}{r'}\,d\sigma,$$

dove bisogna avvertire che la variabile m, la quale comparisce esplicitamente sotto integrale, è variabile di integrazione. In questo caso la costante C è effettivamente nulla.

Per dimostrarlo osserviamo anzitutto che la funzione $u(m)$ è tale che esistono e sono determinati, finiti e continui i due limiti:

$$\lim_{ps=0}\frac{\partial U_1}{\partial n}, \quad \lim_{p's=0}\frac{\partial U_1}{\partial n}.$$

Infatti si ha:

$$\text{(nei punti di S)} \qquad Q = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma u(m)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma\left(\lim_{ps=0}\frac{\partial Q}{\partial n}\right)\frac{d\sigma}{r},$$

$$\text{(nei punti di S')} \quad -Q = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma u(m)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma\left(\lim_{p's=0}\frac{\partial Q}{\partial n}\right)\frac{d\sigma}{r};$$

donde:

$$\text{(nei punti di S)} \quad U_1 = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma u(m)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma = 2Q + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma\left(\lim_{ps=0}\frac{\partial Q}{\partial n}\right)\frac{d\sigma}{r},$$

$$\text{(nei punti di S')} \quad U_1 = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma u(m)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma = -2Q + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma\left(\lim_{p's=0}\frac{\partial Q}{\partial n}\right)\frac{d\sigma}{r};$$

e di qui apparisce appunto l'esistenza e l'uguaglianza dei due limiti sopra scritti.

Ciò premesso, sia P una funzione armonica in tutto lo spazio, che nei punti di σ prende il valore A costante e diverso da zero. La P nei punti di S sarà certamente uguale ad A; nei punti di S' esisterà e, dovendosi annullare all'infinito, non sarà costante; di modo che le derivate prime di P saranno nulle nei punti di S e generalmente diverse da *zero* nei punti di S'. La P poi all'infinito si annulla come $\frac{1}{r}$, le sue derivate prime come $\frac{1}{r^2}$; sicchè, posto:

$$\overline{\frac{\partial P}{\partial n}} = \lim_{ps=0}\frac{\partial P}{\partial n}, \qquad \overline{\overline{\frac{\partial P}{\partial n}}} = \lim_{p's=0}\frac{\partial P}{\partial n},$$

il *lemma di Green* ci darà:

$$A\int_\sigma \overline{\overline{\frac{\partial P}{\partial n}}}\, d\sigma = \int_\sigma P\, \overline{\overline{\frac{\partial P}{\partial n}}}\, d\sigma = -\int_{\sigma'} \left\{ \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)^2 \right\} dS' \neq 0,$$

ossia:

$$\int_\sigma \overline{\overline{\frac{\partial P}{\partial n}}}\, d\sigma \neq 0. \tag{13}$$

Posto:

$$\overline{U_i} = \lim_{pz=0} U_i, \qquad \overline{\overline{U_i}} = \lim_{p'z=0} U_i,$$

$$\overline{\frac{\partial U_i}{\partial n}} = \lim_{pz=0} \frac{\partial U_i}{\partial n}, \qquad \overline{\overline{\frac{\partial U_i}{\partial n}}} = \lim_{p'z=0} \frac{\partial U_i}{\partial n},$$

sarà:

$$\overline{\frac{\partial U_i}{\partial n}} = \overline{\overline{\frac{\partial U_i}{\partial n}}};$$

e quindi:

$$\int_\sigma P\, \overline{\frac{\partial U_i}{\partial n}}\, d\sigma = \int_\sigma P\, \overline{\overline{\frac{\partial U_i}{\partial n}}}\, d\sigma.$$

Ora si ha:

$$0 = A\int_\sigma \overline{\frac{\partial U_i}{\partial n}}\, d\sigma = \int_\sigma P\, \overline{\frac{\partial U_i}{\partial n}}\, d\sigma,$$

e, applicando il *lemma di Green*,

$$\int_\sigma P\, \overline{\overline{\frac{\partial U_i}{\partial n}}}\, d\sigma = \int_\sigma \overline{\overline{U_i}}\, \overline{\overline{\frac{\partial P}{\partial n}}}\, d\sigma;$$

sicchè avremo:

$$\int_\sigma \overline{\overline{U_i}}\, \overline{\overline{\frac{\partial P}{\partial n}}}\, d\sigma = 0,$$

e dalla seconda delle (2):

$$\int_\sigma u_i\, \overline{\overline{\frac{\partial P}{\partial n}}}\, d\sigma = \int_\sigma u_{i-1}\, \overline{\overline{\frac{\partial P}{\partial n}}}\, d\sigma$$

qualunque sia l'indice i. Adunque si avrà, avuto riguardo alla (4),

$$\int_\sigma u(m)\, \overline{\overline{\frac{\partial P}{\partial n}}}\, d\sigma = \int_\sigma u_1(m)\, \overline{\overline{\frac{\partial P}{\partial n}}}\, d\sigma = \cdots = \int_\sigma u_i(m)\, \overline{\overline{\frac{\partial P}{\partial n}}}\, d\sigma = \cdots = C\int_\sigma \overline{\overline{\frac{\partial P}{\partial n}}}\, d\sigma.$$

Di qui, rammentando che si è posto:

$$Q(m) = u(m),$$

e facendo uso del *lemma di Green*, risulterà:

$$C\int_\sigma \frac{\overline{\overline{\partial P}}}{\partial n}\,d\sigma = \int_\sigma Q(m)\frac{\overline{\overline{\partial P}}}{\partial n}\,d\sigma = \int_\sigma P \lim_{p's=0}\frac{\partial Q}{\partial n}\,d\sigma = A\int_\sigma \lim_{p's=0}\frac{\partial Q}{\partial n}\,d\sigma\,,$$

e dalla (12):

$$C\int_\sigma \frac{\overline{\overline{\partial P}}}{\partial n}\,d\sigma = A\int_\sigma \lim_{p's=0}\frac{\partial Q}{\partial n}\,d\sigma = A\int_\sigma \lim_{ps=0}\frac{\partial Q}{\partial n}\,d\sigma - A\int_\sigma f(m)\,d\sigma\,.$$

Ora la funzione Q nel campo S è armonica; per cui si ha:

$$\int_\sigma \lim_{ps=0}\frac{\partial Q}{\partial n}\,d\sigma = 0\,;$$

in questo modo, facendo uso della (10), avremo:

$$C\int_\sigma \frac{\overline{\overline{\partial P}}}{\partial n}\,d\sigma = 0\,,$$

e, avuto riguardo alla (13), risulterà:

$$C = 0\,.$$

5. Ciò posto, si consideri la funzione:

$$T = \Phi + Q\,. \tag{14}$$

Poichè Q e Φ sono armoniche in S ed in S', lo stesso sarà di T. Si ha poi dalla (7):

$$\lim_{p's=0}\Phi(p') = -u(s) = -Q(s)\,;$$

risulterà quindi:

$$\lim_{p's=0} T(p') = 0\,.$$

Le funzioni Q e Φ si annullano all'infinito rispettivamente come $\frac{1}{r}$ e $\frac{1}{r^2}$; per cui la funzione T si annullerà all'infinito e, in conseguenza della formola precedente, si avrà identicamente in tutto lo spazio S':

$$T = 0 \text{ [1]};$$

e quindi ancora:

$$\lim_{p's=0}\frac{\partial T}{\partial n} = 0\,.$$

Questa formola, insieme alle (8), (12), ci darà finalmente:

$$\lim_{ps=0}\frac{\partial T}{\partial n} = \lim_{ps=0}\frac{\partial T}{\partial n} - \lim_{p's=0}\frac{\partial T}{\partial n} = \left(\lim_{ps=0}\frac{\partial \Phi}{\partial n} - \lim_{p's=0}\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right) + \left(\lim_{ps=0}\frac{\partial Q}{\partial n} - \lim_{p's=0}\frac{\partial Q}{\partial n}\right) = f(s)\,.$$

[1] Questo risultato ci dice che una funzione potenziale di superficie Q, di cui la densità soddisfa alla condizione (10), si può sempre trasformare nei punti del campo S' in una funzione potenziale di doppio strato $-\Phi$.

Adunque *la funzione* T, data dalla formola (14), *è armonica in tutto lo spazio* S *e la sua derivata normale tende verso i valori arbitrariamente dati* $f(m)$, *quando dai punti dell'interno di* S *ci si avvicina indefinitamente ai punti di* σ; quindi essa risolve le equazioni (9).

2bis. Senza fare alcuna supposizione sul valore della costante C, si consideri la serie:

$$(5)' \qquad \varphi_1(m) = \{u(m) - u_1(m)\} + \{u_2(m) - u_3(m)\} + \cdots$$

Si ha:

$$|u_i(m) - u_{i+1}(m)| \leq M_i - m_{i+1} \leq M_i - m_i \leq \varrho^i(M_0 - m_0);$$

quindi la serie $\varphi_1(m)$ converge in ugual grado su tutta la superficie σ. Allora, posto:

$$(6)' \qquad \Phi_1 = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi_1(m)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma,$$

risultera Φ_1 funzione finita e continua dei punti di S e dei punti di S', anche quando i punti p e p' si avvicinano indefinitamente a σ.

Supposto che si tratti del punto p di S, si avrà, analogamente alla prima delle (2):

$$\lim_{ps=0}\Phi_1(p) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi_1(m)\frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial n}\,d\sigma + \varphi_1(s),$$

ossia, integrando per serie e facendo uso della (5)',

$$(7')\begin{cases}\lim\limits_{ps=0}\Phi_1(p) = \{u_1(s) - u_2(s)\} + \{u_3(s) - u_4(s)\} + \cdots + [\{u(s) - u_1(s)\} + \{u_2(s) - u_3(s)\} + \cdots] \\ \qquad\qquad = u(s) - C.\end{cases}$$

Inoltre, se si ammette anche qui che la funzione $u(m)$ è tale che esistano e siano determinati, finiti e continui su σ i due limiti:

$$\lim_{ps=0}\frac{\partial U_1}{\partial n}, \quad \lim_{p's=0}\frac{\partial U_1}{\partial n},$$

risulterà:

$$(8)' \qquad \lim_{ps=0}\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} - \lim_{p's=0}\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0.$$

La Φ_1 poi, come risulta dalla (6'), è armonica in tutto S ed in tutto S', all'infinito diviene infinitesima come $\frac{1}{r^2}$ e le sue derivate prime divengono infinitesime come $\frac{1}{r^3}$.

3bis. Premessi questi risultati, proponiamoci la ricerca di un integrale regolare delle equazioni:

$$(9)' \qquad \Delta^2 v' = 0 \text{ (nei punti di S')}, \qquad \frac{\partial v'}{\partial n} = f(m) \text{ (nei punti di } \sigma)$$

con $f(m)$ funzione arbitraria, finita e continua su tutta la superficie σ.

La condizione (10) in questo caso, come si sa, non è necessaria; e, se si richiede che l'integrale v' delle (9)' si annulli all'infinito come $\frac{1}{r}$, esso integrale sarà unico.

Posto anche qui:

$$(11)' \qquad Q_1 = -\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f(m)}{r}\,d\sigma,$$

si avrà, come al § 3,

$$(12)' \qquad \lim_{p\varepsilon=0}\frac{\partial Q_1}{\partial n} - \lim_{p'\varepsilon=0}\frac{\partial Q_1}{\partial n} = f(s);$$

e, se si suppone che la funzione $u(m)$ del § 2bis sia la funzione:

$$Q_1 = -\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f(m)}{r'}\,d\sigma,$$

avremo, come al § 4, che questa funzione $u(m)$ è tale appunto che esistono e sono determinati, finiti e continui i due limiti:

$$\lim_{p\varepsilon=0}\frac{\partial U_1}{\partial n}, \qquad \lim_{p'\varepsilon=0}\frac{\partial U_1}{\partial n}.$$

5bis. Si consideri ora la funzione:

$$(14)' \qquad T_1 = \Phi_1 - Q_1.$$

Essa è armonica in tutto S e in tutto S' come le funzioni Q_1 e Φ_1 ed all'infinito diviene infinitesima come $\frac{1}{r}$, mentre le sue derivate prime divengono infinitesime come $\frac{1}{r^2}$. Si ha poi dalla (7)':

$$\lim_{p\varepsilon=0}\Phi_1(p) = u(s) - C = Q_1(s) - C;$$

risulterà quindi:

$$\lim_{p\varepsilon=0} T_1(p) = -C.$$

Segue di qui che la funzione T_1 è uguale a $-C$ in tutto il campo S [1]; e così sarà:

$$\lim_{p\varepsilon=0}\frac{\partial T_1}{\partial n} = 0.$$

Avremo dunque, facendo uso della (8)' e della (12)',

$$\lim_{p'\varepsilon=0}\frac{\partial T_1}{\partial n} = -\left\{\lim_{p\varepsilon=0}\frac{\partial T_1}{\partial n} - \lim_{p'\varepsilon=0}\frac{\partial T_1}{\partial n}\right\} = -\left\{\lim_{p\varepsilon=0}\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} - \lim_{p'\varepsilon=0}\frac{\partial \Phi_1}{\partial n}\right\} +$$
$$+\left\{\lim_{p\varepsilon=0}\frac{\partial Q_1}{\partial n} - \lim_{p'\varepsilon=0}\frac{\partial Q_1}{\partial n}\right\} = f(s).$$

[1] Questo risultato ci dice che una funzione potenziale di superficie Q_1, a densità arbitraria, si può sempre trasformare nei punti del campo S in una funzione potenziale di doppio strato. (Cfr. per il risultato inverso la nota (*) in fondo all'Appendice della mia cit. Mem.).

Adunque *la funzione* T_1, data dalla formola (14)', *è armonica in tutto lo spazio* S', *all'infinito diviene infinitesima come* $\frac{1}{r}$, *mentre le sue derivate prime divengono infinitesime come* $\frac{1}{r^2}$, *e la sua derivata normale, col tendere dei punti* p' *di* S' *ai punti di* σ, *tende verso i valori arbitrariamente dati di* $f(m)$; essa quindi rappresenta l'integrale regolare delle equazioni (9)'.

6. Stabiliremo in questo paragrafo alcune formole, relative al problema del § 3, che ci saranno utili in seguito. Anzitutto si osservi che la funzione $f(m)$ è supposta finita; per cui sarà:

$$|f(m)| < \mu$$

con μ quantità finita, che si può fissare. Si osservi poi che l'integrale $\int_\sigma \frac{d\sigma}{4\pi r}$ è una funzione finita e contina dei punti di tutto lo spazio; per cui si può scrivere:

$$\left|\int_\sigma \frac{d\sigma}{4\pi r}\right| \leq L$$

con L quantità finita dipendente da σ. In questo modo avremo:

$$|Q| = |u| \leq L\mu, \tag{15}$$

per conseguenza:

$$M_0 - m_0 < 2L\mu,$$

e, in forza della (3)'',

$$|u_i| \leq \varrho^i (M_0 - m_0) < 2L\mu\, \varrho^i,$$

donde:

$$|\varphi| = |u + u_1 + u_2 + \cdots| < \frac{2L\mu}{1-\varrho}. \tag{16}$$

Ora si ha:

$$\lim_{p\varepsilon=0} T = \lim_{p\varepsilon=0} \Phi + \lim_{p\varepsilon=0} Q = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi(m) \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial n} d\sigma + \varphi(s) + Q(s) = u_1(s) + u_2(s) + \cdots + \varphi(s) + u(s)$$
$$= 2\varphi(s);$$

e poichè il massimo valore che può prendere la funzione armonica T è su σ, si avrà in forza della (16):

$$|T| < \frac{4L\mu}{1-\varrho}. \tag{17}$$

Si determini la costante A in modo che sia:

$$\int_\sigma (T + A)\, d\sigma = 0.$$

Poichè l'espressione $T + A$ deve annullarsi almeno in un punto di σ, avremo dalla (17):

$$|A| < \frac{4L\mu}{1-\varrho}; \tag{17$_1$}$$

e quindi, posto:

$$(14)_1 \qquad T' = T + A\,, \qquad H = \frac{8L}{1-\varrho}\,,$$

sarà T' l'integrale regolare delle equazioni (9) tale che

$$(18) \qquad \int_\sigma T'\,d\sigma = 0\,;$$

e inoltre si avrà:

$$(17)_2 \qquad |T'| < H\mu\,,$$

con H quantità finita, dipendente dalla sola natura della superficie σ come le quantità L e ϱ.

6bis. In questo paragrafo stabiliremo alcune formole analoghe alle precedenti e relative al problema del § 3bis. Posto anche qui:

$$|f(m)| < \mu\,,$$

dalla formola:

$$|u_i - u_{i+1}| \leq \varrho^i(M_0 - m_0) < 2L\mu\varrho^i\,,$$

risulterà:

$$(16)' \quad |\varphi_1| = |\}u - u_1\{ + \}u_2 - u_3\{ + \cdots| < 2L\mu(1 + \varrho^2 + \varrho^4 + \cdots) = \frac{2L\mu}{1-\varrho^2}\,;$$

e poichè:

$$\lim_{p's=0} T_1 = \lim_{p's=0} \Phi_1 - \lim_{p's=0} Q_1 = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi_1(m)\,\frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial n}\,d\sigma - \varphi_1(s) - Q_1(s) =$$
$$= \}u_1(s) - u_2(s)\{ + \}u_3(s) - u_4(s)\{ + \cdots - \varphi_1(s) - u(s) = -2\varphi_1(s) - C\,,$$
$$M_0 \geqq C \geqq m_0\,,$$

sarà:

$$(17)'_1 \qquad |C| < L\mu\,,$$

ed in S' (i punti di σ compresi):

$$(17)' \qquad |T_1| < \frac{4L\mu}{1-\varrho^2} + L\mu = \frac{5-\varrho^2}{1-\varrho^2}\,L\mu\,;$$

e quindi, posto:

$$H_1 = \frac{5-\varrho^2}{1-\varrho^2}\,L\,,$$

si potrà scrivere:

$$(17)'_2 \qquad |T_1| < H_1\mu\,,$$

con H_1 quantità finita, dipendente soltanto dalla natura di σ come le quantità L e ϱ.

7. Proponiamoci ora la ricerca dell'integrale regolare delle equazioni:

$$(19) \qquad \Delta^2 v = 0 \ \text{(nei punti di S)}\,, \qquad \frac{\partial v}{\partial n} = hv + f(m) \ \text{(nei punti di } \sigma)$$

per qualunque valore finito e positivo di h e per $f(m)$ funzione finita e continua qualsiasi dei punti di σ.

Si supponga dapprima che la funzione $f(m)$ soddisfi alla condizione:

$$\int_\sigma f(m)\, d\sigma = 0 .$$

Ciò posto, si considerino le equazioni:

$$\Delta^2 v_0 = 0 \text{ (nei punti di S)}, \qquad \frac{\partial v_0}{\partial n} = f(m) \text{ (nei punti di } \sigma).$$

Indicando rispettivamente con $\varphi^{(0)}, A_0, v_0$ le espressioni analoghe alle φ, A, T' del § 6, si avrà dalle (6), (11), (14), $(14)_1$, (18):

$$(20) \qquad v_0 = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(0)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f(m)}{r}\, d\sigma + A_0, \qquad \int_\sigma v_0\, d\sigma = 0;$$

e nei punti di S':

$$(21) \qquad 0 = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(0)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f(m)}{r}\, d\sigma .$$

Risulta poi dalle (16), $(17)_1$, $(17)_2$:

$$(22) \qquad |\varphi^{(0)}| < \frac{2L}{1-\varrho}\mu, \qquad |A_0| < \frac{4L}{1-\varrho}\mu, \qquad |v_0| < H\mu,$$

indicando anche qui con μ il massimo valore assoluto di $f(m)$.

Analogamente si considerino le equazioni:

$$\Delta^2 v_1 = 0 \text{ (nei punti di S)}, \qquad \frac{\partial v_1}{\partial n} = v_0(m) \text{ (nei punti di } \sigma)$$

e si introducano i simboli $\varphi^{(1)}, A_1, v_1$ analoghi ai precedenti $\varphi^{(0)}, A_0, v_0$. Si avrà:

$$(20)_1 \qquad v_1 = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(1)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{v_0}{r}\, d\sigma + A_1, \qquad \int_\sigma v_1\, d\sigma = 0;$$

e nei punti di S':

$$(21)_1 \qquad 0 = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(1)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{v_0}{r}\, d\sigma;$$

e si avranno ancora le disuguaglianze:

$$(22)_1 \qquad |\varphi^{(1)}| < \frac{2L}{1-\varrho} H\mu, \qquad |A_1| < \frac{4L}{1-\varrho} H\mu, \qquad |v_1| < H^2\mu.$$

Seguitando indefinitamente nella stessa guisa, otterremo tre serie di espressioni:

$$\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)}, \ldots; \qquad A_2, A_3, \ldots; \qquad v_2, v_3, \ldots$$

tali che per la terna generica $\varphi^{(i)}, A_i, v_i$ si avrà:

$$\Delta^2 v_i = 0 \text{ (nei punti di S)}, \qquad \frac{\partial v_i}{\partial n} = v_{i-1}(m) \text{ (nei punti di } \sigma)$$

$$(20)_i \qquad v_i = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(i)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{v_{i-1}}{r}\, d\sigma + A_i, \qquad \int_\sigma v_i\, d\sigma = 0$$

$$(21)_i \qquad 0 = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(i)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{v_{i-1}}{r} d\sigma, \quad \text{(nei punti di S')}$$

$$(22)_i \qquad |\varphi^{(i)}| < \frac{2L}{1-\varrho} H^i \mu, \quad |A_i| < \frac{4L}{1-\varrho} H^i \mu, \quad |v_i| < H^{i+1}\mu.$$

8. Ora si considerino le tre serie:

$$(23) \qquad \begin{cases} v = v_0 + v_1 h + v_2 h^2 + \cdots, \\ \varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} h + \varphi^{(2)} h^2 + \cdots, \\ A = A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + \cdots. \end{cases}$$

In forza delle (22), $(22)_1$, $(22)_i$, per tutti i valori positivi di h inferiori ad $\frac{1}{H}$, la prima di queste serie converge in ugual grado in tutto S (i punti di σ compresi), la seconda converge in ugual grado su tutta la superficie σ, la terza è una serie pure convergente; e perciò per questi valori di h la v sarà certamente una funzione finita e continua dei punti di S (i punti di σ compresi), la φ sarà certamente una funzione finita e continua dei punti di σ, la A una quantità determinata e finita.

Integrando per serie, risulterà poi dalle (20), $(20)_1$, $(20)_i$:

$$(24) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f + hv}{r} d\sigma + A = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(0)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f}{r} d\sigma + A_0\right\} + \\ \qquad + \left\{\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(1)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{v_0}{r} d\sigma + A_1\right\} h + \cdots \\ \qquad \cdots + \left\{\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(i)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{v_{i-1}}{r} d\sigma + A_i\right\} h^i + \cdots = v, \\ \int_\sigma v\, d\sigma = 0, \end{cases}$$

e dalle (21), $(21)_1$, $(21)_i$ si avrà nei punti di S':

$$(25) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f + hv}{r} d\sigma = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(0)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f}{r} d\sigma\right\} + \\ \qquad + \left\{\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(1)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{v_0}{r} d\sigma\right\} h + \cdots \\ \qquad \cdots + \left\{\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(i)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{v_{i-1}}{r} d\sigma\right\} h^i + \cdots = 0. \end{cases}$$

Dalla continuità della espressione $f+hv$ nei punti di σ segue:

$$(26)\qquad \lim_{ps=0}\frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \frac{f+hv}{r}\,d\sigma-\lim_{p's=0}\frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \frac{f+hv}{r}\,d\sigma=-4\pi(f+hv)_s,$$

dove s è un punto arbitrario di σ, p e p' sono due punti rispettivamente di S e di S'.

Inoltre la funzione φ, che comparisce nelle formole (24), (25), è quella, analoga alla φ dei §§ 2, 6, che si otterrebbe partendo, invece che dalla $f(m)$, dall'altra espressione $f+hv$; per cui si avrà, come al § 2,

$$(27)\qquad \lim_{ps=0}\frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma-\lim_{p's=0}\frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma=0\ (^1).$$

Dalla (25) risulta che le derivate prime dell'espressione al primo membro della (25) stessa sono nulle in tutti i punti di S'; per cui sarà:

$$\lim_{p's=0}\frac{\partial}{\partial n}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma-\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f+hv}{r}\,d\sigma\right\}=0.$$

Questa insieme alla prima delle (24) ed alle (26), (27) ci dà finalmente, essendo A quantità costante,

$$\begin{aligned}\lim_{ps=0}\frac{\partial v}{\partial n}&=\lim_{ps=0}\frac{\partial}{\partial n}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma-\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f+hv}{r}\,d\sigma\right\}-\\&\qquad-\lim_{p's=0}\frac{\partial}{\partial n}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma-\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f+hv}{r}\,d\sigma\right\}=\\&=\frac{1}{2\pi}\left\{\lim_{ps=0}\frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma-\lim_{p's=0}\frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma\right\}-\\&\qquad-\frac{1}{4\pi}\left\{\lim_{ps=0}\frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \frac{f+hv}{r}\,d\sigma-\lim_{p's=0}\frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \frac{f+hv}{r}\,d\sigma\right\}=\\&=-\frac{1}{4\pi}\left\{-4\pi(f+hv)_s\right\}=(f+hv)_s.\end{aligned}$$

(1) Si può anche ragionare nel seguente modo: Dalla (25) si ricava:

$$\lim_{p's=0}\frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma=\frac{1}{2}\lim_{p's=0}\frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \frac{f+hv}{r}\,d\sigma.$$

Questa formola ci dice che l'espressione al primo membro esiste ed è finita e continua su σ; di modo che esisterà e sarà finita e continua su σ [cfr. la nota (**) in fondo all'Appendice della mia cit. Mem. degli Annali di Mat.] anche l'altra espressione:

$$\lim_{ps=0}\frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma;$$

e conseguentemente dalla teoria delle funzioni potenziali di doppio strato si avrà la (27).

Di qui risulta che *la funzione armonica, determinata dalla prima delle serie* (23), *è l'integrale regolare delle equazioni* (19) *per qualunque valore positivo di h inferiore ad* $\frac{1}{H}$.

9. Ora si fissi un valore positivo h_0 del parametro h inferiore ad $\frac{1}{H}$. Essendo la quantità μ costante, le (19) ci daranno per $h = h_0$:

$$\Delta^2\left(v + \frac{\mu}{h_0}\right) = 0, \qquad \Delta^2\left(v - \frac{\mu}{h_0}\right) = 0 \quad \text{(nei punti di S)}$$

$$\frac{\partial\left(v + \frac{\mu}{h_0}\right)}{\partial n} - h_0\left(v + \frac{\mu}{h_0}\right) = f - \mu \leq 0, \qquad \frac{\partial\left(v - \frac{\mu}{h_0}\right)}{\partial n} - h_0\left(v - \frac{\mu}{h_0}\right) = f + \mu \geq 0$$

(nei punti di σ)

e quali ultime si possono ancora scrivere:

$$(28) \qquad \frac{\partial\left(v + \frac{\mu}{h_0}\right)}{\partial n} \leq h_0\left(v + \frac{\mu}{h_0}\right), \qquad \frac{\partial\left(v - \frac{\mu}{h_0}\right)}{\partial n} \geq h_0\left(v - \frac{\mu}{h_0}\right) \quad \text{(nei punti di } \sigma).$$

Di qui segue che l'espressione $v + \frac{\mu}{h_0}$ non può mai essere negativa. Infatti se divenisse negativa in un punto qualsiasi di S o di σ, dovrebbe in un certo punto di σ avere un minimo negativo, e così la derivata normale in questo punto dovrebbe essere positiva o nulla, contrariamente alla prima delle (28). Similmente la espressione $v - \frac{\mu}{h_0}$ non può mai essere positiva; di guisa che in un punto qualsiasi di S (i punti di σ compresi) si avrà sempre:

$$(29) \qquad |v| < \frac{\mu}{h_0}.$$

La funzione φ che comparisce nella formola (24) è quella che, come è stato osservato precedentemente, si otterrebbe partendo dall'espressione $hv + f$, invece che dall'altra $f(m)$; e poichè per $h = h_0$ si ha:

$$(30) \qquad |h_0 v + f| < 2\mu,$$

così avremo, analogamente alla (16) per $h = h_0$:

$$(31) \qquad |\varphi| < \frac{4L\mu}{1 - \varrho},$$

e analogamente alla $(17)_1$:

$$(32) \qquad |A| < \frac{8L\mu}{1 - \varrho} \text{ (1)}.$$

(1) In relazione alla nota (1) del paragrafo precedente si può ancora ragionare nel seguente modo: Poichè per $h < \frac{1}{H}$ esiste l'integrale regolare delle equazioni (19), che è anche unico, è chiaro che, partendo dalla funzione $f + hv$ e adoperando il procedimento dei §§ 2, 5 e 6, si devono trovare

10. Premesse queste disuguaglianze, le ultime due delle quali potrebbero anche ottenersi dalla seconda e dalla terza delle serie (23) sotto una forma un po' diversa, si considerino gli integrali $w_0, w_1, w_2, \ldots$ delle seguenti equazioni:

$$\text{(nei punti di S)} \quad \Delta^2 w_0 = 0, \qquad \Delta^2 w_1 = 0, \qquad \Delta^2 w_2 = 0, \ldots$$

$$\text{(nei punti di } \sigma) \quad \frac{\partial w_0}{\partial n} = h_0 w_0 + f, \qquad \frac{\partial w_1}{\partial n} = h_0 w_1 + w_0, \qquad \frac{\partial w_2}{\partial n} = h_0 w_2 + w_1, \ldots$$

Indicando daccapo con $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots$ le espressioni analoghe alla φ del § 8 e con $A_0, A_1, A_2, \ldots$ le costanti analoghe alla costante A dello stesso paragrafo, corrispondenti rispettivamente agli integrali $w_0, w_1, w_2, \ldots$ delle equazioni precedenti, avremo dalle (24):

$$(33) \quad \begin{cases} w_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \varphi^{(0)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f + h_0 w_0}{r} d\sigma + A_0, & \displaystyle\int_\sigma w_0 d\sigma = 0, \\ w_1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \varphi^{(1)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{w_0 + h_0 w_1}{r} d\sigma + A_1, & \displaystyle\int_\sigma w_1 d\sigma = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

e dalle (29), (31), (32):

$$(34) \quad \begin{cases} |w_0| < \frac{\mu}{h_0}, \ |w_1| < \frac{\mu}{h_0^2}, \ |w_2| < \frac{\mu}{h_0^3}, \ldots; \\ |\varphi^{(0)}| < \frac{4L\mu}{1-\varrho}, \ |\varphi^{(1)}| < \frac{4L\mu}{1-\varrho}\cdot\frac{1}{h_0}, \ |\varphi^{(2)}| < \frac{4L\mu}{1-\varrho}\cdot\frac{1}{h_0^2}, \ldots; \\ |A_0| < \frac{8L\mu}{1-\varrho}, \quad |A_1| < \frac{8L\mu}{1-\varrho}\cdot\frac{1}{h_0}, \quad |A_2| < \frac{8L\mu}{1-\varrho}\cdot\frac{1}{h_0^2}, \ldots \end{cases}$$

Dalla (25) risulterà poi nei punti di S':

$$(35) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \varphi^{(0)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f + h_0 w_0}{r} d\sigma = 0, \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \varphi^{(1)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{w_0 + h_0 w_1}{r} d\sigma = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

---

una certa funzione φ, analoga alla φ del § 2, e una certa costante A, analoga alla A del § 6, tali che:

$$v = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f + hv}{r} d\sigma + A, \quad \int_\sigma v d\sigma = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f + hv}{r} d\sigma = 0 \text{ (nei punti di S')}, \quad |\varphi| < \frac{4L\mu}{1-\varrho}, \quad |A| < \frac{8L\mu}{1-\varrho}.$$

11. Ciò posto, si considerino le tre serie:

$$(36)\qquad \begin{cases} w = w_0 + w_1 h + w_2 h^2 + \cdots \\ \varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} h + \varphi^{(2)} h^2 + \cdots \\ A = A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + \cdots \end{cases}$$

con h parametro positivo.

Dalle disuguaglianze (34) segue che, per tutti i valori positivi di h inferiori ad h_0, la prima di queste serie converge in ugual grado in tutto S (i punti di σ compresi), la seconda converge in ugual grado su tutta la superficie σ, la terza è pure convergente; e perciò, per questi valori di h, la w rappresenta certamente una funzione finita e continua dei punti di S (i punti di σ compresi), la φ rappresenta una funzione finita e continua dei punti di σ, la A è una quantità determinata e finita.

Integrando per serie, risulterà dalle (33):

$$(37)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \varphi \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma - \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma \dfrac{f + (h + h_0) w}{r}\, d\sigma + A = \\ \qquad = \left\{ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \varphi^{(0)} \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma - \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma \dfrac{f + h_0 w_0}{r}\, d\sigma + A_0 \right\} + \\ \qquad + \left\{ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \varphi^{(1)} \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma - \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma \dfrac{w_0 + h_0 w_1}{r}\, d\sigma + A_1 \right\} h + \\ \qquad + \left\{ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \varphi^{(2)} \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma - \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma \dfrac{w_1 + h_0 w_2}{r}\, d\sigma + A_2 \right\} h^2 + \cdots = w, \\ \displaystyle\int_\sigma w\, d\sigma = 0, \end{cases}$$

e dalle (35) si avrà nei punti di S':

$$(38)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \varphi \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma - \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma \dfrac{f + (h + h_0) w}{r}\, d\sigma = \\ \qquad = \left\{ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \varphi^{(0)} \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma - \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma \dfrac{f + h_0 w_0}{r}\, d\sigma \right\} + \\ \qquad + \left\{ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \varphi^{(1)} \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma - \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma \dfrac{w_0 + h_0 w_1}{r}\, d\sigma \right\} h + \\ \qquad + \left\{ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \varphi^{(2)} \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma - \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma \dfrac{w_1 + h_0 w_2}{r}\, d\sigma \right\} h^2 + \cdots = 0. \end{cases}$$

Dalla continuità nei punti di σ dell'espressione $f + (h + h_0) w$ segue:

$$(39)\qquad \lim_{p=0} \frac{\partial}{\partial n} \int_\sigma \frac{f + (h + h_0) w}{r}\, d\sigma - \lim_{p'=0} \frac{\partial}{\partial n} \int_\sigma \frac{f + (h + h_0) w}{r}\, d\sigma = -4\pi \{ f + (h + h_0) w \}_s,$$

dove s è un punto arbitrario di σ e p, p' sono due punti rispettivamente di S e di S'. Inoltre la funzione φ, che comparisce nelle formole (37), (38), è quella, analoga alla φ dei §§ 2, 6, che si otterrebbe partendo dall'espressione $f+(h+h_0)w$, invece che dalla $f(m)$ di quei paragrafi; per cui si avrà, come al § 2,

$$(39)_1 \qquad \lim_{ps=0} \frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma - \lim_{p's=0} \frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma = 0 \text{ (}^1\text{)}.$$

Ora dalla (38) risulta che le derivate prime dell'espressione al primo membro della (38) stessa sono nulle in tutti i punti del campo S'; per cui sarà:

$$\lim_{p's=0} \frac{\partial}{\partial n}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f+(h+h_0)w}{r}\, d\sigma\right\} = 0\,;$$

e così avremo dalla prima delle (37) e dalle (39), $(39)_1$:

$$\begin{aligned}
\lim_{ps=0} \frac{\partial w}{\partial n} &= \lim_{ps=0} \frac{\partial}{\partial n}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f+(h+h_0)w}{r}\, d\sigma\right\} - \\
&- \lim_{p's=0} \frac{\partial}{\partial n}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f+(h+h_0)w}{r}\, d\sigma\right\} = \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\lim_{ps=0} \frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma - \lim_{p's=0} \frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma\right\} - \\
&- \frac{1}{4\pi}\left\{\lim_{ps=0} \frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \frac{f+(h+h_0)w}{r}\, d\sigma - \lim_{p's=0} \frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \frac{f+(h+h_0)w}{r}\, d\sigma\right\} = \\
&= -\frac{1}{4\pi}\Big[-4\pi\,\{f+(h+h_0)w\}_s\Big] = \{f+(h+h_0)w\}_s.
\end{aligned}$$

Di qui risulta che *la funzione armonica, determinata dalla prima delle serie* (36) *per* $h < h_0$, *è l'integrale regolare delle equazioni*:

$$(40) \qquad \Delta^2 w = 0 \text{ (nei punti di S)}, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = (h+h_0)\,w + f \text{ (nei punti di } \sigma).$$

12. Ora il valore di h si può prendere vicino quanto si vuole ad h_0, così come h_0 si può prendere vicino quanto si vuole a $\frac{1}{H}$; di maniera che basterà scegliere h_0 sufficientemente vicino ad $\frac{1}{H}$, perchè anche h si possa prendere vicino ad $\frac{1}{H}$ tanto quanto si vuole. In conclusione la w rappresenta l'integrale regolare delle equazioni (40) per $h+h_0$ inferiore al valore $\frac{2}{H}$ e anche vicino ad esso tanto quanto si vuole; ossia w rappresenta l'integrale regolare delle equazioni (19) per qualunque valore positivo del parametro h inferiore a $\frac{2}{H}$.

(1) Cfr. la nota (1) del § 8.

Seguitando sempre nella stessa guisa, dopo i operazioni arriveremo alla determinazione dell'integrale regolare delle equazioni (19) per $h < \frac{i}{H}$; di modo che con questo procedimento si può arrivare alla determinazione dell'integrale regolare delle equazioni (19) per un valore positivo prestabilito qualsiasi del parametro h.

13. Rammentiamo che per dimostrare l'esistenza dell'integrale regolare delle equazioni (19) per qualsiasi valore positivo del parametro h, abbiamo fin da principio supposta soddisfatta la condizione:

$$\int_\sigma f d\sigma = 0.$$

Nel caso in cui la $f(m)$ non soddisfa a questa condizione, si ponga:

$$\int_\sigma f d\sigma = \mathrm{B}.a,$$

dove a è l'area della superficie σ, B una costante certamente finita; e si consideri la funzione:

$$f' = f - \mathrm{B}.$$

Si avrà:

$$\int_\sigma f' d\sigma = \int_\sigma f d\sigma - \int_\sigma \mathrm{B} d\sigma = 0;$$

e quindi siamo sicuri dell'esistenza dell'integrale regolare v' delle equazioni:

$$\Delta^2 v' = 0 \text{ (nei punti di S)}, \quad \frac{\partial v'}{\partial n} = hv' + f' \text{ (nei punti di } \sigma)$$

per qualunque valore positivo del parametro h. Posto adunque:

$$v = v' - \frac{\mathrm{B}}{h},$$

avremo:

$$\Delta^2 v = 0 \text{ (nei punti di S)}, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = hv + f \text{ (nei punti di } \sigma);$$

e così *risulta dimostrata l'esistenza dell'integrale regolare delle equazioni* (19) *qualunque sia la funzione finita e continua* $f(m)$.

7bis. Ci si proponga ora la ricerca dell'integrale regolare delle equazioni:

$$(19)' \qquad \Delta^2 v = 0 \text{ (nei punti di S')}, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = hv + f(m) \text{ (nei punti di } \sigma)$$

per qualunque valore finito e positivo di h e per $f(m)$ funzione finita e continua qualsiasi dei punti di σ.

Per questo incominciamo a considerare le equazioni:

$$\Delta^2 v_0 = 0 \text{ (nei punti di S')}, \quad \frac{\partial v_0}{\partial n} = f(m) \text{ (nei punti di } \sigma).$$

Indicando con $\varphi^{(0)}$, v_0, C_0 rispettivamente le espressioni analoghe alle φ_1, T_1, C del paragrafo 6bis, si avrà dalle (6)', (11)', (14)':

$$(20)' \qquad v_0 = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(0)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f(m)}{r} d\sigma,$$

e nei punti di S:

$$-C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(0)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f(m)}{r} d\sigma .$$

Risulta poi dalle (16)′, (17)′$_1$, (17)′$_2$:

$$(22)' \qquad |\varphi^{(0)}| < \frac{2L}{1-\varrho^2}\mu, \quad |C_0| < L\mu, \quad |v_0| < \mu H_1,$$

indicando, come al solito, con μ il massimo valore assoluto di $f(m)$.

Analogamente si considerino le equazioni:

$$\Delta^2 v_1 = 0 \text{ (nei punti di S')}, \qquad \frac{\partial v_1}{\partial n} = v_0 \text{ (nei punti di } \sigma)$$

e si introducano i simboli $\varphi^{(1)}, v_1, C_1$ analoghi ai precedenti $\varphi^{(0)}, v_0, C_0$. Si avrà:

$$(20)'_1 \qquad v_1 = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(1)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{v_0}{r} d\sigma,$$

e nei punti di S:

$$(21)'_1 \qquad -C_1 = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(1)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{v_0}{r} d\sigma;$$

e si avranno ancora le disuguaglianze:

$$(22)'_1 \qquad |\varphi^{(1)}| < \frac{2L}{1-\varrho^2}\mu H_1, \quad |C_1| < L\mu H_1, \quad |v_1| < \mu H_1^2.$$

Seguitando indefinitamente nella stessa guisa, si otterranno tre serie di espressioni:

$$\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)}, \ldots ; \; v_2, v_3, \ldots ; \; C_2, C_3, \ldots$$

tali che per la terna generica $\varphi^{(i)}, v_i, C_i$ si avrà:

$$\Delta^2 v_i = 0 \text{ (nei punti di S')}, \qquad \frac{\partial v_i}{\partial n} = v_{i-1} \text{ (nei punti di } \sigma)$$

$$(20)'_i \qquad v_i = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(i)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{v_{i-1}}{r} d\sigma,$$

$$(21)'_i \qquad -C_i = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(i)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{v_{i-1}}{r} d\sigma, \text{ (nei punti di S)}$$

$$(22)'_i \qquad |\varphi^{(i)}| < \frac{2L}{1-\varrho^2}\mu H_1^i, \quad |C_i| < L\mu H_1^i, \quad |v_i| < \mu H_1^{i+1}.$$

8bis. Ora si considerino le tre serie:

$$(23)' \qquad \begin{cases} v = v_0 + v_1 h + v_2 h^2 + \cdots, \\ \varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} h + \varphi^{(2)} h^2 + \cdots, \\ C = C_0 + C_1 h + C_2 h^2 + \cdots. \end{cases}$$

In forza delle (22)′, (22)′$_1$, (22)′$_i$, per tutti i valori positivi di h inferiori ad $\frac{1}{H_1}$, la prima di queste serie converge in ugual grado in tutto S′ (i punti di σ compresi), la seconda converge in ugual grado su tutta la superficie σ, la terza è pure convergente; e così per questi stessi valori di h la v sarà certamente una funzione finita e continua dei punti di S′ (i punti di σ compresi), la φ sarà certamente una funzione finita e continua dei punti di σ, la C una quantità determinata e finita.

Integrando per serie, risulterà poi dalle (20)′, (20)′$_1$, (20)′$_i$:

$$(24)' \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f+hv}{r} d\sigma = & \left\{ \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(0)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f}{r} d\sigma \right\} + \\ & + \left\{ \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(1)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{v_0}{r} d\sigma \right\} h + \cdots \\ & \cdots + \left\{ \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(i)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{v_{i-1}}{r} d\sigma \right\} h^i + \cdots = v, \end{aligned} \right.$$

e dalle (21)′, (21)′$_1$, (21)′$_i$ si avrà nei punti di S:

$$(25)' \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f+hv}{r} d\sigma = & \left\{ \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(0)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f}{r} d\sigma \right\} + \\ & + \left\{ \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(1)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{v_0}{r} d\sigma \right\} h + \cdots \\ & \cdots + \left\{ \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(i)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{v_{i-1}}{r} d\sigma \right\} h^i + \cdots = -C. \end{aligned} \right.$$

Dalla continuità nei punti di σ della espressione $f+hv$ risulta:

$$(26)' \qquad \lim_{ps=0} \frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \frac{f+hv}{r} d\sigma - \lim_{p's=0} \frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \frac{f+hv}{r} d\sigma = -4\pi(f+hv)_s,$$

dove s è un punto arbitrario di σ, p e p' sono due punti rispettivamente di S e di S′.

Inoltre la funzione φ, che comparisce nelle formole (24)′, (25)′, è quella, analoga alla φ_1 dei §§ 2bis, 6bis, che si otterrebbe partendo, invece che dalla $f(m)$ di quei paragrafi, dall'altra $f+hv$; per cui si avrà, come al § 2bis,

$$(27)' \qquad \lim_{ps=0} \frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - \lim_{p's=0} \frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = 0 \text{ (}^1\text{)}.$$

Dalla (25)′ poi segue che le derivate prime dell'espressione al primo membro

(¹) Cfr. la nota (¹) del § 8.

della stessa (25)′ sono identicamente nulle in tutti i punti di S; per cui si potrà scrivere:

$$\lim_{ps=0} \frac{\partial}{\partial n}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f+hv}{r}\, d\sigma\right\} = 0.$$

Questa insieme alla (24)′ ed alle (26)′, (27)′ ci dà finalmente:

$$\begin{aligned}\lim_{p's=0} \frac{\partial v}{\partial n} &= \lim_{p's=0} \frac{\partial}{\partial n}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f+hv}{r}\, d\sigma\right\} - \\ &- \lim_{ps=0} \frac{\partial}{\partial n}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f+hv}{r}\, d\sigma\right\} = \\ &= -\frac{1}{2\pi}\left\{\lim_{ps=0} \frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma - \lim_{p's=0} \frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma\right\} - \\ &- \frac{1}{4\pi}\left\{\lim_{ps=0} \frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \frac{f+hv}{r}\, d\sigma - \lim_{p's=0} \frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \frac{f+hv}{r}\, d\sigma\right\} = (f+hv)_s.\end{aligned}$$

Di qui risulta che *la funzione armonica, determinata dalla prima delle* (23)′, *è l'integrale regolare delle equazioni* (19)′ *per qualunque valore positivo di h inferiore ad* $\frac{1}{H_1}$.

9bis. Fissato un valore positivo h_0 inferiore ad $\frac{1}{H_1}$, avremo, come al § 9, per $h = h_0$:

$$(29)' \qquad |v| < \frac{\mu}{h_0}, \quad |h_0 v + f| < 2\mu, \quad |\varphi| < \frac{4L}{1-\varrho^2}\mu, \quad |C| < 2L\mu.$$

10bis. Premesse queste disuguaglianze, si considerino gli integrali regolari delle seguenti equazioni:

(nei punti di S′) $\Delta^2 w_0 = 0, \qquad \Delta^2 w_1 = 0, \qquad \Delta^2 w_2 = 0, \ldots$

(nei punti di σ) $\frac{\partial w_0}{\partial n} = h_0 w_0 + f, \quad \frac{\partial w_1}{\partial n} = h_0 w_1 + w_0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial n} = h_0 w_2 + w_1, \ldots$

Indicando anche qui con $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots$; $C_0, C_1, C_2, \ldots$ le espressioni, analoghe alle φ, C dei §§ 8bis, 9bis, corrispondenti rispettivamente agli integrali w_0, $w_1, w_2, \ldots$ delle equazioni precedenti, avremo dalla (24)′:

$$(33)' \qquad \left\{\begin{aligned} w_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(0)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f+h_0 w_0}{r}\, d\sigma, \\ w_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(1)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{w_0+h_0 w_1}{r}\, d\sigma, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

e dalle (29)':

$$(34)' \quad \begin{cases} |w_0| < \frac{\mu}{h_0}, & |w_1| < \frac{\mu}{h_0^2}, & |w_2| < \frac{\mu}{h_0^3}, \dots; \\ |\varphi^{(0)}| < \frac{4L}{1-\varrho^2}\mu, & |\varphi^{(1)}| < \frac{4L}{1-\varrho^2}\frac{\mu}{h_0}, & |\varphi^{(2)}| < \frac{4L}{1-\varrho^2}\frac{\mu}{h_0^2}, \dots; \\ |C_0| < 2L\mu, & |C_1| < 2L\frac{\mu}{h_0}, & |C_2| < 2L\frac{\mu}{h_0^2}, \dots. \end{cases}$$

Dalla (25)' risulterà poi nei punti di S:

$$(35)' \quad \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(0)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f + h_0 w_0}{r} d\sigma = -C_0, \\ \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(1)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{w_0 + h_0 w_1}{r} d\sigma = -C_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

11bis. Ciò posto, si considerino le tre serie:

$$(36)' \quad \begin{cases} w = w_0 + w_1 h + w_2 h^2 + \cdots \\ \varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} h + \varphi^{(2)} h^2 + \cdots \\ C = C_0 + C_1 h + C_2 h^2 + \cdots \end{cases}$$

con h parametro positivo.

Dalle disuguaglianze (34)' segue che, per tutti i valori di h positivi e inferiori ad h_0, la prima di queste serie converge in ugual grado in tutto S' (i punti di σ compresi), la seconda converge in ugual grado su tutta la superficie σ, la terza è pure convergente; e perciò, per questi stessi valori di h, la w rappresenta certamente una funzione finita e continua dei punti di S' (i punti di σ compresi), la φ rappresenta una funzione finita e continua di punti σ, la C una quantità determinata e finita.

Integrando per serie, risulterà poi dalle (33)':

$$(37)' \quad \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f + (h+h_0) w}{r} d\sigma = \\ \qquad = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(0)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f + h_0 w_0}{r} d\sigma\right\} + \\ \qquad + \left\{\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(1)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{w_0 + h_0 w_1}{r} d\sigma\right\} h + \\ \qquad + \left\{\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(2)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{w_1 + h_0 w_2}{r} d\sigma\right\} h^2 + \cdots = w, \end{cases}$$

e dalle (35)′ si avrà nei punti di S:

$$(38)' \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f+(h+h_0)w}{r} d\sigma = \\ &= \left\{\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(0)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f+h_0 w_0}{r} d\sigma\right\} + \\ &+ \left\{\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(1)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{w_0+h_0 w_1}{r} d\sigma\right\} h + \\ &+ \left\{\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi^{(2)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{w_1+h_0 w_2}{r} d\sigma\right\} h^2 + \cdots = -C. \end{aligned} \right.$$

Dalla continuità della espressione $f+(h+h_0)w$ nei punti di σ segue:

$$(39)' \lim_{ps=0} \frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \frac{f+(h+h_0)w}{r} d\sigma - \lim_{p's=0} \frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \frac{f+(h+h_0)w}{r} d\sigma = -4\pi \{f+(h+h_0)w\}_s,$$

dove s è un punto arbitrario di σ, e p, p' sono due punti rispettivamente di S, S′.

Inoltre la funzione φ, che comparisce nelle formole (37)′, (38)′, è quella, analoga alla φ_1 dei §§ 2bis, 6bis, che si otterrebbe partendo dall' espressione $f+(h+h_0)w$, invece che dalla $f(m)$ di quei paragrafi; per cui si avrà, come al § 2bis,

$$(39)'_1 \qquad \lim_{ps=0} \frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - \lim_{p's=0} \frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = 0 \text{ (1)}.$$

Ora dalla (38)′ risulta che le derivate prime dell' espressione al primo membro della (38)′ stessa sono nulle in tutti i punti del campo S; per cui sarà:

$$\lim_{ps=0} \frac{\partial}{\partial n}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f+(h+h_0)w}{r} d\sigma\right\} = 0;$$

e così avremo dalle (37)′, (39)′, (39)′$_1$:

$$\begin{aligned} \lim_{p's=0} \frac{\partial w}{\partial n} &= \lim_{p's=0} \frac{\partial}{\partial n}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f+(h+h_0)w}{r} d\sigma\right\} - \\ &- \lim_{ps=0} \frac{\partial}{\partial n}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f+(h+h_0)w}{r} d\sigma\right\} = \\ &= -\frac{1}{2\pi}\left\{\lim_{ps=0} \frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - \lim_{p's=0} \frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma\right\} - \\ &- \frac{1}{4\pi}\left\{\lim_{ps=0} \frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \frac{f+(h+h_0)w}{r} d\sigma - \lim_{p's=0} \frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \frac{f+(h+h_0)w}{r} d\sigma\right\} = \\ &= -\frac{1}{4\pi}\{-4\pi[f+(h+h_0)w]_s\} = \{f+(h+h_0)w\}_s. \end{aligned}$$

(1) Cfr. la nota (1) del § 8.

Di qui risulta che *la funzione* w, *determinata dalla prima delle serie* (36)' *per* $h < h_0$, *è l'integrale regolare delle equazioni:*

$$(40)' \quad \Delta^2 w = 0 \ \text{(nei punti di S')}, \qquad \frac{\partial w}{\partial n} = (h + h_0) w + f \ \text{(nei punti di } \sigma).$$

12bis. Ripetendo i ragionamenti del § 12 si dimostra che *w rappresenta l'integrale regolare delle equazioni* (19)' *per qualunque valore positivo del parametro h inferiore a* $\frac{2}{H_1}$, e che, adoperando lo stesso procedimento un certo numero di volte, *si può arrivare alla determinazione dell'integrale regolare delle* (19)' *per un valore positivo prestabilito qualsiasi del parametro h.*

CAPITOLO II.

Integrazione delle equazioni del tipo (*b*).

1. Si considerino le equazioni:

$$(1) \qquad \text{(nei punti di S)} \ \Delta^2 v + \psi = 0, \qquad \text{(nei punti di } \sigma) \ \frac{\partial v}{\partial n} = hv,$$

dove ψ è una funzione finita e continua dei punti dello spazio finito S, insieme alle sue derivate prime, i punti di σ al più esclusi per queste derivate; h è una costante positiva.

Queste equazioni appartengono al tipo delle equazioni (β) dell'introduzione, la cui integrazione, come si è visto, dipende dalla integrazione delle equazioni del tipo (a). Per trovare una espressione analitica dell'integrale regolare delle equazioni (1), si può procedere nel seguente modo.

Si ponga:

$$(2) \qquad M = \int_s \psi dS;$$

e si considerino le equazioni:

$$(1)' \qquad \text{(nei punti di S)} \ \Delta^2 v' + \psi = 0, \qquad \text{(nei punti di } \sigma) \ \frac{\partial v'}{\partial n} = \frac{M}{a},$$

nelle quali a indica l'area della superficie σ.

Si ponga ancora:

$$(3) \qquad v'_1 = \frac{1}{4\pi} \int_s \frac{\psi}{r} dS;$$

e si considerino le altre equazioni:

$$(1)'_1 \quad \text{(nei punti di S)} \ \Delta^2 v'_2 = 0, \qquad \text{(nei punti di } \sigma) \ \frac{\partial v'_2}{\partial n} = -\frac{\partial v'_1}{\partial n} + \frac{M}{a}.$$

Si ha intanto dalla (3) che v'_1 è funzione finita e continua insieme alle sue derivate prime e seconde in tutto il campo S, i punti di σ al più esclusi per queste derivate seconde; e dal *teorema del Poisson* risulta:

$$(1)'_2 \qquad \text{(nei punti di S)} \ \Delta^2 v'_1 = -\psi.$$

Abbiamo poi:

$$\int_S \Delta^2 v'_1 dS + \int_\sigma \frac{\partial v'_1}{\partial n} d\sigma = 0,$$

ossia:

$$\int_\sigma \frac{\partial v'_1}{\partial n} d\sigma = \int_S \psi dS = M;$$

per cui sarà:

$$\int_\sigma \left\{ -\frac{\partial v'_1}{\partial n} + \frac{M}{a} \right\} d\sigma = 0;$$

e quindi esisterà l'integrale regolare delle equazioni $(1)'_1$, e si potrà scrivere, secondo il risultato del § 5 (Cap. I),

$$4) \quad \left\{ \begin{aligned} v'_2 = \Phi + Q &= \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left\{ \frac{\partial v'_1}{\partial n} - \frac{M}{a} \right\} \frac{d\sigma}{r} = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{\partial v'_1}{\partial n} \frac{d\sigma}{r} - \frac{M}{4\pi a}\int_\sigma \frac{d\sigma}{r}, \end{aligned} \right.$$

dove:

$$(5) \qquad \varphi = u + u_1 + u_2 + \cdots,$$

con $u = Q$ funzione nota dei punti di σ, e con $u_1, u_2, \ldots$ funzioni che sappiamo costruire (§ 1, Cap. I) e per le quali si ha:

$$(6) \qquad |u_i| \leq \varrho^i (M_0 - m_0).$$

La costante ϱ è minore dell'unità e le costanti M_0, m_0 sono rispettivamente il massimo e il minimo di u.

Posto poi:

$$(7) \qquad v' = v'_1 + v'_2,$$

si avrà che la v', come le v'_1, v'_2 da cui dipende, rappresenta una funzione finita e continua insieme alle sue derivate normali in tutto S (i punti di σ inclusi), le sue derivate parziali di primo e secondo ordine sono finite e continue in tutti i punti dell'interno di S. Dalle $(1)'_1$, $(1)'_2$ risulta inoltre:

$$\text{(nei punti di S)} \quad \Delta^2 v' = \Delta^2 v'_1 + \Delta^2 v'_2 = -\psi,$$

$$\text{(nei punti di } \sigma) \quad \frac{\partial v'}{\partial n} = \frac{\partial v'_1}{\partial n} + \frac{\partial v'_2}{\partial n} = \frac{M}{a}.$$

Quindi la funzione v', data dalla formola (7), rappresenta l'integrale regolare delle equazioni $(1)'$ [1].

[1] Quando è $h = 0$, la ψ, come risulta delle equazioni (1), deve soddisfare alla condizione:

$$\int_S \psi dS = 0;$$

ed allora v' è proprio l'integrale regolare delle equazioni (1).

Ora si considerino le equazioni:

$$(1)'' \quad \text{(nei punti di S)} \quad \Delta^2 v'' = 0\,, \qquad \text{(nei punti di } \sigma) \quad \frac{\partial v''}{\partial n} = hv'' + hv' - \frac{M}{a}\,.$$

Poichè l'espressione $hv' - \frac{M}{a}$ è una funzione finita e continua dei punti di σ, risulta che esiste l'integrale regolare delle equazioni precedenti, cioè esiste una funzione finita e continua insieme alle sue derivate normali in tutto S (i punti di σ compresi), di cui le derivate parziali prime e seconde sono finite e continue in tutti i punti dell'interno di S, e che soddisfa alle equazioni (1)''.

Finalmente, se si pone:

$$(8) \qquad v = v' + v''\,,$$

avremo che v *è una funzione finita e continua insieme alle sue derivate normali in tutto il campo* S (*i punti di* σ *compresi*), *e le sue derivate parziali prime e seconde sono finite e continue nei punti dell'interno di* S. Se si fa uso delle equazioni (1)', (1)'' risulta ancora:

$$\text{(nei punti di S)} \quad \Delta^2 v = \Delta^2 v' + \Delta^2 v'' = -\psi\,,$$

$$\text{(nei punti di } \sigma) \quad \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v'}{\partial n} + \frac{\partial v''}{\partial n} = h(v' + v'') = hv\,;$$

quindi *la funzione* v, *data dalla formola* (8), *rappresenta l'integrale regolare delle equazioni* (1).

2. L'integrale v delle (1) si può esprimere in altra maniera. Infatti dalla *formola di Green* si ha, facendo uso delle (1),

$$(8)' \quad \begin{cases} v = -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_s \frac{\Delta^2 v}{r}\, dS + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(v\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \dfrac{\partial v}{\partial n}\dfrac{1}{r}\right) d\sigma = \\[2ex] \quad = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_s \frac{\psi}{r}\, dS + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \dfrac{h}{r}\right) v\, d\sigma\,. \end{cases}$$

Converrà ancora modificare l'espressione di Q, che concorre a formare l'espressione di v, trovata nel paragrafo precedente. Per questo si osservi che circa alla v_1' si ha dalla *formola di Green*:

$$v_1' = -\frac{1}{4\pi}\int_s \frac{\Delta^2 v_1'}{r}\, dS + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(v_1' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{\partial v_1'}{\partial n}\frac{1}{r}\right) d\sigma =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_s \frac{\psi}{r}\, dS + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(v_1' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{\partial v_1'}{\partial n}\frac{1}{r}\right) d\sigma\,;$$

donde in forza della (3):

$$0 = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(v_1' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{\partial v_1'}{\partial n}\frac{1}{r}\right) d\sigma\,;$$

e quindi:

$$Q = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{\partial v'_1}{\partial n}\frac{d\sigma}{r} - \frac{M}{4\pi a}\int_\sigma \frac{d\sigma}{r} = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma v'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma - \frac{M}{4\pi a}\int_\sigma \frac{d\sigma}{r}.$$

3. Dalle (2), (3) si ricava:

$$(2)' \qquad |M| \leq \sqrt{\int_s dS \cdot \int_s \psi^2 dS},$$

$$(3)' \qquad |v'_1| \leq \sqrt{\int_s \frac{dS}{(4\pi r)^2} \cdot \int_s \psi^2 dS}.$$

Ora si ha:

$$|u| = |Q| \leq \frac{1}{4\pi}\int_\sigma |v'_1| \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma + \frac{|M|}{4\pi a}\int_\sigma \frac{d\sigma}{r}$$

$$\leq \left\{\sqrt{\int_s \frac{dS}{(4\pi r)^2}} + \int_\sigma \frac{d\sigma}{4\pi a r}\sqrt{\int_s dS}\right\}\sqrt{\int_s \psi^2 dS};$$

in questo modo, indicando con K_1 il limite superiore dei valori sempre finiti che assume l'espressione:

$$\left\{\sqrt{\int_s \frac{dS}{(4\pi r)^2}} + \int_\sigma \frac{d\sigma}{4\pi a r}\sqrt{\int_s dS}\right\},$$

risulterà:

$$M_0 - m_0 \leq 2K_1 \sqrt{\int_s \psi^2 dS};$$

e dalla (6):

$$(6)' \qquad |u_i| < 2K_1 \varrho^i \sqrt{\int_s \psi^2 dS}.$$

Avremo quindi:

$$|\varphi| = |u + u_1 + u_2 + \cdots| < 2K_1(1 + \varrho + \varrho^2 + \cdots)\sqrt{\int_s \psi^2 dS} = \frac{2K_1}{1-\varrho}\sqrt{\int_s \psi^2 dS};$$

allora sarà:

$$(4)' \quad |v'_2| \leq \frac{1}{2\pi}\int_\sigma |\varphi| \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + |Q| \leq \left(\frac{4K_1}{1-\varrho} + K_1\right)\sqrt{\int_s \psi^2 dS} = K_1 \frac{5-\varrho}{1-\varrho}\sqrt{\int_s \psi^2 dS},$$

e per conseguenza:

$$(7)' \qquad |v'| \leq |v'_1| + |v'_2| \leq \left\{K_1 \frac{5-\varrho}{1-\varrho} + \sqrt{\int_s \frac{dS}{(4\pi r)^2}}\right\}\sqrt{\int_s \psi^2 dS}.$$

Indicato con μ il massimo valore assoluto dell'espressione $hv' - \frac{M}{a}$, si avrà (cfr. § 9, cap. I) per l'integrale regolare delle (1)'':

$$|v''| < \frac{\mu}{h}.$$

Ora si ha dalla (7)′ e dalla (2)′:

$$\left|hv'-\frac{M}{a}\right| \leq h|v'|+\frac{|M|}{a} \leq \left[h\left\{K_1\frac{5-\varrho}{1-\varrho}+\sqrt{\int_s \frac{dS}{(4\pi r)^2}}\right\}+\frac{1}{a}\sqrt{\int_s dS}\right]\sqrt{\int_s \psi^2 dS};$$

per cui si potrà scrivere:

$$|v''| < \frac{1}{h}\left[h\left\{K_1\frac{5-\varrho}{1-\varrho}+\sqrt{\int_s \frac{dS}{(4\pi r)^2}}\right\}+\frac{1}{a}\sqrt{\int_s dS}\right]\sqrt{\int_s \psi^2 dS};$$

e finalmente, indicando con K il limite superiore dei valori sempre finiti [1] che assume l'espressione:

$$\frac{1}{h}\left[h\left\{K_1\frac{5-\varrho}{1-\varrho}+\sqrt{\int_s \frac{dS}{(4\pi r)^2}}\right\}+\frac{1}{a}\sqrt{\int_s dS}\right]+\left\{K_1\frac{5-\varrho}{1-\varrho}+\sqrt{\int_s \frac{dS}{(4\pi r)^2}}\right\},$$

risulterà dalla precedente disuguaglianza e dalle (8), (7)′ [2]:

$$(8)'' \qquad |v| \leq |v'|+|v''| \leq K\sqrt{\int_s \psi^2 dS},$$

con K costante finita, indipendente dalla funzione ψ e dipendente soltanto dalla natura della superficie σ e dal valore del parametro h.

Circa alle derivate prime di v dalla (8)′ si ha, derivando sotto il segno di integrazione in un punto qualsiasi (x_1, y_1, z_1) di S, che non sia su σ,

$$(9) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial v}{\partial x_1}=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_s \psi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}dS+\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{h}{r}\right)\cdot v\,d\sigma, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \end{array}\right.$$

e se si indica con ψ_1 il massimo valore assoluto di ψ, con v_1 il massimo valore assoluto di v, risulterà:

$$(9)' \qquad \left\{\begin{array}{l} \left|\dfrac{\partial v}{\partial x_1}\right| \leq \dfrac{\psi_1}{4\pi}\displaystyle\int_s \left|\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}\right|dS+\frac{v_1}{4\pi}\int_\sigma \left|\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{h}{r}\right)\right|d\sigma, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

4. Sia V una funzione dei punti del campo finito S, finita e continua insieme alle sue derivate normali, al suo Δ^2 e alle sue derivate parziali del primo ordine, i punti di σ al più esclusi per queste derivate parziali. Si ponga:

$$A=\int_s V^2 dS, \quad B=\int_s\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right\}dS, \quad C=\int_s V dS;$$

[1] Il valore limite $h=\infty$ non escluso.

[2] Il valore limite $h=0$ non escluso; infatti si rammenti che per $h=0$ è $v=v'$.

e si osservi che l'espressione B ha un significato anche quando non si sappia nulla delle derivate parziali del primo ordine nei punti di σ.

Supposto che la funzione V soddisfi alla condizione:

$$C = 0,$$

proponiamoci di trovare una disuguaglianza cui soddisfa l'espressione $\frac{B}{A}$.

Indichiamo una prima volta con x, y, z le coordinate dei punti del campo S e con dS un suo elemento; una seconda volta con x', y', z' le coordinate dei punti del medesimo campo S e con dS' un suo elemento. Indichiamo poi con V' la funzione V, quando viene considerata come funzione dei punti x', y', z' di S.

Posto:

$$T = \int_s dS = \int_s dS', \quad \Delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2,$$

si avrà:

$$BT = \int_s \Delta V\, dS \cdot \int_s dS' = \int \Delta V\, dS\, dS',$$

$$AT = \int_s V^2 dS \cdot \int_s dS' = \int V^2\, dS\, dS' = \int_s V'^2\, dS' \cdot \int_s dS = \int V'^2\, dS\, dS',$$

$$0 = \int_s V\, dS \cdot \int_s V'\, dS' = \int VV'\, dS\, dS';$$

e quindi:

$$2AT = \int (V - V')^2\, dS\, dS'.$$

Nel precedente integrale l'integrazione va estesa a tutte le coppie di elementi dS, dS' del campo S; in modo che uno stesso elemento s di S va considerato una volta come elemento dS, un'altra volta come elemento dS'.

5. Si faccia il cambiamento di variabili:

$$(10) \qquad \begin{cases} x = \xi + \varrho \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, & x' = \xi + \varrho' \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ y = \eta + \varrho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, & y' = \eta + \varrho' \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = \varrho \cos\theta, & z' = \varrho' \cos\theta. \end{cases}$$

Applicando la regola di trasformazione degli integrali multipli, l'integrale:

$$(11) \qquad \int F\, dS\, dS'$$

si trasforma nell'altro:

$$(11)' \qquad \int F(\varrho - \varrho')^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, d\varrho\, d\varrho'\, d\xi\, d\eta\, d\theta\, d\varphi.$$

Dato un sistema di valori per x, y, z, x', y', z', il corrispondente sistema di valori $\xi, \eta, \varrho, \varrho', \theta, \varphi$ si può determinare nel seguente modo: posto $M \equiv (x, y, z)$, $M' \equiv (x', y', z')$, si consideri la retta MM' ed il punto $N \equiv (x_1, y_1)$ d'intersezione di questa retta col piano $z = 0$; si ponga:

$$\xi = x_1, \quad \eta = y_1, \quad \varrho = NM, \quad \varrho' = NM';$$

si diano a ϱ e ϱ' rispettivamente i segni di z e z'; si faccia θ uguale al minimo angolo che la retta MM′ fa con l'asse z; e si prenda φ uguale all'angolo che deve percorrere il piano della retta MM′, perpendicolare al piano $z=0$, per sovrapporsi al piano $y=0$, muovendosi nella direzione secondo cui si muove la direzione positiva dell'asse y per sovrapporsi alla direzione positiva dell'asse x.

Viceversa dati i valori di $\xi, \eta, \varrho, \varrho', \theta, \varphi$, i valori di x, y, z, x', y', z' si possono determinare nel seguente modo: si consideri il punto $N=(\xi, \eta)$ del piano $z=0$; si spicchi dal punto N la retta corrispondente agli angoli polari θ e φ, e si segnino su questa retta due punti M, M′ al di sopra o al di sotto del piano $z=0$, secondo che ϱ e ϱ' hanno il segno positivo o il negativo, e tali che si abbia $\varrho=NM$, $\varrho'=NM'$. Le *sei* coordinate cartesiane dei punti M, M′ ci dànno appunto i valori x, y, z, x', y', z' cercati.

Ecco poi come si può eseguire l'integrazione (11)′. Volendo cominciare a fare l'integrazione rispetto a ϱ ed a ϱ', bisogna supporre $\xi, \eta, \theta, \varphi$ costanti. Ad ogni sistema di valori per le $\xi, \eta, \theta, \varphi$ corrisponde nello spazio una retta MM′, la quale taglierà la superficie convessa σ in due punti M_0, M_1. Allora, posto:

$$\varrho_0 = NM_0, \quad \varrho_1 = NM_1,$$

dove ϱ_0 e ϱ_1 hanno anche un segno in conformità della convenzione precedente, e supposto:

$$\varrho_0 < \varrho_1$$

si estendano le integrazioni rispetto a ϱ e rispetto a ϱ' da ϱ_0 a ϱ_1. In seguito, supposte θ e φ costanti, si faccia l'integrazione rispetto a ξ, η estendendo l'integrazione al campo determinato dall'intersezione del piano $z=0$ col cilindro tangente alla superficie σ e le cui generatrici sono parallele alla direzione fissa θ, φ. In fine si eseguiscano le integrazioni rispetto a θ da 0 a $\frac{\pi}{2}$, rispetto a φ da 0 a 2π.

6. Posto:

$$d\Omega = \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, d\xi \, d\eta \, d\theta \, d\varphi,$$

$$b = \int \Sigma \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 (\varrho - \varrho')^2 \, d\varrho \, d\varrho',$$

$$2a = \int (V - V')^2 (\varrho - \varrho')^2 \, d\varrho \, d\varrho',$$

risulterà:

$$BT = \int b \, d\Omega, \quad AT = \int a \, d\Omega.$$

Si ha poi:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + \frac{\partial V}{\partial y} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + \frac{\partial V}{\partial z} \cos\theta\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\varphi + \cdots + 2 \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi + \cdots;$$

e poichè:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\varphi + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\varphi \geq 2 \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi,$$

. . . . . .

avremo ancora:

$$(12)\qquad \left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)^2 \leq 3\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi + \cdots < 3\Sigma\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2.$$

Si ha inoltre:

$$V = V(x, y, z) = V(\varrho, \xi, \eta, \theta, \varphi), \quad V' = V(x', y', z') = V(\varrho', \xi, \eta, \theta, \varphi);$$

per cui, scritta la variabile ϑ in luogo di ϱ o di ϱ', risulterà:

$$V' - V = \int_\varrho^{\varrho'} \frac{\partial V}{\partial \vartheta}\, d\vartheta.$$

Ora, supposto $\varrho < \varrho'$, e chiamate α, β due costanti reali qualsiasi, si ha:

$$0 \leq \int_\varrho^{\varrho'} \left(\alpha\frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \beta\right)^2 d\vartheta = \alpha^2 \int_\varrho^{\varrho'} \left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)^2 d\vartheta + 2\alpha\beta(V' - V) + \beta^2(\varrho' - \varrho);$$

e quindi:

$$(13)\qquad (V - V')^2 \leq (\varrho' - \varrho)\int_\varrho^{\varrho'} \left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)^2 d\vartheta.$$

Gli elementi dell'integrale $2a$ possono ripartirsi in tre gruppi: quelli per i quali $\varrho' > \varrho$, quelli per i quali $\varrho > \varrho'$, quelli per i quali $\varrho = \varrho'$. Gli elementi di quest'ultimo gruppo non hanno alcuna influenza sull'integrale. Siccome poi l'integrazione rispetto a ϱ va fatta nello stesso modo dell'integrazione rispetto a ϱ', e siccome la quantità sotto il segno d'integrale è tale che non muta scambiando ϱ con ϱ', così l'integrale esteso agli elementi del primo gruppo sarà uguale all'integrale esteso agli elementi del secondo gruppo; e quindi si può scrivere:

$$a = \int (V - V')^2 (\varrho' - \varrho)^2\, d\varrho\, d\varrho',$$

limitando l'integrazione agli elementi del primo gruppo.

La precedente ci dà, in forza della (13),

$$a \leq \int (\varrho' - \varrho)^3 \left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)^2 d\varrho\, d\varrho'\, d\vartheta,$$

nel quale integrale i limiti d'integrazione sono definiti dalle disuguaglianze:

$$\varrho_0 < \varrho < \vartheta < \varrho' < \varrho_1.$$

Dalla (12) si ha:

$$b > \frac{1}{3}\int \left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)^2 (\varrho - \varrho')^2\, d\varrho\, d\varrho'.$$

Il precedente integrale si può spezzare in due parti: una parte b' estesa agli elementi del primo gruppo ($\varrho' > \varrho$), una parte b'' estesa agli elementi del secondo gruppo ($\varrho > \varrho'$). Cambiando nella prima parte ϱ in ϑ, si ha:

$$b' = \int \left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)^2 (\vartheta - \varrho')^2\, d\vartheta\, d\varrho'; \qquad (\varrho_0 < \vartheta < \varrho' < \varrho_1)$$

cambiando nella seconda parte ϱ in ϑ, ϱ' in ϱ, si ha:

$$b'' = \int \left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)^2 (\vartheta - \varrho)^2\, d\vartheta\, d\varrho; \qquad (\varrho_0 < \varrho < \vartheta < \varrho_1)$$

risulta quindi:

$$b > \tfrac{1}{3}(b' + b'') = \tfrac{1}{3}\left\{\int\left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)^2 (\varrho' - \vartheta)^2\, d\varrho'\, d\vartheta + \int\left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)^2 (\vartheta - \varrho)^2\, d\varrho\, d\vartheta\right.$$

$$(\varrho_0 < \varrho < \vartheta < \varrho' < \varrho_1)$$

7. Si ha:

$$\alpha = \int_{\varrho_0}^{\vartheta} d\varrho \int_{\vartheta}^{\varrho_1} (\varrho' - \varrho)^3\, d\varrho' = \frac{(\varrho_1 - \varrho_0)^5 - (\varrho_1 - \vartheta)^5 - (\vartheta - \varrho_0)^5}{20},$$

$$\beta = \tfrac{1}{3}\int_{\vartheta}^{\varrho_1} (\varrho' - \vartheta)^2\, d\varrho' + \tfrac{1}{3}\int_{\varrho_0}^{\vartheta} (\vartheta - \varrho)^2\, d\varrho = \frac{(\varrho_1 - \vartheta)^3 + (\vartheta - \varrho_0)^3}{9};$$

e quindi:

$$a \leq \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \alpha \left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)^2 d\vartheta, \quad b > \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \beta \left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)^2 d\vartheta.$$

Le espressioni α e β dipendono da ϑ; e per $\vartheta = \frac{\varrho_1 + \varrho_0}{2}$ l'espressione α prende il suo valore massimo che è

$$(\varrho_1 - \varrho_0)^5 \cdot \frac{3}{64}.$$

l'espressione β prende il suo valore minimo che è

$$(\varrho_1 - \varrho_0)^3 \cdot \frac{1}{36}.$$

Adunque si avrà:

$$\frac{\beta}{\alpha} > \frac{16}{27} \cdot \frac{1}{(\varrho_1 - \varrho_0)^2};$$

e se l è la massima dimensione del campo S, si avrà ancora:

$$\frac{\beta}{\alpha} > \frac{16}{27} \cdot \frac{1}{l^2}.$$

Risulta quindi:

$$\frac{b}{a} > \frac{\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \beta \left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)^2 d\vartheta}{\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \alpha \left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)^2 d\vartheta} > \frac{16}{27} \cdot \frac{1}{l^2};$$

e per conseguenza:

$$\frac{B}{A} = \frac{\int b\, d\Omega}{\int a\, d\Omega} > \frac{16}{27} \cdot \frac{1}{l^2}.$$

8. Sia λ una data quantità positiva. Si indichi con t il lato di un cubo capace di contenere il campo S nel suo interno; con q il minimo numero intero tale che

$$\frac{16}{81} \cdot \frac{q^2}{t^2} \geq \lambda.$$

Si scomponga il cubo di lato t in q^3 cubi uguali. Ognuno di questi cubi avrà il lato uguale a $\frac{t}{q}$ e la massima dimensione (diagonale) uguale a $\frac{t}{q}\sqrt{3}$. I piani

che scompongono il cubo di lato t, scomporranno il campo S in $p-1$ campi $S_1, S_2, \dots S_{p-1}$. Sarà poi:

$$p-1 \leq q^3;$$

e la massima dimensione l_i di S_i soddisferà alla condizione:

$$l_i \leq \frac{t}{q}\sqrt{3}.$$

9. Si abbiano p funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_p$ analoghe alla V del § 4; si indichino con $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ p costanti da determinarsi convenientemente; e si ponga:

$$V = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \cdots + \alpha_p \varphi_p,$$

$$A = \int_S V^2 dS, \quad B = \int_S \Sigma \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dS,$$

$$A_i = \int_{S_i} V^2 dS, \quad B_i = \int_{S_i} \Sigma \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dS, \quad C_i = \int_{S_i} V dS. \quad (i = 1, 2, \dots p-1)$$

Si determinino le $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ in modo da soddisfare alle $p-1$ equazioni lineari omogenee:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \dots C_{p-1} = 0.$$

Allora si avrà, come fu dimostrato al § 7,

$$\frac{B_i}{A_i} > \frac{16}{27} \cdot \frac{1}{l_i^2} \geq \frac{16}{81} \cdot \frac{q^2}{t^2} \geq \lambda;$$

e quindi:

$$\frac{B}{A} = \frac{B_1 + B_2 + \cdots + B_{p-1}}{A_1 + A_2 + \cdots + A_{p-1}} > \lambda.$$

Adunque, *data una quantità positiva qualsiasi λ, si possono determinare un numero intero finito p e p quantità costanti $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ in modo che il corrispondente rapporto $\frac{B}{A}$ sia maggiore di λ.*

10. Passiamo ora allo studio delle equazioni:

$$\text{(nei punti di S)} \quad \Delta^2 v + kv + \psi = 0, \qquad \text{(nei punti di } \sigma) \quad \frac{\partial v}{\partial n} = hv,$$

con ψ funzione dei punti del campo S finita e continua insieme alle sue derivate prime, i punti della superficie limite σ al più esclusi per queste derivate.

Per questo si considerino le equazioni:

$$(14) \quad \begin{cases} \text{(nei punti di S)} \quad \Delta^2 v_0 + \psi = 0, & \Delta^2 v_1 + v_0 = 0, \dots \\ \text{(nei punti di } \sigma) \quad \dfrac{\partial v_0}{\partial n} = hv_0, & \dfrac{\partial v_1}{\partial n} = hv_1, \dots \end{cases}$$

Queste equazioni sono tutte della natura delle equazioni (1) del § 1; per cui i loro integrali $v_0, v_1, \dots$ saranno funzioni dei punti del corpo S finite e continue insieme alle loro derivate normali e alle loro derivate parziali del primo e secondo ordine, i punti di σ al più esclusi per queste derivate parziali.

Similmente, indicate con

$$\psi_1, \psi_2, \ldots \tag{15}$$

delle funzioni analoghe alla ψ, si considerino le equazioni:

$$(14)' \quad \begin{cases} \text{(nei punti di S)} \ \Delta^2 v_0^{(i)} + \psi_i = 0, \quad \Delta^2 v_1^{(i)} + v_0^{(i)} = 0, \ldots \\ \text{(nei punti di } \sigma) \ \dfrac{\partial v_0^{(i)}}{\partial n} = h v_0^{(i)}, \quad \dfrac{\partial v_1^{(i)}}{\partial n} = h v_1^{(i)}, \ldots \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

analoghe alle (14); ed ancora, posto:

$$\psi' = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 + \cdots + \alpha_p \psi_p,$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ quantità costanti da determinarsi convenientemente in numero ed in valore, si considerino le equazioni:

$$(14)'' \quad \begin{cases} \text{(nei punti di S)} \ \Delta^2 v'_0 + \psi' = 0, \quad \Delta^2 v'_1 + v'_0 = 0, \ldots \\ \text{(nei punti di } \sigma) \ \dfrac{\partial v'_0}{\partial n} = h v'_0, \quad \dfrac{\partial v'_1}{\partial n} = h v'_1, \ldots \end{cases}$$

Risulta intanto:

$$v'_r = \alpha_1 v_r^{(1)} + \alpha_2 v_r^{(2)} + \cdots + \alpha_p v_r^{(p)}; \tag{16}$$

e le v'_r, come le $v_r^{(1)}, v_r^{(2)}, \ldots v_r^{(p)}$, saranno funzioni dei punti di S finite e continue insieme alle loro derivate normali e alle loro derivate parziali, ecc.

11. Si consideri lo spazio S' interno ad S e limitato da una superficie σ' vicinissima a σ e discosta da essa. Dalla *formola di Green* e dalle (14)'' si ha:

$$\int_{S'} \left(\frac{\partial v'_s}{\partial x} \frac{\partial v'_t}{\partial x} + \frac{\partial v'_s}{\partial y} \frac{\partial v'_t}{\partial y} + \frac{\partial v'_s}{\partial z} \frac{\partial v'_t}{\partial z} \right) dS =$$

$$= -\int_{S'} v'_s \Delta^2 v'_t \, dS - \int_{\sigma'} v'_s \frac{\partial v'_t}{\partial n} d\sigma' = \int_{S'} v'_s v'_{t-1} \, dS - \int_{\sigma'} v'_s \frac{\partial v'_t}{\partial n} d\sigma'.$$

Le funzioni $v'_0, v'_1, v'_2, \ldots, \dfrac{\partial v'_0}{\partial n}, \dfrac{\partial v'_1}{\partial n}, \ldots$ sono finite e continue anche quando si va nei punti di σ; per cui, facendo avvicinare indefinitamente σ' a σ, si avrà:

$$\lim_{S'=S} \int_{S'} v'_s v'_{t-1} \, dS = \int_S v'_s v'_{t-1} \, dS, \quad \lim_{\sigma=\sigma'} \int_{\sigma'} v'_s \frac{\partial v'_t}{\partial n} d\sigma' = \int_\sigma v'_s \frac{\partial v'_t}{\partial n} d\sigma;$$

e quindi dalla precedente:

$$\lim_{S'=S} \int_{S'} \left(\frac{\partial v'_s}{\partial x} \frac{\partial v'_t}{\partial x} + \frac{\partial v'_s}{\partial y} \frac{\partial v'_t}{\partial y} + \frac{\partial v'_s}{\partial z} \frac{\partial v'_t}{\partial z} \right) dS = \int_S \left(\frac{\partial v'_s}{\partial x} \frac{\partial v'_t}{\partial x} + \frac{\partial v'_s}{\partial y} \frac{\partial v'_t}{\partial y} + \frac{\partial v'_s}{\partial z} \frac{\partial v'_t}{\partial z} \right) dS,$$

$$\int_S v'_s v'_{t-1} \, dS = \int_S \left(\frac{\partial v'_s}{\partial x} \frac{\partial v'_t}{\partial x} + \frac{\partial v'_s}{\partial y} \frac{\partial v'_t}{\partial y} + \frac{\partial v'_s}{\partial z} \frac{\partial v'_t}{\partial z} \right) dS + \int_\sigma v'_s \frac{\partial v'_t}{\partial n} d\sigma.$$

Allora, posto:

$$W'_{s,t}=\int_S v'_s v'_t dS\,,\quad V'_{s,t}=\int_S\left(\frac{\partial v'_s}{\partial x}\frac{\partial v'_t}{\partial x}+\frac{\partial v'_s}{\partial y}\frac{\partial v'_t}{\partial y}+\frac{\partial v'_s}{\partial z}\frac{\partial v'_t}{\partial z}\right)dS+h\int_\sigma v'_s v'_t\, d\sigma\,,$$

risulterà dalla precedente e dalle (14)′ per $s>0$:

$$\begin{aligned}W'_{s,t}=\int_S v'_s v'_t dS&=\int_S\left(\frac{\partial v'_s}{\partial x}\frac{\partial v'_{t+1}}{\partial x}+\frac{\partial v'_s}{\partial y}\frac{\partial v'_{t+1}}{\partial y}+\frac{\partial v'_s}{\partial z}\frac{\partial v'_{t+1}}{\partial z}\right)dS+\int_\sigma v'_s\frac{\partial v'_{t+1}}{\partial n}d\sigma=\\&=\int_S\left(\frac{\partial v'_s}{\partial x}\frac{\partial v'_{t+1}}{\partial x}+\cdots\cdots\cdots\cdots\right)dS+h\int_\sigma v'_s v'_{t+1}d\sigma=V'_{s,t+1}=\\&=\int_S\left(\frac{\partial v'_s}{\partial x}\frac{\partial v'_{t+1}}{\partial x}+\cdots\cdots\cdots\cdots\right)dS+\int_\sigma v'_{t+1}\frac{\partial v'_s}{\partial n}d\sigma=\\&=\int_S v'_{t+1}v'_{s-1}\,dS=W'_{s-1,t+1}\,.\end{aligned}$$

Di qui risulta che le espressioni $W'_{s,t}$, $V'_{s,t}$ dipendono soltanto dalla somma $s+t$ dei loro indici; ed inoltre, se si pone:

$$W'_{s,t}=W'_{s+t}\,,\qquad V'_{s,t}=V'_{s+t}\,,$$

risulta ancora:

$$W'_i=V'_{i+1}\,.$$

Osserviamo finalmente che le W' e V' ad indice pari sono tutte positive; e poichè una W' ad indice dispari è uguale ad una V' ad indice pari, una V' ad indice dispari è uguale ad una W' ad indice pari, avremo ancora che tutte le W' e tutte le V' sono positive.

12. Indicando con α e β due costanti qualsiasi, si ha:

$$0\leq\int_S(\alpha v'_s+\beta v'_{s+1})^2\,dS=\alpha^2W'_{2s}+2\alpha\beta W'_{2s+1}+\beta^2W'_{2s+2}\,.$$

Siccome le funzioni v'_s, v'_{s+1} sono finite e continue, nel caso del segno inferiore si dovrà avere in tutto il campo S:

$$v'_s=-\frac{\beta}{\alpha}v'_{s+1}$$

e quindi:

$$W'_{2s}=-\frac{\beta}{\alpha}W'_{2s+1}\,,\quad W'_{2s+1}=-\frac{\beta}{\alpha}W'_{2s+2}\,,$$

donde:

$$\frac{W'_{2s+1}}{W'_{2s}}=\frac{W'_{2s+2}}{W'_{2s+1}}\,.$$

Nel caso del segno superiore si ha invece:

$$W'_{2s}W'_{2s+2}-W'^2_{2s+1}>0\,,$$

ossia:

$$\frac{W'_{2s+1}}{W'_{2s}} < \frac{W'_{2s+2}}{W'_{2s+1}}.$$

sicchè abbiamo in ogni caso:

$$\frac{W'_{2s+1}}{W'_{2s}} \leq \frac{W'_{2s+2}}{W'_{2s+1}}, \tag{17}$$

qualunque sia l'indice s.

Similmente, indicando con S' lo spazio interno ad S e limitato dalla solita superficie σ', si avrà:

$$0 \leq \int_{S'} \left\{ \left(\alpha \frac{\partial v'_s}{\partial x} + \beta \frac{\partial v'_{s+1}}{\partial x} \right)^2 + \left(\alpha \frac{\partial v'_s}{\partial y} + \beta \frac{\partial v'_{s+1}}{\partial y} \right)^2 + \left(\alpha \frac{\partial v'_s}{\partial z} + \beta \frac{\partial v'_{s+1}}{\partial z} \right)^2 \right\} dS +$$
$$+ h \int_{\sigma'} (\alpha v'_s + \beta v'_{s+1})^2 \, d\sigma';$$

e nel caso del segno inferiore si dovrà avere:

$$\text{(nei punti di S')} \quad \frac{\partial v'_s}{\partial x} = -\frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial v'_{s+1}}{\partial x}, \ldots, \ldots;$$

$$\text{(nei punti di } \sigma') \quad v'_s = -\frac{\beta}{\alpha} v'_{s+1}, \ldots, \ldots;$$

donde:

$$\int_{S'} \left\{ \left(\frac{\partial v'_s}{\partial x} \right)^2 + \cdots \right\} dS + h \int_{\sigma'} v'^2_s \, d\sigma' = -\frac{\beta}{\alpha} \left[\int_{S'} \left\{ \frac{\partial v'_s}{\partial x} \frac{\partial v'_{s+1}}{\partial x} + \cdots \right\} dS + h \int_{\sigma'} v'_s v'_{s+1} \, d\sigma' \right],$$

$$\int_{S'} \left\{ \frac{\partial v'_s}{\partial x} \frac{\partial v'_{s+1}}{\partial x} + \cdots \right\} dS + h \int_{\sigma'} v'_s v'_{s+1} \, d\sigma' = -\frac{\beta}{\alpha} \left[\int_{S'} \left\{ \left(\frac{\partial v'_{s+1}}{\partial x} \right)^2 + \cdots \right\} dS + h \int_{\sigma'} v'^2_{s+1} \, d\sigma' \right];$$

e per conseguenza:

$$\frac{\int_{S'} \left\{ \frac{\partial v'_s}{\partial x} \frac{\partial v'_{s+1}}{\partial x} + \cdots \right\} dS + h \int_{\sigma'} v'_s v'_{s+1} \, d\sigma'}{\int_{S'} \left\{ \left(\frac{\partial v'_s}{\partial x} \right)^2 + \cdots \right\} dS + h \int_{\sigma'} v'^2_s \, d\sigma'} = \frac{\int_{S'} \left\{ \left(\frac{\partial v'_{s+1}}{\partial x} \right)^2 + \cdots \right\} dS + h \int_{\sigma'} v'^2_{s+1} \, d\sigma'}{\int_{S'} \left\{ \frac{\partial v'_s}{\partial x} \frac{\partial v'_{s+1}}{\partial x} + \cdots \right\} dS + h \int_{\sigma'} v'_s v'_{s+1} \, d\sigma'}.$$

Nel caso del segno superiore si ha invece:

$$\frac{\int_{S'} \left\{ \frac{\partial v'_s}{\partial x} \frac{\partial v'_{s+1}}{\partial x} + \cdots \right\} dS + h \int_{\sigma'} v'_s v'_{s+1} \, d\sigma'}{\int_{S'} \left\{ \left(\frac{\partial v'_s}{\partial x} \right)^2 + \cdots \right\} dS + h \int_{\sigma'} v'^2_s \, d\sigma'} < \frac{\int_{S'} \left\{ \left(\frac{\partial v'_{s+1}}{\partial x} \right)^2 + \cdots \right\} dS + h \int_{\sigma'} v'^2_{s+1} \, d\sigma'}{\int_{S'} \left\{ \frac{\partial v'_s}{\partial x} \frac{\partial v'_{s+1}}{\partial x} + \cdots \right\} dS + h \int_{\sigma'} v'_s v'_{s+1} \, d\sigma'};$$

sicchè in ogni caso, comunque σ' sia vicino a σ, si avrà:

$$\frac{\int_{S'} \left\{ \frac{\partial v'_s}{\partial x} \frac{\partial v'_{s+1}}{\partial x} + \cdots \right\} dS + h \int_{\sigma'} v'_s v'_{s+1} \, d\sigma'}{\int_{S'} \left\{ \left(\frac{\partial v'_s}{\partial x} \right)^2 + \cdots \right\} dS + h \int_{\sigma'} v'^2_s \, d\sigma'} \leq \frac{\int_{S'} \left\{ \left(\frac{\partial v'_{s+1}}{\partial x} \right)^2 + \cdots \right\} dS + h \int_{\sigma'} v'^2_{s+1} \, d\sigma'}{\int_{S'} \left\{ \frac{\partial v'_s}{\partial x} \frac{\partial v'_{s+1}}{\partial x} + \cdots \right\} dS + h \int_{\sigma'} v'_s v'_{s+1} \, d\sigma'}.$$

Facendo avvicinare indefinitamente la superficie σ' a σ, risulterà al limite:

$$\frac{\int_S \left\{ \frac{\partial v'_s}{\partial x} \frac{\partial v'_{s+1}}{\partial x} + \cdots \right\} dS + h \int_\sigma v'_s v'_{s+1} \, d\sigma}{\int_S \left\{ \left(\frac{\partial v'_s}{\partial x} \right)^2 + \cdots \right\} dS + h \int_\sigma v'^2_s \, d\sigma} \leq \frac{\int_S \left\{ \left(\frac{\partial v'_{s+1}}{\partial x} \right)^2 + \cdots \right\} dS + h \int_\sigma v'^2_{s+1} \, d\sigma}{\int_S \left\{ \frac{\partial v'_s}{\partial x} \frac{\partial v'_{s+1}}{\partial x} + \cdots \right\} dS + h \int_\sigma v'_s v'_{s+1} \, d\sigma},$$

ossia:

$$\frac{V'_{2s+1}}{V'_{2s}} \leq \frac{V'_{2s+2}}{V'_{2s+1}},$$

ovvero ancora:

$$\frac{W'_{2s}}{W'_{2s-1}} \leq \frac{W'_{2s+1}}{W'_{2s}},$$

qualunque sia l'indice s.

Questa, insieme alla (17), ci dà in conclusione:

$$\frac{W'_1}{W'_0} \leq \frac{W'_2}{W'_1} \leq \cdots \leq \frac{W'_i}{W'_{i-1}} \leq \cdots. \tag{18}$$

13. Data una quantità positiva ad arbitrio λ, si determini, secondo i calcoli del § 8, il corrispondente numero intero p, e si supponga che il numero delle funzioni (15) coincida appunto con questo numero p.

Si ha intanto:

$$\frac{W'_{2r-1}}{W'_{2r}} = \frac{V'_{2r}}{W'_{2r}} = \frac{\int_S \Sigma \left(\frac{\partial v'_r}{\partial x} \right)^2 dS + h \int_\sigma v'^2_r \, d\sigma}{\int_S v'^2_r \, dS} > \frac{\int_S \Sigma \left(\frac{\partial v'_r}{\partial x} \right)^2 dS}{\int_S v'^2_r \, dS}.$$

Inoltre si possono determinare, conformemente al risultato del § 9, le p costanti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$, che entrano nell'espressione (16) di v'_r, in modo che risulti:

$$\frac{\int_S \Sigma \left(\frac{\partial v'_r}{\partial x} \right)^2 dS}{\int_S v'^2_r \, dS} > \lambda, \quad \text{ossia:} \quad \frac{W'_{2r-1}}{W'_{2r}} > \lambda.$$

In questo modo si avrà dalle (18):

$$\frac{W'_1}{W'_0} \leq \frac{W'_2}{W'_1} \leq \cdots \leq \frac{W'_{2r}}{W'_{2r-1}} < \frac{1}{\lambda}. \tag{18'}$$

Indichiamo con δ_r l'insieme dei sistemi di valori che si possono dare alle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ in modo che si abbiano le (18)'. Cambiando r in $r+1$, avremo:

$$\frac{W'_1}{W'_0} \leq \frac{W'_2}{W'_1} \leq \cdots \leq \frac{W'_{2r}}{W'_{2r-1}} \leq \frac{W'_{2r+1}}{W'_{2r}} \leq \frac{W'_{2r+2}}{W'_{2r+1}} < \frac{1}{\lambda}; \tag{18''}$$

e si avrà ancora un insieme δ_{r+1} di sistemi di valori delle $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ tale che si avranno le (18)''. Ora le (18)'' dànno come conseguenza le (18)'; sicchè l'insieme δ_{r+1} deve essere contenuto nell'insieme δ_r.

Seguitando indefinitamente nella stessa guisa, otterremo una serie di insiemi:

$$\delta_r, \delta_{r+1}, \delta_{r+2}, \dots \tag{19}$$

tale che ogni insieme è contenuto in tutti i precedenti; di modo che esisterà un insieme δ, che può ridursi anche ad un solo sistema di valori per le $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$, il quale sarà comune a tutti gli insiemi della serie (19). Per uno qualunque dei sistemi dell'insieme δ si avrà:

$$\frac{W'_1}{W'_0} \leq \frac{W'_2}{W'_1} \leq \dots \leq \frac{W'_i}{W'_{i-1}} \leq \dots < \frac{1}{\lambda}. \tag{18'''}$$

Di qui risulta che le espressioni positive e crescenti o fisse $\frac{W'_1}{W'_0}, \frac{W'_2}{W'_1}, \dots$ ammettono un limite finito e positivo c' minore od uguale ad $\frac{1}{\lambda}$.

14. Premesso questo risultato, si consideri la serie a coefficienti costanti:

$$W = \sqrt{W'_0} + k\sqrt{W'_2} + k^2\sqrt{W'_4} + \cdots \tag{20}$$

ordinata secondo le potenze crescenti e positive del parametro k. Per il raggio ϱ' del cerchio di convergenza di questa serie si ha:

$$\varrho' = \lim_{r=\infty} \frac{\sqrt{W'_{2r-2}}}{\sqrt{W'_{2r}}} = \lim_{r=\infty} \sqrt{\frac{W'_{2r-2}}{W'_{2r-1}} \cdot \frac{W'_{2r-1}}{W'_{2r}}} = \frac{1}{c'} \geq \lambda.$$

Si considerino ancora le serie:

$$\left\{\begin{array}{l} v' = v'_0 + v'_1 k + v'_2 k^2 + \cdots, \\ \frac{\partial v'_0}{\partial x_1} + \frac{\partial v'_1}{\partial x_1} k + \frac{\partial v'_2}{\partial x_1} k^2 + \cdots, \\ \frac{\partial v'_0}{\partial y_1} + \frac{\partial v'_1}{\partial y_1} k + \frac{\partial v'_2}{\partial y_1} k^2 + \cdots, \\ \frac{\partial v'_0}{\partial z_1} + \frac{\partial v'_1}{\partial z_1} k + \frac{\partial v'_2}{\partial z_1} k^2 + \cdots, \end{array}\right. \tag{21}$$

Applicando la (8)'' del § 3 ed avendo riguardo alle equazioni (14)'', si ha:

$$|v'_{i+1}| \leq K \sqrt{\int_s v'^2_i \, dS} = K\sqrt{W'_{2i}}; \tag{8''$_1$}$$

e quindi dalle (9)' del § 3 risulterà per un punto qualsiasi dell'interno di S:

$$\left\{\begin{array}{l} \left|\frac{\partial v'_{i+2}}{\partial x_1}\right| \leq \frac{K\sqrt{W'_{2i}}}{4\pi} \int_s \left|\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}\right| dS + \frac{K\sqrt{W'_{2i+2}}}{4\pi} \int_\sigma \left|\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r}\right)\right| d\sigma, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \tag{9'$_1$}$$

La $(8)''_1$ ci dice intanto che la prima delle serie (21) è certamente convergente in ugual grado in tutto il campo S (i punti di σ inclusi) per $|k| < \frac{1}{c'}$; per cui la funzione v, determinata da questa serie, rappresenta per $|k| < \frac{1}{c'}$ una funzione finita e continua in tutto il campo S (i punti di σ inclusi).

Ora si consideri il solito campo S' interno ad S, la cui superficie σ' sia discosta da σ e comunque vicina ad essa. Finchè col punto (x_1, y_1, z_1) non si va al di fuori del campo S', le espressioni, che nelle formole $(9)'_1$ si presentano come coefficienti delle quantità $\sqrt{W'_{2i}}$, $\sqrt{W'_{2i+2}}$, ammetteranno ciascuno un limite superiore finito; e così, indicando con K_1 il più grande di questi due limiti superiori, si avrà in ogni punto (x_1, y_1, z_1) di S' (i punti di σ' inclusi):

$$(9)''_1 \qquad \begin{cases} \left|\dfrac{\partial v'_{i+2}}{\partial x_1}\right| \leq K_1\left(\sqrt{W'_{2i}} + \sqrt{W'_{2i+2}}\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Di qui risulta che le tre ultime delle serie (21) per $|k| < \frac{1}{c'}$ sono certamente convergenti in ugual grado in tutto S' (i punti di σ' compresi); e perciò rappresentano rispettivamente le tre derivate $\frac{\partial v'}{\partial x_1}, \frac{\partial v'}{\partial y_1}, \frac{\partial v'}{\partial z_1}$.

In conclusione abbiamo che *la funzione v', determinata dalla prima delle serie* (21) *per* $|k| < \frac{1}{c'}$, *è finita e continua insieme alle sue derivate prime, che si possono ottenere derivando per serie, in tutto il campo* S, *i punti di σ al più esclusi per queste derivate.*

15. Applicando la $(8)'$ del § 2, avremo dalle $(14)''$ in un punto p qualsiasi del campo S:

$$(8)'_1 \qquad v'_{i+1} = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{v'_i}{r}\,dS + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r}\right) v'_{i+1}\,d\sigma;$$

e quindi, integrando per serie [1], si avrà nel punto p:

$$(22) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_S \frac{\psi' + kv'}{r}\,dS + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r}\right) v'\,d\sigma = \\ = \left[\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_S \frac{\psi'}{r}\,dS + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r}\right) v'_0\,d\sigma\right] + \\ + \left[\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_S \frac{v'_0}{r}\,dS + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r}\right) v'_1\,d\sigma\right] k + \cdots \\ = v'_0 + v'_1 k + \cdots = v'. \end{cases}$$

[1] Cfr. per gli integrali semplici: Dini, l. c.

Ora l'espressione $\psi' + kv'$, come la serie v', per $|k| < \frac{1}{c'}$ è finita e continua in tutto il campo S insieme alle sue derivate prime, i punti di σ al più esclusi per queste derivate; per conseguenza nei punti dell'interno di S le derivate seconde di v' saranno finite e continue e dal *teorema di Poisson* si avrà:

$$(23)\quad \begin{cases} \Delta^2 v' = \Delta^2 \left[\frac{1}{4\pi} \int_s \frac{\psi' + kv'}{r} dS + \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r} \right) v' \, d\sigma \right] = \\ = \Delta^2 \left[\frac{1}{4\pi} \int_s \frac{\psi' + kv'}{r} dS \right] = -(\psi' + kv') . \end{cases}$$

Come è noto, si ha in un punto p' dello spazio indefinito S'', limitato dalla superficie σ,

$$0 = \frac{1}{4\pi} \int_s \frac{v'_i}{r} dS + \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \left(v'_{i+1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{\partial v'_{i+1}}{\partial n} \frac{1}{r} \right) d\sigma ,$$

ossia:

$$0 = \frac{1}{4\pi} \int_s \frac{v'_i}{r} dS + \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r} \right) v'_{i+1} \, d\sigma ;$$

e quindi, integrando per serie, si avrà nel punto p':

$$(22)'\quad \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \int_s \frac{\psi' + kv'}{r} dS + \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r} \right) v' \, d\sigma = \\ = \left[\frac{1}{4\pi} \int_s \frac{\psi'}{r} dS + \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r} \right) v'_0 \, d\sigma \right] + \\ + \left[\frac{1}{4\pi} \int_s \frac{v'_0}{r} dS + \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r} \right) v'_1 \, d\sigma \right] k + \cdots = 0 . \end{cases}$$

Indicando con s un punto qualsiasi di σ, si ha:

$$\lim_{p'=0} \frac{\partial}{\partial n} \int_s \frac{\psi' + kv'}{r} dS = \lim_{p'=0} \frac{\partial}{\partial n} \int_s \frac{\psi' + kv'}{r} dS .$$

Si ha ancora dalla teoria delle funzioni potenziali di superficie:

$$\lim_{p'=0} \frac{\partial}{\partial n} \int_\sigma \frac{h\varepsilon'}{r} d\sigma - \lim_{p'=0} \frac{\partial}{\partial n} \int_\sigma \frac{hv'}{r} d\sigma = -4\pi h . v'(s) .$$

Dalla (22)' risulta poi:

$$(22)''\quad \lim_{p'=0} \frac{\partial}{\partial n} \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} v' \, d\sigma = -\lim_{p'=0} \frac{\partial}{\partial n} \int_s \frac{\psi' + kv'}{r} dS + \lim_{p'=0} \frac{\partial}{\partial n} \int_\sigma \frac{hv'}{r} .$$

Questa formola ci dice che l'espressione:

$$\lim_{p'z=0} \frac{\partial}{\partial n} \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} v' d\sigma$$

esiste ed è finita e continua su σ; di modo che esisterà e sarà finita e continua su σ anche l'altra espressione [1]:

$$\lim_{pz=0} \frac{\partial}{\partial n} \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} v' d\sigma ;$$

e si avrà dalla teoria delle funzioni potenziali di doppio strato:

$$\lim_{pz=0} \frac{\partial}{\partial n} \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} v' d\sigma = \lim_{p'z=0} \frac{\partial}{\partial n} \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} v' d\sigma .$$

Questa formola e le due analoghe precedenti ci dànno, insieme alle (22), (22)':

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \lim_{pz=0} \frac{\partial v'}{\partial n} &= \lim_{pz=0} \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{4\pi} \int_s \frac{\psi' + kv'}{r} dS + \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r} \right) v' d\sigma \right] - \\ &- \lim_{p'z=0} \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{4\pi} \int_s \frac{\psi' + kv'}{r} dS + \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r} \right) v' d\sigma \right] = h . v'(s) . \end{aligned} \right.$$

Adunque *la funzione v' per $|k| < \frac{1}{c'}$ ammette ancora le derivate normali e le derivate parziali del secondo ordine, e queste derivate sono finite e continue in tutto il campo* S, *i punti di σ al più esclusi per le derivate parziali. Essa poi,* come risulta dalle (23), (24), *soddisfa alle equazioni*:

$$(25) \qquad \text{(nei punti di S)} \ \Delta^2 v' + kv' + \psi' = 0 , \qquad \text{(nei punti di } \sigma) \ \frac{\partial v'}{\partial n} = hv'.$$

16. In particolare si faccia:

$$\psi_1 = \psi , \quad \psi_i = v_{i-2} . \quad (i = 2 , 3 , \dots p)$$

Avremo:

$$(16)' \qquad \begin{aligned} \psi' &= \alpha_1 \psi + \alpha_2 v_0 + \alpha_3 v_1 + \cdots + \alpha_p v_{p-2} , \\ v'_r &= \alpha_1 v_r + \alpha_2 v_{r+1} + \alpha_3 v_{r+2} + \cdots + \alpha_p v_{r+p-1} ; \end{aligned}$$

e le equazioni (25) diverranno:

$$(25)' \quad \left\{ \begin{aligned} &\text{(nei punti di S)} \ \Delta^2 v' + kv' + \alpha_1 \psi + \alpha_2 v_0 + \cdots + \alpha_p v_{p-2} = 0 ; \\ &\text{(nei punti di } \sigma) \ \frac{\partial v'}{\partial n} = hv'. \end{aligned} \right.$$

[1] Cfr. la nota (**) in fondo all'Appendice della mia cit. Memoria degli Annali di Matematica.

Si avrà poi dalle (14), applicando la (8)′ del § 2,

$$(8)'' \qquad v_{i+1} = \frac{1}{4\pi}\int_s \frac{v_i}{r}\,dS + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r}\right) v_{i+1}\,d\sigma\,.$$

Finalmente, se si pone:

$$(26)\quad \begin{cases} D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ 1 & -k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -k \end{vmatrix} = (\alpha_1 k^{p-1} + \alpha_2 k^{p-2} + \dots + \alpha_p)(-1)^{p-1}, \\ P = \begin{vmatrix} v' & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ v_0 & -k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ v_1 & 1 & -k & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{p-2} & 0 & 0 & \dots & 1 & -k \end{vmatrix}; \end{cases}$$

e si osserva che v' è derivabile rispetto a k per serie e fino ad un ordine qualsiasi, risulterà, per $|k| < \frac{1}{c'}$, che P *è una funzione finita e continua in tutto* S (*i punti di* σ *inclusi*) *insieme alle sue derivate rispetto a* k *fino ad un ordine qualsiasi.*

17. Evidentemente la P si può ancora porre sotto la seguente forma:

$$(27)\quad \begin{cases} P = \begin{vmatrix} \frac{1}{4\pi}\int_s \frac{\psi' + kv'}{r}\,dS + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r}\right) v'\,d\sigma & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ \frac{1}{4\pi}\int_s \frac{\psi}{r}\,dS + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r}\right) v_0\,d\sigma & -k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{4\pi}\int_s \frac{v_0}{r}\,dS + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r}\right) v_1\,d\sigma & 1 & -k & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{4\pi}\int_s \frac{v_{p-2}}{r}\,dS + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r}\right) v_{p-2}\,d\sigma & 0 & 0 & \dots & 1 & -k \end{vmatrix} \\ = \frac{1}{4\pi}\int_s \begin{vmatrix} kv' + \alpha_1\psi + \alpha_2 v_0 + \alpha_3 v_1 + \dots + \alpha_{p-1} v_{p-2} + \alpha_p v_{p-2} & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ kv_0 + \psi - kv_0 & -k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ kv_1 + v_0 - kv_1 & 1 & -k & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ kv_{p-2} + v_{p-3} - kv_{p-2} & 0 & 0 & \dots & 1 & -k \end{vmatrix} \frac{dS}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r}\right) P\,d\sigma \\ = \frac{1}{4\pi}\int_s (kP + \psi \cdot D)\frac{dS}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r}\right) P\,d\sigma\,. \end{cases}$$

Di qui si ha intanto che *la funzione* P *ammette le derivate prime rispetto ad* x, y, z, *che saranno certamente finite e continue nei punti dell'interno di* S, *i punti di* σ *cioè al più esclusi*. Queste derivate si possono ottenere derivando sotto il segno d'integrale in ambidue i termini al secondo membro della formola precedente. Ed allora, poichè l'espressione $k\mathrm{P} + \psi . \mathrm{D}$ ha le derivate prime rispetto ad x, y, z finite e continue nei punti dell'interno di S, avremo ancora che *la funzione* P *ammette le derivate seconde rispetto ad* x, y, z, *che saranno finite e continue in tutto* S, *i punti di* σ *al più esclusi*.

Dal *teorema di Poisson* e dalle (14), (25)′ risulta poi che *la* P *soddisfa alle equazioni*:

$$(28)\quad \begin{cases} \text{(nei punti di S)} \quad \Delta^2\mathrm{P} + k\mathrm{P} + \psi\mathrm{D} = 0, \\ \text{(nei punti di } \sigma) \quad \dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial n} = \begin{vmatrix} hv' & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ hv_0 & -k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ hv_1 & 1 & -k & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ hv_{p-2} & 0 & 0 & \dots & 1 & -k \end{vmatrix} = h\mathrm{P}. \end{cases}$$

18. Dalla (27) si ha, derivando sotto il segno d'integrale,

$$(27)'\quad \frac{\partial^i \mathrm{P}}{\partial k^i} = \frac{1}{4\pi}\int_s \left(k\frac{\partial^i \mathrm{P}}{\partial k^i} + i\frac{\partial^{i-1}\mathrm{P}}{\partial k^{i-1}} + \psi\frac{\partial^i \mathrm{D}}{\partial k^i}\right)\frac{dS}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r}\right)\frac{\partial^i \mathrm{P}}{\partial k^i}\, d\sigma;$$

e siccome le funzioni $\frac{\partial^i \mathrm{P}}{\partial k^i}, \frac{\partial^{i-1}\mathrm{P}}{\partial k^{i-1}}$ sono finite e continue in tutto S, i punti di σ inclusi, così avremo che *le derivate di* P *di un ordine qualsiasi rispetto a* k, *hanno le derivate prime rispetto ad* x, y, z *finite e continue in tutto il campo* S, *i punti di* σ *al più esclusi*. Ed allora, poichè l'espressione:

$$k\frac{\partial^i \mathrm{P}}{\partial k^i} + i\frac{\partial^{i-1}\mathrm{P}}{\partial k^{i-1}} + \psi\frac{\partial^i \mathrm{D}}{\partial k^i}$$

ha le derivate prime rispetto ad x, y, z finite e continue nei punti dell'interno di S, avremo che *le derivate di* P, *di un ordine qualsiasi rispetto a* k, *hanno le derivate seconde rispetto ad* x, y, z *finite e continue nei punti dell'interno di* S.

Dal *teorema di Poisson* si ricava:

$$(28)_1 \begin{cases} \Delta^2 \dfrac{\partial^i \mathrm{P}}{\partial k^i} = \Delta^2\left[\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_s \left(k\frac{\partial^i \mathrm{P}}{\partial k^i} + i\frac{\partial^{i-1}\mathrm{P}}{\partial k^{i-1}} + \psi\frac{\partial^i \mathrm{D}}{\partial k^i}\right)\frac{dS}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r}\right)\frac{\partial^i \mathrm{P}}{\partial k^i}\, d\sigma\right] = \\ \qquad = \Delta^2\left[\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_s \left(k\frac{\partial^i \mathrm{P}}{\partial k^i} + i\frac{\partial^{i-1}\mathrm{P}}{\partial k^{i-1}} + \psi\frac{\partial^i \mathrm{D}}{\partial k^i}\right)\frac{dS}{r}\right] = -\left(k\frac{\partial^i \mathrm{P}}{\partial k^i} + i\frac{\partial^{i-1}\mathrm{P}}{\partial k^{i-1}} + \psi\frac{\partial^i \mathrm{D}}{\partial k^i}\right). \end{cases}$$

Come è noto, in forza della prima delle equazioni (28) si ha in un punto p' dello spazio indefinito S″, limitato dalla superficie σ,

$$0 = \frac{1}{4\pi}\int_s (k\mathrm{P} + \psi . \mathrm{D})\frac{dS}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\mathrm{P} - \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial n}\right) d\sigma,$$

ossia, facendo uso della seconda delle (28),

$$0=\frac{1}{4\pi}\int_s (k\mathrm{P}+\psi\,.\,\mathrm{D})\frac{dS}{r}+\frac{1}{4\pi}\int_\sigma\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{h}{r}\right)\mathrm{P}d\sigma;$$

e quindi, derivando sotto il segno di integrale,

$$(27)''\quad 0=\frac{1}{4\pi}\int_s\left(k\frac{\partial^i\mathrm{P}}{\partial k^i}+i\frac{\partial^{i-1}\mathrm{P}}{\partial k^{i-1}}+\psi\frac{\partial^i\mathrm{D}}{\partial k^i}\right)\frac{dS}{r}+\frac{1}{4\pi}\int_\sigma\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{h}{r}\right)\frac{\partial^i\mathrm{P}}{\partial k^i}d\sigma.$$

Indicando con s un punto qualsiasi di σ, si ha:

$$\lim_{ps=0}\frac{\partial}{\partial n}\int_s\left(k\frac{\partial^i\mathrm{P}}{\partial k^i}+i\frac{\partial^{i-1}\mathrm{P}}{\partial k^{i-1}}+\psi\frac{\partial^i\mathrm{D}}{\partial k^i}\right)\frac{dS}{r}=\lim_{p's=0}\frac{\partial}{\partial n}\int_s\left(k\frac{\partial^i\mathrm{P}}{\partial k^i}+i\frac{\partial^{i-1}\mathrm{P}}{\partial k^{i-1}}+\psi\frac{\partial^i\mathrm{D}}{\partial k^i}\right)\frac{dS}{r}.$$

Si ha ancora dalla teoria delle funzioni potenziali di superficie:

$$\lim_{ps=0}\frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma\frac{\partial^i\mathrm{P}}{\partial k^i}\frac{d\sigma}{r}-\lim_{p's=0}\frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma\frac{\partial^i\mathrm{P}}{\partial k^i}\frac{d\sigma}{r}=-4\pi\frac{\partial^i\mathrm{P}(s)}{\partial k^i}.$$

Dalla (27)'' risulta poi:

$$(27)'''\quad \lim_{p's=0}\frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma\frac{\partial^i\mathrm{P}}{\partial k^i}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\sigma=-\lim_{p's=0}\frac{\partial}{\partial n}\int_s\left(k\frac{\partial^i\mathrm{P}}{\partial k^i}+i\frac{\partial^{i-1}\mathrm{P}}{\partial k^{i-1}}+\psi\frac{\partial^i\mathrm{D}}{\partial k^i}\right)\frac{dS}{r}$$
$$+\lim_{p's=0}\frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma\frac{\partial^i\mathrm{P}}{\partial k^i}\cdot\frac{h}{r}d\sigma.$$

Questa formola ci dice che l'espressione:

$$\lim_{p's=0}\frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\frac{\partial^i\mathrm{P}}{\partial k^i}d\sigma$$

esiste ed è finita e continua su σ; di modo che esisterà e sarà finita e continua su σ anche l'altra espressione:

$$\lim_{ps=0}\frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\frac{\partial^i\mathrm{P}}{\partial k^i}d\sigma;$$

e si avrà dalla teoria delle funzioni potenziali di doppio strato:

$$\lim_{ps=0}\frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\frac{\partial^i\mathrm{P}}{\partial k^i}d\sigma=\lim_{p's=0}\frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\frac{\partial^i\mathrm{P}}{\partial k^i}d\sigma.$$

Questa formola e le due analoghe precedenti ci dànno, insieme alle (27)', (27)'',

$$(28)_2\quad\begin{cases}\lim\limits_{ps=0}\dfrac{\partial}{\partial n}\dfrac{\partial^i\mathrm{P}}{\partial k^i}=\\[2ex] =\lim\limits_{ps=0}\dfrac{\partial}{\partial n}\left[\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_s\left(k\frac{\partial^i\mathrm{P}}{\partial k^i}+i\frac{\partial^{i-1}\mathrm{P}}{\partial k^{i-1}}+\psi\frac{\partial^i\mathrm{D}}{\partial k^i}\right)\frac{dS}{r}+\frac{1}{4\pi}\int_\sigma\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{h}{r}\right)\frac{\partial^i\mathrm{P}}{\partial k^i}d\sigma\right]\\[2ex] -\lim\limits_{p's=0}\dfrac{\partial}{\partial n}\left[\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_s\left(k\frac{\partial^i\mathrm{P}}{\partial k^i}+i\frac{\partial^{i-1}\mathrm{P}}{\partial k^{i-1}}+\psi\frac{\partial^i\mathrm{D}}{\partial k^i}\right)\frac{dS}{r}+\frac{1}{4\pi}\int_\sigma\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{h}{r}\right)\frac{\partial^i\mathrm{P}}{\partial k^i}d\sigma\right]=h\dfrac{\partial^i\mathrm{P}(s)}{\partial k^i}.\end{cases}$$

Adunque *le derivate di* P, *di un ordine qualsiasi rispetto a* k, *ammettono le derivate normali, che si mantengono finite e continue anche nei punti di* σ. *Esse poi*, come risulta dalle $(28)_1$, $(28)_2$, *soddisfano alle equazioni*:

$$(28)' \quad \begin{cases} \text{(nei punti S)} \quad \Delta^2 \dfrac{\partial^i P}{\partial k^i} + k \dfrac{\partial^i P}{\partial k^i} + i \dfrac{\partial^{i-1} P}{\partial k^{i-1}} + \psi \dfrac{\partial^i D}{\partial k^i} = 0, \\ \text{(nei punti di } \sigma) \quad \dfrac{\partial}{\partial n} \dfrac{\partial^i P}{\partial k^i} = h \dfrac{\partial^i P}{\partial k^i}. \end{cases}$$

19. Il polinomio D è di grado $p-1$, per cui l'equazione:

$$(29) \qquad D = 0$$

ammetterà $p-1$ radici.

Indicando con k' una radice di questa equazione multipla dell'ordine $t+1$ $(t \geq 0)$, avremo per $k = k'$:

$$0 = D = \frac{\partial D}{\partial k} = \cdots = \frac{\partial^t D}{\partial k^t};$$

e, supposto $|k'| < \frac{1}{c'}$, sostituendo nelle (28), (28)', risulterà:

$$(30) \quad \begin{cases} \text{(nei punti di S):} & \text{(nei punti di } \sigma): \\ \Delta^2 P + k' P = 0, & \dfrac{\partial P}{\partial n} = hP, \\ \Delta^2 \dfrac{\partial P}{\partial k} + k' \dfrac{\partial P}{\partial k} + P = 0, & \dfrac{\partial}{\partial n} \dfrac{\partial P}{\partial k} = h \dfrac{\partial P}{\partial k}, \\ \Delta^2 \dfrac{\partial^2 P}{\partial k^2} + k' \dfrac{\partial^2 P}{\partial k^2} + 2 \dfrac{\partial P}{\partial k} = 0, & \dfrac{\partial}{\partial n} \dfrac{\partial^2 P}{\partial k^2} = h \dfrac{\partial^2 P}{\partial k^2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \Delta^2 \dfrac{\partial^t P}{\partial k^t} + k' \dfrac{\partial^t P}{\partial k^t} + t \dfrac{\partial^{t-1} P}{\partial k^{t-1}} = 0, & \dfrac{\partial}{\partial n} \dfrac{\partial^t P}{\partial k^t} = h \dfrac{\partial^t P}{\partial k^t}. \end{cases}$$

Ora, quantunque non si sappia nulla di ciò che accade delle derivate prime di P, $\frac{\partial P}{\partial k}, \frac{\partial^2 P}{\partial k^2}, \ldots$ rispetto ad x, y, z nei punti di σ, pure per il fatto che le derivate normali di queste funzioni sono finite e continue anche nei punti di σ, abbiamo che a queste medesime funzioni si può applicare il *teorema di Green*, il quale ci dà:

$$0 = \int_S \left(\frac{\partial^i P}{\partial k^i} \Delta^2 \frac{\partial^{i-1} P}{\partial k^{i-1}} - \frac{\partial^{i-1} P}{\partial k^{i-1}} \Delta^2 \frac{\partial^i P}{\partial k^i} \right) dS + \int_\sigma \left(\frac{\partial^i P}{\partial k^i} \cdot \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^{i-1} P}{\partial k^{i-1}} - \frac{\partial^{i-1} P}{\partial k^{i-1}} \cdot \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^i P}{\partial k^i} \right) d\sigma.$$

Di qui, facendo uso successivamente delle (30), si otterrà:

$$\int_S P^2 dS = 0, \quad \int_S \left\{ P \frac{\partial^2 P}{\partial k^2} - 2 \left(\frac{\partial P}{\partial k} \right)^2 \right\} dS = 0, \ldots, \int_S \left\{ (t-1) \frac{\partial^{t-2} P}{\partial k^{t-2}} \frac{\partial^t P}{\partial k^t} - t \left(\frac{\partial^{t-1} P}{\partial k^{t-1}} \right)^2 \right\} dS = 0;$$

e quindi si avrà in tutto S:

$$P = \frac{\partial P}{\partial k} = \cdots = \frac{\partial^{t-1} P}{\partial k^{t-1}} = 0.$$

In conclusione abbiamo che se k' è radice multipla dell'ordine $t+1$ dell'equazione (29) e k' è di modulo inferiore a $\frac{1}{c'}$, si può scrivere:

$$(31) \qquad D = (k'-k)^{t+1} . D_1 , \qquad P = (k'-k)^t . P_1 ,$$

con D_1 polinomio di grado $p-t-2$ in k, che non si annulla per $k=k'$; e con P_1 funzione finita e continua insieme alle derivate prime e seconde rispetto ad x, y, z in tutto S, i punti di σ al più esclusi per queste derivate, e tale che le sue derivate normali sono finite e continue anche nei punti di σ.

20. Se $\frac{\partial^t P}{\partial k^t}$ per $k=k'$ non è identicamente nulla in tutto il campo S, si avrà dalle (28)' per $k=k'$:

$$(30)' \quad \text{(nei punti di S)} \ \Delta^2 \frac{\partial^t P}{\partial k^t} + k' \frac{\partial^t P}{\partial k^t} = 0 , \quad \text{(nei punti di } \sigma) \ \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^t P}{\partial k^t} = h \frac{\partial^t P}{\partial k^t} ;$$

e dalla seconda delle (31):

$$(32) \qquad \left(\frac{\partial^t P}{\partial k^t}\right)_{k=k'} = (-1)^t \pi(t) . (P_1)_{k=k'} .$$

Dimostriamo ora che, *nel caso in cui* $\left(\frac{\partial^t P}{\partial k^t}\right)_{k=k'}$ *non è identicamente nulla, la radice* k' *dell'equazione* (29) *è reale e positiva.*

Supposta infatti dapprima k' reale e negativa, risulta dalle (30)', integrando per parti ed avendo riguardo al fatto che le derivate normali di $\frac{\partial^t P}{\partial k^t}$ sono finite e continue anche nei punti di σ,

$$0 = \int_S \frac{\partial^t P}{\partial k^t} \left(\Delta^2 \frac{\partial^t P}{\partial k^t} + k' \frac{\partial^t P}{\partial k^t} \right) dS = \int_S k' \left(\frac{\partial^t P}{\partial k^t} \right)^2 dS -$$
$$- \int_S \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^t P}{\partial k^t} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^t P}{\partial k^t} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^t P}{\partial k^t} \right)^2 \right\} dS - h \int_\sigma \left(\frac{\partial^t P}{\partial k^t} \right)^2 d\sigma ;$$

e questa ci dà ovviamente in tutto S:

$$\left(\frac{\partial^t P}{\partial k^t} \right)_{k=k'} = 0 ,$$

contrariamente all'ipotesi fatta.

Supposta k' complessa e posto:

$$k' = k'_1 + i k'_2 , \quad \left(\frac{\partial^t P}{\partial k^t} \right)_{k=k'} = v_1 + i v_2$$

con k'_2 diversa dallo zero, si ha dalle (30)':

$$\text{(nei punti di S)} \ \Delta^2 v_1 + k'_1 v_1 - k'_2 v_2 = 0 , \qquad \text{(nei punti di } \sigma) \ \frac{\partial v_1}{\partial n} = h v_1 ,$$

$$(\quad \text{"} \quad) \ \Delta^2 v_2 + k'_1 v_2 + k'_2 v_1 = 0 , \qquad (\quad \text{"} \quad) \ \frac{\partial v_2}{\partial n} = h v_2 ;$$

e quindi, integrando per parti,

$$0 = \int_S \left\{ (v_1 \Delta^2 v_2 - v_2 \Delta^2 v_1) + k'_2 (v_1^2 + v_2^2) \right\} dS = k'_2 \int_S (v_1^2 + v_2^2)\, dS\,;$$

donde risulta in tutto S:

$$v_1 = v_2 = 0\,,$$

contrariamente all'ipotesi fatta.

Questo risultato si può ancora interpretare dicendo che *per k' costante negativa o complessa non possono esistere integrali regolari delle equazioni*:

$$(30)'' \qquad \text{(nei punti di S)}\ \Delta^2 p' + k' p' = 0\,, \qquad \text{(nei punti di } \sigma)\ \frac{\partial p'}{\partial n} = h p'\,.$$

21. Ciò premesso, si ponga:

$$(33) \qquad w = \frac{P}{D}\,.$$

Da tutto ciò che precede risulta che *la funzione w per $|k| < \frac{1}{c'}$ è finita e continua in tutto* S *insieme alle sue derivate prime e seconde rispetto ad x, y, z, i punti di σ al più esclusi per queste derivate, ed ammette le derivate normali, che si mantengono finite e continue anche quando dai punti dell'interno di* S *si va ai punti di σ*. Segue inoltre, avuto anche riguardo alla forma stessa di w *che essa può avere per singolarità, per $|k| < \frac{1}{c'}$, dei poli semplici soltanto corrispondenti a quei valori reali e positivi di k, in numero finito, che sono radici dell'equazione* (29). Dalle (28) risulta poi che *la funzione w, per i valori di k per i quali non diviene infinita, soddisfa alle equazioni*:

$$(34) \qquad \text{(nei punti di S)}\ \Delta^2 w + k w + \psi = 0\,, \qquad \text{(nei punti di } \sigma)\ \frac{\partial w}{\partial n} = h w\,.$$

Per i valori k' poli di w si ha dalle (31), (32):

$$\lim_{k=k'} (k' - k)\, w = \left(\frac{P_1}{D_1}\right)_{k=k'} = \frac{(-1)^t}{\pi(t) \cdot (D_1)_{k=k_1}} \left(\frac{\partial^t P}{\partial k^t}\right)_{k=k'} = p'\,;$$

e dalle (30)′:

$$(30)'' \qquad \text{(nei punti di S)}\ \Delta^2 p' + k' p' = 0\,, \qquad \text{(nei punti di } \sigma)\ \frac{\partial p'}{\partial n} = h p'\,.$$

Abbiamo dunque: *il residuo p' della funzione w in un polo è rappresentato da una funzione finita e continua insieme*, ecc., *come la w stessa, e soddisfa alle equazioni* (30)″.

Finalmente se si osserva che la quantità $\frac{1}{c'}$ è superiore o almeno uguale a λ, che λ si può prendere comunque grande, che il corrispondente numero intero p è sempre finito e che per conseguenza i poli della corrispondente funzione w non possono essere che in numero finito, risulterà che *esiste una funzione w dei punti di* S

(i punti di σ inclusi) e della variabile complessa k, la quale, considerata in tutta l'estensione del piano k, è finita e continua insieme alle sue derivate prime e seconde rispetto ad x, y, z, i punti di σ al più esclusi per queste derivate, ed ammette le derivate normali, che si mantengono finite e continue anche quando dai punti di S si va ai punti di σ. Essa può avere solamente una serie finita o infinita di poli semplici, corrispondenti ad una serie finita od infinita di valori reali e positivi di k, la quale, nel caso che è infinita, ha per valore limite il valore $k=\infty$. Questa funzione w, per i valori di k per i quali è finita, soddisfa alle equazioni (34); *per i valori di k per i quali diviene infinita, i corrispondenti residui sono integrali regolari, della stessa natura della funzione w, delle equazioni* (30)".

22. Riprendiamo le equazioni (14), i cui integrali si possono esprimere mediante la formola (8)''', e introduciamo le espressioni:

$$W_{s,t}=\int_S v_s . v_t dS, \qquad V_{s,t}=\int_S\left(\frac{\partial v_s}{\partial x}\frac{\partial v_t}{\partial x}+\frac{\partial v_s}{\partial y}\frac{\partial v_t}{\partial y}+\frac{\partial v_s}{\partial z}\frac{\partial v_t}{\partial z}\right)dS+h\int_\sigma v_s v_t d\sigma .$$

Ragionando come ai §§ 11, 12, 14, risulta:

$$W_{s,t}=W_{s+t}=V_{s,t+1}=V_{s+t+1},$$

$$\frac{W_1}{W_0}\leq\frac{W_2}{W_1}\leq\dots\leq\frac{W_r}{W_{r-1}}\leq\dots, \tag{35}$$

$$|v_{i+1}|\leq K\sqrt{W_{2i}}, \tag{36}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left|\frac{\partial v_{i+2}}{\partial x_1}\right|\leq K_1(\sqrt{W_{2i}}+\sqrt{W_{2i+2}}),\\ \dots\dots\dots\dots\dots,\\ \dots\dots\dots\dots\dots,\end{array}\right. \tag{37}$$

delle quali formole le (37) valgono per i punti del campo S', di cui è parola al § 14.

Ora la (36) ci dà:

$$v^2_r<K^2W_{2r-2};$$

e quindi:

$$W_{2r}<K^2W_{2r-2}\int_S dS.$$

D'altra parte si ha dalle (35):

$$W^2_{2r-1}\leq W_{2r-2}\,W_{2r};$$

per cui, posto:

$$K^2\int_S dS=K'^2,$$

con K' quantità certamente finita, risulterà:

$$\frac{W_{2r-1}}{W_{2r-2}}<K'.$$

qualunque sia l'indice r. Onde avremo:

$$\lim_{r=\infty} \frac{W_r}{W_{r-1}} = c_1 , \tag{35)'}$$

con c_1 quantità finita, positiva e discosta dallo zero.

23. Si consideri la serie:

$$v = v_0 + v_1 k + v_2 k^2 + \cdots . \tag{38}$$

Ragionando come ai §§ 14, 15 e servendosi delle (35), (35)', (36), (37), risulta che *la funzione v, determinata dalla serie* (38) *per* $|k| < \frac{1}{c_1}$, *è finita e continua in tutto il campo* S *insieme alle sue derivate prime e seconde rispetto ad* x, y, z, *i punti di* σ *al più esclusi per queste derivate; ed ammette le derivate normali, che si mantengono finite e continue anche quando dai punti di* S *si va ai punti di* σ.

Per altro *la serie* (38) *in un punto almeno del campo* S *è divergente per* $k = \frac{1}{c_1'} > \frac{1}{c_1}$.

Infatti si osservi anzitutto che dalla formola:

$$\lim_{r=\infty} \frac{W_r}{W_{r-1}} \cdot \frac{1}{c_1'} = \frac{c_1}{c_1'} > 1$$

risulta che la serie:

$$W_0 + W_1 k + W_2 k^2 + \cdots$$

per $k = \frac{1}{c_1'}$ è divergente. Allora, data una quantità positiva A comunque grande e indicato con B il prodotto del volume dello spazio S per il massimo valore assoluto della funzione v_0, si potrà determinare un numero intero i tale che si abbia per $k = \frac{1}{c_1'}$:

$$W_0 + W_1 k + W_2 k^2 + \cdots + W_i k^i > A . B ,$$

ossia:

$$\int_S v_0^2 dS + k \int_S v_0 v_1 \, dS + k^2 \int_S v_0 v_2 \, dS + \cdots + k^i \int_S v_0 v_i \, dS =$$

$$= \int_S v_0 (v_0 + v_1 k + v_2 k^2 + \cdots + v_i k^i) \, dS > A . B .$$

In questo modo si dovrà avere in un punto almeno di S:

$$|v_0 + v_1 k + v_2 k^2 + \cdots + v_i k^i| > A ,$$

con A arbitrariamente grande. Questo risultato ci dice appunto che la serie (38) è divergente in un punto almeno del campo S per $k = \frac{1}{c_1'}$. Adunque *la serie v per*

$|k| > \frac{1}{c_1}$ *non può rappresentare sempre una funzione finita e continua in tutto il campo* S.

24. Ora supponiamo che la quantità arbitraria λ, introdotta al § 13, sia superiore ad $\frac{1}{c_1}$. Determinato il corrispondente numero intero p, si considerino le p serie:

$$\begin{aligned} v = v^{(1)} &= v_0 + v_1 k + v_2 k^2 + \cdots \\ v^{(2)} &= v_1 + v_2 k + v_3 k^2 + \cdots \\ v^{(3)} &= v_2 + v_3 k + v_4 k^2 + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v^{(p)} &= v_{p-1} + v_p k + v_{p+1} k^2 + \cdots \end{aligned}$$

Queste serie, appunto come la serie (38), sono convergenti in ugual grado in tutto S (i punti di σ inclusi) per $|k| < \frac{1}{c_1}$; per cui si può scrivere, facendo uso della (16)' del § 16,

$$\begin{aligned} &\alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \cdots + \alpha_p v^{(p)} = \\ &= \alpha_1 (v_0 + v_1 k + v_2 k^2 + \cdots) + \alpha_2 (v_1 + v_2 k + v_3 k^2 + \cdots) + \cdots + \alpha_p (v_{p-1} + v_p k + v_{p+1} k^2 + \cdots) = \\ &= (\alpha_1 v_0 + \alpha_2 v_1 + \cdots + \alpha_p v_{p-1}) + (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p) k + (\alpha_1 v_2 + \alpha_2 v_3 + \cdots + \alpha_p v_{p+1}) k^2 + \cdots \\ &= v'_0 + v'_1 k + v'_2 k^2 + \cdots = v'. \end{aligned}$$

Si ha poi:

$$v_0 = v^{(1)} - k v^{(2)}, \quad v_1 = v^{(2)} - k v^{(3)}, \ldots, v_{p-2} = v^{(p-1)} - k v^{(p)}.$$

In conclusione si può scrivere per $|k| < \frac{1}{c_1}$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \alpha_3 v^{(3)} + \cdots + \alpha_{p-1} v^{(p-1)} + \alpha_p v^{(p)} &= v', \\ v^{(1)} - k v^{(2)} &= v_0, \\ v^{(2)} - k v^{(3)} &= v_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v^{(p-1)} - k v^{(p)} &= v_{p-2}; \end{aligned}$$

e di qui, servendoci delle (26), avremo:

$$(33)' \qquad v = v^{(1)} = \frac{P}{D}.$$

Adunque per $|k| < \frac{1}{c_1}$ la funzione v, determinata dalla serie (38), coincide con la funzione w, determinata dalla formola (33).

Risulta intanto di qui che la funzione w per $|k| < \frac{1}{c_1}$ non ha poli; per cui *il valore k_1 di k, corrispondente al primo polo di w, se pure c'è, deve essere superiore od uguale ad* $\frac{1}{c_1}$.

25. Se l'equazione (29) ha delle radici di modulo inferiore a k_1 (nel caso che esiste un primo polo k_1 inferiore a λ della funzione w) o a λ (nel caso contrario), l'espressione (33) di w per $|k| < k_1$ o per $|k| < \lambda$, secondo che esiste o no il polo k_1, si deve potere mettere sotto la forma:

$$w = \frac{P_0}{D_0},$$

dove D_0 è un polinomio in k, che non si annulla per valori di k inferiori a k_1 o a λ, secondo i casi; e dove P_0 è, come P, una funzione finita e continua in tutto S (i punti di σ inclusi) insieme alle sue derivate di un ordine qualsiasi rispetto a k per $|k| < \lambda$. Allora la w si può sviluppare *in serie di Maclaurin* per $|k| < k_1$ o per $|k| < \lambda$, secondo che esiste o no il polo k_1; di modo che potremo scrivere:

$$w = w_0 + w_1 k + w_2 k^2 + \cdots;$$

e poichè per $|k| < \frac{1}{c_1}$ la w coincide con la v, così dovremo avere:

$$w_0 = v_0, \quad w_1 = v_1, \quad w_2 = v_2, \ldots;$$

e per conseguenza lo sviluppo precedente di w, che è valevole per $|k| < k_1$ o per $|k| < \lambda$, secondo che esiste o no il polo k_1, si può ancora scrivere nel seguente modo:

$$w = v_0 + v_1 k + v_2 k^2 + \cdots. \tag{38$'$}$$

Ora questa serie non è che la serie (38), la quale, come si è visto, non può sempre rappresentare una funzione finita e continua in tutto S per $|k| > \frac{1}{c_1}$; di modo che, essendo $\frac{1}{c_1} < \lambda$, dovremo necessariamente avere:

$$k_1 = \frac{1}{c_1}.$$

Adunque *la funzione w deve avere un primo polo per $k = k_1 = \frac{1}{c_1}$.*

26. Chiamiamo p_1 il residuo della funzione w per $k = k_1$. Si può scrivere:

$$w = \frac{p_1}{k_1 - k} + l; \tag{38$''$}$$

e se w ha un secondo polo k_2 superiore a k_1 e inferiore a λ, la funzione l sarà regolare e sviluppabile in *serie di Maclaurin* per $|k| < k_2$; nel caso contrario la funzione l sarà regolare e sviluppabile in *serie di Maclaurin* per $|k| < \lambda$; per cui avremo per $|k| < k_2$ o per $|k| < \lambda$, secondo che esiste o no il polo k_2,

$$l = l_0 + l_1 k + l_2 k^2 + \cdots. \tag{39}$$

Questa ci dà insieme alle (38)$'$, (38)$''$:

$$v_i = l_i + \frac{p_1}{k_1^{i+1}}; \tag{40}$$

e poichè si ha per la p_1 (§ 21):

$$(30)''' \quad \text{(nei punti di S)} \ \Delta^2 p_1 + k_1 p_1 = 0\,, \qquad \text{(nei punti di } \sigma) \ \frac{\partial p_1}{\partial n} = h p_1\,,$$

tenuto conto delle equazioni (14), di cui le v_i sono integrali, avremo per i coefficienti dello sviluppo (39) le seguenti equazioni:

$$(14)''' \quad \begin{cases} \text{(nei punti di S)} \ \Delta^2 l_0 + \psi - p_1 = 0\,, & \Delta^2 l_i + l_{i-1} = 0 \\ \text{(nei punti di } \sigma) \ \dfrac{\partial l_0}{\partial n} = h l_0\,, & \dfrac{\partial l_i}{\partial n} = h l_i\,. \end{cases}$$

Queste equazioni sono perfettamente analoghe alle (14); sicchè partendo da esse e ripetendo i ragionamenti dei §§ 22, 23 si dimostra che *la serie* (39) *per* $|k| < \frac{1}{c_2}$, dove c_2 è una quantità finita, positiva e discosta dallo zero, *rappresenta una funzione finita e continua in tutto il campo* S (*i punti di* σ *compresi*); *mentre non può sempre rappresentare una funzione finita e continua in tutto il campo* S *per* $|k| > \frac{1}{c_2}$.

Intanto deve essere $\frac{1}{c_2} > k_1$. Inoltre possiamo supporre di avere fissata la quantità arbitraria λ superiore alla quantità determinata e finita $\frac{1}{c_2}$; e allora, poichè lo sviluppo (39) è valevole solo per $|k| < \frac{1}{c_2}$ e non per $|k| > \frac{1}{c_2}$, sarà:

$$k_2 = \frac{1}{c_2}\,.$$

Quindi *la funzione* w *deve avere un secondo polo per* $k = k_2 = \frac{1}{c_2}$.

Chiamando p_2 il residuo della funzione w nel polo $k = k_2$, si avrà:

$$w = \frac{p_1}{k_1 - k} + \frac{p_2}{k_2 - k} + m\,;$$

e se w ha un terzo polo k_3 superiore a k_2 e inferiore a λ, la funzione m sarà regolare solo per $|k| < k_3$; nel caso contrario sarà certamente regolare per $|k| < \lambda$.

Arrivati a questo punto è facile capire che, seguitando a ragionare sempre nella stessa guisa, si dimostra che *la funzione* w *ha effettivamente una serie finita o infinita di poli semplici corrispondenti ad un gruppo* C *di valori reali, positivi e crescenti*

$$(41) \qquad k_1\,, k_2\,, k_3\,, \ldots$$

della variabile k. È evidente poi che *questo gruppo* C, *nel caso che è infinito, ha per valore limite il valore* $k = \infty$; e che *i residui*

$$(42) \qquad p_1\,, p_2\,, p_3\,, \ldots$$

della funzione w *nei poli* $k_1, k_2, k_3, \ldots$ *sono integrali regolari delle equazioni*:

$$(30)^{\text{IV}} \quad \text{(nei punti di S)} \ \Delta^2 p_i + k_i p_i = 0\,, \qquad \text{(nei punti di } \sigma) \ \frac{\partial p_i}{\partial n} = h p_i\,.$$

27. Nel caso in cui la funzione ψ, che comparisce nelle equazioni (34), soddisfa alla condizione:

$$(43) \qquad \text{(nei punti di } \sigma) \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = h\psi ,$$

può darsi che, dopo di avere ripetuta l'operazione del paragrafo precedente r volte, risulti identicamente in tutto il campo S:

$$\psi - p_1 - p_2 - \cdots - p_r = 0 ;$$

allora si avrà:

$$\psi = p_1 + p_2 + \cdots + p_r$$

e il corrispondente gruppo C dei valori (41) sarà finito. In qualunque altro caso l'operazione del paragrafo precedente si può certamente seguitare indefinitamente, e il gruppo C sarà infinito.

Un valore K', per il quale esiste un integrale regolare p' delle equazioni (30)'', lo diremo *valore eccezionale*, la corrispondente funzione p' la diremo *soluzione eccezionale*; e così possiamo enunciare il seguente risultato: *data una funzione qualsiasi ψ, la quale sia finita e continua in tutto il campo* S *insieme alle sue derivate parziali del primo ordine, i punti di σ al più esclusi per queste derivate, esiste sempre una corrispondente serie finita o infinita* (42) *di soluzioni eccezionali. Nel caso in cui la serie dei valori eccezionali* (41), *e perciò anche quella delle corrispondenti soluzioni eccezionali* (42), *sono finite, si ha:*

$$(44) \qquad \psi = \sum_1^r {}_i\, p_i .$$

28. I valori eccezionali del gruppo C e le corrispondenti soluzioni eccezionali si possono definire ancora nel seguente modo.

Incominciamo dall'osservare che per $|k| < k_1$ si ha:

$$\lim_{i=\infty} (v_i k^i) = 0 .$$

Similmente si ha per $|k| < k_2$:

$$\lim_{i=\infty} (l_i k^i) = 0 ,$$

e in particolare:

$$\lim_{i=\infty} (l_i k_1^i) = 0 .$$

In questo modo si avrà dalla (40):

$$(45) \qquad \lim_{i=\infty} (v_i k_1^i) = \frac{p_1}{k_1} ;$$

mentre per $k > k_1$ si ha *generalmente* nel campo S (ossia esclusi al più alcuni suoi punti):

$$\lim_{i=\infty} (v_i k^i) = \infty .$$

Adunque il primo valore eccezionale k_1 del gruppo C può definirsi come quel valore reale e positivo di k, per cui il limite di $v_i k^i$ per $i = \infty$ è determinato, finito e generalmente diverso da zero in S. La corrispondente soluzione eccezionale viene determinata dalla (45).

Similmente il secondo valore eccezionale k_2 del gruppo C può definirsi come quel valore reale e positivo di k, per cui il limite di $l_i k^i$ per $i = \infty$ è determinato, finito e generalmente diverso da zero in S. La corrispondente soluzione eccezionale viene determinata dalla formola:

$$\lim_{i=\infty} (l_i k_2^i) = \frac{p_2}{k_2}. \tag{45'}$$

Lo stesso si può ripetere per gli altri valori eccezionali di C e per le corrispondenti soluzioni eccezionali.

29. Osserviamo che i valori eccezionali (41) non sono in generale i soli valori eccezionali che possono esistere relativamente al campo dato S. Dal fatto che, quando la funzione ψ nei punti di σ non soddisfa alla condizione (43), i valori eccezionali del gruppo C sono infiniti, risulta intanto che *esistono certamente infiniti valori eccezionali*. È poi evidente che *il gruppo* G *di questi infiniti valori eccezionali è indipendente dalla funzione* ψ; mentre che *il gruppo* C, come si è visto, *dipende dalla funzione* ψ.

Ora vogliamo dimostrare che il gruppo G ha il solo valore limite $k = \infty$. Per questo basterà provare che in un intervallo qualsiasi dell'asse reale e positivo della variabile k, di cui un estremo sia sempre l'origine, non ci può essere che un numero finito di punti corrispondenti a valori eccezionali: e più precisamente noi dimostreremo che data una quantità λ positiva e comunque grande, e trovato il corrispondente numero intero p, fra o e λ non ci possono essere più di $p - 1$ valori eccezionali.

Supposto infatti che fra o e λ ci siano più di $p - 1$ valori eccezionali, consideriamone p disposti per ordine crescente:

$$k_1, k_2, \dots k_p,$$

e indichiamo con

$$p_1, p_2, \dots p_p$$

le corrispondenti soluzioni eccezionali.

Facciamo nelle equazioni (14):

$$\psi = p_1 + p_2 + \cdots + p_p. \tag{46}$$

Si avrà:

$$v_i = \frac{p_1}{k_1^{i+1}} + \frac{p_2}{k_2^{i+1}} + \cdots + \frac{p_p}{k_p^{i+1}}.$$

Ora si ha:

$$\lim_{i=\infty} (v_i k_1^i) = \lim_{i=\infty} \left\{ \left(\frac{p_1}{k_1^{i+1}} + \frac{p_2}{k_2^{i+1}} + \cdots + \frac{p_p}{k_p^{i+1}} \right) k_1^i \right\} = \frac{p_1}{k_1};$$

quindi, in conformità del risultato del paragrafo precedente, il valore k_1 di k sarà il primo valore eccezionale del gruppo C corrispondente alla funzione (46) e p_1 sarà la corrispondente soluzione eccezionale. In questo modo la funzione $\psi - p_1$, che comparisce nelle equazioni (14)$'''$, diverrà questa volta $p_2 + p_3 + \cdots + p_p$; di guisa che avremo:

$$l_i = \frac{p_2}{k_2^{i+1}} + \frac{p_3}{k_3^{i+1}} + \cdots + \frac{p_p}{k_p^{i+1}},$$

$$\lim_{i=\infty} (l_i k_2^i) = \frac{p_2}{k_2};$$

e così il valore k_2 di k sarà il secondo valore eccezionale del gruppo C corrispondente alla funzione (46) e p_2 sarà la corrispondente soluzione eccezionale.

Seguitando nella medesima maniera, risulta che il gruppo C, corrispondente alla funzione (46), ha fra o e λ i p valori eccezionali $k_1, k_2, \ldots k_p$. Ora i valori eccezionali $k_1, k_2, \ldots k_p$ sono anche i poli della funzione w corrispondente alla medesima funzione (46); per cui abbiamo che la funzione w corrispondente alla funzione (46), della quale si è dimostrata l'esistenza al § 21, ammette p poli fra o e λ.

Intanto la funzione w può anche esprimersi mediante la formola (33), nella quale P è funzione regolare in tutto S per $|k| < \lambda$ e D è un polinomio di grado $p - 1$; di modo che w non può avere più di $p - 1$ poli fra o e λ, contrariamente al risultato testè ottenuto. Questa discordanza di risultati dipende appunto dall' avere ammessa l'esistenza di più di $p - 1$ valori eccezionali del gruppo G fra o e λ.

30. Dimostriamo ora, a compimento del risultato del § 21, che *l'integrale regolare w delle equazioni* (34) *è unico per qualunque valore di k, che non fa parte del gruppo* G.

Infatti supponiamo che pel valore k' di k, che non fa parte del gruppo G, ci siano due integrali regolari e distinti w_1, w_2 delle equazioni (34).

Posto:

$$w = w_1 - w_2,$$

risulterà da queste equazioni:

$$\text{(nei punti di S)} \quad \Delta^2 w + k' w = 0, \qquad \text{(nei punti di } \sigma) \quad \frac{\partial w}{\partial n} = hw$$

con w funzione regolare; e poichè k' non fa parte del gruppo G deve essere identicamente:

$$w = 0$$

in tutto il campo S, contrariamente all' ipotesi fatta.

31. Le soluzioni eccezionali godono delle seguenti proprietà:

$$\text{(47)} \qquad \int_S p'^2 \, dS \neq 0, \qquad \int_S p' p'' \, dS = 0,$$

dove p', p'' sono rispettivamente gli integrali regolari delle equazioni (30)$''$ (soluzioni eccezionali) corrispondenti ai valori (eccezionali) k', k'', diversi tra di loro, del parametro k'.

La prima di queste formole è evidente. Per dimostrare la seconda si considerino le equazioni:

$$\text{(nei punti di S)}\ \Delta^2 p' + k' p' = 0, \quad \text{(nei punti di } \sigma)\ \frac{\partial p'}{\partial n} = h p',$$

$$(\quad \text{"} \quad)\ \Delta^2 p'' + k'' p'' = 0, \quad (\quad \text{"} \quad)\ \frac{\partial p''}{\partial n} = h p''.$$

Si ricava, integrando per parti,

$$(k' - k'') \int_S p' p'' \, dS = \int_S (p' \Delta^2 p'' - p'' \Delta^2 p') \, dS = \int_\sigma \left(p'' \frac{\partial p'}{\partial n} - p' \frac{\partial p''}{\partial n} \right) d\sigma = 0;$$

e poichè:

$$k' \neq k'',$$

risulterà:

$$\int_S p' p'' \, dS = 0.$$

32. Supponiamo che la funzione ψ sia finita e continua in tutto il campo S (i punti di σ inclusi) insieme alle sue derivate parziali dei primi tre ordini; che i punti di σ soddisfi alla condizione (43); e che la corrispondente serie (42) di soluzioni eccezionali sia indefinita.

Supponiamo ancora di avere determinate le prime i soluzioni eccezionali:

$$p_1, p_2, \ldots, p_i,$$

e richiamiamo il procedimento che si deve tenere, secondo i calcoli precedenti, per determinare la $(i+1)^{\text{esima}}$ soluzione eccezionale.

Posto:

$$u_{-1} = \psi - \sum_1^i {}_r \, p_r,$$

si considerino le equazioni:

$$(14)_1 \begin{cases} \text{(nei punti di S)}\ \Delta^2 u_0 + u_{-1} = 0, & \Delta^2 u_1 + u_0 = 0, & \Delta^2 u_2 + u_1 = 0, \ldots \\ \text{(nei punti di } \sigma)\ \dfrac{\partial u_0}{\partial n} = h u_0, & \dfrac{\partial u_1}{\partial n} = h u_1, & \dfrac{\partial u_2}{\partial n} = h u_2, \ldots \ldots \end{cases}$$

e si costruiscano, mediante i loro integrali regolari, le espressioni:

$$W_{s,t} = \int_S u_s u_t \, dS, \quad V_{s,t} = \int_S \left\{ \frac{\partial u_s}{\partial x} \frac{\partial u_t}{\partial x} + \frac{\partial u_s}{\partial y} \frac{\partial u_t}{\partial y} + \frac{\partial u_s}{\partial z} \frac{\partial u_t}{\partial z} \right\} dS + h \int_\sigma u_s u_t \, d\sigma.$$

Si avrà, come è noto,

$$W_{r,s} = W_{r-1,s+1} = W_{r+s} = V_{r,s+1} = V_{r+s+1}\,,$$

$$(35)'_1 \qquad \lim_{m=\infty} \frac{W_m}{W_{m-1}} = \frac{1}{k_{i+1}}\,,$$

$$(35)_1 \qquad \frac{W_1}{W_0} \leq \frac{W_2}{W_1} \leq \cdots \leq \frac{W_r}{W_{r-1}} \leq \cdots \leq \frac{1}{k_{i+1}}\,,$$

dove k_{i+1} è l'$(i+1)^{\text{esimo}}$ valore eccezionale; la serie:

$$u = u_0 + u_1 k + u_2 k^2 + \cdots$$

per $|k| < k_{i+1}$ rappresenterà una funzione finita e continua insieme, ecc.; e, così come la $w = v$, i cui coefficienti sono gli integrali regolari delle equazioni (14), soddisfa per $|k| < k_1$ alle equazioni (34), questa u per $|k| < k_{i+1}$ soddisferà alle equazioni:

$$(34)_1 \quad \text{(nei punti di S)} \quad \Delta^2 u + ku + u_{-1} = 0\,, \qquad \text{(nei punti di } \sigma) \quad \frac{\partial u}{\partial n} = hu\,.$$

Il residuo della funzione u nel polo semplice $k = k_{i+1}$ sarà appunto la $(i+1)^{\text{esima}}$ soluzione eccezionale p_{i+1}.

Posto poi:

$$u_{-2} = -\left(\Delta^2 \psi + \sum_1^i {}_r k_r p_r\right),$$

avremo ancora dalle $(30)^{\text{IV}}$ e dalla (43):

$$(14)'_1 \quad \text{(nei punti di S)} \quad \Delta^2 u_{-1} + u_{-2} = 0\,, \qquad \text{(nei punti di } \sigma) \quad \frac{\partial u_{-1}}{\partial n} = hu_{-1}\,.$$

33. Ora si considerino le espressioni:

$$V_{-1} = \int_S \left(\frac{\partial u_{-1}}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_{-1}}{\partial y}\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial u_{-1}}{\partial z}\frac{\partial u_0}{\partial z}\right) dS + h\int_\sigma u_{-1} u_0\, d\sigma, \qquad W_{-1} = \int_S u_{-1} u_0\, dS,$$

$$V_{-2} = \int_S \left\{\left(\frac{\partial u_{-1}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{-1}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{-1}}{\partial z}\right)^2\right\} dS + h\int_\sigma u_{-1}^2\, d\sigma, \qquad W_{-2} = \int_S u_{-1}^2\, dS,$$

$$V_{-3} = \int_S \left(\frac{\partial u_{-2}}{\partial x}\frac{\partial u_{-1}}{\partial x} + \frac{\partial u_{-2}}{\partial y}\frac{\partial u_{-1}}{\partial y} + \frac{\partial u_{-2}}{\partial z}\frac{\partial u_{-1}}{\partial z}\right) dS + h\int_\sigma u_{-2} u_{-1}\, d\sigma, \qquad W_{-3} = \int_S u_{-2} u_{-1}\, dS,$$

$$V_{-4} = \int_S \left\{\left(\frac{\partial u_{-2}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{-2}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{-2}}{\partial z}\right)^2\right\} dS + h\int_\sigma u_{-2}^2\, d\sigma, \qquad W_{-4} = \int_S u_{-2}^2\, dS.$$

Facendo uso delle $(14)_1$, $(14)'_1$, risulta nel solito modo:

$$W_{-1} = V_0\,, \quad W_{-2} = V_{-1}\,, \quad W_{-3} = V_{-2}\,, \quad W_{-4} = V_{-3}\,;$$

e quindi ancora:

$$\frac{W_{-4}}{V_{-4}} \leq \frac{W_{-3}}{W_{-4}} \leq \frac{W_{-2}}{W_{-3}} \leq \frac{W_{-1}}{W_{-2}} \leq \frac{W_0}{W_{-1}} \leq \frac{W_1}{W_0}\,.$$

Da queste e dalle $(35)_1$ segue:

$$\frac{W_{-4}}{V_{-4}} \leq \frac{1}{k_{i+1}}\,,$$

ossia:

$$(48) \qquad W_{-4} \leq \frac{V_{-4}}{k_{i+1}}\,.$$

34. Passiamo ora a trasformare l'espressione di V_{-4}. Integrando per parti e facendo uso delle equazioni (30)^{IV} e delle (47), si ottiene:

$$
(49)\quad \left\{
\begin{aligned}
V_{-4} &= \int_S \left\{ \left(\frac{\partial u_{-2}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{-2}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{-2}}{\partial z}\right)^2 \right\} dS + h \int_\sigma u_{-2}^2 \, d\sigma = \\
&= \int_S \left\{ \left(\frac{\partial \Delta^2 \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta^2 \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta^2 \psi}{\partial z}\right)^2 \right\} dS + h \int_\sigma (\Delta^2 \psi)^2 \, d\sigma + \\
&+ \sum_{1}^{i}{}_r \left(k_r^2 \int_S \left\{ \left(\frac{\partial p_r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p_r}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial p_r}{\partial z}\right)^2 \right\} dS + h k_r^2 \int_\sigma p_r^2 \, d\sigma + \right. \\
&\left. + 2k_r \int_S \left\{ \frac{\partial \Delta^2 \psi}{\partial x} \frac{\partial p_r}{\partial x} + \frac{\partial \Delta^2 \psi}{\partial y} \frac{\partial p_r}{\partial y} + \frac{\partial \Delta^2 \psi}{\partial z} \frac{\partial p_r}{\partial z} \right\} dS + 2hk_r \int_\sigma p_r \Delta^2 \psi \, d\sigma \right) + \\
&+ 2 \sum_{st} k_s k_t \left(\int_S \left\{ \frac{\partial p_s}{\partial x} \frac{\partial p_t}{\partial x} + \frac{\partial p_s}{\partial y} \frac{\partial p_t}{\partial y} + \frac{\partial p_s}{\partial z} \frac{\partial p_t}{\partial z} \right\} dS + h \int_\sigma p_s p_t \, d\sigma \right) = \\
&= \int_S \left\{ \left(\frac{\partial \Delta^2 \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta^2 \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta^2 \psi}{\partial z}\right)^2 \right\} dS + h \int_\sigma (\Delta^2 \psi)^2 \, d\sigma + \\
&+ \sum_{1}^{i}{}_r \left\{ k_r^3 \int_S p_r^2 \, dS + 2k_r^2 \int_S p_r \Delta^2 \psi \, dS \right\} + 2 \sum_{st} k_s k_t^2 \int_S p_s p_t \, dS = \\
&= \int_S \left\{ \left(\frac{\partial \Delta^2 \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta^2 \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta^2 \psi}{\partial z}\right)^2 \right\} dS + h \int_\sigma (\Delta^2 \psi)^2 \, d\sigma + \\
&+ \sum_{1}^{i}{}_r \left\{ k_r^3 \int_S p_r^2 \, dS + 2k_r^2 \int_S p_r \Delta^2 \psi \, dS \right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

$$(s \neq t\,;\ s\,,t = 1\,,2\,,\ldots i)$$

Posto:

$$u' = ku + u_{-1}\,,$$

avremo dalle (34)$_1$, (14)$'_1$ per $|k| < k_{i+1}$:

$$\text{(nei punti di S)}\quad \Delta^2 u' + ku' = -u_{-2}\,, \qquad \text{(nei punti di } \sigma) \quad \frac{\partial u'}{\partial n} = hu'.$$

Allora possiamo scrivere in particolare per $k = k_r$ $(r \leq i)$:

$$\int_S (p_r \Delta^2 u' - u' \Delta^2 p_r) \, dS = \int_\sigma \left(u' \frac{\partial p_r}{\partial n} - p_r \frac{\partial u'}{\partial n} \right) d\sigma = 0\,,$$

ossia:

$$0 = -\int_S p_r u_{-2} \, dS = \int_S p_r \Delta^2 \psi \, dS + \int_S p_r \sum_{1}^{i}{}_s k_s p_s \, dS = \int_S p_r \Delta^2 \psi \, dS + k_r \int_S p_r^2 \, dS\,;$$

e quindi:

$$\int_S p_r \Delta^2 \psi \, dS = -k_r \int_S p_r^2 \, dS\,.$$

Sostituendo nella (49), avremo finalmente:

$$V_{-4} = \int_S \left\{ \left(\frac{\partial \Delta^2 \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta^2 \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta^2 \psi}{\partial z}\right)^2 \right\} dS + h \int_\sigma (\Delta^2 \psi)^2 \, d\sigma - \sum_{1}^{i}{}_r k_r^3 \int_S p_r^2 \, dS\,.$$

35. Da questa formola risulta che l'espressione sempre positiva V_{-i} decresce al crescere dell'indice i, mantenendosi inferiore alla quantità costante:

$$\int_S \left\{ \left(\frac{\partial \Delta^2 \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta^2 \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta^2 \psi}{\partial z}\right)^2 \right\} dS + h \int_\sigma (\Delta^2 \psi)^2 \, d\sigma.$$

Ora al crescere dell'indice i il parametro k_{i+1} cresce indefinitamente, di modo che per i abbastanza grande si può renderlo superiore a qualsiasi grandezza assegnabile; e così avremo dalla (48), passando al limite,

$$\lim_{i=\infty} W_{-i} = 0. \tag{50}$$

Applicando la formola (8)'' del § 3, risulta dalle equazioni $(14)'_1$ per un punto qualsiasi di S (i punti di σ compresi):

$$|u_{-1}| \leq K \sqrt{\int_S u_{-2}^2 \, dS} = K \sqrt{W_{-i}};$$

e quindi dalla (50):

$$\lim_{i=\infty} u_{-1} = 0,$$

ossia:

$$\psi = \sum_1^\infty {}_r \, p_r,$$

dove la serie al secondo membro è convergente in ugual grado in tutto S (i punti di σ compresi). Abbiamo dunque che *quando la funzione ψ è finita e continua insieme alle sue derivate parziali dei primi tre ordini in tutto il campo* S (*i punti di σ inclusi*) *e nei punti di σ soddisfa alla condizione* (43), *è sempre uguale alla somma della serie finita* (§ 27) *od infinita delle corrispondenti soluzioni eccezionali.*

Osserviamo che la condizione, che le derivate prime di ψ siano finite e continue anche nei punti di σ e che ψ ammetta ancora le derivate del secondo e del terzo ordine finite e continue in tutto il campo S (i punti di σ inclusi), è stata introdotta solamente per il caso in cui la serie delle corrispondenti soluzioni eccezionali fosse infinita; mentre che per il caso in cui questa serie è finita queste condizioni non sono richieste tutte.

36. Ora vogliamo dimostrare che, *quando una funzione ψ è sviluppabile in serie finita od infinita e convergente in ugual grado in tutto il campo* S (*i punti di σ compresi*) *di soluzioni eccezionali, è sviluppabile in un sol modo.* Supponiamo infatti che, oltre allo sviluppo:

$$\psi = \sum_1^\infty {}_s \, q_s, \tag{51}$$

si abbia l'altro:

$$\psi = \sum_1^\infty {}_s \, q'_s, \tag{51'}$$

dove $q_1, q_2, \ldots; q'_1, q'_2, \ldots$ sono soluzioni eccezionali, ossia integrali regolari delle

equazioni (30)''; e che le serie che compariscono nelle (51), (51)' siano convergenti in ugual grado in tutto S (i punti di σ compresi).

Se la soluzione eccezionale q_r entra nello sviluppo (51) ed il suo corrispondente valore eccezionale è diverso dai valori eccezionali corrispondenti alle soluzioni eccezionali che entrano nello sviluppo (51)', risulterà dalle (51), (51)' stesse e dalle (47), integrando per serie,

$$\int_S q_r \psi \, dS = \int_S q_r^2 \, dS \neq 0,$$

$$\int_S q_r \psi \, dS = \sum_1^\infty {}_s \int_S q'_s q_r \, dS = 0;$$

per cui tale ipotesi è inammissibile.

Supponiamo allora che le q_r, q'_r, che entrano rispettivamente negli sviluppi (51), (51)' e che corrispondono allo stesso valore eccezionale, non siano identiche. Dalle (51), (51)' risulta, integrando per serie,

$$\int_S q_r \psi \, dS = \int_S q_r^2 \, dS = \int_S q_r q'_r \, dS,$$

$$\int_S q'_r \psi \, dS = \int_S q_r q'_r \, dS = \int_S q'^2_r \, dS;$$

donde:

$$\int_S (q_r - q'_r)^2 \, dS = 0;$$

e per conseguenza dovrà aversi da per tutto, contrariamente all'ipotesi fatta,

$$q_r = q'_r.$$

37. Supponiamo ora che, indipendentemente da tutto ciò che precede, si sappia in un modo qualsiasi che una funzione ψ è sviluppabile in serie di soluzioni eccezionali delle equazioni del calore; e supponiamo ancora che, senza conoscere lo sviluppo di ψ, si conosca invece una serie finita od infinita di soluzioni eccezionali, determinate tutte a meno di coefficienti costanti e corrispondenti a valori eccezionali differenti tra di loro, la quale contenga in sè la serie finita od infinita che deve entrare nello sviluppo di ψ.

Se $q_1, q_2, \ldots$ è la serie di soluzioni eccezionali che si conosce, potremo scrivere, in forza del teorema precedente,

$$\psi = \sum_1^\infty {}_s A_s q_s \text{ (1)},$$

dove alcuni dei coefficienti costanti A_s possono essere anche nulli e dove la serie al secondo membro è convergente in ugual grado da per tutto, se pure non si riduce ad una somma di un numero finito di termini.

(1) Il caso in cui la serie si arresta al termine i^{esimo}, corrisponde in questa formola a fare:

$$q_{i+1} = q_{i+2} = \cdots = 0.$$

Ora si moltiplichino ambo i membri della precedente formola per q_r e si integri a tutto il campo S. Si avrà, integrando per serie e facendo uso delle (47),

$$\int_s \psi q_r \, dS = \sum_1^\infty {}_s A_s \int_s q_s q_r \, dS = A_r \int_s q_r^2 \, dS ;$$

donde:

$$A_r = \frac{\int_s \psi q_r \, dS}{\int_s q_r^2 \, dS} .$$

È chiaro che la funzione q_r non entrerà nello sviluppo di ψ, quando si avrà:

$$\int_s \psi q_r \, dS = 0 .$$

Posto poi:

$$p_s = A_s q_s ,$$

lo sviluppo di ψ si può sempre porre sotto la forma:

$$\psi = \sum_1^\infty {}_s p_s .$$

38. Prendiamo ora a considerare le equazioni (b) dell'introduzione; e supponiamo che la funzione f, che entra in queste equazioni e che per ipotesi nei punti di σ soddisfa all'equazione (43), sia finita e continua da per tutto insieme alle sue derivate parziali dei primi tre ordini, o per lo meno si sappia che è sviluppabile in serie di soluzioni eccezionali. Si potrà scrivere:

$$f(x, y, z) = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots , \tag{52}$$

dove la somma può anche arrestarsi ad un certo punto.

Si considerino le funzioni:

$$u_1 = p_1 e^{-\kappa k_1 t} , \quad u_2 = p_2 e^{-\kappa k_2 t} , \quad u_3 = p_3 e^{-\kappa k_3 t} , \ldots ,$$

nelle quali $k_1, k_2, k_3, \ldots$ sono i valori eccezionali corrispondenti alle soluzioni eccezionali $p_1, p_2, p_3, \ldots$; K è il parametro che entra nelle equazioni (b); t il tempo variabile; e si considerino le serie:

$$\left\{ \begin{aligned} v &= p_1 e^{-\kappa k_1 t} + p_2 e^{-\kappa k_2 t} + p_3 e^{-\kappa k_3 t} + \cdots , \\ & k_1 p_1 e^{-\kappa k_1 t} + k_2 p_2 e^{-\kappa k_2 t} + k_3 p_3 e^{-\kappa k_3 t} + \cdots , \\ & k_1^2 p_1 e^{-\kappa k_1 t} + k_2^2 p_2 e^{-\kappa k_2 t} + k_3^2 p_3 e^{-\kappa k_3 t} + \cdots . \end{aligned} \right. \tag{53}$$

Le espressioni:

$$e^{-\kappa k_1 t} , \quad e^{-\kappa k_2 t} , \quad e^{-\kappa k_3 t} , \ldots$$

sono tutte positive e per valori positivi di t sono minori dell'unità; per cui la prima delle serie precedenti, per valori non negativi di t, sarà convergente in ugual grado da per tutto.

Le altre espressioni:

$$k_1 e^{-\kappa k_1 t}, \quad k_2 e^{-\kappa k_2 t}, \quad k_3 e^{-\kappa k_3 t}, \ldots$$

$$k_1^2 e^{-\kappa k_1 t}, \quad k_2^2 e^{-\kappa k_2 t}, \quad k_3^2 e^{-\kappa k_3 t}, \ldots$$

sono anche esse positive e tali che, per qualunque valore positivo di t, a partire da un certo punto in poi decrescono; di modo che anche le ultime due delle serie precedenti sono convergenti in ugual grado da per tutto per qualunque valore positivo di t.

Di qui intanto risulta:

$$(54) \quad -\mathrm{K}\sum_1^\infty{}_s\, k_s p_s e^{-\kappa k_s t} = -\mathrm{K} k_1 p_1 e^{-\kappa k_1 t} - \mathrm{K} k_2 p_2 e^{-\kappa k_2 t} - \mathrm{K} k_3 p_3 e^{-\kappa k_3 t} - \cdots = \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Dalla formola

$$p_s(m) = -\frac{1}{4\pi}\int_s \frac{\Delta^2 p_s}{r}\, dS + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(p_s \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{\partial p_s}{\partial n}\frac{1}{r}\right) d\sigma$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_s \frac{k_s p_s}{r}\, dS + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma p_s \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r}\right) d\sigma,$$

derivando sotto il segno, risulta poi per i punti m dell'interno di S (i punti di σ cioè esclusi):

$$\frac{\partial p_s}{\partial x_1} = \frac{1}{4\pi}\int_s k_s p_s \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}\, dS + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma p_s \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r}\right) d\sigma;$$

e quindi, integrando per serie [1],

$$\frac{1}{4\pi}\int_s \left(\sum_1^\infty{}_s\, k_s^2 p_s e^{-\kappa k_s t}\right) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}\, dS + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\sum_1^\infty{}_s\, k_s p_s e^{-\kappa k_s t}\right) \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r}\right) d\sigma =$$

$$= \sum_1^\infty{}_s\, k_s e^{-\kappa k_s t} \left\{ \frac{1}{4\pi}\int_s k_s p_s \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}\, dS + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma p_s \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r}\right) d\sigma \right\} =$$

$$= \sum_1^\infty{}_s\, k_s \frac{\partial p_s}{\partial x_1} e^{-\kappa k_s t} = \frac{\partial}{\partial x_1} \sum_1^\infty{}_s\, k_s p_s e^{-\kappa k_s t}.$$

Risultati analoghi si hanno per le derivate prime rapporto ad y_1 e z_1. Abbiamo dunque che la serie:

$$\sum_1^\infty{}_s\, k_s p_s e^{-\kappa k_s t}$$

rappresenta una funzione finita e continua insieme alle sue derivate parziali del primo ordine (che si possono ottenere derivando per serie) in tutto il campo S, i punti di σ al più esclusi per queste derivate.

[1] Qui, quantunque la funzione $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}$ divenga infinita nel punto m di S, il teorema dell'integrazione per serie è valevole.

39. Ciò premesso, si ha, integrando per serie, per i punti m dell'interno di S,

$$(55)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi}\int_S\left(\sum_1^\infty{}_s k_s p_s e^{-\kappa k_s t}\right)\frac{dS}{r}+\frac{1}{4\pi}\int_\sigma\left(\sum_1^\infty{}_s p_s e^{-\kappa k_s t}\right)\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{h}{r}\right)d\sigma= \\ &=\sum_1^\infty{}_s e^{-\kappa k_s t}\left\{\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{k_s p_s}{r}dS+\frac{1}{4\pi}\int_\sigma p_s\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{h}{r}\right)d\sigma\right\}=\sum_1^\infty{}_s p_s e^{-\kappa k_s t}=v.\end{aligned}\right.$$

Di qui e dalla (54) risulta che *la funzione v è finita e continua insieme alle sue derivate dei primi due ordini rispetto ad x_1, y_1, z_1 e del primo ordine rispetto a t, per qualunque valore positivo del tempo, in tutto il campo* S, *i punti di σ al più esclusi per le derivate rispetto ad x_1, y_1, z_1.*

Dal *teorema del Poisson* si ha poi nei punti dell'interno di S:

$$\Delta^2 v=-\sum_1^\infty{}_s k_s p_s e^{-\kappa k_s t}.$$

Questa e la (54) ci dànno:

$$\text{(nei punti di S)}\quad \frac{\partial v}{\partial t}=K\Delta^2 v.$$

Si ha in un punto m_1 dello spazio indefinito S'', limitato da σ,

$$0=\frac{-1}{4\pi}\int_S\frac{\Delta^2 p_s}{r}dS+\frac{1}{4\pi}\int_\sigma\left(p_s\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{\partial p_s}{\partial n}\frac{1}{r}\right)d\sigma$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{k_s p_s}{r}dS+\frac{1}{4\pi}\int_\sigma p_s\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{h}{r}\right)d\sigma;$$

e quindi, integrando per serie, risulta nel punto m_1:

$$(55)'\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi}\int_S\left(\sum_1^\infty{}_s k_s p_s e^{-\kappa k_s t}\right)\frac{dS}{r}+\frac{1}{4\pi}\int_\sigma\left(\sum_1^\infty{}_s p_s e^{-\kappa k_s t}\right)\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{h}{r}\right)d\sigma= \\ &=\sum_1^\infty{}_s e^{-\kappa k_s t}\left\{\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{k_s p_s}{r}dS+\frac{1}{4\pi}\int_\sigma p_s\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{h}{r}\right)d\sigma\right\}=0.\end{aligned}\right.$$

Indicando con m' un punto qualsiasi di σ, si ha:

$$\lim_{mm'=0}\frac{\partial}{\partial n}\int_S\frac{\sum_1^\infty{}_s k_s p_s e^{-\kappa k_s t}}{r}dS=\lim_{m,m'=0}\frac{\partial}{\partial n}\int_S\frac{\sum_1^\infty{}_s k_s p_s e^{-\kappa k_s t}}{r}dS.$$

Si ha ancora dalla teoria delle funzioni potenziali di superficie:

$$\lim_{mm'=0}\frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma\frac{h}{r}\sum_1^\infty{}_s p_s e^{-\kappa k_s t}d\sigma-\lim_{m_1m'=0}\frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma\frac{h}{r}\sum_1^\infty{}_s p_s e^{-\kappa k_s t}d\sigma=$$

$$=-4\pi h\sum_1^\infty{}_s p_s(m')e^{-\kappa k_s t}=-4\pi h v(m').$$

Dalla (55)′ risulta poi:

$$(55)'' \qquad \lim_{m,m'=0} \frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \sum_1^\infty {}_s\, p_s e^{-\kappa k_s t}\, d\sigma = -\lim_{m,m'=0} \frac{\partial}{\partial n}\int_s \frac{\sum_1^\infty {}_s\, k_s p_s e^{-\kappa k_s t}}{r}\, dS$$
$$+ \lim_{m,m'=0} \frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \frac{h}{r} \sum_1^\infty {}_s\, p_s e^{-\kappa k_s t}\, d\sigma .$$

Questa formola ci dice che l'espressione:

$$\lim_{m,m'=0} \frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \sum_1^\infty {}_s\, p_s e^{-\kappa k_s t}\, d\sigma$$

esiste ed è finita e continua su σ; di modo che esisterà e sarà finita e continua su σ anche l'altra espressione:

$$\lim_{mm'=0} \frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \sum_1^\infty {}_s\, p_s e^{-\kappa k_s t}\, d\sigma ;$$

e si avrà dalla teoria delle funzioni potenziali di doppio strato:

$$\lim_{mm'=0} \frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \sum_1^\infty {}_s\, p_s e^{-\kappa k_s t}\, d\sigma - \lim_{m,m'=0} \frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \sum_1^\infty {}_s\, p_s e^{-\kappa k_s t}\, d\sigma .$$

Per mezzo di questa formola e delle due analoghe precedenti si ricava dalle (55), (55)′:

$$\lim_{mm'=0} \frac{\partial v}{\partial n} = \lim_{mm'=0} \frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{4\pi}\int_s \frac{\sum_1^\infty {}_s\, k_s p_s e^{-\kappa k_s t}}{r}\, dS + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\sum_1^\infty {}_s\, p_s e^{-\kappa k_s t}\right)\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r}\right) d\sigma\right] -$$
$$- \lim_{m,m'=0} \frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{4\pi}\int_s \frac{\sum_1^\infty {}_s\, k_s p_s e^{-\kappa k_s t}}{r}\, dS + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\sum_1^\infty {}_s\, p_s e^{-\kappa k_s t}\right)\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r}\right) d\sigma\right] =$$
$$= hv(m') .$$

Adunque *la funzione* v, per qualsiasi valore positivo di t, *ammette ancora le derivate normali, che si mantengono finite e continue anche nei punti di* σ; e in questi punti soddisfa all'equazione:

$$\frac{\partial v}{\partial n} = hv .$$

Finalmente si ha ovviamente dalla (52):

$$(v)_{t=0} = \left(\sum_1^\infty {}_s\, p_s e^{-\kappa k_s t}\right)_{t=0} = \sum_1^\infty {}_s\, p_s = f(x, y, z) .$$

In conclusione *la funzione* v, determinata dalla prima delle serie (53), *rappresenta l'integrale regolare delle equazioni* (*b*) *dell'introduzione.*

40. Osserviamo che le funzioni $u_1, u_2, u_3, \ldots$, che dànno lo sviluppo in serie della funzione v, sono gli integrali regolari delle equazioni:

$$\text{(nei punti di S)}\ \frac{\partial u_i}{\partial t} = \mathrm{K}\Delta^2 u_i, \quad \text{(nei punti di } \sigma)\ \frac{\partial u_i}{\partial n} = h u_i, \quad (u_i)_{t=0} = p_i.$$

Le temperature $u_1, u_2, u_3, \ldots$ corrispondenti alle temperature iniziali $p_1, p_2, p_3, \ldots$ si dicono *temperature elementari*; di guisa che il risultato del paragrafo precedente si può anche enunciare dicendo che *la temperatura variabile di un corpo, immerso in un ambiente che nei punti della superficie contatto ha la temperatura uguale allo* ZERO *e che inizialmente si trovava ad una temperatura qualsiasi, si può considerare come la sovrapposizione di un numero finito od infinito di temperature elementari.*

41. Passiamo ad applicare i risultati generali che precedono al seguente problema di FOURIER: *Determinare la temperatura v al tempo t di una sfera* S, *immersa in un ambiente di cui la temperatura è costantemente uguale allo* ZERO, *supposto che la temperatura iniziale f dipenda soltanto dal vettore ϱ, che parte dal centro di tale sfera.* Questo problema equivale al problema analitico della determinazione dell'integrale regolare delle equazioni:

$$(b)' \quad \text{(nei punti di S)}\ \frac{\partial v}{\partial t} = \mathrm{K}\Delta^2 v, \quad \text{(nei punti di } \sigma)\ \frac{\partial v}{\partial n} = h v, \quad (v)_{t=0} = f(\varrho).$$

Volendo iniziare i calcoli, secondo la teoria generale precedentemente svolta, bisogna cominciare dall'integrazione delle equazioni:

$$(14)_2 \quad \text{(nei punti di S)}\ \Delta^2 v_0 + f(\varrho) = 0, \quad \text{(nei punti di } \sigma)\ \frac{\partial v_0}{\partial n} = h v_0.$$

Queste equazioni, secondo i calcoli del § 1, si possono integrare nel seguente modo. Si indichi con R il raggio della sfera, e si ponga l'origine degli assi nel centro di questa sfera. Posto:

$$a = 4\pi \mathrm{R}^2,$$

$$(2)_1 \qquad \mathrm{M} = \int_S f\, dS,$$

$$(3)_1 \qquad v_1' = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{f}{r}\, dS,$$

si ha che la funzione v_1' viene a dipendere solamente da ϱ; e perciò risulta:

$$\left(\frac{\partial v_1'}{\partial n}\right)_{\rho=\mathrm{R}} = \text{cost.}$$

ed ancora:

$$\left\{\frac{\partial v_1'}{\partial n} - \frac{\mathrm{M}}{a}\right\}_{\rho=\mathrm{R}} = \text{cost.}$$

Dalla formola

$$\int_s \Delta^2 v'_1 \, dS + \int_\sigma \frac{\partial v'_1}{\partial n} \, d\sigma = 0,$$

abbiamo quindi:

$$0 = \int_\sigma \left\{ -\frac{\partial v'_1}{\partial n} + \frac{M}{a} \right\} d\sigma = \left\{ -\frac{\partial v'_1}{\partial n} + \frac{M}{a} \right\}_{\rho=R} \int_\sigma d\sigma,$$

ossia:

$$\left\{ -\frac{\partial v'_1}{\partial n} + \frac{M}{a} \right\}_{\rho=R} = 0.$$

Adunque la v'_1 soddisfa alle equazioni:

$(1)'_1$ (nei punti di S) $\Delta^2 v'_1 + f = 0$, (nei punti di σ) $\dfrac{\partial v'_1}{\partial n} = \dfrac{M}{a}$.

Ora si considerino le equazioni:

$(1)''_1$ (nei punti di S) $\Delta^2 v'' = 0$, (nei punti di σ) $\dfrac{\partial v''}{\partial n} = hv'' + h(v'_1)_{\rho=R} - \dfrac{M}{a}$.

Evidentemente l'espressione costante:

$$v'' = -(v'_1)_{\rho=R} + \frac{M}{ha}$$

è l'integrale regolare di queste equazioni; e per conseguenza si avrà, come è facile verificare, per l'integrale regolare delle equazioni $(14)_2$:

$$v_0 = v'_1 + v'' = \frac{1}{4\pi} \int_s \frac{f}{r} \, dS - \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_s \frac{f}{r} \, dS \right\}_{\rho=R} + \frac{1}{4\pi h R^2} \int_s f \, dS \text{ (1)}.$$

42. L'integrale regolare v_0 delle equazioni $(14)_2$, come si vede, dipende solamente da ϱ appunto come la funzione $f(\varrho)$; di guisa che l'integrale regolare v_1 delle seconde equazioni, che bisogna considerare,

$(14)_2$ (nei punti di S) $\Delta^2 v_1 + v_0 = 0$, (nei punti di σ) $\dfrac{\partial v_1}{\partial n} = hv_1$,

sarà anch'esso una funzione della sola ϱ. Seguitando ad operare secondo la teoria svolta, abbiamo in conclusione che tutte le funzioni:

$$v_0, v_1, v_2, \ldots$$

dipendono dalla sola variabile ϱ.

Ora si ha per la prima soluzione eccezionale p_1 corrispondente alla funzione data $f(\varrho)$ (cfr. § 28, form. (45)):

$$p_1 = k_1 . \lim_{i=\infty} (v_i k^i_1),$$

dove k_1 è il valore eccezionale corrispondente a p_1; per cui sarà p_1 funzione della sola ϱ.

(1) Nel caso di $h = 0$ si deve anche avere: $\int_s f dS = 0$, e il terzo termine non comparisce in questa formola.

Per avere la seconda soluzione eccezionale p_2 corrispondente alla funzione $f(\varrho)$, bisogna operare sulla funzione $f(\varrho) - p_1$, che dipende dalla sola ϱ, come si è operato sulla $f(\varrho)$ stessa; di guisa che anche la p_2 sarà funzione di ϱ solamente. Seguitando sempre nella stessa guisa, avremo dunque che *tutte le soluzioni eccezionali, corrispondenti alla funzione arbitraria $f(\varrho)$, sono funzioni della sola ϱ.*

43. Ciò premesso, passiamo a determinare tutte le soluzioni eccezionali delle equazioni del calore, relative alla nostra sfera di raggio R, che sono funzioni della sola ϱ [1]. Per questo rammentiamo che le equazioni, a cui devono soddisfare le soluzioni eccezionali, sono della forma:

$$(56) \qquad \text{(nei punti di S)}\ \Delta^2 q + kq = 0, \quad \text{(nei punti di } \sigma) \ \frac{\partial q}{\partial n} = hq;$$

e se si introducono le coordinate polari col polo nel centro della sfera e si fa l'ipotesi che q è funzione della sola ϱ, queste equazioni diverranno:

$$\frac{d^2 q}{d\varrho^2} + \frac{2}{\varrho}\frac{dq}{d\varrho} + kq = 0, \quad \left\{\frac{dq}{d\varrho} + hq\right\}_{\varrho=R} = 0.$$

Posto:

$$q = \frac{y}{\varrho},$$

abbiamo per la y le seguenti equazioni:

$$(56)' \qquad \frac{d^2 y}{d\varrho^2} + ky = 0, \quad \left\{R\frac{dy}{d\varrho} + (hR - 1)\, y\right\}_{\varrho=R} = 0.$$

L'integrale generale della prima di queste equazioni è:

$$y = C_1 \cos(\varrho\sqrt{k}) + C_2 \operatorname{sen}(\varrho\sqrt{k});$$

per cui si avrà intanto:

$$q = \frac{C_1 \cos(\varrho\sqrt{k}) + C_2 \operatorname{sen}(\varrho\sqrt{k})}{\varrho};$$

e poichè la q deve essere regolare anche per $\varrho = 0$, così dovrà essere:

$$C_1 = 0;$$

e quindi si avrà, a meno di un fattore costante,

$$y = \operatorname{sen}(\varrho\sqrt{k}).$$

Sostituendo questo valore di y nella seconda delle (56)', otteniamo:

$$(57) \qquad R\sqrt{k}\cos(R\sqrt{k}) + (hR - 1)\operatorname{sen}(R\sqrt{k}) = 0,$$

che è l'equazione a cui deve necessariamente soddisfare il parametro k delle equazioni (56), affinchè queste medesime equazioni ammettano un integrale regolare fun-

[1] Cfr. ad es. PICARD, *Traité d'Analyse*, T. II, Cap. VI, § 15.

zione di ϱ solamente. È chiaro poi che, a meno di un fattore costante, l'integrale di questa natura delle (56) è unico ed è sempre dato dalla formola:

$$q = \frac{\operatorname{sen}(\varrho\sqrt{k})}{\varrho}. \tag{58}$$

Adunque *per avere tutte le soluzioni eccezionali* $q_1, q_2, q_3, \ldots$, *funzioni di* ϱ *solamente e relative alla sfera di raggio* R, *basterà trovare tutte le radici* (che, come risulta dalla teoria generale, devono essere tutte reali e positive) *dell'equazione* (57) *e sostituire i valori di queste radici successivamente nell'espressione* (58) *di* q.

44. Nel caso particolare:

$$h = \frac{1}{R}$$

la (57) diviene:

$$R\sqrt{k}\cos(R\sqrt{k}) = 0. \tag{57'}$$

Questa equazione ci dà:

$$R\sqrt{k} = \cdots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots;$$

e quindi, esclusa la radice $k = 0$, che ci darebbe $q = 0$, avremo per i valori eccezionali:

$$k_1 = \left(\frac{\pi}{2R}\right)^2, \quad k_2 = \left(\frac{3\pi}{2R}\right)^2, \quad k_3 = \left(\frac{5\pi}{2R}\right)^2, \ldots, \tag{59}$$

per le soluzioni eccezionali corrispondenti:

$$q_1 = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi\varrho}{2R}\right)}{\varrho}, \quad q_2 = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi\varrho}{2R}\right)}{\varrho}, \quad q_3 = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi\varrho}{2R}\right)}{\varrho}, \ldots$$

Nel caso limite $h = \infty$ la (57) diviene:

$$\operatorname{sen}(R\sqrt{k}) = 0. \tag{57''}$$

Questa ci dà:

$$R\sqrt{k} = \cdots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots;$$

e quindi, esclusa la radice $k = 0$, che ci darebbe $q = 0$, avremo per i valori eccezionali:

$$k_1 = \left(\frac{\pi}{R}\right)^2, \quad k_2 = \left(\frac{2\pi}{R}\right)^2, \quad k_3 = \left(\frac{3\pi}{R}\right)^2, \ldots, \tag{59'}$$

per le sòluzioni eccezionali corrispondenti:

$$q_1 = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi\varrho}{R}\right)}{\varrho}, \quad q_2 = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi\varrho}{R}\right)}{\varrho}, \quad q_3 = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi\varrho}{R}\right)}{\varrho}, \ldots$$

In qualunque altro caso la (57) si può scrivere:

$$\operatorname{tang}(R\sqrt{k}) = \frac{R\sqrt{k}}{1 - hR};$$

e se si pone:

$$R\sqrt{k} = z, \quad \frac{1}{1 - hR} = H,$$

avremo ancora per la (57):

$$(57)''' \qquad \operatorname{tang} z = Hz$$

con H quantità finita e diversa dallo *zero*.

Se si pone:

$$x = \operatorname{tang} z, \quad x = Hz,$$

le infinite radici dell'equazione (57)''' corrisponderanno agli infiniti punti in cui la retta:

$$x = Hz$$

taglia gli infiniti rami della curva:

$$x = \operatorname{tang} z.$$

Tra le radici dell'equazione (57)''' c'è la radice $z = 0$; le altre sono due a due uguali e di segno contrario; per cui possiamo scrivere:

$$z = \cdots, -z_2, -z_1, 0, z_1, z_2, \ldots;$$

e quindi, esclusa la radice $z = 0$, che ci darebbe $q = 0$, avremo:

$$(59)'' \qquad k_1 = \left(\frac{z_1}{R}\right)^2, \quad k_2 = \left(\frac{z_2}{R}\right)^2, \quad k_3 = \left(\frac{z_3}{R}\right)^2, \ldots$$

Si verifica facilmente che la k_1 di questa serie di valori eccezionali è sempre compresa tra la k_1 della serie (59) e la k_1 della serie (59)'; così la k_2 della serie (59)'' è sempre compresa tra le k_2 delle serie (59), (59)'; ecc. Del resto basterà osservare che le serie (59), (59)' non sono che i due casi limiti della serie (59)''.

45. Trovate ora tutte le soluzioni eccezionali funzioni della sola variabile ϱ, e posto, secondo i calcoli del § 37,

$$f(\varrho) = \sum_1^\infty {}_s A_s q_s,$$

avremo:

$$A_s = \frac{\int_s f(\varrho)\, q_s\, dS}{\int_s q_s^2\, dS} = \frac{\int_s f(\varrho) \cdot \frac{\operatorname{sen}(\varrho\sqrt{k_s})}{\varrho}\, dS}{\int_s \frac{\operatorname{sen}^2(\varrho\sqrt{k_s})}{\varrho^2}\, dS} = \frac{\int_0^R \varrho f(\varrho) \operatorname{sen}(\varrho\sqrt{k_s})\, d\varrho}{\int_0^R \operatorname{sen}^2(\varrho\sqrt{k_s})\, d\varrho} =$$

$$= \frac{4\sqrt{k_s}\int_0^R \varrho f(\varrho) \operatorname{sen}(\varrho\sqrt{k_s})\, d\varrho}{2R\sqrt{k_s} - \operatorname{sen}(2R\sqrt{k_s})};$$

e quindi:

$$f(\varrho) = 4\sum_1^\infty{}_s \frac{\sqrt{k_s}\operatorname{sen}(\varrho\sqrt{k_s})\int_0^R \varrho f(\varrho)\operatorname{sen}(\varrho\sqrt{k_s})\, d\varrho}{\varrho\,\{2R\sqrt{k_s} - \operatorname{sen}(2R\sqrt{k_s})\}}.$$

Si avrà poi per l'integrale regolare delle equazioni $(b)'$ (cfr. § 39):

$$v = 4\sum_1^\infty{}_s \frac{\sqrt{k_s}\, e^{-\varkappa k_s t}\operatorname{sen}(\varrho\sqrt{k_s})\int_0^R \varrho f(\varrho)\operatorname{sen}(\varrho\sqrt{k_s})\, d\varrho}{\varrho\,\{2R\sqrt{k_s} - \operatorname{sen}(2R\sqrt{k_s})\}}.$$

Prendiamo a considerare una qualsiasi soluzione eccezionale:

$$q_s = \frac{\operatorname{sen}(\varrho\sqrt{k_s})}{\varrho}.$$

La q_s, considerata come funzione di ϱ, si annulla per

$$\varrho = \frac{\pi}{\sqrt{k_s}},\ \frac{2\pi}{\sqrt{k_s}},\ \frac{3\pi}{\sqrt{k_s}}, \ldots;$$

e diviene alternativamente massima e minima per i valori di ϱ, che sono radici dell'equazione:

$$\operatorname{tang}(\varrho\sqrt{k_s}) = \varrho\sqrt{k_s}.$$

La corrispondente temperatura elementare è:

$$u_s = \frac{e^{-\varkappa k_s t}\operatorname{sen}(\varrho\sqrt{k_s})}{\varrho};$$

e si vede che essa col variare del tempo ha sempre le medesime superficie sferiche, concentriche alla superficie della sfera stessa di raggio R, nelle quali si annulla; e queste sono sempre separate dalle medesime superficie sferiche alternativamente di massimo e di minimo. Essa poi, col crescere del tempo, finisce per impiccolire indefinitamente in valore assoluto.

CAPITOLO III.

Sviluppi in serie semplici e doppie di Fourier. Integrazione delle equazioni del tipo (*a*) e del tipo (*b*) in alcuni casi semplici singolari.

1. Si consideri l'equazione:

$$y'' + ky + \psi(x) = 0, \tag{1}$$

in cui x è la variabile indipendente, y la funzione incognita, $\psi(x)$ *una funzione finita ed atta all'integrazione* in tutto il campo di variabilità che va dal punto $x = o$ al punto $x = a$ $(a > o)$, k un parametro reale o complesso indipendente da x. Ricerchiamo l'integrale regolare dell'equazione (1), determinato con le condizioni:

$$(y' - hy = 0)_{x=o}, \qquad (y' + hy = 0)_{x=a}, \tag{1'}$$

nelle quali h è un parametro reale e positivo indipendente da x.

Intanto l'integrale generale dell'equazione (1) è dato dalla formola:

$$y = \frac{e^{-x\sqrt{-k}}}{2\sqrt{-k}} \int_o^x e^{z\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz - \frac{e^{x\sqrt{-k}}}{2\sqrt{-k}} \int_o^x e^{-z\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz + C_1 e^{-x\sqrt{-k}} + C_2 e^{x\sqrt{-k}} \tag{2}$$

con C_1, C_2 costanti arbitrarie. Sostituendo nelle (1)', otteniamo [1]:

$$-C_1\sqrt{-k} + C_2\sqrt{-k} = h(C_1 + C_2),$$

$$\frac{h - \sqrt{-k}}{2\sqrt{-k}} \int_o^a e^{-(a-z)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz - \frac{h + \sqrt{-k}}{2\sqrt{-k}} \int_o^a e^{(a-z)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz +$$
$$+ C_1 e^{-a\sqrt{-k}}(h - \sqrt{-k}) + C_2 e^{a\sqrt{-k}}(h + \sqrt{-k}) = 0;$$

[1] L'esistenza della derivata prima di y rispetto ad x dipende, come è facile trovare, dalla esistenza del limite:

$$\lim_{h'=0}\Big[\Big(e^{\theta_1 h'\alpha} - e^{-\theta_1 h'\alpha}\Big) f.\cos(\theta_1 h'\beta) + \theta\Big\{\Big(e^{\theta_2 h'\alpha} - e^{-\theta_2 h'\alpha}\Big) F.\cos(\theta_2 h'\beta) -$$
$$- \Big(e^{\theta_1 h'\alpha} - e^{-\theta_1 h'\alpha}\Big) f.\cos(\theta_1 h'\beta)\Big\}\Big] +$$
$$+ i \lim_{h'=0}\Big[\Big(e^{\theta'_1 h'\alpha} + e^{-\theta'_1 h'\alpha}\Big) f.\operatorname{sen}(\theta'_1 h'\beta) + \theta'\Big\{\Big(e^{\theta'_2 h'\alpha} + e^{-\theta'_2 h'\alpha}\Big) F.\operatorname{sen}(\theta'_2 h'\beta) -$$
$$- \Big(e^{\theta'_1 h'\alpha} + e^{-\theta'_1 h'\alpha}\Big) f.\operatorname{sen}(\theta'_1 h'\beta)\Big\}\Big],$$

(F, f sono rispettivamente il limite superiore e il limite inferiore della funzione $\psi(x)$ nel campo $[x, x + h']$; $\theta_1, \theta_2, \theta, \theta'_1, \theta'_2, \theta'$ sono quantità non minori di *zero* e non maggiori dell'*unità*; $\sqrt{-k} = \alpha + i\beta$) che è uguale allo *zero*. In questo modo avremo:

$$y' = -\frac{e^{-x\sqrt{-k}}}{2} \int_o^x e^{z\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz - \frac{e^{x\sqrt{-k}}}{2} \int_o^x e^{-z\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz - \sqrt{-k}\,C_1 e^{-x\sqrt{-k}} + \sqrt{-k}\,C_2 e^{x\sqrt{-k}}.$$

e quindi:

$$C_1 = \frac{1}{2\sqrt{-k}\{e^{a\sqrt{-k}}(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}} \times$$

$$\times \int_0^a \psi(z)\{e^{-(a-z)\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2 - e^{(a-z)\sqrt{-k}}(h^2+k)\}\,dz,$$

$$C_2 = \frac{-1}{2\sqrt{-k}\{e^{a\sqrt{-k}}(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}} \times$$

$$\times \int_0^a \psi(z)\{e^{-(a-z)\sqrt{-k}}(h^2+k) - e^{(a-z)\sqrt{-k}}(h+\sqrt{-k})^2\}\,dz.$$

Sostituendo nella (2), avremo per l'integrale delle equazioni (1), (1)':

$$(2)' \quad \begin{cases} y = \dfrac{1}{2\sqrt{-k}}\displaystyle\int_0^x e^{-(x-z)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz + \\ + \dfrac{(h-\sqrt{-k})^2}{2\sqrt{-k}\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}}\displaystyle\int_0^x e^{-(2a+z-x)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz + \\ + \dfrac{(h+\sqrt{-k})^2}{2\sqrt{-k}\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}}\displaystyle\int_x^a e^{-(z-x)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz + \\ + \dfrac{1}{2\sqrt{-k}\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}}\displaystyle\int_0^a \psi(z)\{e^{-(2a-z+x)\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2 - \\ \qquad - e^{-(x+z)\sqrt{-k}}(h^2+k) - e^{-(2a-z-x)\sqrt{-k}}(h^2+k)\}\,dz. \end{cases}$$

2. Si consideri l'equazione in k:

$$(3) \qquad (h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2 = 0.$$

Questa equazione equivale all'altra:

$$e^{-a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k}) = \pm(h+\sqrt{-k}).$$

Posto in questa equazione:

$$k = \varrho e^{i\omega}$$

e uguagliando a *zero* successivamente la parte reale e il coefficiente dell'immaginario, si ottengono le due equazioni in ϱ ed ω:

$$(3)' \quad \begin{cases} e^{-a\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}}\cos\left(a\sqrt{\varrho}\cos\frac{\omega}{2}\right)\left\{h - \sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}\right\} - \\ \quad - e^{-a\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}}\,\mathrm{sen}\left(a\sqrt{\varrho}\cos\frac{\omega}{2}\right)\sqrt{\varrho}\cos\frac{\omega}{2} = \pm\left(h+\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}\right), \\ e^{-a\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}}\left\{\sqrt{\varrho}\cos\frac{\omega}{2}\cos\left(a\sqrt{\varrho}\cos\frac{\omega}{2}\right) + \left(h-\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}\right)\mathrm{sen}\left(a\sqrt{\varrho}\cos\frac{\omega}{2}\right)\right\} = \pm\sqrt{\varrho}\cos\frac{\omega}{2}. \end{cases}$$

Le radici di queste equazioni sono radici delle altre equazioni:

$$e^{-a\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}}\,\mathrm{sen}\left(a\sqrt{\varrho}\cos\frac{\omega}{2}\right)\left\{h^2+\varrho-2h\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}\right\}=\mp 2h\sqrt{\varrho}\cos\frac{\omega}{2},$$

$$e^{-a\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}}\cos\left(a\sqrt{\varrho}\cos\frac{\omega}{2}\right)\left\{h^2+\varrho-2h\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}\right\}=\mp(\varrho-h^2).$$

Di qui, quadrando e sommando, risulta:

$$e^{-2a\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}}\left[h^2+\varrho-2h\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}\right]=h^2+\varrho+2h\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}.$$

Ora per $\omega=0\,,2\pi$ si ha $\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}=0$; mentre per ω variabile tra 0 e 2π si ha:

$$\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}>0;$$

quindi la precedente equazione non può essere verificata altro che per $\omega=0\,,2\pi$; e per conseguenza le equazioni (3)′ non possono ammettere radici altro che per $\omega=0\,,2\pi$, ossia la (3) non può ammettere radici altro che per valori reali e positivi di k. Se nella (3) si fa appunto:

$$\omega=0\,,2\pi\,,$$

si ottengono le equazioni:

$$(3)'' \qquad \begin{cases} \mathrm{sen}\,(a\sqrt{\varrho})\,\{(h^2-\varrho)\,\mathrm{sen}\,(a\sqrt{\varrho})+2h\sqrt{\varrho}\cos(a\sqrt{\varrho})\}=0\,, \\ \cos(a\sqrt{\varrho})\,\{(h^2-\varrho)\,\mathrm{sen}\,(a\sqrt{\varrho})+2h\sqrt{\varrho}\cos(a\sqrt{\varrho})\}=0\,. \end{cases}$$

Nei casi $h=0\,,\ h=\infty$ queste equazioni si riducono all'unica equazione:

$$\mathrm{sen}\,(a\sqrt{\varrho})=0\,,$$

la quale, esclusa la soluzione $\varrho=0$, ammette la radici semplici:

$$k=\varrho=\left(\frac{\pi}{a}\right)^2,\ \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2,\ \left(\frac{3\pi}{a}\right)^2,\ldots.$$

Negli altri casi, esclusa sempre la soluzione $\varrho=0$, le equazioni (3)″ equivalgono all'unica equazione:

$$(3)''' \qquad \cot(a\sqrt{\varrho})+\frac{h^2-\varrho}{2h\sqrt{\varrho}}=0.$$

3. Per trovare le radici di questa equazione, si ponga:

$$\xi=\sqrt{\varrho}$$

e si considerino sul piano le curve di equazioni:

$$(4) \qquad \eta=\cot(a\xi)\,, \qquad \eta=\frac{\xi^2-h^2}{2h\xi}$$

riferite a due assi cartesiani ortogonali $\xi\,,\eta$. I valori di ϱ, corrispondenti ai punti di intersezione di queste due curve, ci dànno appunto le radici dell'equazione (3).

Ora la prima di queste curve ha infiniti rami, i quali hanno per assintoti le rette

$$\xi = \cdots -\frac{2\pi}{a},\ -\frac{\pi}{a}, 0, \frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}, \ldots$$

e tagliano la retta $\eta = 0$ nei punti:

$$\xi = \cdots -\frac{3\pi}{2a},\ -\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a}, \frac{3\pi}{2a}, \ldots$$

La seconda curva rappresenta un'iperbole, la quale ha per assintoti le rette $\xi = 0$, $\frac{\eta}{\xi} = \frac{1}{2h}$ e taglia la retta $\eta = 0$ nei punti $\xi = \pm h$.

Come si vede, le curve (4) hanno due serie infinite di punti di intersezione situate rispettivamente nel semipiano positivo di ξ e nel semipiano negativo di ξ; inoltre i punti di queste due serie sono due a due simmetrici rispetto all'origine degli assi, e in ognuno di essi le tangenti alle due curve sono distinte; di modo che l'equazione (3)''' ha una serie infinita di radici semplici, di cui la prima, escluso sempre il valore $k = 0$, è compresa tra 0 e $\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$, la seconda tra $\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$ e $\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2, \ldots$

In conclusione possiamo dire che *l'equazione* (3) *ammette in ogni caso una sola serie infinita di radici semplici positive e crescenti, avente il solo valore limite* $k = \infty$.

4. Osserviamo che pel valore $k = 0$ la funzione y, data dalla formola (2)', si presenta sotto forma indeterminata; però è facile verificare, con la *regola di l'Hospital* [1], che il suo limite per $k = 0$ è uguale all'integrale regolare delle equazioni:

$$y'' + \psi(x) = 0, \qquad (y' = hy)_{x=0}, \qquad (y' + hy = 0)_{x=a}.$$

Da tutto ciò che precede risulta che *l'integrale* y *delle equazioni* (1), (1)' *è una funzione regolare, insieme alla sua derivata prima rispetto ad* x, *e la sua derivata seconda rispetto ad* x *è della stessa natura della funzione* $\psi(x)$, *per qualsiasi valore finito, reale o complesso del parametro* k: *essa può avere solamente dei poli semplici in numero finito od infinito pei valori di* k, *diversi da zero, radici dell'equazione* (3).

Posto:

$$D = (h + \sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h - \sqrt{-k})^2,$$

l'integrale y si può scrivere sotto la forma:

$$y = \frac{P}{D},$$

dove P è una funzione regolare, insieme alla sua derivata prima rispetto ad x, ed

[1] Come è facile verificare, agli integrali, che compariscono nella formola (2)', è applicabile il teorema della derivazione sotto il segno rispetto a $\sqrt{-k}$; perchè in ognuno di essi la funzione sotto il segno di integrale si compone di due fattori, di cui il fattore che contiene il parametro $\sqrt{-k}$ è assolutamente continuo rispetto a z e a $\sqrt{-k}$ insieme alle sue derivate dei varî ordini rispetto a $\sqrt{-k}$, l'altro fattore $\psi(z)$ è finito ed atto all'integrazione.

ha la derivata seconda rispetto ad x della stessa natura della funzione $\psi(x)$, per qualsiasi valore finito reale o complesso di k. Le equazioni (1), (1)' ci dànno per la funzione P:

$$P'' + kP + D.\psi = 0\,, \qquad (P' = hP)_{x=0}\,, \qquad (P' + hP = 0)_{x=a}\,,$$

qualunque sia il valore finito reale o complesso di k (i valori di k radici dell'equazione (3) compresi).

Allora per i valori di k, diversi da *zero*, radici dell'equazione (3), pei quali la P risulta generalmente diversa da *zero* nel campo $o\,a$, si avrà:

$$(5) \qquad P'' + kP = 0\,, \qquad (P' = hP)_{x=0}\,, \qquad (P' + hP = 0)_{x=a}\,;$$

e quindi, indicando con k' uno di questi valori e ponendo:

$$D = (k' - k)\,.\,D_1(k)\,, \qquad p' = \lim_{k=k'} (k' - k)\,y = \frac{P(k')}{D_1(k')}\,,$$

si avrà dalle (5) che *il residuo p' della funzione y in un polo $(k = k')$ è rappresentato da una funzione finita e continua insieme alle sue derivate prima e seconda, la quale soddisfa alle equazioni*:

$$(5)' \qquad \frac{d^2p'}{dx^2} + k'p' = 0\,, \qquad \left(\frac{dp'}{dx} = hp'\right)_{x=0}\,, \qquad \left(\frac{dp'}{dx} + hp' = 0\right)_{x=a}\,.$$

5. Si ha:

$$(6) \quad \begin{cases} \dfrac{(h + \sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h - \sqrt{-k})^2}{-k} = \left(\dfrac{h}{\sqrt{-k}} + 1\right)^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}\left(\dfrac{h}{\sqrt{-k}} - 1\right)^2, \\[2ex] \dfrac{(h - \sqrt{-k})^2}{-k} = \left(\dfrac{h}{\sqrt{k-}} - 1\right)^2, \quad \dfrac{(h + \sqrt{-k})^2}{-k} = \left(\dfrac{h}{\sqrt{-k}} + 1\right)^2, \quad \dfrac{h^2 + k}{k} = \dfrac{h^2}{k} + 1. \end{cases}$$

Si ha ancora:

$$e^{-2a\sqrt{-k}} = e^{-2a\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}}\left\{\cos\left(2a\sqrt{\varrho}\cos\frac{\omega}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(2a\sqrt{\varrho}\cos\frac{\omega}{2}\right)\right\};$$

e, se si pone:

$$\varrho = \left\{\frac{(2l+1)\,\pi}{2a}\right\}^2,$$

risulterà:

$$e^{-2a\sqrt{-k}} = e^{-(2l+1)\pi\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}}\left\{\cos\left[(2l+1)\,\pi\cos\frac{\omega}{2}\right] + i\,\mathrm{sen}\left[(2l+1)\,\pi\cos\frac{\omega}{2}\right]\right\}.$$

Fissato un numero intero e positivo m comunque grande, si consideri l'arco minimo ε tale che si abbia:

$$\mathrm{sen}\,\varepsilon = \mathrm{sen}\,(\pi - \varepsilon) = \frac{1}{(2m+1)\,\pi}\,.$$

Per i valori di ω tali che

$$\pi - \varepsilon \geq \frac{\omega}{2} \geq \varepsilon\,,$$

si avrà:

$$\operatorname{sen}\frac{\omega}{2} \geq \frac{1}{(2m+1)\pi};$$

e quindi, per i detti valori di ω e per i valori interi di l tali che

$$\frac{2l+1}{2m+1} \geq m,$$

risulterà:

$$(2l+1)\pi \operatorname{sen}\frac{\omega}{2} \geq m;$$

ed ancora [1]:

$$\left| e^{-2a\sqrt{-k}} \right| = e^{-(2l+1)\pi \operatorname{sen}\frac{\omega}{2}} \leq e^{-m}.$$

Per i valori di ω tali che

$$\frac{\omega}{2} < \varepsilon,$$

finchè il numero intero l è tale che

$$\cos\left[(2l+1)\pi\cos\frac{\omega}{2}\right] = -\cos\left[2(2l+1)\pi\operatorname{sen}^2\frac{\omega}{4}\right] \leq 0,$$

sarà pure:

$$e^{-(2l+1)\pi\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}\cos\left[(2l+1)\pi\cos\frac{\omega}{2}\right] \leq 0;$$

quando poi l sarà cresciuto tanto che incomincerà ad aversi:

$$\cos\left[(2l+1)\pi\cos\frac{\omega}{2}\right] = -\cos\left[2(2l+1)\pi\operatorname{sen}^2\frac{\omega}{4}\right] > 0,$$

vuol dire che comincerà ad aversi nello stesso tempo:

$$2(2l+1)\pi\operatorname{sen}^2\frac{\omega}{4} > \frac{\pi}{2},$$

ossia:

$$(2l+1)\pi\operatorname{sen}\frac{\omega}{2} > \frac{\pi}{2}\cot\frac{\omega}{4},$$

ovvero ancora, osservando che si ha:

$$\cot\frac{\omega}{4} > \cot\frac{\varepsilon}{2} = (2m+1)\pi + \sqrt{(2m+1)^2\pi^2 - 1},$$

incomincerà ad aversi:

$$(2l+1)\pi\operatorname{sen}\frac{\omega}{2} > \frac{\pi}{2}\left\{(2m+1)\pi + \sqrt{(2m+1)^2\pi^2 - 1}\right\};$$

e quindi:

$$e^{-(2l+1)\pi\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}} < e^{-\frac{\pi}{2}\left|(2m+1)\pi + \sqrt{(2m+1)^2\pi^2-1}\right|} < e^{-m}.$$

[1] Conveniamo di rappresentare il modulo di una quantità complessa n col simbolo $|n|$.

Finalmente per i valori di ω tali che

$$\frac{\omega}{2} > \pi - \varepsilon,$$

osservando che, posto:

$$\omega' = 2\pi - \omega,$$

risulta:

$$\frac{\omega'}{2} = \pi - \frac{\omega}{2} < \varepsilon,$$

$$e^{-(2l+1)\pi \operatorname{sen}\frac{\omega}{2}} \cos\left[(2l+1)\pi \cos\frac{\omega}{2}\right] = e^{-(2l+1)\pi \operatorname{sen}\frac{\omega'}{2}} \cos\left[(2l+1)\pi \cos\frac{\omega'}{2}\right],$$

avremo anche qui che o si ha:

$$e^{-(2l+1)\pi \operatorname{sen}\frac{\omega}{2}} \cos\left[(2l+1)\pi \cos\frac{\omega}{2}\right] \leq 0,$$

oppure, se si ha:

$$\cos\left[(2l+1)\pi \cos\frac{\omega}{2}\right] > 0,$$

sarà nello stesso tempo:

$$e^{-(2l+1)\pi \operatorname{sen}\frac{\omega}{2}} < e^{-m}.$$

Di qui segue che, se si considerano le circonferenze col centro nell'origine e di raggio

$$\varrho = \left\{\frac{(2l+1)\pi}{2a}\right\}^2, \quad \left[l \geq \frac{m(2m+1)-1}{2}\right]$$

nei punti di queste circonferenze la parte reale dell'espressione $e^{-2a\sqrt{-k}}$ o è negativa, o è nulla, o, se è positiva, si mantiene sempre più piccola di e^{-m}. Avremo dunque dalle (6), per m abbastanza grande,

$$\left|\frac{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2}{-k}\right| > \mathrm{A}, \quad \left|\frac{(h-\sqrt{-k})^2}{-k}\right| < \mathrm{B},$$

$$\left|\frac{(h+\sqrt{-k})^2}{-k}\right| < \mathrm{C}, \quad \left|\frac{h^2+k}{k}\right| < \mathrm{D}$$

con A, B, C, D costanti finite e diverse dallo *zero*, da fissare convenientemente.

6. Si supponga ora che *la funzione $\psi(x)$ nel campo oa abbia solo un numero finito di punti di massimo e di minimo*; e si consideri l'integrale:

$$(7) \qquad \sqrt{-k}\int_0^x e^{-(x-z)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz.$$

È chiaro che si può scomporre il campo oa in un numero finito di campi, in ognuno dei quali la funzione $\psi(x)$ si mantiene o sempre non crescente o sempre non decrescente. In questo modo anche il campo ox verrà decomposto in un numero

finito di campi godenti della medesima proprietà; e corrispondentemente anche l'integrale precedente verrà decomposto in un numero finito di integrali. Consideriamo uno di questi integrali, per esempio l'integrale

$$(7)' \qquad \sqrt{-k}\int_b^x e^{-(x-z)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz,$$

dove b è l'ultimo dei punti che operano la detta scomposizione e che cadono nel campo ox.

Applicando il *secondo teorema della media* [1], si potrà scrivere:

$$\sqrt{-k}\int_b^x e^{-(x-z)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz =$$

$$= \psi(b+0)\left\{\int_b^{b+\theta(x-b)} \sqrt{\varrho}\, e^{-(x-z)\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}}\,\mathrm{sen}\left[(x-z)\sqrt{\varrho}\cos\frac{\omega}{2}+\frac{\omega}{2}\right]dz - \right.$$

$$\left. - i\int_b^{b+\theta'(x-b)} \sqrt{\varrho}\, e^{-(x-z)\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}}\cos\left[(x-z)\sqrt{\varrho}\cos\frac{\omega}{2}+\frac{\omega}{2}\right]dz\right\} +$$

$$+ \psi(x-0)\left\{\int_{b+\theta(x-b)}^{x} \sqrt{\varrho}\, e^{-(x-z)\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}}\,\mathrm{sen}\left[(x-z)\sqrt{\varrho}\cos\frac{\omega}{2}+\frac{\omega}{2}\right]dz - \right.$$

$$\left. - i\int_{b+\theta'(x-b)}^{x} \sqrt{\varrho}\, e^{-(x-z)\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}}\cos\left[(x-z)\sqrt{\varrho}\cos\frac{\omega}{2}+\frac{\omega}{2}\right]dz\right\} =$$

$$= \psi(b+0)\left\{\left(e^{-(x-z)\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}}\cos\left[(x-z)\sqrt{\varrho}\cos\frac{\omega}{2}\right]\right)_b^{b+\theta(x-b)} + \right.$$

$$\left. + i\left(e^{-(x-z)\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}}\,\mathrm{sen}\left[(x-z)\sqrt{\varrho}\cos\frac{\omega}{2}\right]\right)_b^{b+\theta'(x-b)}\right\} +$$

$$+ \psi(x-0)\left\{\left(e^{-(x-z)\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}}\cos\left[(x-z)\sqrt{\varrho}\cos\frac{\omega}{2}\right]\right)_{b+\theta(x-b)}^{x} + \right.$$

$$\left. + i\left(e^{-(x-z)\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}}\,\mathrm{sen}\left[(x-z)\sqrt{\varrho}\cos\frac{\omega}{2}\right]\right)_{b+\theta'(x-b)}^{x}\right\},$$

$$(0 \leq \theta \leq 1\ ,\ 0 \leq \theta' \leq 1)$$

dalla quale formola risulta che il modulo dell'integrale (7′) si mantiene inferiore ad una quantità finita, che si può fissare, per qualunque valore di k. Lo stesso si può ripetere degli altri integrali, che compongono l'integrale (7). Di guisa che abbiamo che il modulo dell'integrale (7) si mantiene inferiore ad una quantità finita, che si può fissare, per qualunque valore di k ed evidentemente anche per qualunque punto x del campo oa.

[1] Cfr. ad es. D'Arcais, *Corso di Calcolo infinitesimale*, vol. II, pag. 139 (2ª ediz.).

Nella medesima maniera si può provare che i moduli degli integrali:

$$\sqrt{-k}\int_0^x e^{-(2a+z-x)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz\,,\quad \sqrt{-k}\int_x^a e^{-(z-x)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz\,,\quad \sqrt{-k}\int_0^a e^{-(2a-z+x)\sqrt{-k}}\,\psi(z)dz\,,$$

$$\sqrt{-k}\int_0^a e^{-(x+z)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz\,,\qquad \sqrt{-k}\int_0^a e^{-(2a-z-x)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz$$

si mantengono rispettivamente inferiori a delle quantità finite, che si possono fissare, per qualunque valore di k e per qualunque punto x del campo oa.

Da questo risultato e da quello del paragrafo precedente risulta finalmente che *l'espressione ky nei punti delle circonferenze sempre crescenti $c_1, c_2, \ldots$ col centro nell'origine e di raggio*

$$\varrho = \left\{\frac{(2l+1)\pi}{2a}\right\}^2, \qquad \left(l \geq \frac{m(2m+1)-1}{2}\right)$$

con m numero intero e positivo abbastanza grande, ha il suo modulo inferiore ad una quantità finita K, *che si può fissare in modo conveniente, per qualunque valore di ω fra o e 2π, questi estremi inclusi, e per qualunque punto x del campo oa.*

7. Supponiamo finalmente che *la funzione $\psi(x)$, oltre ad essere finita in tutto il campo oa e a possedere solo un numero finito di punti di massimo e di minimo, sia sempre continua.* Allora, data una quantità positiva σ piccola ad arbitrio, si può fissare una quantità η (non maggiore della doppia distanza che corre tra un massimo ed un minimo, tra un estremo ed un massimo, tra un estremo ed un minimo) tale che qualunque sia il punto x del campo oa, si abbia:

$$|\psi(z) - \psi(x)| < \sigma \tag{8}$$

per tutti i valori di z compresi tra $x-\eta$ ed $x+\eta$ (questi estremi inclusi) e che non oltrepassano gli estremi o ed a.

Ciò premesso, supponiamo che il punto x, che si considera, disti non meno di η dagli estremi e dai punti di massimo e di minimo, ovvero sia un punto di massimo o di minimo: allora si può scrivere identicamente:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{k}{2\sqrt{-k}}\int_0^x e^{-(x-z)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz = -\frac{\sqrt{-k}}{2}\int_0^{x-\eta} e^{-(x-z)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz - \\
&-\frac{\sqrt{-k}}{2}\,\psi(x)\int_{x-\eta}^x e^{-(x-z)\sqrt{-k}}\,dz - \frac{\sqrt{-k}}{2}\int_{x-\eta}^x e^{-(x-z)\sqrt{-k}}\,\{\psi(z)-\psi(x)\}\,dz\,, \\
&\frac{k(h+\sqrt{-k})^2}{2\sqrt{-k}\,\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}}\int_x^a e^{-(z-x)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz = \\
&= \frac{-(h+\sqrt{-k})^2\sqrt{-k}}{2\,\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}}\left[\int_{x+\eta}^a e^{-(z-x)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz + \right. \\
&\left. + \psi(x)\int_x^{x+\eta} e^{-(z-x)\sqrt{-k}}\,dz + \int_x^{x+\eta} e^{-(z-x)\sqrt{-k}}\,\{\psi(z)-\psi(x)\}\,dz\right].
\end{aligned}\right. \tag{9}$$

In forza poi del *secondo teorema della media* si può scrivere:

$$\sqrt{-k}\int_{x-\eta}^{x} e^{-(x-z)\sqrt{-k}}\{\psi(z)-\psi(x)\}\,dz =$$

$$= \{\psi(x-\eta)-\psi(x)\}\left\{\int_{x-\eta}^{x-\eta+\theta\eta}\sqrt{\varrho}\,e^{-(x-z)\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}}\,\mathrm{sen}\left[(x-z)\sqrt{\varrho}\cos\frac{\omega}{2}+\frac{\omega}{2}\right]dz\;-\right.$$

$$\left.-\,i\int_{x-\eta}^{x-\eta+\theta'\eta}\sqrt{\varrho}\,e^{-(x-z)\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}}\cos\left[(x-z)\sqrt{\varrho}\cos\frac{\omega}{2}+\frac{\omega}{2}\right]dz\right\}=$$

$$=\{\psi(x-\eta)-\psi(x)\}\left\{\left(e^{-(x-z)\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}}\cos\left[(x-z)\sqrt{\varrho}\cos\frac{\omega}{2}\right]\right)_{x-\eta}^{x-\eta+\theta\eta}+\right.$$

$$\left.+\,i\left(e^{-(x-z)\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}}\,\mathrm{sen}\left[(x-z)\sqrt{\varrho}\cos\frac{\omega}{2}\right]\right)_{x-\eta}^{x-\eta+\theta'\eta}\right\},$$

$$\sqrt{-k}\int_{x}^{x+\eta} e^{-(z-x)\sqrt{-k}}\{\psi(z)-\psi(x)\}\,dz =$$

$$=\{\psi(x+\eta)-\psi(x)\}\left\{\int_{x+\theta\eta}^{x+\eta}\sqrt{\varrho}\,e^{-(z-x)\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}}\,\mathrm{sen}\left[(z-x)\sqrt{\varrho}\cos\frac{\omega}{2}+\frac{\omega}{2}\right]dz\;-\right.$$

$$\left.-\,i\int_{x+\theta'\eta}^{x+\eta}\sqrt{\varrho}\,e^{-(z-x)\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}}\cos\left[(z-x)\sqrt{\varrho}\cos\frac{\omega}{2}+\frac{\omega}{2}\right]dz\right\}=$$

$$=\{\psi(x+\eta)-\psi(x)\}\left\{\left(e^{-(z-x)\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}}\cos\left[(z-x)\sqrt{\varrho}\cos\frac{\omega}{2}\right]\right)_{x+\theta\eta}^{x+\eta}+\right.$$

$$\left.+\,i\left(e^{-(z-x)\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}}\,\mathrm{sen}\left[(z-x)\sqrt{\varrho}\cos\frac{\omega}{2}\right]\right)_{x+\theta'\eta}^{x+\eta}\right\};$$

$$(0\leq\theta\leq 1\;,\;0\leq\theta'\leq 1)$$

e quindi, facendo uso della (8), si avrà:

$$(10)\qquad \begin{cases}\left|\dfrac{\sqrt{-k}}{2}\displaystyle\int_{x-\eta}^{x} e^{-(x-z)\sqrt{-k}}\{\psi(z)-\psi(x)\}\,dz\right|<\mathrm{M}\sigma,\\[2ex] \left|\sqrt{-k}\displaystyle\int_{x}^{x+\eta} e^{-(z-x)\sqrt{-k}}\{\psi(z)-\psi(x)\}\,dz\right|<\mathrm{N}\sigma,\end{cases}$$

con M, N quantità finite, che si possono fissare indipendentemente da η, da ϱ e da ω.

Si ha ancora identicamente:

$$
(9)' \left\{
\begin{aligned}
&\frac{k\{(h+\sqrt{-k})^2-(h^2+k)\}}{2\sqrt{-k}\{(h+\sqrt{-k})^2-e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}}\int_0^a e^{-z\sqrt{-k}}\psi(z)\,dz = \\
&\qquad = \frac{-\sqrt{-k}\{(h+\sqrt{-k})^2-(h^2+k)\}}{2\{(h+\sqrt{-k})^2-e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}}\left[\int_\eta^a e^{-z\sqrt{-k}}\psi(z)\,dz + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \psi(0)\int_0^\eta e^{-z\sqrt{-k}}\,dz + \int_0^\eta e^{-z\sqrt{-k}}\{\psi(z)-\psi(0)\}\,dz\right], \\
&\frac{k}{2\sqrt{-k}}\left\{1-\frac{h^2+k}{(h+\sqrt{-k})^2-e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2}\right\}\int_0^a e^{-(a-z)\sqrt{-k}}\psi(z)\,dz = \\
&= -\frac{\sqrt{-k}}{2}\left\{1-\frac{h^2+k}{(h+\sqrt{-k})^2-e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2}\right\}\left[\int_0^{a-\eta} e^{-(a-z)\sqrt{-k}}\psi(z)\,dz + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \psi(a)\int_{a-\eta}^a e^{-(a-z)\sqrt{-k}}\,dz + \int_{a-\eta}^a e^{-(a-z)\sqrt{-k}}\{\psi(z)-\psi(a)\}\,dz\right];
\end{aligned}
\right.
$$

e inoltre, applicando il *secondo teorema della media*, si può scrivere come precedentemente:

$$
(10)' \quad \left\{
\begin{aligned}
&\left|\sqrt{-k}\int_0^\eta e^{-z\sqrt{-k}}\{\psi(z)-\psi(0)\}\,dz\right| < M'\sigma, \\
&\left|\sqrt{-k}\int_{a-\eta}^a e^{-(a-z)\sqrt{-k}}\{\psi(z)-\psi(a)\}\,dz\right| < N'\sigma.
\end{aligned}
\right.
$$

8. Ora si supponga che il punto x disti dall'estremo o meno di η. In questo caso si può scrivere:

$$
(9)'' \left\{
\begin{aligned}
&\frac{k}{2\sqrt{-k}}\int_0^x e^{-(x-z)\sqrt{-k}}\psi(z)\,dz = -\frac{\sqrt{-k}}{2}\psi(x)\int_0^x e^{-(x-z)\sqrt{-k}}\,dz - \\
&\qquad\qquad - \frac{\sqrt{-k}}{2}\int_0^x e^{-(x-z)\sqrt{-k}}\{\psi(z)-\psi(x)\}\,dz, \\
&\frac{(h^2+k)k}{2\sqrt{-k}\{(h+\sqrt{-k})^2-e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}}\int_0^{\eta-x} e^{-(x+z)\sqrt{-k}}\psi(z)\,dz = \\
&\qquad = -\frac{(h^2+k)\sqrt{-k}}{2\{(h+\sqrt{-k})^2-e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}}\left[\psi(x)\int_0^{\eta-x} e^{-(x+z)\sqrt{-k}}\,dz + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \int_0^{\eta-x} e^{-(x+z)\sqrt{-k}}\{\psi(z)-\psi(x)\}\,dz\right];
\end{aligned}
\right.
$$

e, come sopra, si avrà, applicando il *secondo teorema della media* e la (8),

$$(10)'' \quad \begin{cases} \left| \frac{\sqrt{-k}}{2} \int_0^x e^{-(x-z)\sqrt{-k}} \{ \psi(z) - \psi(x) \} \, dz \right| < M_1 \sigma, \\ \left| \frac{\sqrt{-k}}{2} \int_0^{\eta - x} e^{-(x+z)\sqrt{-k}} \{ \psi(z) - \psi(x) \} \, dz \right| < N_1 \sigma. \end{cases}$$

Supponiamo invece che il punto x disti dall'estremo a meno di η. In questo caso si porrà:

$$(9)''' \quad \begin{cases} \frac{(h+\sqrt{-k})^2 k}{2\sqrt{-k}\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}} \int_x^a e^{-(z-x)\sqrt{-k}} \psi(z) \, dz = \\ = -\frac{(h+\sqrt{-k})^2 \sqrt{-k}}{2\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}} \left[\psi(x) \int_x^a e^{-(z-x)\sqrt{-k}} \, dz + \right. \\ \qquad \left. + \int_x^a e^{-(z-x)\sqrt{-k}} \{ \psi(z) - \psi(x) \} \, dz \right], \\ \frac{(h^2+k)k}{2\sqrt{-k}\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}} \int_{2a-x-\eta}^a e^{-(2a-z-x)\sqrt{-k}} \psi(z) \, dz = \\ = -\frac{(h^2+k)\sqrt{-k}}{2\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}} \left[\psi(x) \int_{2a-x-\eta}^a e^{-(2a-z-x)\sqrt{-k}} \, dz + \right. \\ \qquad \left. + \int_{2a-x-\eta}^a e^{-(2a-z-x)\sqrt{-k}} \{ \psi(z) - \psi(x) \} \, dz \right]; \end{cases}$$

e si avrà, come al solito,

$$(10)''' \quad \begin{cases} \left| \frac{\sqrt{-k}}{2} \int_x^a e^{-(z-x)\sqrt{-k}} \{ \psi(z) - \psi(x) \} \, dz \right| < M_2 \sigma, \\ \left| \frac{\sqrt{-k}}{2} \int_{2a-x-\eta}^a e^{-(2a-z-x)\sqrt{-k}} \{ \psi(z) - \psi(x) \} \, dz \right| < N_2 \sigma. \end{cases}$$

Finalmente supponiamo che il punto x disti da un punto di massimo o di minimo meno di η. Indicando con b questo punto di massimo o di minimo e ponendo, per fissare le idee, $x > b$, si potrà scrivere:

$$(9)^{\text{IV}} \quad \begin{cases} \frac{k}{2\sqrt{-k}} \int_0^x e^{-(z-x)\sqrt{-k}} \psi(z) \, dz = -\frac{\sqrt{-k}}{2} \int_0^{x-\eta} e^{-(z-x)\sqrt{-k}} \psi(z) \, dz - \\ \quad -\frac{\sqrt{-k}}{2} \psi(x) \int_{x-\eta}^x e^{-(z-x)\sqrt{-k}} \, dz - \frac{\sqrt{-k}}{2} \int_{x-\eta}^b e^{-(z-x)\sqrt{-k}} \{ \psi(z) - \psi(x) \} \, dz - \\ \quad -\frac{\sqrt{-k}}{2} \int_b^x e^{-(z-x)\sqrt{-k}} \{ \psi(z) - \psi(x) \} \, dz; \end{cases}$$

ed inoltre, applicando il *secondo teorema della media* e la (8), si avrà:

$$(10)^{\text{IV}} \quad \begin{cases} \left| \dfrac{\sqrt{-k}}{2} \displaystyle\int_{x-\eta}^{b} e^{-(z-x)\sqrt{-k}} \{ \psi(z) - \psi(x) \} \, dz \right| < M_3 \sigma , \\ \left| \dfrac{\sqrt{-k}}{2} \displaystyle\int_{b}^{\infty} e^{-(z-x)\sqrt{-k}} \{ \psi(z) - \psi(x) \} \, dz \right| < N_3 \sigma . \end{cases}$$

In tutte le formole precedenti, come nella (10), le quantità costanti M', N', M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3 si possono fissare indipendentemente da η, da ϱ e da ω.

9. Fissata una quantità positiva ε piccola ad arbitrio, si ha, per i valori di ω tali che

$$(11) \qquad \pi - \varepsilon \geq \frac{\omega}{2} \geq \varepsilon$$

e per i valori di ϱ non minori di un certo limite, che si può fissare, 1°:

$$(12) \quad \begin{cases} \left| \dfrac{(h+\sqrt{-k})^2}{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2} - 1 \right| < \sigma , \\ \left| \dfrac{-(h^2+k)}{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2} - 1 \right| < \sigma ; \end{cases}$$

2°:

$$(13) \quad \begin{cases} \left| \dfrac{(h-\sqrt{-k})^2\sqrt{-k}}{2\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}} \displaystyle\int_{o}^{\infty} e^{-(2a+z-x)\sqrt{-k}} \psi(z) \, dz \right| < \sigma , \\ \left| \dfrac{(h-\sqrt{-k})^2\sqrt{-k}}{2\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}} \displaystyle\int_{o}^{a} e^{-(2a-z+x)\sqrt{-k}} \psi(z) \, dz \right| < \sigma , \end{cases}$$

qualunque sia il punto x del campo oa, gli estremi o, a inclusi; 3°:

$$(14) \quad \begin{cases} \left| \dfrac{(h^2+k)\sqrt{-k}}{2\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}} \displaystyle\int_{o}^{a} e^{-(x+z)\sqrt{-k}} \psi(z) \, dz \right| < \sigma , \\ \left| \dfrac{(h^2+k)\sqrt{-k}}{2\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}} \displaystyle\int_{o}^{a} e^{-(2a-z-x)\sqrt{-k}} \psi(z) \, dz \right| < \sigma , \\ \left| \dfrac{\sqrt{-k}}{2} \displaystyle\int_{o}^{x-\eta} e^{-(x-z)\sqrt{-k}} \psi(z) \, dz \right| < \sigma , \\ \left| \dfrac{(h+\sqrt{-k})^2\sqrt{-k}}{2\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}} \displaystyle\int_{x+\eta}^{a} e^{-(z-x)\sqrt{-k}} \psi(z) \, dz \right| < \sigma , \\ \left| \dfrac{\psi(x)}{2} \left\{ \displaystyle\int_{x-\eta}^{x} e^{-(x-z)\sqrt{-k}} \sqrt{-k} \, dz - 1 \right\} \right| = \dfrac{1}{2} \left| e^{-\eta\sqrt{-k}} \psi(x) \right| < \sigma , \\ \left| \dfrac{(h+\sqrt{-k})^2 \psi(x)}{2\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}} \left\{ \displaystyle\int_{x}^{x+\eta} e^{-(z-x)\sqrt{-k}} \sqrt{-k} \, dz - 1 \right\} \right| = \\ \qquad = \left| \dfrac{(h+\sqrt{-k})^2 \psi(x) e^{-\eta\sqrt{-k}}}{2\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}} \right| < \sigma \end{cases}$$

qualunque sia il punto x distante dagli estremi non meno di η; 4°:

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left|\frac{\sqrt{-k}\,\}(h+\sqrt{-k})^2-(h^2+k)\{}{2\}(h+\sqrt{-k})^2-e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\{}\int_\eta^a e^{-z\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz\right|<\sigma\,,\\
&\left|\frac{\sqrt{-k}}{2}\left\}1-\frac{h^2+k}{(h+\sqrt{-k})^2-e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2}\right\{\int_0^{a-\eta} e^{-(a-z)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz\right|<\sigma\,,\\
&\left|\frac{\}(h+\sqrt{-k})^2-(h^2+k)\{\,\psi(0)}{2\}(h+\sqrt{-k})^2-e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\{}\left\{\int_0^\eta e^{-z\sqrt{-k}}\sqrt{-k}\,dz-1\right\}\right|=\\
&\qquad=\left|\frac{\}(h+\sqrt{-k})^2-(h^2+k)\{\,\psi(0)}{2\}(h+\sqrt{-k})^2-e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\{}\,e^{-\eta\sqrt{-k}}\right|<\sigma\,,\\
&\left|\frac{1}{2}\left\}1-\frac{h^2+k}{(h+\sqrt{-k})^2-e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2}\right\{\psi(a)\left\{\int_{a-\eta}^a e^{-(a-z)\sqrt{-k}}\sqrt{-k}\,dz-1\right\}\right|=\\
&\qquad=\left|\frac{1}{2}\left\}1-\frac{h^2+k}{(h+\sqrt{-k})^2-e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2}\right\}e^{-\eta\sqrt{-k}}\,\psi(a)\right|<\sigma\,,\\
&\left|\frac{(h^2+k)\sqrt{-k}}{2\}(h+\sqrt{-k})^2-e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\{}\int_0^a e^{-(a+z)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz\right|<\sigma\,;
\end{aligned}
\right.
$$

5°:

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left|\frac{\psi(x)}{2}\left\{\int_0^x e^{-(x-z)\sqrt{-k}}\sqrt{-k}\,dz-\right.\right.\\
&\qquad\left.-\frac{(h^2+k)\sqrt{-k}}{(h+\sqrt{-k})^2-e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2}\int_0^{\eta-x} e^{-(x+z)\sqrt{-k}}\,dz-1\right\}\Bigg|=\\
&\qquad=\frac{|\psi(x)|}{2}\left|\left\}-1-\frac{h^2+k}{(h+\sqrt{-k})^2-e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2}\right\}e^{-x\sqrt{-k}}+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{h^2+k}{(h+\sqrt{-k})^2-e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2}\,e^{-\eta\sqrt{-k}}\right|<\sigma\,,\\
&\left|\frac{(h^2+k)\sqrt{-k}}{2\}(h+\sqrt{-k})^2-e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\{}\int_{\eta-x}^a e^{-(x+z)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz\right|<\sigma\,,\\
&\left|\frac{(h^2+k)\sqrt{-k}}{2\}(h+\sqrt{-k})^2-e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\{}\int_0^a e^{-(2a-z-x)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz\right|<\sigma
\end{aligned}
\right.
$$

qualunque sia il punto x distante dal punto 0 meno di η; 6°:

$$
(17)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left|\frac{\psi(x)}{2}\right\}\frac{(h+\sqrt{-k})^2\sqrt{-k}}{(h+\sqrt{-k})^2-e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2}\int_x^a e^{-(z-x)\sqrt{-k}}\,dz-\\
&\quad-\frac{(h^2+k)\sqrt{-k}}{(h+\sqrt{-k})^2-e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2}\int_{2a-x-\eta}^a e^{-(2a-z-x)\sqrt{-k}}\,dz-1\Big\}\Big|=\\
&\quad=\frac{|\psi(x)|}{2}\Big|\frac{(h+\sqrt{-k})^2}{(h+\sqrt{-k})^2-e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2}(1-e^{-(a-x)\sqrt{-k}})-\\
&\quad-\frac{h^2+k}{(h+\sqrt{-k})^2-e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2}(e^{-(a-x)\sqrt{-k}}-e^{-\eta\sqrt{-k}})-1\Big|=\\
&\quad=\frac{|\psi(x)|}{2}\Big|\Big\}\frac{(h+\sqrt{-k})^2}{(h+\sqrt{-k})^2-e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2}-1\Big\}-\\
&\quad-\frac{(h+\sqrt{-k})^2+h^2+k}{(h+\sqrt{-k})^2-e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2}e^{-(a-x)\sqrt{-k}}+\\
&\quad+\frac{h^2+k}{(h+\sqrt{-k})^2-e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2}e^{-\eta\sqrt{-k}}\Big|<\sigma,\\
&\left|\frac{(h^2+k)\sqrt{-k}}{2\}(h+\sqrt{-k})^2-e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\{}\int_0^{2a-x-\eta}e^{-(2a-z-x)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz\right|<\sigma,\\
&\left|\frac{(h^2+k)\sqrt{-k}}{2\}(h+\sqrt{-k})^2-e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\{}\int_0^{a}e^{-(x+z)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz\right|<\sigma
\end{aligned}
\right.
$$

qualunque sia il punto x distante dal punto a meno di η.

Osserviamo che la prima delle (9), la prima delle (10), la prima, la terza e la quinta delle (14) valgono anche quando il punto x dista dal punto a meno di η; la seconda delle (9), la seconda delle (10), la seconda, la quarta e la sesta delle (14) valgono anche quando il punto x dista dal punto 0 meno di η; la prima delle (9) e la prima delle (10) valgono anche quando il punto x dista meno di η da un punto di massimo o di minimo e si trova alla sua sinistra; la seconda delle (9) e la seconda delle (10) valgono anche quando il punto x dista meno di η da un punto di massimo o di minimo e si trova alla sua destra.

10. Premesse queste formole ed indicato con H il massimo valore assoluto della funzione $\psi(z)$ in tutto il campo oa, si ha, per i valori (11) di ω e per i valori di ϱ superiori ad un certo limite che si può fissare: 1° per i punti x distanti dagli estremi e dai punti di massimo e di minimo non meno di η e per gli stessi punti di massimo e di minimo, facendo uso delle (9), (10), (12), (13), (14),

$$
(18)\qquad |ky+\psi(x)|\leq\}\mathrm{M}+\mathrm{N}(1+\sigma)+\frac{\mathrm{H}}{2}+8\{\sigma;
$$

2° per gli estremi, facendo uso delle (9)′, (10)′, (12), (13), (15),

$$
(18)_1\qquad |ky+\psi(o)|\leq\}\mathrm{M}'(1+\sigma)+\mathrm{H}+4\{\sigma;
$$

$$(18)_2 \qquad |ky+\psi(a)| \leq \} N'(2+\sigma)+\frac{H}{2}+5\{\sigma;$$

3° per i punti x che distano da o meno di η, facendo uso delle $(9)''$, $(10)''$, (9), (10), (12), (13), (14), (16),

$$(18)_3 \qquad |ky+\psi(x)| \leq \} M_1+N_1(1+\sigma)+N(1+\sigma)+\frac{H}{2}+7\{\sigma;$$

4° per i punti x che distano da a meno di η, facendo uso delle $(9)'''$, $(10)'''$, (9), (10), (12), (13), (14), (17),

$$(18)_4 \qquad |ky+\psi(x)| \leq \} M+M_2(1+\sigma)+N_2(1+\sigma)+7\{\sigma;$$

5° per i punti x che distano dal punto b di massimo o di minimo meno di η, con $x > b$, facendo uso delle $(9)^{IV}$, $(10)^{IV}$, (9), (10), (12), (13), (14),

$$(18)_5 \qquad |ky+\psi(x)| \leq \} M_3+N_3+N(1+\sigma)+\frac{H}{2}+8\{\sigma.$$

Quest'ultima vale qualunque sia il punto x alla destra del punto b, distante da b meno di η. Una formola analoga si ha per i punti a sinistra di b, distanti da b meno di η. Queste due formole poi rimangono invariate qualunque sia il punto di massimo o di minimo che dista meno di η dal punto x che si considera.

Indicando con Q il massimo dei coefficienti di σ che si presentano nelle formole (18), $(18)_1$, $(18)_2$, $(18)_3$, $(18)_4$, $(18)_5$ e nell'altra che non si è scritta, si avrà:

$$|ky+\psi(x)| \leq Q\sigma$$

qualunque sia il punto x che si considera, gli estremi o, a inclusi.

Osserviamo che la quantità Q, come le quantità H, M, N, M', N', M_1, N_1, M_2, N_2, M_3, N_3 dalle quali dipende, si può fissarla indipendentemente dal valore che si prende per σ e dal valore che si prende per ϱ; di guisa che possiamo dire che *data una quantità positiva σ' piccola ad arbitrio, per i valori di ϱ non minori di un certo limite ϱ_1, che si può fissare, e per i valori* (11) *di ω, si avrà, qualunque sia il punto x del campo* oa (*gli estremi inclusi*),

$$(19) \qquad |ky+\psi(x)| < \sigma'.$$

Osserviamo che il valore ϱ_1 dipende esclusivamente dalla quantità ε e dalla quantità η, compatibile col valore dato di σ'.

11. Il *teorema di Cauchy* ci dà:

$$(20) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon} y(k)\,dk = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k\,.\,y(k)\,d\omega = \sum_1^t {}_r\,p_r,$$

dove le funzioni $p_1, p_2, \ldots p_t$ sono i residui della funzione $y(k)$ nei poli $k_1, k_2, \ldots k_t$ che cadono entro il cerchio C_ε. Di qui, avendo riguardo al risultato del paragrafo precedente ed a quello del § 6, segue per $\varrho = \left\{\frac{(2l+1)\pi}{2a}\right\}^2$, con $l \geq \frac{m(2m+1)-1}{2}$

numero intero talmente grande che risulti $\varrho > \varrho_1$ e con m numero intero e positivo abbastanza grande, e per qualunque punto x del campo oa,

$$\left|\psi(x) + \sum_1^{\varrho}{}_r\, p_r\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(ky + \psi(x))\, d\omega\right| < \frac{\sigma'}{2\pi}\int^{2\pi-2\varepsilon} d\omega + \frac{H+K}{2\pi}\int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon} d\omega < \sigma' + 2\varepsilon\frac{H+K}{\pi},$$

dove σ' ed ε sono quantità positive piccole ad arbitrio, e dove H e K sono quantità finite che si possono fissare indipendentemente da σ' e da ε. Ne concludiamo subito che *la serie* $-\sum_1^{\infty}{}_r\, p_r$ *è convergente in ugual grado in tutto il campo* **oa** *e rappresenta in ogni punto di questo campo la funzione arbitraria* $\psi(x)$.

Questo risultato generale comprende evidentemente il caso particolare in cui il numero dei poli dell'integrale y delle equazioni (1), (1)', corrispondente alla funzione data $\psi(x)$, è finito. Adunque in ogni caso si può scrivere:

$$\psi(x) = -\sum_1{}_r\, p_r, \tag{21}$$

dove la serie al secondo membro può anche arrestarsi ad un certo valore finito di r, dipendentemente dalla natura della funzione data $\psi(x)$.

12. Supponiamo che *la funzione* $\psi(x)$ *abbia nel campo* **oa** *un numero finito di punti di discontinuità, tali che in ciascuno di questi punti non manchi la continuità a destra, nè la continuità a sinistra.* Anche qui, come al § 7, data una quantità positiva σ piccola ad arbitrio, si può fissare una quantità η, la quale valga per ciascuno dei campi, limitati dagli estremi o, a e dai punti di discontinuità, nei quali la funzione $\psi(x)$ è sempre continua. Ciò premesso, si indichi con η' una quantità positiva piccola ad arbitrio ed inferiore alla quantità η, e si isolino i punti di discontinuità con dei tratti di ampiezza η' da una parte e dall'altra. È chiaro che, per i punti x del campo rimanente si possono ripetere i ragionamenti dei §§ 7, ... 10, purchè si prenda per la quantità η di quei paragrafi la quantità η'; e quindi sarà valida la formola (19) per tutti i valori di ϱ superiori ad un certo limite ϱ_1, che si può fissare indipendentemente dal punto che si considera.

Quanto ai punti x, che distano dai punti di discontinuità meno di η', si possono ancora ripetere i ragionamenti dei §§ 7, ... 10, purchè ogni volta si prenda per la quantità η di quei paragrafi la minima distanza dal punto x, che si considera, ai punti di discontinuità, la quale sarà sempre inferiore ad η' ed impiccolirà al successivo avvicinarsi di x stesso al punto di discontinuità più prossimo. Allora per questi punti x varrà ancora la formola (19); ma il valore di ϱ_1 varierà da punto a punto, in modo che non si può fissare un valore di ϱ_1 valevole per tutti i punti.

Questo porta a concludere che la formola (21) vale per tutti i punti del campo oa (i punti di discontinuità esclusi), e che la serie al secondo membro è convergente in ugual grado in tutto il campo formato dai punti che distano dai punti di discontinuità non meno di η', mentre è semplicemente convergente in tutti gli altri punti.

Finalmente per i punti di discontinuità osserveremo che, sostituendo ogni volta alla formola (8) le altre:

$$|\psi(z) - \psi(x-0)| < \sigma, \qquad |\psi(z) - \psi(x+0)| < \sigma,$$

si possono anche qui ripetere i ragionamenti dei §§ 7, ... 10. In questo modo invece della formola (19) otterremo l'altra:

$$\left| ky + \frac{\psi(x-0) + \psi(x+0)}{2} \right| < \sigma' ; \tag{22}$$

e quindi in luogo della (21) avremo:

$$\frac{\psi(x-0) + \psi(x+0)}{2} = -\sum_1^\infty {}_r\, p_r , \tag{21'}$$

e la serie al secondo membro sarà ancora convergente.

Riepilogando e rammentando che la quantità positiva η' è piccola ad arbitrio, possiamo dire che, *se la funzione $\psi(x)$ ha un numero finito di punti di discontinuità tali che anche in essi punti non manchi la continuità a destra e la continuità a sinistra, la serie $-\sum_1^\infty {}_r\, p_r$ è semplicemente convergente in tutto il campo* **oa** *ed equivale in ogni punto x dell'interno di questo campo al valore dell'espressione:*

$$\frac{\psi(x-0) + \psi(x+0)}{2},$$

nel punto **o** *a $\psi(0)$, nel punto* **a** *a $\psi(a)$. Essa poi è convergente in ugual grado in ogni campo che si ottiene escludendo dal campo* **oa** *i punti di discontinuità con intorni comunque piccoli contenenti nel loro interno tali punti.*

Questo teorema vale naturalmente anche nel caso in cui la funzione $\psi(x)$, pur avendo infiniti massimi e minimi nel campo oa, si può ridurre ad essere sempre crescente o sempre decrescente con l'aggiungere ad essa una conveniente funzione di primo grado, ossia nel caso in cui la funzione $\psi(x)$, potendo avere dei punti di discontinuità in numero finito, nei quali non manchi per altro la continuità a destra e la continuità a sinistra, nei tratti ove è continua, *è continua di prima specie* [1].

13. Supponiamo finalmente che *la funzione $\psi(x)$ sia finita e continua in tutto il campo* **oa** *e, se ha dei punti di discontinuità, in numero finito, sia tale che in ciascuno di questi punti non manchi la continuità a destra e la continuità a sinistra;* supponiamo inoltre che *uno degli estremi oscillatorii* [2] *dei rapporti incrementali di $\psi(x)$ sia atto all'integrazione in tutto il campo* **oa**, *anche quando viene ridotto ai suoi valori assoluti, potendo pure avere dei punti di infinito in questo campo.*

(1) Cfr. Dini, *Fondamenti per la teorica delle funzioni* . . . . ; pag. 168 e seg. Ivi si parla sempre di funzioni continue in tutto il campo; però quelle considerazioni valgono anche nel caso nostro.

(2) Cfr. Dini, l. c., pag. 192.

Indicando con λ_ψ questo estremo oscillatorio, si ha, applicando il teorema dell'integrazione per parti [1],

$$\frac{k}{2\sqrt{-k}}\int_0^x e^{-(x-z)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz = -\frac{1}{2}\{\psi(x-0)-\psi(0)\,e^{-x\sqrt{-k}}\}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum\{\psi(b_i+0)-\psi(b_i-0)\}\,e^{-(x-b_i)\sqrt{-k}}+\frac{1}{2}\int_0^x e^{-(x-z)\sqrt{-k}}\,\lambda_\psi\,dz\,,$$

dove il sommatorio va esteso a tutti i punti di discontinuità della $\psi(z)$ che cadono tra o ed x.

Ora, per l'ipotesi fatta sulla natura della funzione λ_ψ, si ha:

$$\left|\int_0^x e^{-(x-z)\sqrt{-k}}\,\lambda_\psi\,dz\right| \leq \int_0^x e^{-(x-z)\sqrt{\rho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}}\,|\lambda_\psi|\,dz \leq \int_0^x |\lambda_\psi|\,dz \leq \int_0^a |\lambda_\psi|\,dz = \mathrm{M}',$$

con M' quantità finita che si può fissare; allora, indicando con M il massimo di $\psi(x)$ in tutto il campo oa e con n il numero dei punti di discontinuità della $\psi(x)$ nello stesso campo, potremo scrivere:

$$\left|\frac{k}{2\sqrt{-k}}\int_0^x e^{-(x-z)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz\right| < \mathrm{M}(n+1)+\frac{1}{2}\mathrm{M}',$$

qualunque sia il valore della quantità reale o complessa k e qualunque sia il punto x del campo oa.

Risultati analoghi si hanno per gli integrali:

$$\int_x^a e^{-(z-x)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz\,,\quad \int_0^a e^{-(x+z)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz\,,\quad \int_0^a e^{-(2a-z-x)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz\,,$$
$$\int_0^x e^{-(2a+z-x)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz\,,\quad \int_0^a e^{-(2a-z+x)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz\,.$$

Di qui, facendo uso dei risultati del § 5, segue immediatamente che il risultato del § 6 sussiste anche nel caso che la funzione $\psi(x)$ soddisfi alle condizioni poste in principio di questo paragrafo.

14. Poichè la funzione $|\lambda_\psi|$ è atta alla integrazione in tutto il campo oa, è chiaro che, data una quantità positiva σ_1 piccola ad arbitrio, si può fissare un segmento η_1 di ampiezza talmente piccola, ma diversa dallo zero, che si abbia [2]:

$$\int_\alpha^\beta |\lambda_\psi|\,dz < \sigma_1\,,$$

essendo $(\alpha\beta)$ una qualunque porzione del campo oa di ampiezza minore od uguale ad η_1 ed essendo ancora $\alpha < \beta$.

(1) Cfr. Dini, l. c., pag. 363 e seg.

(2) Ciò in forza della continuità dell'integrale $\int_0^x |\lambda_\psi|dz$ e in forza ancora del noto *teorema di Cantor*.

Ciò premesso, si consideri una quantità positiva η, comunque piccola, inferiore alla metà della distanza che corre tra due punti di discontinuità della funzione $\psi(x)$, tra uno di questi punti di discontinuità ed un estremo, ed inferiore ancora ad η_1.

Integrando per parti, si ha per i punti x che distano da o e dai punti di discontinuità di $\psi(x)$ non meno di η (il punto a incluso):

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{k}{2\sqrt{-k}} \int_{x-\eta}^{x} e^{-(x-z)\sqrt{-k}}\, \psi(z)\, dz = & -\frac{\psi(x) - \psi(x-\eta)\, e^{-\eta\sqrt{-k}}}{2} + \\ & + \frac{1}{2} \int_{x-\eta}^{x} e^{-(x-z)\sqrt{-k}}\, \lambda_\psi\, dz : \end{aligned} \right.$$

per i punti x che distano da a e dai punti di discontinuità non meno di η (il punto o incluso):

$$(24)\quad \frac{k}{2\sqrt{-k}} \int_{x}^{x+\eta} e^{-(z-x)\sqrt{-k}}\, \psi(z)\, dz = -\frac{\psi(x) - \psi(x+\eta)\, e^{-\eta\sqrt{-k}}}{2} - \frac{1}{2} \int_{x}^{x+\eta} e^{-(z-x)\sqrt{-k}}\, \lambda_\psi\, dz ;$$

per i punti x che distano dal punto o meno di η:

$$\frac{k}{2\sqrt{-k}} \int_{0}^{x} e^{-(x-z)\sqrt{-k}}\, \psi(z)\, dz = -\frac{\psi(x) - \psi(o)\, e^{-x\sqrt{-k}}}{2} + \frac{1}{2} \int_{0}^{x} e^{-(x-z)\sqrt{-k}}\, \lambda_\psi\, dz ,$$

$$\frac{k}{2\sqrt{-k}} \int_{0}^{\eta-x} e^{-(x+z)\sqrt{-k}}\, \psi(z)\, dz = \frac{\psi(\eta-x) e^{-\eta\sqrt{-k}} - \psi(o)\, e^{-x\sqrt{-k}}}{2} - \frac{1}{2} \int_{0}^{\eta-x} e^{-(x+z)\sqrt{-k}}\, \lambda_\psi\, dz ;$$

per i punti x che distano dal punto a meno di η:

$$\frac{k}{2\sqrt{-k}} \int_{x}^{a} e^{-(z-x)\sqrt{-k}}\, \psi(z)\, dz = \frac{\psi(a)\, e^{-(a-x)\sqrt{-k}} - \psi(x)}{2} - \frac{1}{2} \int_{x}^{a} e^{-(z-x)\sqrt{-k}}\, \lambda_\psi\, dz ,$$

$$\frac{k}{2\sqrt{-k}} \int_{2a-x-\eta}^{a} e^{-(2a-z-x)\sqrt{-k}}\, \psi(z)\, dz = -\frac{\psi(a)\, e^{-(a-x)\sqrt{-k}} - \psi(2a-x-\eta)\, e^{-\eta\sqrt{-k}}}{2} + \\ + \frac{1}{2} \int_{2a-x-\eta}^{a} e^{-(2a-z-x)\sqrt{-k}}\, \lambda_\psi\, dz .$$

È chiaro poi che si ha ancora:

$$\left| \int_{x-\eta}^{x} e^{-(x-z)\sqrt{-k}}\, \lambda_\psi\, dz \right| < \int_{x-\eta}^{x} |\lambda_\psi|\, dz < \sigma_1 ; \qquad \left| \int_{x}^{x+\eta} e^{-(z-x)\sqrt{-k}}\, \lambda_\psi\, dz \right| < \sigma_1 ;$$

$$\left| \int_{0}^{x} e^{-(x-z)\sqrt{-k}}\, \lambda_\psi\, dz \right| < \sigma_1 \ , \ (x < \eta) ; \qquad \left| \int_{0}^{\eta-x} e^{-(x+z)\sqrt{-k}}\, \lambda_\psi\, dz \right| < \sigma_1 ;$$

$$\left| \int_{x}^{a} e^{-(z-x)\sqrt{-k}}\, \lambda_\psi\, dz \right| < \sigma_1 \ , \ (a - x < \eta) ; \qquad \left| \int_{2a-x-\eta}^{a} e^{-(2a-z-x)}\, \lambda_\psi\, dz \right| < \sigma_1 .$$

15. Le formole del paragrafo precedente ed il risultato del § 13 sono sufficienti per dimostrare, con considerazioni analoghe a quelle dei §§ 9, 10, che, qualunque sia il punto x, distante dai punti di discontinuità di $\psi(x)$ non meno di η, la formola (19) è valevole per tutti i valori di ϱ superiori ad un certo limite ϱ_1, il quale si può fissare dipendentemente dal valore η scelto e dal valore di σ' che entra nella (19).

Per i punti x, che distano da un punto di discontinuità meno di η, le formole del paragrafo precedente valgono ancora, purchè ogni volta si prenda per η la minima distanza del punto x, che si considera, ai punti di discontinuità. Allora anche per questi punti varrà la (19); però, siccome la corrispondente quantità η impiccolisce via via che il punto x si avvicina al punto più prossimo di discontinuità, così non sarà possibile fissare un limite ϱ_1 valevole per tutti questi tali punti. Ciò porta a concludere, come al § 12, che la formola (21) vale per tutti i punti del campo oa (i punti di discontinuità per ora esclusi), e che la serie al secondo membro è convergente in ugual grado in tutto il campo formato dai punti che distano dai punti di discontinuità non meno di η, mentre è semplicemente convergente in tutti gli altri punti.

Per i punti di discontinuità osserveremo finalmente che le formole (23), (24) sono ancora applicabili, purchè in esse in luogo di $\psi(x)$ si scriva $\psi(x-0)$ nella prima, $\psi(x+0)$ nella seconda. Allora in luogo della (19) troveremo la (22) e in luogo della (21) la (21)'.

Se poi la $\psi(x)$ non ha alcun punto di discontinuità, avremo sempre la formola (21) e la serie al secondo membro sarà convergente in ugual grado in tutto il campo oa.

Riepilogando, possiamo enunciare il seguente risultato: *se la funzione $\psi(x)$ è finita e continua in tutto il campo* **oa**, *e se, avendo dei punti di discontinuità, li ha in numero finito e tali che in ciascuno di essi non manchi la continuità a destra e la continuità a sinistra; se inoltre uno degli estremi oscillatori dei rapporti incrementali di $\psi(x)$ è atto all'integrazione in tutto il campo* **oa**, *anche quando viene ridotto ai suoi valori assoluti, potendo pure avere dei punti di infinito, allora la serie $-\sum_1^\infty {}_r\, p_r$ è convergente in ogni punto x del campo* **oa** *ed equivale al valore dell'espressione:*

$$\frac{\psi(x-0)+\psi(x+0)}{2},$$

nel punto **o** *a $\psi(o)$, nel punto* **a** *a $\psi(a)$. Essa serie poi è convergente in ugual grado in tutto il campo* **oa**, *se la funzione $\psi(x)$ non ha punti di discontinuità; mentre, se ha dei punti di discontinuità in numero finito, è convergente in ugual grado in ogni campo che si ottiene escludendo da* **oa** *questi punti con intorni comunque piccoli che li contengano nel loro interno.*

Questo risultato può in alcuni casi applicarsi a funzioni che, nei tratti ove sono continue, essendo *continue di seconda specie* [1], sono tali che, escludendo dal campo oa alcuni punti in numero finito con intorni comunque piccoli, nel rimanente campo sono *continue di prima specie*.

16. Si supponga che *la funzione $\psi(x)$ in tutto il campo* **oa** *sia finita e continua, in ogni punto di questo campo abbia le derivate destra e sinistra determinate e finite, e la funzione $\psi'(x)$, che rappresenta queste derivate, sia atta alla integrazione in tutto il campo* **oa**.

[1] Cfr. Dini, l. c., pag. 168 e seg.

Integrando per parti, otteniamo:

$$y = -\frac{\psi(x)}{k} - \frac{h\}e^{-(a+x)\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k}) - e^{-(a-x)\sqrt{-k}}(h+\sqrt{-k})\{}{k\}(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\{}\psi(a) +$$

$$+\frac{h\}e^{-x\sqrt{-k}}(h+\sqrt{-k}) - e^{-(2a-x)\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})\{}{k\}(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\{}\psi(o) + \frac{1}{2k}\int_0^x e^{-(x-z)\sqrt{-k}}\psi'(z)dz -$$

$$-\frac{(h-\sqrt{-k})^2}{2k\}(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\{}\int_0^x e^{-(2a+z-x)\sqrt{-k}}\psi'(z)\,dz -$$

$$-\frac{(h+\sqrt{-k})^2}{2k\}(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\{}\int_x^a e^{-(z-x)\sqrt{-k}}\psi'(z)\,dz +$$

$$+\frac{1}{2k\}(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\{}\int_0^a \psi'(z)\}\,e^{-(2a-z+x)\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2 +$$

$$+ e^{-(z+x)\sqrt{-k}}(h^2+k) - e^{-(2a-z-x)\sqrt{-k}}(h^2+k)\}\,dz\,;$$

d'onde, derivando rispetto ad x [1],

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} y' = &-\frac{h\}e^{-(a+x)\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k}) + e^{-(a-x)\sqrt{-k}}(h+\sqrt{-k})\{}{\sqrt{-k}\}(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\{}\psi(a) + \\ &+\frac{h\}e^{-x\sqrt{-k}}(h+\sqrt{-k}) + e^{-(2a-x)\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})\{}{\sqrt{-k}\}(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\{}\psi(o) + \\ &+\frac{1}{2\sqrt{-k}}\int_0^x e^{-(x-z)\sqrt{-k}}\psi'(z)\,dz + \\ &+\frac{(h-\sqrt{-k})^2}{2\sqrt{-k}\}(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\{}\int_0^x e^{-(2a+z-x)\sqrt{-k}}\psi'(z)\,dz + \\ &+\frac{(h+\sqrt{-k})^2}{2\sqrt{-k}\}(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\{}\int_x^a e^{-(z-x)\sqrt{-k}}\psi'(z)\,dz + \\ &+\frac{1}{2\sqrt{-k}\}(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\{}\times \\ &\times\int_0^a \psi'(z)\}\,e^{-(2a-z+x)\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2 + e^{-(x+z)\sqrt{-k}}(h^2+k) + \\ &+ e^{-(2a-z-x)\sqrt{-k}}(h^2+k)\}\,dz\,. \end{aligned}\right.$$

Siano $\eta, \sigma, \varepsilon$ tre quantità positive piccole ad arbitrio. Per $a \geq x \geq \eta$ e per $\pi - \varepsilon \geq \frac{\omega}{2} \geq \varepsilon$, si ha:

$$(26)\qquad \left|\frac{h\}e^{-x\sqrt{-k}}(h+\sqrt{-k}) + e^{-(2a-x)\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})\{\sqrt{-k}}{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2}\psi(o)\right| < \sigma,$$

qualunque sia il modulo ϱ di k non minore di un certo limite ϱ'_1, che si può fis-

[1] Cfr. la nota [1] al § 1.

sare dipendentemente dai valori dati di $\eta, \sigma, \varepsilon$. Similmente per $a-\eta \geq x \geq o$ e per $\pi-\varepsilon \geq \frac{\omega}{2} \geq \varepsilon$, si ha:

$$(27) \qquad \left|\frac{h\}e^{-(a+x)\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})+e^{-(a-x)\sqrt{-k}}(h+\sqrt{-k})\{\sqrt{-k}}{(h+\sqrt{-k})^2-e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2}\psi(a)\right|<\sigma,$$

qualunque sia il modulo ϱ di k non minore di un certo limite ϱ_1'', che si può fissare dipendentemente dai valori dati di $\eta, \sigma, \varepsilon$.

È facile poi dimostrare, mediante le considerazioni del § 5, che si possono fissare due quantità finite e positive A_1, A_2 tali che, per qualsiasi punto x del campo oa, per qualsiasi valore di ω variabile da o a 2π (questi estremi inclusi), per $\varrho=\left\{\frac{(2l+1)\pi}{2a}\right\}^2$, con $l \geq \frac{m(2m+1)-1}{2}$, e per m numero intero e positivo abbastanza grande, si abbia:

$$(28) \quad \begin{cases} \left|\dfrac{h\}e^{-x\sqrt{-k}}(h+\sqrt{-k})+e^{-(2a-x)\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})\{\sqrt{-k}}{(h+\sqrt{-k})^2-e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2}\psi(o)\right|<A_1, \\ \left|\dfrac{h\}e^{-(a+x)\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})+e^{-(a-x)\sqrt{-k}}(h+\sqrt{-k})\{\sqrt{-k}}{(h+\sqrt{-k})^2-e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2}\psi(a)\right|<A_2. \end{cases}$$

Osserviamo che gli integrali che entrano nella (25) differiscono da quelli che entrano nella espressione (2)′ di y per il fatto che, dove nella (2)′ entra la funzione $\psi(z)$, nella (25) entra invece la $\psi'(z)$; i segni poi dei coefficienti di questi integrali sono pure gli stessi, se si fa eccezione dei due ultimi termini che entrano nell'ultimo integrale, i quali termini, come si è visto nello studio dello sviluppo della funzione $\psi(x)$, influiscono solo nella considerazione degli estremi o, a e dei punti x appartenenti ad intorni comunque piccoli di questi estremi. Osserviamo inoltre che la y' è finita e continua in tutto il campo oa per qualunque valore del parametro k e solo può avere dei poli per i valori di k radici dell'equazione (3).

17. Ciò premesso, deriviamo rispetto ad x nella formola (20). Poichè le circonferenze C_ε non passano mai per i punti corrispondenti alle radici dell'equazione (3), potremo applicare il teorema della derivazione sotto il segno; e così avremo:

$$(20)' \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon} y'(k)\,dk=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ky'(k)\,d\omega=\sum_1^{\infty}{}_r\, p'_r,$$

dove le $p'_1, p'_2, \ldots p'_t$ sono le derivate rapporto ad x delle funzioni $p_1, p_2, \ldots p_t$.

Ora supponiamo che, *essendo finita e continua la funzione $\psi(x)$ in tutto il campo* oa, *la sua derivata $\psi'(x)$ soddisfi alle condizioni poste per la $\psi(x)$ al* § 7, *o a quelle del* § 12, *o a quelle del* § 13. *Isolando gli estremi* o, a *con intorni arbitrariamente piccoli,* servendosi delle formole (25), (26), (27), (28), (20)′ e ragionando come nei paragrafi precedenti, è chiaro che *risulterà per i punti x del campo rimanente:*

$$(29) \qquad \frac{\psi'(x-0)+\psi'(x+0)}{2}=-\sum_1^{\infty}{}_r\, p'_r,$$

nella quale formola la serie al secondo membro è sempre convergente. Questa serie sarà convergente in ugual grado in tutto il detto campo se la funzione $\psi'(x)$ è

continua in tutto il campo **oa**; *mentre, se la funzione* $\psi'(x)$ *ha dei punti di discontinuità in numero finito, la serie al secondo membro della* (29) *sarà convergente in ugual grado in ogni campo che si ottiene escludendo dal campo* **oa** *gli estremi e i punti di discontinuità con intorni comunque piccoli. Si ha poi negli estremi,* come è facile verificare,

$$h\,\psi(o) = -\sum_{1}^{\infty}{}_r\, p'_r(o)\,, \qquad h\,\psi(a) = \sum_{1}^{\infty}{}_r\, p'_r(a).$$

18. Ammesso che *la funzione* $\psi(x)$ *sia finita ed atta all'integrazione in tutto il campo* oa, il teorema dell'integrazione per parti ci dà [1]

$$\int_0^x \left\{ \frac{e^{-x'\sqrt{-k}}}{2\sqrt{-k}} \int_0^{x'} e^{z\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz \right\} dx' = \frac{1}{2k}\int_0^x \left\{ -\sqrt{-k}\, e^{-x'\sqrt{-k}} \int_0^{x'} e^{z\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz \right\} dx' =$$

$$= \frac{1}{2k}\left\{ e^{-x'\sqrt{-k}} \int_0^{x'} e^{z\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz \right\}_0^x - \frac{1}{2k}\int_0^x \psi(x')\,dx' = \frac{1}{2k}\int_0^x e^{-(x-z)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz - \frac{1}{2k}\int_0^x \psi(x')\,dx',$$

$$\int_0^x \left\{ \frac{e^{x'\sqrt{-k}}}{2\sqrt{-k}} \int_0^{x'} e^{-z\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz \right\} dx' = -\frac{1}{2k}\int_0^x \left\{ \sqrt{-k}\, e^{x'\sqrt{-k}} \int_0^{x'} e^{-z\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz \right\} dx' =$$

$$= -\frac{1}{2k}\left\{ e^{x'\sqrt{-k}} \int_0^{x'} e^{-z\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz \right\}_0^x + \frac{1}{2k}\int_0^x \psi(x')\,dx' = -\frac{1}{2k}\int_0^x e^{(x-z)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz + \frac{1}{2k}\int_0^x \psi(x')\,dx';$$

e quindi si potrà scrivere:

$$(30)\quad \left\{ \begin{aligned}
&\int_0^x y(x',k)\,dx' = -\frac{1}{k}\int_0^x \psi(x')\,dx' + \frac{1}{2k}\int_0^x e^{-(x-z)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz + \\
&\quad + \frac{1}{2k}\int_0^x e^{(x-z)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz - \frac{C_1}{\sqrt{-k}}\{e^{-x\sqrt{-k}} - 1\} + \frac{C_2}{\sqrt{-k}}\{e^{x\sqrt{-k}} - 1\} = \\
&= -\frac{1}{k}\int_0^x \psi(x')\,dx' + \frac{1}{2k}\int_0^x e^{-(x-z)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz - \\
&\quad - \frac{(h-\sqrt{-k})^2}{2k\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}}\int_0^x e^{-(2a+z-x)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz - \\
&\quad - \frac{(h+\sqrt{-k})^2}{2k\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}}\int_x^a e^{-(z-x)\sqrt{-k}}\,\psi(z)\,dz + \\
&\quad + \frac{1}{2k\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}}\int_0^a \psi(z)\,\{e^{-(2a-z+x)\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2 - \\
&\qquad - e^{-(x+z)\sqrt{-k}}(h^2+k) + e^{-(2a-z-x)\sqrt{-k}}(h^2+k)\}\,dz - \\
&\quad - \frac{h}{k\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}}\int_0^a \psi(z)\,\{e^{-(2a-z)\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k}) - \\
&\qquad - e^{-z\sqrt{-k}}(h+\sqrt{-k})\}\,dz.
\end{aligned} \right.$$

[1] Gli estremi oscillatorii dei rapporti incrementali della funzione $F(x') = \int_0^{x'} e^{z\sqrt{-k}}\,\psi(z)dz$ sono atti all'integrazione in tutto il campo oa e non possono differire dalla funzione $e^{x'\sqrt{-k}}\,\psi(x')$ altro che per una funzione d'integrale nullo (Cfr. Dini; l. c.; pag. 327, 328; n. 238).

Ciò premesso, mettiamo nella (20) la x' in luogo della variabile x ed integriamo poi da o ad x. Applicando il teorema dell'integrazione sotto il segno, si ottiene:

$$(20)'' \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\left\{\int_0^x y(x',k)\,dx'\right\}dk=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{k\int_0^x y(x',k)\,dx'\right\}d\omega=\sum_1^{\infty}{}_r\int_0^x p_r\,dx'.$$

Da questa formola e dalla (30), *risulta* ovviamente *qualunque sia il punto x del campo* oa ponendo mente al fatto che la $\psi(x)$ è finita in tutto questo campo,

$$\int_0^x \psi(x')\,dx'=-\sum_1^{\infty}{}_r\int_0^x p_r(x')\,dx',$$

nella quale formola la serie al secondo membro è convergente in ugual grado in tutto il campo oa.

19. Riassumendo qui i risultati dei paragrafi precedenti, ecco quanto possiamo dire:

1°. *Se la funzione $\psi(x)$ in tutto il campo* oa *è finita e continua, e se, avendo delle discontinuità, le ha solamente in un numero finito di punti, nei quali per altro non manchi la continuità a destra e la continuità a sinistra; se inoltre la $\psi(x)$ ha al più un numero finito di punti di massimo e di minimo, o se, avendo un numero infinito di punti di massimo e di minimo, nei tratti ove è continua, è continua di prima specie, si avrà in ogni punto x del campo* oa:

$$(31)\quad \begin{cases} \dfrac{\psi(x-0)+\psi(x+0)}{2}=-\sum\limits_1^{\infty}{}_r p_r \\ \left\{\dfrac{\psi(o+0)+\psi(o+0)}{2}=\psi(o), \qquad \dfrac{\psi(a-0)+\psi(a+0)}{2}=\psi(a)\right\} \end{cases}$$

e la serie al secondo membro sarà sempre convergente. Questa serie poi sarà convergente in ugual grado in ogni campo che si ottiene escludendo dal campo oa *i punti di discontinuità con intorni comunque piccoli che li contengono nel loro interno. In particolare, se mancano i punti di discontinuità, essa sarà convergente in ugual grado in tutto il campo* oa.

2°. *Se la funzione $\psi(x)$ in tutto il campo* oa *è finita e continua, e se, avendo dei punti di discontinuità in numero finito, è tale che in ciascuno di questi punti non manchi nè la continuità a destra, nè quella a sinistra; se inoltre uno degli estremi oscillatorii dei rapporti incrementali di $\psi(x)$ è atto all'integrazione in tutto il campo* oa, *anche ridotto ai suoi valori assoluti, potendo pure avere dei punti di infinito, si avrà in ogni punto x di questo campo:*

$$(31)\quad \begin{cases} \dfrac{\psi(x-0)+\psi(x+0)}{2}=-\sum\limits_1^{\infty}{}_r p_r \\ \left\{\dfrac{\psi(o-0)+\psi(o+0)}{2}=\psi(o), \qquad \dfrac{\psi(a-0)+\psi(a+0)}{2}=\psi(a)\right\} \end{cases}$$

e la serie al secondo membro sarà sempre convergente. Questa serie poi sarà convergente in ugual grado in ogni campo che si ottiene escludendo dal campo oa *i*

punti di discontinuità con intorni comunque piccoli che li contengono nel loro interno. In particolare, se mancano i punti di discontinuità, essa serie sarà convergente in ugual grado in tutto il campo **oa**.

3°. *Se la funzione* $\psi(x)$ *è finita e continua in tutto il campo* **oa** *e la funzione* $\psi'(x)$, *che rappresenta la derivata prima di* $\psi(x)$, *soddisfa alle condizioni poste per la* $\psi(x)$ *al* n. 1° *od a quelle poste al* n. 2°, *si avrà in ogni punto* x *del campo* **oa** (*gli estremi esclusi*):

$$\frac{\psi'(x-0)+\psi'(x+0)}{2}=-\sum_{1}^{\infty}{}_r\, p'_r$$

e la serie al secondo membro sarà sempre convergente. Questa serie poi sarà convergente in ugual grado in ogni campo che si ottiene escludendo dal campo **oa** *gli estremi* **o**, **a** *e i punti di discontinuità di* $\psi'(x)$ *con intorni comunque piccoli. Negli estremi si avrà invece:*

$$h\,\psi(o)=-\sum_{1}^{\infty}{}_r\, p'_r(o)\,,\qquad h\,\psi(a)=\sum_{1}^{\infty}{}_r\, p'_r(a)\,.$$

4.° *Se la funzione* $\psi(x)$ *è finita ed atta all'integrazione in tutto il campo* **oa**, *si avrà in un punto* x *qualsiasi di questo campo:*

$$\int_o^x \psi(x)\,dx=-\sum_{1}^{\infty}{}_r\int_o^x p_r(x')\,dx'$$

e la serie al secondo membro sarà convergente in ugual grado.

I risultati dei numeri 3° e 4° ci dànno due teoremi, uno di *derivazione per serie* ed un altro di *integrazione per serie*, che qui è superfluo enunciare.

20. Dimostriamo ora il seguente teorema: *Se la funzione* $\psi(x)$ *è generalmente diversa da zero e soddisfa alle condizioni precedentemente richieste per la sviluppabilità in serie delle* p_r, *il corrispondente integrale* y *delle equazioni* (1), (1)′ *deve necessariamente avere un polo in un punto almeno a distanza finita del piano della variabile complessa* k.

Infatti se l'integrale y delle equazioni (1), (1)′ non avesse nessun polo corrispondente a nessun valore finito di k, i risultati precedenti ci darebbero per qualunque punto x del campo oa:

$$\frac{\psi(x-0)+\psi(x+0)}{2}=0;$$

e poichè la $\psi(x)$ ha al più un numero finito di punti di discontinuità, nei quali per altro non deve mancare la continuità a destra, nè la continuità a sinistra, così si dovrà avere in tutto il capo oa, contrariamente all'ipotesi fatta, $\psi(x)=0$.

21. Consideriamo le equazioni (5)′. Qualunque integrale regolare di queste equazioni si può sempre porre, a meno di un coefficiente costante, sotto la forma:

$$p'=\sqrt{k'}\cos(x\sqrt{k'})+h\,\mathrm{sen}(x\sqrt{k'})\,;$$

e, affinchè l'integrale stesso esista, è necessario e sufficiente che il parametro k' sia reale e positivo, e sia radice dell'equazione (3); di guisa che si può scrivere:

$$p_s = -A_s \{ \sqrt{k_s} \cos(x\sqrt{k_s}) + h \operatorname{sen}(x\sqrt{k_s}) \}$$

con A_s coefficiente costante, che dipende dalla funzione $\psi(x)$.

Volendo calcolare questo coefficiente, si può procedere nel seguente modo. Anzitutto si considerino le equazioni:

$$\frac{d^2p'}{dx^2} + k'p' = 0, \quad \left(\frac{dp'}{dx} = hp'\right)_{x=0}, \quad \left(\frac{dp'}{dx} + hp' = 0\right)_{x=a};$$
$$\frac{d^2p''}{dx^2} + k''p'' = 0, \quad \left(\frac{dp''}{dx} = hp''\right)_{x=0}, \quad \left(\frac{dp''}{dx} + hp'' = 0\right)_{x=a},$$

corrispondenti a due radici k', k'' dell'equazione (3); si moltiplichi la prima equazione indefinita per p'', la seconda per p'; si sottraggano membro a membro le due nuove equazioni che così si ottengono; e si integri a tutto il campo oa. Si ottiene, integrando per parti e facendo uso delle precedenti equazioni ai limiti,

$$0 = \int_0^a \left(p''\frac{d^2p'}{dx^2} - p'\frac{d^2p''}{dx^2}\right) dx + (k' - k'') \int_0^a p'p''\,dx = \left(p''\frac{dp'}{dx} - p'\frac{dp''}{dx}\right)_0^a +$$
$$+ (k' - k'') \int_0^a p'p''\,dx = (k' - k'') \int_0^a p'p''\,dx,$$

ossia:

$$\int_0^a p'p''\,dx = 0.$$

Premessa questa formola, si moltiplichino ambo i membri della (31) per p_s e si integri per serie [1]. Si ottiene ovviamente [2]:

$$\int_0^a \frac{\psi(x-0) + \psi(x+0)}{2} p_s\,dx = \int_0^a \psi(x)\,p_s\,dx = -\sum_1^\infty{}_r \int_0^a p_r p_s\,dx = -\int_0^a p_s^2\,dx,$$

ossia;

$$\int_0^a \{\sqrt{k_s}\cos(x\sqrt{k_s}) + h\operatorname{sen}(x\sqrt{k_s})\}\,\psi(x)\,dx = A_s \int_0^a \{\sqrt{k_s}\cos(x\sqrt{k_s}) + h\operatorname{sen}(x\sqrt{k_s})\}^2\,dx;$$

e quindi:

$$(32)\quad A_s = \frac{\int_0^a \{\sqrt{k_s}\cos(x\sqrt{k_s}) + h\operatorname{sen}(x\sqrt{k_s})\}\,\psi(x)\,dx}{\int_0^a \{\sqrt{k_s}\cos(x\sqrt{k_s}) + h\operatorname{sen}(x\sqrt{k_s})\}^2\,dx} = \frac{2\int_0^a \{\sqrt{k_s}\cos(x\sqrt{k_s}) + h\operatorname{sen}(x\sqrt{k_s})\}\,\psi(x)\,dx}{ah^2 + 2h + ak_s}.$$

(1) Il risultato 4° del § 19 ci assicura che si può applicare il teorema dell'integrazione per serie (cfr. Dini, l. c., n. 284).

(2) Cfr. ad es. D'Ancais, l. c., vol. I, pag. 430, n. 196 (2ª ediz.).

22. Risulta intanto che l'integrale:

$$(33) \qquad \int_0^a \{\sqrt{k_s}\cos(x\sqrt{k_s}) + h\,\mathrm{sen}(x\sqrt{k_s})\}\,\psi(x)\,dx$$

è certamente diverso dallo zero, se la radice k_s dell'equazione (3) è un polo dell'integrale y delle equazioni (1), (1)' corrispondente alla funzione $\psi(x)$; e quindi, *quando l'integrale* (33) *è nullo, il valore* k_s, *radice dell'equazione* (3), *non è un polo per l'integrale* y.

Viceversa *se la radice* k_s *dell'equazione* (3) *non è un polo per l'integrale* y *delle equazioni* (1), (1)', *l'integrale* (33) *è nullo*. Infatti si ha:

$$\begin{array}{lll} y'' + k_s y + \psi(x) = 0\,, & (y' = hy)_{x=0}\,, & (y' + hy = 0)_{x=a}\,; \\ p_s'' + k_s p_s = 0\,, & (p_s' = hp_s)_{x=0}\,, & (p_s' + hp_s = 0)_{x=a} \end{array}$$

con $y(k_s)$ funzione finita e continua insieme alla sua derivata prima rispetto ad x [1]. Moltiplichiamo ora la prima di queste equazioni indefinite per p_s, la seconda per y; sottragghiamo membro a membro le due equazioni che così si ottengono; ed integriamo a tutto il campo oa. Integrando per parti e facendo uso delle precedenti equazioni ai limiti, si ottiene appunto:

$$\int_0^a p_s \,.\, \psi(x)\,dx = 0\,.$$

In forza di questo risultato *possiamo sempre scrivere*:

$$(31)' \quad \begin{cases} \dfrac{\psi(x-0)+\psi(x+0)}{2} = \sum\limits_1^\infty{}_r\, \Delta_r \{\sqrt{k_r}\cos(x\sqrt{k_r}) + h\,\mathrm{sen}(x\sqrt{k_r})\}\,, \\ \left\{\dfrac{\psi(o-0)+\psi(o+0)}{2} = \psi(o)\,,\quad \dfrac{\psi(a-0)+\psi(a+0)}{2} = \psi(a)\right\} \end{cases}$$

intendendo che in tale serie entrino tutti i termini corrispondenti a tutte le radici dell'equazione (3), le quali formano sull'asse reale e positivo della variabile k un gruppo di punti infinito di prima specie col punto limite all'infinito. Risulta ancora che, *quando una funzione* $\psi(x)$ *è sviluppabile in serie (finita od infinita) di integrali delle equazioni* (5)', *è sviluppabile in un sol modo*, purchè ogni volta sia applicabile il risultato 4° del § 19.

Nel caso particolare di $h = 0$ lo sviluppo (31)' diviene:

$$\frac{\psi(x-0)+\psi(x+0)}{2} = \sum_1^\infty{}_r \left\{\frac{2}{a}\int_0^a \psi(x')\cos\frac{r\pi x'}{a}\,dx'\right\}\cos\frac{r\pi x}{a}\,;$$

$$\left\{\frac{\psi(o-0)+\psi(o+0)}{2} = \psi(o)\,,\qquad \frac{\psi(a-0)+\psi(a+0)}{2} = \psi(a)\right\}$$

[1] Infatti per ipotesi la funzione P, introdotta al § 4, deve contenere il fattore $k - k_s$; e quindi la sua derivata rispetto ad x deve contenere lo stesso fattore.

nel caso di $h = \infty$:

$$\frac{\psi(x-0)+\psi(x+0)}{2} = \sum_1^\infty{}_r \left\{ \frac{2}{a} \int_0^a \psi(x') \operatorname{sen} \frac{r\pi x'}{a} dx' \right\} \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{a}.$$

$$\left\{ \frac{\psi(o-0)+\psi(o+0)}{2} = \psi(o), \qquad \frac{\psi(a-0)+\psi(a+0)}{2} = \psi(a) \right\}$$

Osserviamo per ultimo che, in forza di quanto precede, la formola (20) si può ancora scrivere nel seguente modo:

$$(20)_1 \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} y(k)\, dk = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k \,.\, y(k)\, d\omega = -\sum_1^t{}_r A_r \{ \sqrt{k_r} \cos(x\sqrt{k_r}) + h \operatorname{sen}(x\sqrt{k_r}) \},$$

intendendo che il sommatorio si estenda a tutte le radici dell'equazione (3), che cadono entro il cerchio C_1.

23. Supponiamo data una funzione $\psi(x, t)$ di due variabili indipendenti in un campo C di forma rettangolare coi vertici nei punti (o, o), (a, o), (a, b), (o, b), la quale sia finita e continua in tutto il detto campo e, se ha discontinuità, le abbia soltanto in un numero finito di punti staccati, o anche in un numero infinito di punti, che però si succedano con continuità o no su un numero finito di linee continue, le quali non coincidano in tratti finiti con rette parallele agli assi e non tocchino o taglino queste rette in un numero infinito di punti. Supponiamo ancora che la funzione $\psi(x, t)$, per ognuno dei valori di t che si possono considerare, riguardata come funzione della sola x, soddisfi alle condizioni poste per la $\psi(x)$ al n. 1.° del § 19 od al n. 2.° dello stesso paragrafo; e precisamente supponiamo che nel primo caso si possa fissare un numero intero e positivo m, comunque grande ma finito, tale che il numero dei punti di massimo e di minimo della funzione $\psi(x, t)$, considerata come funzione della sola x, per ogni valore di t sia inferiore od uguale ad m; ovvero, se m non si può fissare, che esista un binomio $Ax + B$ tale che la espressione $\psi(x, t) + Ax + B$, considerata come funzione di x, per ogni valore di t sia sempre crescente o sempre decrescente; che nel secondo caso, data una quantità positiva σ_1 comunque piccola, si possa fissare un segmento η_1 di ampiezza talmente piccola, ma diversa da *zero*, che si abbia per qualunque valore di t:

$$\int_\alpha^\beta |\lambda\psi(x, t)|\, dx < \sigma_1,$$

essendo $(\alpha\beta)$ una qualunque porzione del campo oa di ampiezza inferiore od uguale ad η_1 ed essendo ancora $\alpha < \beta$ (¹).

Rifacendo i calcoli del § 6 o quelli del § 13, secondo che si è nel primo caso o nel secondo, è facile riscontrare che la quantità finita e positiva K, di cui è

(¹) Come conseguenza di questa ipotesi, è possibile fissare una quantità finita e positiva M' tale che, per qualunque valore di t, si abbia:

$$\int_0^a |\lambda\psi(x, t)\, dx < M'.$$

parola al § 6, si può fissarla anche per la funzione $\psi(x, t)$ in modo che risulti indipendente da t. È chiaro poi che anche la quantità finita e positiva H, introdotta al § 10, si può fissarla in modo che risulti indipendente da t; di modo che si può scrivere, per uno qualunque dei sistemi di valori che si possono considerare per x e t e per tutti i valori di k, corrispondenti ai punti delle circonferenze $C_1, C_2 \ldots$,

$$(34) \qquad |k.y(x, t, k) + \psi(x, t)| \leq H + K,$$

nella quale formola la funzione $y(x, t, k)$ è l'integrale regolare delle equazioni (1), (1)', corrispondente al valore di t che si considera; e quindi si avrà, per $o \leq t' < t'' \leq b$ e per i valori di ϱ corrispondenti ai punti delle circonferenze $C_1, C_2 \ldots$,

$$(34)' \quad \left| \int_{t'}^{t''} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{k.y(x,t,k) + \psi(x,t)\} d\omega \right] dt \right| \leq \frac{(H+K)(t''-t')}{\pi} \varepsilon \leq \frac{(H+K)b}{\pi} \varepsilon,$$

con ε quantità positiva piccola ad arbitrio, qualunque sia il valore di x non minore di o e non maggiore di a.

24. Indichiamo con τ un segmento arbitrariamente piccolo, il quale, nel caso che i punti di discontinuità della funzione $\psi(x, t)$ formino un gruppo finito di punti, sia minore della metà della minima distanza che corre tra due qualsiasi di questi punti, e, nel caso che la $\psi(x, t)$ soddisfi per ogni valore di t alle condizioni del n. 2.° del § 19, sia inferiore ancora al segmento η_1 di cui si è parlato al paragrafo precedente. Consideriamo il sistema (l) delle linee di discontinuità e delle linee che contengono i gruppi infiniti di punti di discontinuità, le cui distanze reciproche non superano 2τ; il sistema $(l)_{+x}$ delle linee luogo dei punti del campo C che distano dai punti delle linee del sistema (l) nella direzione $+x$ del segmento τ; il sistema $(l)_{-x}$ delle linee luogo dei punti del campo C che distano dai punti delle linee del sistema (l) nella direzione $-x$ del segmento τ; il sistema $(l)_{+t}$ delle linee luogo dei punti del campo C che distano dai punti delle linee del sistema (l) nella direzione $+t$ del segmento τ; il sistema $(l)_{-t}$ delle linee luogo dei punti del campo C che distano dai punti delle linee del sistema (l) nella direzione $-t$ del segmento τ. Si considerino ancora i semicerchi o porzioni di semicerchi di raggio τ, che cadono entro C, descritti ciascuno con centro nei punti delle linee del sistema (l), che corrispondono agli estremi delle linee dei sistemi $(l)_{+x}, (l)_{-x}$, ove tali estremi non finiscano al contorno dell'area C, limitati ognuno dal corrispondente diametro parallelo all'asse delle x e tali che non abbiano alcun punto a comune con le linee del sistema (l); e i semicerchi o porzioni di semicerchi di raggio τ, che cadono entro l'area C, descritti ciascuno con centro nei punti delle linee del sistema (l), che corrispondono agli estremi delle linee dei sistemi $(l)_{+t}, (l)_{-t}$, ove tali estremi non finiscano al contorno dell'area C, limitati ognuno dal corrispondente diametro parallelo all'asse delle t e tali che non abbiano alcun punto a comune con le linee del sistema (l).

Le linee dei sistemi $(l)_{+x}, (l)_{-x}$, insieme ai corrispondenti semicerchi e corrispondenti porzioni di semicerchi, ci dànno un sistema $(l)_x$ di linee chiuse o tagliate dal contorno di C, ognuna delle quali ha nel suo interno una linea del sistema (l) e non ha con essa alcun punto a comune. Un sistema analogo $(l)_t$ ci dànno le linee

dei sistemi $(l)_{+t}$, $(l)_{-t}$, insieme ai corrispondenti semicerchi e corrispondenti porzioni di semicerchi. Due linee l_x, l_t dei sistemi $(l)_x$, $(l)_t$, corrispondenti ad una stessa linea l del sistema (l), possono essere l'una interna all'altra, possono avere delle parti a comune e anche intersecarsi; in ogni caso però si avrà sempre una linea l' chiusa o tagliata dal contorno di C, formata esclusivamente di porzioni di l_x e di l_t e tale che nell'interno dell'area da essa racchiusa si trova una linea l, con la quale essa non ha alcun punto a comune, e non si trova alcuna delle porzioni rimanenti di l_x e di l_t. Di linee l' ne avremo un sistema $(l)'$ formato da tante linee quante sono quelle che compongono il sistema (l).

La distanza di un punto di una linea l dalla corrispondente l' nella direzione $+x$ e nella direzione $-x$ è una funzione continua dei punti di l e di l'; eccettuati al più alcuni punti, certamente in numero finito; quindi esisterà il minimo r' di queste distanze, che sarà certamente diverso dallo zero e non maggiore di r. Consideriamo tutti i minimi r' corrispondenti a tutte le coppie l, l' di linee; poichè queste coppie sono in numero finito, esisterà il minimo dei valori di r' che chiameremo r'' e che sarà diverso dallo zero e non maggiore di r.

Consideriamo ora i punti isolati di discontinuità, distanti da tutti gli altri punti di discontinuità di più di $2r$, come cerchi di raggio *zero* che escludano dal campo C questi punti stessi, e le linee degli altri punti di discontinuità come linee chiuse che escludano dal campo C queste linee stesse. Esclusi in tal modo dal campo C tutti i punti di discontinuità, nel nuovo campo C' la funzione $\psi(x, t)$ sarà dapertutto finita e continua; e quindi, data una quantità positiva σ piccola ad arbitrio, si potrà determinare una quantità positiva η, maggiore di *zero* e non maggiore di r'', tale che per $|h| \leq \eta$ si abbia:

$$|\psi(x+h, t) - \psi(x, t)| < \sigma,$$

qualunque sia il punto (x, t) di C'.

Ciò premesso, con raggio uguale ad η e con centro nei punti isolati di discontinuità, distanti da tutti gli altri punti di discontinuità di più di $2r$, descriviamo dei cerchi o porzione di cerchi nell'interno del campo C. Consideriamo inoltre nell'interno del campo C le linee l_1 luogo dei punti che distano dai punti delle linee del sistema (l) nelle direzioni $+x$, $-x$ del segmento costante η, e i semicerchi o porzioni di semicerchi di raggio η, descritti facendo centro nei punti delle linee del sistema (l) corrispondenti agli estremi delle linee l_1, ove tali estremi non finiscano al contorno, limitati ciascuno dal corrispondente diametro parallelo all'asse delle x e tali che non abbiano alcun punto a comune con le linee del sistema (l). In questo modo avremo un sistema $(l)_1$ di linee perfettamente analogo al sistema $(l)_x$, nel quale sistema includeremo i cerchi o porzioni di cerchi di cui si è parlato sopra. Le linee del sistema $(l)_1$ godono della proprietà di tagliare su ogni parallela all'asse delle x dei segmenti tali che, se hanno nel loro interno dei punti di discontinuità della $\psi(x, t)$, il primo e l'ultimo di questi punti di discontinuità distano ciascuno dall'estremo più vicino, del segmento su cui si trovano, di una lunghezza uguale ad η; e di tagliare su ogni parallela all'asse delle t dei segmenti la cui somma è certamente non superiore a $2nr$, se n è il massimo numero dei punti di discontinuità della funzione $\psi(x, t)$ che si trovano su ciascuna delle parallele all'asse delle t.

25. Dato uno qualsiasi dei valori che può prendere t, la funzione $\psi(x, t)$ per questo valore di t sarà sviluppabile in serie come la (31)'; e noi, volendo ripetere i ragionamenti dei paragrafi precedenti per provare tale sviluppabilità, possiamo prendere per quantità η' del § 12 o per quantità η del § 14, secondo che la $\psi(x, t)$ soddisfa alle condizioni del n. 1° del § 19 od a quelle del n. 2° dello stesso paragrafo, una conveniente quantità η'_1 non superiore alla quantità η del paragrafo precedente. In questo modo, data una quantità positiva σ' piccola ad arbitrio, qualunque sia il valore di t che si considera, per tutti i valori di x i cui punti corrispondenti distano dai punti di discontinuità non meno di η'_1 nella direzione x, si potrà fissare una quantità finita e positiva ϱ_1 talmente grande che per $\varrho \geq \varrho_1$ e per ω compreso tra ε e $2\pi - \varepsilon$ sarà (Cf. §§ 12, 15):

$$(19)' \qquad |k \cdot y(x, t, k) + \psi(x, t)| \leq \sigma'.$$

La $y(x, t, k)$ è funzione finita e continua dei punti dello spazio a quattro dimensioni determinato dai valori di x e di t corrispondenti ai punti del campo C e dai valori di ϱ e di ω, ossia dai valori di k, che non corrispondono a radici dell'equazione (3). Ciò posto, fissato un valore qualsiasi di x, si ha:

$$\int_{t'}^{t''} \{k \cdot y(x, t, k) + \psi(x, t)\}\, dt = \int_{t'}^{c} + \int_{c}^{d} + \cdots + \int_{e}^{t''} \{k \cdot y(x, t, k) + \psi(x, t)\}\, dt,$$

dove gli intervalli $cd, \ldots$ sono quelli dovuti alle intersezioni del segmento $(t = t', t = t'')$ della retta x, che si considera, con le linee del sistema $(l)_1$, la cui somma certamente non supera $2n\pi$. La (34) ci dà poi per i valori di k corrispondenti ai punti dei cerchi $C_1, C_2, \ldots$:

$$\left| \sum \int_{c}^{d} \{k \cdot y(x, t, k) + \psi(x, t)\}\, dt \right| \leq 2n\pi(H + K),$$

dove il sommatorio va esteso a tutti gli intervalli analoghi a cd che entrano nella precedente formola; e la (19)' ci dà ancora:

$$\left| \sum \int_{t'}^{c} \{k \cdot y(x, t, k) + \psi(x, t)\}\, dt \right| \leq (t'' - t')\, \sigma' \leq b\sigma',$$

dove il sommatorio si estende a tutti gli intervalli, come $t'c$, che non contengono punti di discontinuità; di guisa che potremo scrivere, per i valori di k corrispondenti ai punti dei cerchi $C_1, C_2, \ldots$ e di modulo superiore a ϱ_1, e per ω compreso tra ε e $2\pi - \varepsilon$,

$$\left| \int_{t'}^{t''} \{k \cdot y(x, t, k) + \psi(x, t)\}\, dt \right| \leq b\sigma' + 2n\pi(H + K).$$

Dalle formole (20)$_1$, (34)', nella prima delle quali porremo θ al posto di t, e dalla precedente si ricava finalmente, per i detti valori di k e per qualunque valore di x,

$$\left|\int_{t'}^{t''}\psi(x,t)\,dt-\sum_1^0{}_r\{\sqrt{k_r}\cos(x\sqrt{k_r})+h\,\mathrm{sen}\,(x\sqrt{k_r})\}\int_{t'}^{t''}A_r\,dt\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\omega\int_{t'}^{t''}\{ky+\psi(x,t)\}\,dt\right|\leq$$

$$\leq\frac{b\sigma'+2n\varepsilon(H+K)}{2\pi}\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon}d\omega+\frac{(H+K)b}{\pi}\varepsilon\leq b\sigma'+2n\varepsilon(H+K)+\frac{(H+K)b}{\pi}\varepsilon.$$

Questo risultato ci porta a concludere che *si ha*:

$$\int_{t'}^{t''}\psi(x,t)\,dt=\sum_1^\infty{}_r\{\sqrt{k_r}\cos(x\sqrt{k_r})+h\,\mathrm{sen}\,(x\sqrt{k_r})\}\int_{t'}^{t''}A_r\,dt=-\sum_1^\infty{}_r\int_{t'}^{t''}p_r\,dt,$$

e che *la serie al secondo membro, ove non si riduca ad un polinomio, è convergente in ugual grado per tutti i valori di x che vanno da* **o** *ad* **a** *e per tutti i valori di t', t'' non minori di* **o** *e non maggiori di* **b**.

26. Si abbia ora una funzione $\psi(x,y)$ dei punti di un campo rettangolare come quello del § 23, la quale soddisfi alle stesse condizioni poste nel medesimo paragrafo per la $\psi(x,t)$; e inoltre, per ogni valore di x, considerata come funzione di y, soddisfi alle condizioni poste per la $\psi(x)$ al n. 1° del § 19 od a quelle del n. 2° dello stesso paragrafo, appunto come fu detto per la $\psi(x,t)$ al § 23.

Si indichi con $u(x,y,k)$ la funzione che nei precedenti paragrafi abbiamo indicata con $y(x,t,k)$. Si hanno allora le formole:

$$|k.u(x,y,k)+\psi(x,y)|\leq H+K,$$

$$(19)_1\qquad |k.u(x,y,k)+\psi(x,y)|<\sigma',$$

$$(22)_1\qquad \left|k.u(x,y,k)+\frac{\psi(x-0,y)+\psi(x+0,y)}{2}\right|<\sigma',$$

delle quali la prima vale per tutti i valori di x che vanno da o ad a, per tutti i valori di y che vanno da o a b, e per tutti i valori di k corrispondenti ai punti delle circonferenze $C_1, C_2, \ldots$; la seconda vale per tutti i valori di x, y che non corrispondono a punti interni alle linee del sistema $(l)_1$, corrispondente alla funzione $\psi(x,y)$, per tutti i valori di ω tali che $\varepsilon\leq\omega\leq 2\pi-\varepsilon$ e per $\varrho>\varrho_1$; essa vale pure per i punti, nei quali la $\psi(x,y)$ è ancora continua, interni alle linee del sistema $(l)_1$, per i valori di ω tali che $\varepsilon\leq\omega\leq 2\pi-\varepsilon$ e per valori di ϱ abbastanza grandi, dei quali però non si può fissare un limite inferiore unico analogo a ϱ_1; la terza vale per i punti di discontinuità, per tutti i valori di ω tali che $\varepsilon\leq\omega\leq 2\pi-\varepsilon$ e per valori di ϱ abbastanza grandi. Di qui risulta, come sappiamo,

$$\frac{\psi(x-0,y\pm 0)+\psi(x+0,y\pm 0)}{2}=\sum_1^\infty{}_r A_r\{\sqrt{k_r}\cos(x\sqrt{k_r})+h\,\mathrm{sen}\,(x\sqrt{k_r})\},$$

$$\{\psi(o-0,y)=\psi(o+0,y)=\psi(o,y)\}$$
$$\{\psi(a-0,y)=\psi(a+0,y)=\psi(a,y)\}$$

nella quale formola la serie al secondo membro è convergente in ugual grado in tutto il campo che si ottiene escludendo da C l'area C_1 interna a ciascuna delle linee del sistema $(l)_1$, mentre è semplicemente convergente in tutti i punti dell'area C_1. Si ha poi:

$$A_r = \frac{2\int_0^a \{\sqrt{k_r}\cos(\xi\sqrt{k_r}) + h\,\mathrm{sen}(\xi\sqrt{k_r})\}\,\psi(\xi, y=0)\,d\xi}{ah^2 + 2h + ak_r}.$$

Se indichiamo con $j_1, j_2, \ldots$ le infinite radici reali e positive dell'equazione:

$$(3)_1 \qquad (h+\sqrt{-j})^2 - e^{-2b\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-j})^2 = 0,$$

si ha ancora:

$$\frac{\psi(\xi, y-0) + \psi(\xi, y+0)}{2} = \sum_1^\infty {}_s B_s \{\sqrt{j_s}\cos(y\sqrt{j_s}) + h\,\mathrm{sen}(y\sqrt{j_s})\},$$

$$B_s = \frac{2\int_0^b \{\sqrt{j_s}\cos(\eta\sqrt{j_s}) + h\,\mathrm{sen}(\eta\sqrt{j_s})\,\psi(\xi, \eta)\,d\eta}{bh^2 + 2h + bj_s},$$

e la serie, che comparisce al secondo membro della prima delle formole precedenti, è convergente semplicemente nei punti del campo C'_1 interno ad un sistema $(l)_2$ di linee, che si può ottenere dalla $\psi(x, y)$ scambiando la x con la y ed operando come per il sistema $(l)_1$; mentre è convergente in ugual grado in tutto il campo $C - C'_1$. Si ha dunque:

$$\frac{\psi(x-0, y-0) + \psi(x+0, y-0) + \psi(x+0, y+0) + \psi(x-0, y+0)}{4} =$$

$$= \sum_1^\infty {}_r \frac{2\int_0^a \{\sqrt{k_r}\cos(\xi\sqrt{k_r}) + h\,\mathrm{sen}(\xi\sqrt{k_r})\}\,\dfrac{\psi(\xi, y-0) + \psi(\xi, y+0)}{2}\,d\xi}{ah^2 + 2h + ak_r}\,\{\sqrt{k_r}\cos(x\sqrt{k_r}) + h\,\mathrm{sen}(x\sqrt{k_r})\} =$$

$$= \sum_1^\infty {}_r \frac{2\int_0^a \left[\{\sqrt{k_r}\cos(\xi\sqrt{k_r}) + h\,\mathrm{sen}(\xi\sqrt{k_r})\}\sum_1^\infty {}_s \dfrac{2\int_0^b \{\sqrt{j_s}\cos(\eta\sqrt{j_s}) + h\,\mathrm{sen}(\eta\sqrt{j_s})\}\,\psi(\xi, \eta)\,d\eta}{bh^2 + 2h + bj_s}\,\{\sqrt{j_s}\cos(y\sqrt{j_s}) + h\,\mathrm{sen}(y\sqrt{j_s})\}\right] d\xi}{ah^2 + 2h + bj_s} \times$$

$$\times \{\sqrt{k_r}\cos(x\sqrt{k_r}) + h\,\mathrm{sen}(x\sqrt{k_r})\};$$

e quindi, in forza del teorema del paragrafo precedente [1],

$$\frac{\psi(x-0, y-0) + \psi(x+0, y-0) + \psi(x+0, y+0) + \psi(x-0, y+0)}{4} =$$

$$= \sum_1^\infty {}_r \sum_1^\infty {}_s \frac{4\int_0^a\int_0^b \{\sqrt{k_r}\cos(\xi\sqrt{k_r}) + h\,\mathrm{sen}(\xi\sqrt{k_r})\}\{\sqrt{j_s}\cos(\eta\sqrt{j_s}) + h\,\mathrm{sen}(\eta\sqrt{j_s})\}\,\psi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{(ah^2 + 2h + ak_r)(bh^2 + 2h + bj_s)} \times$$

$$\times \{\sqrt{k_r}\cos(x\sqrt{k_r}) + h\,\mathrm{sen}(x\sqrt{k_r})\}\{\sqrt{j_s}\cos(y\sqrt{j_s}) + h\,\mathrm{sen}(y\sqrt{j_s})\},$$

[1] Cfr. Dini; l. c.; n. 284.

ossia, posto:

$$p_{rs}=\frac{4\int_0^a\int_0^b\{\sqrt{k_r}\cos(\xi\sqrt{k_r})+h\,\mathrm{sen}(\xi\sqrt{k_r})\}\{\sqrt{j_s}\cos(\eta\sqrt{j_s})+h\,\mathrm{sen}(\eta\sqrt{j_s})\}\psi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{(ah^2+2h+ak_r)(bh^2+2h+bj_s)}\times$$

$$\times\{\sqrt{k_r}\cos(x\sqrt{k_r})+h\,\mathrm{sen}(x\sqrt{k_r})\}\{\sqrt{j_s}\cos(y\sqrt{j_s})+h\,\mathrm{sen}(y\sqrt{j_s})\},$$

si avrà:

$$\frac{\psi(x-0,y-0)+\psi(x+0,y-0)+\psi(x+0,y+0)+\psi(x-0,y+0)}{4}=\sum_1^\infty{}_r\sum_1^\infty{}_s p_{rs}.$$

In questa serie doppia è indifferente l'ordine dei due sommatorii $\sum_1^\infty{}_r$, $\sum_1^\infty{}_s$; *inoltre le serie semplici* $\sum_1^\infty{}_r p_{rs}$, $\sum_1^\infty{}_s p_{rs}$ *sono convergenti in ugual grado in tutto il campo C, e le altre serie semplici* $\sum_1^\infty{}_r\left(\sum_1^\infty{}_s p_{rs}\right)$, $\sum_1^\infty{}_s\left(\sum_1^\infty{}_r p_{rs}\right)$, *che rappresentano tutte e due la serie doppia, sono semplicemente convergenti in tutto il campo C, mentre sono convergenti in ugual grado in ogni campo che si ottiene escludendo da C i punti e le linee di discontinuità con intorni comunque piccoli di essi punti e di esse linee.*

27. Supponiamo che la funzione $\psi(x,t)$ sia finita e continua in tutto il campo C e, se ha discontinuità, le abbia solo rispetto a t in un numero finito di punti staccati, o anche in un numero infinito di punti, che però si succedano con continuità o no su un numero finito di linee continue, le quali non coincidano in tratti finiti con rette parallele agli assi e non tocchino o taglino queste rette in un numero infinito di punti; e che la funzione $\frac{\partial\psi}{\partial x}=\psi'_x(x,t)$ soddisfi alle medesime condizioni poste per la $\psi(x,t)$ al § 23.

Esclusi dal campo C i lati $x=o$, $x=a$ con rette parallele e vicine ad essi lati tanto quanto si vuole, e considerati poi a parte questi lati, i calcoli dei §§ 16, 17 e considerazioni perfettamente analoghe a quelle dei §§ 23, 24, 25 bastano per concludere che *si ha:*

$$\left\{\begin{array}{ll}(o<x<a) & \int_{t'}^{t''}\psi'_x(x,t)\,dt\\ (x=o) & h\int_{t'}^{t''}\psi(o,t)\,dt\\ (x=a) & -h\int_{t'}^{t''}\psi(a,t)\,dt\end{array}\right\}=\sum_1^\infty{}_r\frac{\partial\{\sqrt{k_r}\cos(x\sqrt{k_r})+h\,\mathrm{sen}(x\sqrt{k_r})\}}{\partial x}\int_{t'}^{t''}\mathrm{A}_r\,dt=$$

$$=-\sum_1^\infty{}_r\int_{t'}^{t''}\frac{\partial p_r}{\partial x}\,dt$$

e che *la serie al secondo membro è semplicemente convergente per ogni valore di x che va da* o *ad* a, *mentre è convergente in ugual grado in tutto il campo di variabilità della x, che si ottiene escludendo dal campo* oa *gli estremi con intorni comunque piccoli.*

28. Sia data una funzione $\psi(x,y)$ dei punti del solito rettangolo C, perfettamente analoga alla funzione $\psi(x,t)$ del paragrafo precedente, e tale inoltre che per ogni valore di x, considerata come funzione della sola y, soddisfi alle condizioni poste per la $\psi(x)$ al n. 1° del § 19 od al n. 2° dello stesso paragrafo, appunto come fu detto per la $\psi(x,t)$ al § 23.

I calcoli dei §§ 16, 17 e considerazioni analoghe a quelle fatte in principio del § 26 ci portano a concludere che si ha:

$$(35)\quad \left\{\begin{array}{ll} (o<x<a) & \dfrac{\psi'_x(x-0,y\pm 0)+\psi'_x(x+0,y\pm 0)}{2} \\ (x=o) & h\psi(o,y\pm 0) \\ (x=a) & -h\psi(a,y\pm 0) \end{array}\right\} = \sum_1^\infty{}_r A_r \frac{\partial\{\sqrt{k_r}\cos(x\sqrt{k_r})+h\,\mathrm{sen}(x\sqrt{k_r})\}}{\partial x},$$

$$A_r = \frac{2\int_o^a \{\sqrt{k_r}\cos(\xi\sqrt{k_r})+h\,\mathrm{sen}(\xi\sqrt{k_r})\}\,\psi(\xi,y\pm 0)\,d\xi}{ah^2+2h+ak_r}$$

e che la serie al secondo membro della prima delle formole precedenti è semplicemente convergente in ogni punto del campo C, mentre è convergente in ugual grado in tutto il campo che si ottiene da C escludendo i punti e le linee di discontinuità della $\psi'_x(x,y)$ e i lati $x=o, x=a$ con intorni comunque piccoli di questi punti e di queste linee; e quindi, in forza del teorema del § 25, *si potrà scrivere*:

$$\left.\begin{array}{ll} (o<x<a) & \dfrac{\psi'_x(x-0,y-0)+\psi'_x(x+0,y-0)+\psi'_x(x+0,y+0)+\psi'_x(x-0,y+0)}{4} \\ (x=o) & h\dfrac{\psi(o,y-0)+\psi(o,y+0)}{2} \\ (x=a) & -h\dfrac{\psi(a,y-0)+\psi(a,y+0)}{2} \end{array}\right\} =$$

$$= \sum_1^\infty{}_r \frac{2\int_o^a \{\sqrt{k_r}\cos(\xi\sqrt{k_r})+h\,\mathrm{sen}(\xi\sqrt{k_r})\}\dfrac{\psi(\xi,y-0)+\psi(\xi,y+0)}{2}\,d\xi}{ah^2+2h+ak_r}\;\frac{\partial\{\sqrt{k_r}\cos(x\sqrt{k_r})+h\,\mathrm{sen}(x\sqrt{k_r})\}}{\partial x} =$$

$$= \sum_1^\infty{}_r \frac{2\int_o^a\left[\{\sqrt{k_r}\cos(\xi\sqrt{k_r})+h\,\mathrm{sen}(\xi\sqrt{k_r})\}\sum_1^\infty{}_s \dfrac{2\int_o^b \{\sqrt{j_s}\cos(\eta\sqrt{j_s})+h\,\mathrm{sen}(\eta\sqrt{j_s})\}\,\psi(\xi,\eta)\,d\eta}{bh^2+2h+bj_s}\{\sqrt{j_s}\cos(y\sqrt{j_s})+h\,\mathrm{sen}(y\sqrt{j_s})\}\right]d\xi}{ah^2+2h+ak_r}\times$$

$$\times\frac{\partial\{\sqrt{k_r}\cos(x\sqrt{k_r})+h\,\mathrm{sen}(x\sqrt{k_r})\}}{\partial x} =$$

$$= \sum_1^\infty{}_r \sum_1^\infty{}_s \frac{4\int_o^a\int_o^b \{\sqrt{k_r}\cos(\xi\sqrt{k_r})+h\,\mathrm{sen}(\xi\sqrt{k_r})\}\{\sqrt{j_s}\cos(\eta\sqrt{j_s})+h\,\mathrm{sen}(\eta\sqrt{j_s})\}\,\psi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{(ah^2+2h+ak_r)(bh^2+2h+bj_s)}\times$$

$$\times\frac{\partial\{\sqrt{k_r}\cos(x\sqrt{k_r})+h\,\mathrm{sen}(x\sqrt{k_r})\}}{\partial x}\{\sqrt{j_s}\cos(y\sqrt{j_s})+h\,\mathrm{sen}(y\sqrt{j_s})\} = \sum_1^\infty{}_r \sum_1^\infty{}_s \frac{\partial p_{rs}}{\partial x},$$

le serie semplici $\sum_1^\infty \frac{\partial p_{rs}}{\partial x}$ *sono convergenti in ugual grado in tutto il campo* C' *e la serie semplice* $\sum_1^\infty \left(\sum_1^\infty \frac{\partial p_{rs}}{\partial x} \right)$ *è semplicemente convergente in tutto il campo* C, *mentre è convergente in ugual grado in tutto il campo che si ottiene da* C *escludendo i punti e le linee di discontinuità di* $\psi'_x(x, y)$ *e i lati* $x = o$, $x = a$ *con intorni comunque piccoli di questi punti e di queste linee.*

Supposto invece che la $\psi(x, y)$ soddisfi alle condizioni poste al paragrafo precedente per la $\psi(x, t)$ e che inoltre la $\psi'_x(x, y)$ per ogni valore di x diverso da o e da a, considerata come funzione di y, soddisfi alle condizioni poste per la $\psi(x)$ al n. 1° del § 19 o a quelle del n. 2° dello stesso paragrafo, nel modo detto per la $\psi(x, t)$ al § 23, si può procedere ancora nel seguente modo.

Ragionando come al principio del § 26, si trova per x diverso da o e da a:

$$\frac{\psi'_x(x-0, y-0) + \psi'_x(x \pm 0, y+0)}{2} = \sum_1^\infty B'_s \{ \sqrt{j_s} \cos(y\sqrt{j_s}) + h \operatorname{sen}(y\sqrt{j_s}) \},$$

$$B'_s = \frac{2\int_0^b \{ \sqrt{j_s} \cos(\eta\sqrt{j_s}) + h \operatorname{sen}(\eta\sqrt{j_s}) \} \psi'_x(x \pm 0, \eta)\, d\eta}{bh^2 + 2h + bj_s},$$

e la serie al secondo membro della prima delle precedenti formole è semplicemente convergente in tutto il campo che si ottiene escludendo da C le rette $x = o$, $x = a$, mentre è convergente in ugual grado in tutto il campo che si ottiene da C escludendo i punti e le linee di discontinuità di $\psi'_x(x, y)$ e le rette $x = o$, $x = a$ con intorni comunque piccoli di essi punti e di esse linee; e quindi, se le funzioni $\psi(o, y)$, $\psi(a, y)$, considerate come funzioni di y, soddisfano all'una o all'altra delle condizioni poste per la $\psi(x)$ al n. 1° e al n. 2° del § 19, *risulterà*, in forza del teorema del paragrafo precedente [1], dalle (35):

[1] Cfr. Dini; l. c.; n. 284.

$$\left.\begin{array}{l}
(o<x<a)\\
\dfrac{\psi'_x(x-0\,,y-0)+\psi'_x(x+0\,,y-0)+\psi'_x(x+0\,,y+0)+\psi'_x(x-0\,,y+0)}{4}=\\
=\displaystyle\sum_1^\infty{}_s\,\frac{2\int_o^b\{\sqrt{j_s}\cos(\eta\sqrt{j_s})+h\,\mathrm{sen}(\eta\sqrt{j_s})\}\dfrac{\psi'_x(x-0\,,\eta)+\psi'_x(x+0\,,\eta)}{2}\,d\eta}{bh^2+2h+bj_s}\{\sqrt{j_s}\cos(y\sqrt{j_s})+h\,\mathrm{sen}(y\sqrt{j_s})\}\\
(x=o)\\
h\,\dfrac{\psi(o\,,y-0)+\psi(o\,,y+0)}{2}=\\
=\displaystyle\sum_1^\infty{}_s\,\frac{2\int_o^b\{\sqrt{j_s}\cos(\eta\sqrt{j_s})+h\,\mathrm{sen}(\eta\sqrt{j_s})\}\,h\,\psi(o\,,\eta)\,d\eta}{bh^2+2h+bj_s}\{\sqrt{j_s}\cos(y\sqrt{j_s})+h\,\mathrm{sen}(y\sqrt{j_s})\}\\
(x=a)\\
-h\,\dfrac{\psi(a\,,y-0)+\psi(a\,,y+0)}{2}=\\
=\displaystyle\sum_1^\infty{}_s\,\frac{2\int_o^b\{\sqrt{j_s}\cos(\eta\sqrt{j_s})+h\,\mathrm{sen}(\eta\sqrt{j_s})\}\{-h\,\psi(a\,,\eta)\}\,d\eta}{bh^2+2h+bj_s}\{\sqrt{j_s}\cos(y\sqrt{j_s})+h\,\mathrm{sen}(y\sqrt{j_s})\}
\end{array}\right\}=$$

$$=\sum_1^\infty{}_s\,\frac{2\int_o^b\left(\{\sqrt{j_s}\cos(\eta\sqrt{j_s})+h\,\mathrm{sen}(\eta\sqrt{j_s})\}\displaystyle\sum_1^\infty{}_r\,\frac{2\int_o^a\{\sqrt{k_r}\cos(\xi\sqrt{k_r})+h\,\mathrm{sen}(\xi\sqrt{k_r})\}\psi(\xi\,,\eta)\,d\xi}{ah^2+2h+ak_r}\cdot\frac{\partial\{\sqrt{k_r}\cos(x\sqrt{k_r})+h\,\mathrm{sen}(x\sqrt{k_r})\}}{\partial x}\right)d\eta}{bh^2+2h+bj_s}\times$$

$$\times\{\sqrt{j_s}\cos(y\sqrt{j_s})+h\,\mathrm{sen}(y\sqrt{j_s})\}=\sum_1^\infty{}_s\sum_1^\infty{}_r\,\frac{\partial p_{rs}}{\partial x}\,.$$

le serie semplici $\sum_1^\infty{}_r\,\frac{\partial p_{rs}}{\partial x}$ *sono semplicemente convergenti in tutto il campo* C, *mentre sono convergenti in ugual grado in tutto il campo che si ottiene da* C *escludendo i lati* $x=o$, $x=a$ *con intorni comunque piccoli; la serie semplice* $\sum_1^\infty{}_s\left(\sum_1^\infty{}_r\,\frac{\partial p_{rs}}{\partial x}\right)$ *è semplicemente convergente in tutto il campo* C, *mentre è convergente in ugual grado in tutto il campo che si ottiene da* C *escludendo i punti e le linee di discontinuità di* $\psi'_x(x,y)$ *e le rette* $x=o$, $x=a$ *con intorni comunque piccoli di questi punti e di queste linee.*

Risultati analoghi si hanno nel caso che si voglia derivare rapporto ad y.

29. Supponiamo ora che la funzione $\psi(x,y)$ sia finita in tutto il campo C, atta all'integrazione rispetto ad x e rispetto ad y e che sia ad essa applicabile il teorema dell'inversione dell'ordine di integrazione.

I calcoli del § 18 e considerazioni analoghe a quelle fatte in principio del § 26 facilmente ci portano a concludere che si ha:

$$\int_0^x \psi(x', y)\, dx' = \sum_1^\infty{}_r \frac{2\int_0^a \{\sqrt{k_r}\cos(\xi\sqrt{k_r}) + h\,\mathrm{sen}(\xi\sqrt{k_r})\}\,\psi(\xi, y)\, d\xi}{ah^2 + 2h + ak_r} \times$$
$$\times \int_0^x \{\sqrt{k_r}\cos(x'\sqrt{k_r}) + h\,\mathrm{sen}(x'\sqrt{k_r})\}\, dx'$$

e che la serie al secondo membro è convergente in ugual grado in tutto il campo C. In forza di ciò possiamo integrare per serie, e così avremo:

$$\int_0^x \int_0^y \psi(x', y')\, dx'\, dy' = \sum_1^\infty{}_r \frac{2\int_0^a \left[\{\sqrt{k_r}\cos(\xi\sqrt{k_r}) + h\,\mathrm{sen}(\xi\sqrt{k_r})\}\int_0^y \psi(\xi, y')\, dy'\right] d\xi}{ah^2 + 2h + ak_r} \times$$
$$\times \int_0^x \{\sqrt{k_r}\cos(x'\sqrt{k_r}) + h\,\mathrm{sen}(x'\sqrt{k_r})\}\, dx'$$

e la serie al secondo membro sarà convergente in ugual grado in tutto il campo C.

Ma si ha ancora:

$$\int_0^y \psi(\xi, y')\, dy' = \sum_1^\infty{}_s \frac{2\int_0^b \{\sqrt{j_s}\cos(\eta\sqrt{j_s}) + h\,\mathrm{sen}(\eta\sqrt{j_s})\}\,\psi(\xi, \eta)\, d\eta}{bh^2 + 2h + bj_s} \times$$
$$\times \int_0^y \{\sqrt{j_s}\cos(y'\sqrt{j_s}) + h\,\mathrm{sen}(y'\sqrt{j_s})\}\, dy',$$

dove la serie al secondo membro è convergente in ugual grado in tutto il campo C; sicchè, applicando il teorema dell'integrazione per serie [1], *risulterà* finalmente:

$$\int_0^x \int_0^y \psi(x', y')\, dx'\, dy' =$$
$$= \sum_1^\infty{}_r \frac{2\int_0^a \left(\{\sqrt{k_r}\cos(\xi\sqrt{k_r}) + h\,\mathrm{sen}(\xi\sqrt{k_r})\}\sum_1^\infty{}_s \frac{2\int_0^b \{\sqrt{j_s}\cos(\eta\sqrt{j_s}) + h\,\mathrm{sen}(\eta\sqrt{j_s})\}\,\psi(\xi, \eta)\, d\eta}{bh^2 + 2h + bj_s} \int_0^y \{\sqrt{j_s}\cos(y'\sqrt{j_s}) + h\,\mathrm{sen}(y'\sqrt{j_s})\}\, dy'\right) d\xi}{ah^2 + 2h + ak_r} \times$$
$$\times \int_0^x \{\sqrt{k_r}\cos(x'\sqrt{k_r}) + h\,\mathrm{sen}(x'\sqrt{k_r})\}\, dx' =$$
$$= \sum_1^\infty{}_r \sum_1^\infty{}_s \frac{4\int_0^a \int_0^b \{\sqrt{k_r}\cos(\xi\sqrt{k_r}) + h\,\mathrm{sen}(\xi\sqrt{k_r})\}\{\sqrt{j_s}\cos(\eta\sqrt{j_s}) + h\,\mathrm{sen}(\eta\sqrt{j_s})\}\,\psi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{(ah^2 + 2h + ak_r)(bh^2 + 2h + bj_s)} \int_0^x \int_0^y \{\sqrt{k_r}\cos(x'\sqrt{k_r}) +$$
$$+ h\,\mathrm{sen}(x'\sqrt{k_r})\}\{\sqrt{j_s}\cos(y'\sqrt{j_s}) + h\,\mathrm{sen}(y'\sqrt{j_s})\}\, dx'\, dy' =$$
$$= \sum_1^\infty{}_r \sum_1^\infty{}_s \int_0^x \int_0^y p_{rs}(x', y')\, dx'\, dy'.$$

[1] Dini; l. c. n. 284.

In questa serie doppia è indifferente l'ordine dei due sommatorii $\sum_1^\infty{}_r$, $\sum_1^\infty{}_s$: *inoltre le serie semplici* $\sum_1^\infty{}_r \int_0^x \int_0^y p_{rs}(x', y')\, dx'\, dy'$, $\sum_1^\infty{}_s \int_0^x \int_0^y p_{rs}(x', y')\, dx'\, dy'$ *e le due altre* $\sum_1^\infty{}_r \left(\sum_1^\infty{}_s \int_0^x \int_0^y p_{rs}(x', y')\, dx'\, dy' \right)$, $\sum_1^\infty{}_s \left(\sum_1^\infty{}_r \int_0^x \int_0^y p_{rs}(x', y')\, dx'\, dy' \right)$ *sono convergenti in ugual grado in tutto il campo C.*

30. Si ha evidentemente:

$$\frac{\partial^2 p_{rs}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_{rs}}{\partial y^2} + (k_r + j_s)\, p_{rs} = 0, \qquad \left(\frac{\partial p_{rs}}{\partial x} = h p_{rs} \right)_{x=0}, \qquad \left(\frac{\partial p_{rs}}{\partial x} + h p_{rs} = 0 \right)_{x=a},$$

$$\left(\frac{\partial p_{rs}}{\partial y} = h p_{rs} \right)_{y=0}, \qquad \left(\frac{\partial p_{rs}}{\partial y} + h p_{rs} = 0 \right)_{y=b},$$

ossia, indicando con c il contorno del campo C, con n la normale nei punti di c nella direzione che entra in C, e ponendo $k_{rs} = k_r + j_s$, $\Delta^2 p_{rs} = \frac{\partial^2 p_{rs}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_{rs}}{\partial y^2}$, si ha che *la funzione* p_{rs} *è un integrale regolare* (funzione finita e continua insieme alle derivate prime e doppie rispetto ad x e y) *delle equazioni*:

$$(36) \quad \text{(nei punti di } C) \quad \Delta^2 p_{rs} + k_{rs} p_{rs} = 0, \qquad \text{(nei punti di } c) \quad \frac{\partial p_{rs}}{\partial n} = h p_{rs}.$$

Viceversa è facile dimostrare che *un integrale regolare delle equazioni*:

$$(36)' \quad \text{(nei punti di } C) \quad \Delta^2 p + k p = 0, \qquad \text{(nei punti di } c) \quad \frac{\partial p}{\partial n} = h p,$$

formato del prodotto di una funzione della sola x per una funzione della sola y, quando non è identicamente nullo, è sempre uguale, a meno di un coefficiente costante, ad una certa funzione p_{rs}.

In forza di questo risultato, tutti gli integrali regolari delle equazioni (36)', formati del prodotto di una funzione della sola x per una funzione della sola y, sono dati, a meno di coefficienti costanti, dalle funzioni:

$$(37) \qquad \{ \sqrt{k_r} \cos(x\sqrt{k_r}) + h \operatorname{sen}(x\sqrt{k_r}) \} \{ \sqrt{j_s} \cos(y\sqrt{j_s}) + h \operatorname{sen}(y\sqrt{j_s}) \},$$

dove le k_r e le j_s sono rispettivamente le radici delle equazioni (3), $(3)_1$ e il corrispondente valore del parametro k è dato dalla somma $k_r + j_s$. Ora se si rammenta che le radici delle equazioni (3), $(3)_1$ formano due serie infinite di numeri reali e positivi aventi ciascuno il solo valore limite ∞, ne segue che i valori k_r, j_s, corrispondenti ad un dato valore del parametro k, non possono essere che in numero finito; e quindi *gli integrali delle equazioni* (36)' *della forma* (37), *corrispondenti ad un dato valore di k, se esistono, sono certamente in numero finito.*

Osserviamo che due integrali distinti p', p'' delle equazioni (36)' della forma (37), corrispondenti allo stesso valore del parametro k, soddisfano sempre alla condizione:

$$\int_C p'\, p''\, dx\, dy = 0.$$

31. Lo sviluppo della funzione $\psi(x, y)$ si può scrivere sotto la forma:

$$\psi(x,y)=\sum_1^\infty{}_r \sum_1^\infty{}_s C_{rs}\{\sqrt{k_r}\cos(x\sqrt{k_r})+h\,\mathrm{sen}(x\sqrt{k_r})\}\{\sqrt{j_s}\cos(y\sqrt{j_s})+h\,\mathrm{sen}(y\sqrt{j_s})\},$$

dove si ha:

$$(38)\quad C_{rs}=\frac{4\int_0^a\int_0^b\{\sqrt{k_r}\cos(\xi\sqrt{k_r})+h\,\mathrm{sen}(\xi\sqrt{k_r})\}\{\sqrt{j_s}\cos(\eta\sqrt{j_s})+h\,\mathrm{sen}(\eta\sqrt{j_s})\}\,\psi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{(ah^2+2h+ak_r)(bh^2+2h+bj_s)},$$

e in esso entrano, almeno formalmente, tutti gli integrali regolari delle equazioni (36)′ della forma (37). Quando si ha $C_{rs}=0$, vuol dire che l'integrale $\{\sqrt{k_r}\cos(x\sqrt{k_r})+h\,\mathrm{sen}(x\sqrt{k_r})\}\{\sqrt{j_s}\cos(y\sqrt{j_s})+h\,\mathrm{sen}(y\sqrt{j_s})\}$ non entra effettivamente nello sviluppo. Viceversa, se si sa in un modo qualsiasi che una funzione $\psi(x, y)$ è sviluppabile in serie di integrali regolari delle equazioni (36)′ della forma (37) e ad essa serie è applicabile il teorema dell'integrazione per serie, i coefficienti di questi integrali in tale sviluppo sono sempre dati dalla formola (38); per conseguenza, *quando una funzione $\psi(x, y)$ è sviluppabile in serie di integrali regolari delle equazioni* (36)′ *della forma* (37), *è sviluppabile in un sol modo.*

Supponiamo ora che esista un integrale regolare p delle equazioni (36)′, che non sia della forma (37). La funzione p è certamente sviluppabile in serie di integrali della forma (37); e siccome per i valori di k_r e j_s tali che $k_r+j_s\neq k$ si ha $C_{rs}=0$, così nello sviluppo di p entreranno solamente le funzioni della forma (37) tali che $k_r+j_s=k$, le quali, come si è detto, sono in numero finito. Risulta quindi che *un integrale regolare delle equazioni* (36)′, *quando non è identicamente nullo, o ha la forma* (37) *o è uguale, a meno di determinati coefficienti costanti, alcuni dei quali possono essere anche nulli, alla somma delle funzioni della forma* (37) *tali che $k_r+j_s=k$.*

32. *Sia $\psi(x, y)$ una funzione finita e continua dei punti del solito campo rettangolare C.* Si considerino le equazioni:

$$(39)\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+kv+\psi(x,y)=0,\qquad \left(\frac{\partial v}{\partial x}=hv\right)_{x=0},\quad \left(\frac{\partial v}{\partial x}+hv=0\right)_{x=a};$$

$$(39)'\quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+jw+\psi(x,y)=0,\qquad \left(\frac{\partial w}{\partial y}=hw\right)_{y=0},\quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}+hw=0\right)_{x=b}.$$

Gli integrali generalmente regolari di queste equazioni si possono scrivere immediatamente, modificando convenientemente e in modo ovvio la formola (2)′ del § 1.

Si considerino ancora le equazioni:

$$(40)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+ju+v(x,y,k)=0,\qquad \left(\frac{\partial u}{\partial y}=hu\right)_{y=0},\quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}+hu=0\right)_{y=b};$$

$$(40)'\quad \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}+ku'+w(x,y,j)=0,\qquad \left(\frac{\partial u'}{\partial x}=hu'\right)_{x=0},\quad \left(\frac{\partial u'}{\partial x}+hu'=0\right)_{x=a},$$

nelle quali le funzioni $v(x, y, k)$, $w(x, y, j)$ sono considerate per i valori di k e di j che non sono radici rispettivamente delle equazioni (3), (3)$_1$. Gli integrali gene-

ralmente regolari di queste equazioni si possono ancora qui scrivere per mezzo della formola (2)' del § 1; e, se si sostituiscono in questi integrali in luogo delle $v(x, y, k)$, $w(x, y, j)$ le loro espressioni e si fa uso del *teorema dell'integrazione sotto il segno*, si trova:

$$
\begin{aligned}
u(x,y,k,j) = u'(x,y,k,j) = {} & \frac{1}{4\sqrt{-k}\sqrt{-j}} \int_0^x \int_0^y e^{-(x-\xi)\sqrt{-k}-(y-\eta)\sqrt{-j}}\, \psi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta + \\
& + \frac{(h-\sqrt{-k})^2}{4\sqrt{-k}\sqrt{-j}\,\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}} \int_0^x \int_0^y e^{-(2a+\xi-x)\sqrt{-k}-(y-\eta)\sqrt{-j}}\, \psi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta + \\
& + \frac{(h+\sqrt{-k})^2}{4\sqrt{-k}\sqrt{-j}\,\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}} \int_x^a \int_0^y e^{-(\xi-x)\sqrt{-k}-(y-\eta)\sqrt{-j}}\, \psi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta + \\
& + \frac{1}{4\sqrt{-k}\sqrt{-j}\,\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}} \int_0^a \int_0^y \psi(\xi,\eta)\, \{ e^{-(2a-\xi+x)\sqrt{-k}-(y-\eta)\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-k})^2 - \\
& \qquad - e^{-(x+\xi)\sqrt{-k}-(y-\eta)\sqrt{-j}}(h^2+k) - e^{-(2a-\xi-x)\sqrt{-k}-(y-\eta)\sqrt{-j}}(h^2+k) \}\, d\xi\, d\eta + \\
& + \frac{(h-\sqrt{-j})^2}{4\sqrt{-k}\sqrt{-j}\,\{(h+\sqrt{-j})^2 - e^{-2b\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-j})^2\}} \int_0^x \int_0^y e^{-(x-\xi)\sqrt{-k}-(2b+\eta-y)\sqrt{-j}}\, \psi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta + \\
& + \frac{(h-\sqrt{-k})^2\,(h-\sqrt{-j})^2}{4\sqrt{-k}\sqrt{-j}\,\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}\,\{(h+\sqrt{-j})^2 - e^{-2b\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-j})^2\}} \times \\
& \qquad \times \int_0^x \int_0^y e^{-(2a+\xi-x)\sqrt{-k}-(2b+\eta-y)\sqrt{-j}}\, \psi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta + \\
& + \frac{(h+\sqrt{-k})^2\,(h-\sqrt{-j})^2}{4\sqrt{-k}\sqrt{-j}\,\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}\,\{(h+\sqrt{-j})^2 - e^{-2b\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-j})^2\}} \times \\
& \qquad \times \int_x^a \int_0^y e^{-(\xi-x)\sqrt{-k}-(2b+\eta-y)\sqrt{-j}}\, \psi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta + \\
& + \frac{(h-\sqrt{-j})^2}{4\sqrt{-k}\sqrt{-j}\,\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}\,\{(h+\sqrt{-j})^2 - e^{-2b\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-j})^2\}} \times \\
& \qquad \times \int_0^a \int_0^y \psi(\xi,\eta)\, \{ e^{-(2a-\xi+x)\sqrt{-k}-(2b+\eta-y)\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-k})^2 - \\
& \qquad\qquad - e^{-(x+\xi)\sqrt{-k}-(2b+\eta-y)\sqrt{-j}}(h^2+k) - e^{-(2a-\xi-x)\sqrt{-k}-(2b+\eta-y)\sqrt{-j}}(h^2+k) \}\, d\xi\, d\eta + \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\
& + \frac{1}{4\sqrt{-k}\sqrt{-j}\,\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}\,\{(h+\sqrt{-j})^2 - e^{-2b\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-j})^2\}} \times \\
& \quad \times \int_0^a \int_0^b \psi(\xi,\eta)\, \{ e^{-(2a-\xi+x)\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2 - e^{-(x+\xi)\sqrt{-k}}(h^2+k) - e^{-(2a-\xi-x)\sqrt{-k}}(h^2+k) \} \times \\
& \qquad \times \{ e^{-(2b-\eta+y)\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-j})^2 - e^{-(y+\eta)\sqrt{-j}}(h^2+j) - e^{-(2b-\eta-y)\sqrt{-j}}(h^2+j) \}\, d\xi\, d\eta,
\end{aligned}
$$

dalla quale formola risulta che *la funzione* $u(x,y,k,j)$ *è regolare, insieme alle sue derivate* $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}, \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2}$, *per qualsiasi sistema di valori finiti reali o complessi dei parametri* k, j: *essa può avere solamente dei poli semplici in numero finito od infinito per i valori di* k, *diversi da zero, radici dell'equazione* (3), *qualunque sia il valore di* j, *per i valori di* j, *diversi da zero, radici dell'equazione* $(3)_1$, *qualunque sia il valore di* k.

Se si suppone poi che *la funzione* $\psi(x,y)$ *abbia le derivate prime e la derivata seconda mista finite e continue in tutto il campo* C, integrando per parti due volte, si ottiene (Cf. § 16):

$$
\begin{aligned}
u(x,y,k,j) = {} & \frac{\psi(x,y)}{kj} + \frac{h\{e^{-(a+x)\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k}) - e^{-(a-x)\sqrt{-k}}(h+\sqrt{-k})\}}{kj\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}}\,\psi(a,y) - \\
& - \frac{h\{e^{-x\sqrt{-k}}(h+\sqrt{-k}) - e^{-(2a-x)\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})\}}{kj\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}}\,\psi(o,y) + \\
& + \frac{h\{e^{-(b+y)\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-j}) - e^{-(b-y)\sqrt{-j}}(h+\sqrt{-j})\}}{kj\{(h+\sqrt{-j})^2 - e^{-2b\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-j})^2\}}\,\psi(x,b) - \\
& - \frac{h\{e^{-y\sqrt{-j}}(h+\sqrt{-j}) - e^{-(2b-y)\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-j})\}}{kj\{(h+\sqrt{-j})^2 - e^{-2b\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-j})^2\}}\,\psi(x,o) + \\
& + \frac{h^2\{e^{-(a+x)\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k}) - e^{-(a-x)\sqrt{-k}}(h+\sqrt{-k})\}\{e^{-(b+y)\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-j}) - e^{-(b-y)\sqrt{-j}}(h+\sqrt{-j})\}}{kj\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}\{(h+\sqrt{-j})^2 - e^{-2b\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-j})^2\}}\,\psi(a,b) - \\
& - \frac{h^2\{e^{-x\sqrt{-k}}(h+\sqrt{-k}) - e^{-(2a-x)\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})\}\{e^{-(b+y)\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-j}) - e^{-(b-y)\sqrt{-j}}(h+\sqrt{-j})\}}{kj\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}\{(h+\sqrt{-j})^2 - e^{-2b\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-j})^2\}}\,\psi(o,b) - \\
& - \frac{h^2\{e^{-(a+x)\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k}) - e^{-(a-x)\sqrt{-k}}(h+\sqrt{-k})\}\{e^{-y\sqrt{-j}}(h+\sqrt{-j}) - e^{-(2b-y)\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-j})\}}{kj\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}\{(h+\sqrt{-j})^2 - e^{-2b\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-j})^2\}}\,\psi(a,o) + \\
& + \frac{h^2\{e^{-x\sqrt{-k}}(h+\sqrt{-k}) - e^{-(2a-x)\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})\}\{e^{-y\sqrt{-j}}(h+\sqrt{-j}) - e^{-(2b-y)\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-j})\}}{kj\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}\{(h+\sqrt{-j})^2 - e^{-2b\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-j})^2\}}\,\psi(o,o) - \\
& - \frac{1}{2kj}\int_0^x e^{-(x-\xi)\sqrt{-k}}\,\frac{\partial\psi}{\partial x}(\xi, y)\,d\xi - \frac{1}{2kj}\int_0^y e^{-(y-\eta)\sqrt{-j}}\,\frac{\partial\psi}{\partial y}(x, \eta)\,d\eta - \\
& - \frac{h\{e^{-(b+y)\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-j}) - e^{-(b-y)\sqrt{-j}}(h+\sqrt{-j})\}}{2kj\{(h+\sqrt{-j})^2 - e^{-2b\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-j})^2\}}\int_0^x e^{-(x-\xi)\sqrt{-k}}\,\frac{\partial\psi}{\partial x}(\xi, b)\,d\xi - \\
& - \frac{h\{e^{-(a+x)\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k}) - e^{-(a-x)\sqrt{-k}}(h+\sqrt{-k})\}}{2kj\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}}\int_0^y e^{-(y-\eta)\sqrt{-j}}\,\frac{\partial\psi}{\partial y}(a, \eta)\,d\eta + \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\
& + \frac{1}{4kj\{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2\}\{(h+\sqrt{-j})^2 - e^{-2b\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-j})^2\}} \times \\
& \times \int_0^x\int_0^y \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}(\xi, \eta)\,\{e^{-(2a-\xi+x)\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2 + e^{-(\xi+x)\sqrt{-k}}(h^2+k) - e^{-(2a-\xi-x)\sqrt{-k}}(h^2+k)\} \times \\
& \{e^{-(2b-\eta+y)\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-j})^2 + e^{-(\eta+y)\sqrt{-j}}(h^2+j) - e^{-(2b-\eta-y)\sqrt{-j}}(h^2+j)\}\,d\xi\,d\eta.
\end{aligned}
$$

33. Dato un numero intero m' comunque grande, si consideri sul piano della variabile complessa j il sistema delle circonferenze $C'_1, C'_2, \ldots$ aventi il centro nell'origine e il raggio

$$\varrho' = \left\{\frac{(2l'+1)\pi}{2b}\right\}^2$$

con l' numero intero e positivo maggiore od uguale all'espressione $\frac{m'(2m'+1)-1}{2}$.

Come al § 5 si può dimostrare che, per m' abbastanza grande, si ha sulle circonferenze $C'_1, C'_2, \ldots$:

$$\left|\frac{(h+\sqrt{-j})^2 - e^{-2b\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-j})^2}{-j}\right| > A', \quad \left|\frac{(h-\sqrt{-j})^2}{-j}\right| < B',$$

$$\left|\frac{(h+\sqrt{-j})^2}{-j}\right| < C', \quad \left|\frac{h^2+j}{j}\right| < D'$$

con A', B', C', D' costanti finite e diverse dallo *zero*, da fissare convenientemente.

Indicando poi con M il massimo dei massimi valori assoluti delle funzioni $\psi(x, y)$, $\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}$ in tutto il campo C, e posto $j = \varrho' e^{i\omega'}$, si ha ancora:

$$\left|\int_0^x e^{-(x-\xi)\sqrt{-k}} \frac{\partial\psi}{\partial x}(\xi, y)\, d\xi\right| \leq M \int_0^x e^{-(x-\xi)\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}}\, d\xi \leq Ma, \ldots\ldots\ldots$$

$$\left|\int_0^y e^{-(y-\eta)\sqrt{-j}} \frac{\partial\psi}{\partial y}(x, \eta)\, d\eta\right| \leq M \int_0^y e^{-(y-\eta)\sqrt{\varrho'}\,\mathrm{sen}\frac{\omega'}{2}}\, d\eta \leq Mb, \ldots\ldots\ldots$$

. . . . . .

$$\left|\int_0^a\int_0^b \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}(\xi, \eta)\, e^{-(2a-\xi+x)\sqrt{-k}-(2b-\eta+y)\sqrt{-j}}\, d\xi\, d\eta\right| \leq$$

$$\leq M \int_0^a e^{-(2a-\xi+x)\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}}\, d\xi \int_0^b e^{-(2b-\eta+y)\sqrt{\varrho'}\,\mathrm{sen}\frac{\omega'}{2}}\, d\eta < Mab.$$

Di qui e dalle considerazioni del § 5 risulta ovviamente che (Cfr. § 6) *l'espressione $k.j.u(x, y, k, j)$, per i valori di k corrispondenti ai punti delle circonferenze sempre crescenti $C_1, C_2, \ldots$ tracciate sul piano della variabile complessa k con centro nell'origine e di raggio*

$$\varrho = \left\{\frac{(2l+1)\pi}{2a}\right\}^2, \quad \left(l \geq \frac{m(2m+1)-1}{2}\right)$$

con m numero intero e positivo abbastanza grande, e per i valori di j corrispondenti ai punti delle circonferenze sempre crescenti $C'_1, C'_2, \ldots$ tracciate sul piano della variabile complessa j con centro nell'origine e di raggio

$$\varrho' = \left\{\frac{(2l'+1)\pi}{2b}\right\}^2, \quad \left(l' \geq \frac{m'(2m'+1)-1}{2}\right)$$

con m' numero intero e positivo abbastanza grande, ha il suo modulo inferiore ad una quantità finita K, *che si può fissare in modo conveniente, per qualunque valore*

di ω fra 0 e 2π, questi estremi inclusi, per qualunque valore di ω' fra 0 e 2π, questi estremi inclusi, e per qualunque punto (x, y) del campo C.

In questo modo si può scrivere per i detti valori di ϱ e di ϱ', qualunque siano i valori di ω, ω', x, y che si considerano:

$$|kju - \psi(x, y)| < K + M. \tag{41}$$

34. Date due quantità positive ε, σ piccole ad arbitrio, per i valori di ω, ω' tali che

$$\varepsilon \leq \frac{\omega}{2} \leq \pi - \varepsilon, \qquad \varepsilon \leq \frac{\omega'}{2} \leq \pi - \varepsilon \tag{42}$$

e per i valori di ϱ, ϱ' superiori ad un conveniente limite, che si può fissare, si avrà ovviamente:

$$\left|\frac{h\{e^{-(a+x)\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k}) - e^{-(a-x)\sqrt{-k}}(h+\sqrt{-k})\}}{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2}\right| < \sigma,$$

$$\left|\frac{h\{e^{-x\sqrt{-k}}(h+\sqrt{-k}) - e^{-(2a-x)\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})\}}{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2}\right| < \sigma,$$

$$\left|\frac{h\{e^{-(b+y)\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-j}) - e^{-(b-y)\sqrt{-j}}(h+\sqrt{-j})\}}{(h+\sqrt{-j})^2 - e^{-2b\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-j})^2}\right| < \sigma,$$

$$\left|\frac{h\{e^{-y\sqrt{-j}}(h+\sqrt{-j}) - e^{-(2b-y)\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-j})\}}{(h+\sqrt{-j})^2 - e^{-2b\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-j})^2}\right| < \sigma,$$

$$\left|\frac{(h+\sqrt{-k})^2}{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2} - 1\right| < \sigma, \quad \left|\frac{(h-\sqrt{-k})^2}{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2} - 1\right| < \sigma,$$

$$\left|\frac{h^2+k}{(h+\sqrt{-k})^2 - e^{-2a\sqrt{-k}}(h-\sqrt{-k})^2} + 1\right| < \sigma, \quad \left|\frac{(h+\sqrt{-j})^2}{(h+\sqrt{-j})^2 - e^{-2b\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-j})^2} - 1\right| < \sigma,$$

$$\left|\frac{(h-\sqrt{-j})^2}{(h+\sqrt{-j})^2 - e^{-2b\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-j})^2} - 1\right| < \sigma, \quad \left|\frac{h^2+j}{(h+\sqrt{-j})^2 - e^{-2b\sqrt{-j}}(h-\sqrt{-j})^2} + 1\right| < \sigma,$$

$$\left|\int_0^x e^{-(x-\xi)\sqrt{-k}} \frac{\partial\psi}{\partial x}(\xi, y)\, d\xi\right| < M \int_0^x e^{-(x-\xi)\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}}\, d\xi < \frac{M}{\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\,\varepsilon} < \sigma,$$

$$\left|\int_0^y e^{-(y-\eta)\sqrt{-j}} \frac{\partial\psi}{\partial y}(x, \eta)\, d\eta\right| < \frac{M}{\sqrt{\varrho'}\,\mathrm{sen}\,\varepsilon} < \sigma, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left|\int_0^x \int_0^y e^{-(x-\xi)\sqrt{-k}-(y-\eta)\sqrt{-j}} \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\right| <$$

$$< M \int_0^x e^{-(x-\xi)\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}}\, d\xi \int_0^y e^{-(y-\eta)\sqrt{\varrho'}\,\mathrm{sen}\frac{\omega'}{2}}\, d\eta < \frac{M}{\sqrt{\varrho}\sqrt{\varrho'}\,\mathrm{sen}^2\,\varepsilon} < \sigma, \ldots\ldots\ldots$$

$$\left|\int_0^a \int_0^b e^{-(2a-\xi-x)\sqrt{-k}-(2b-\eta-y)\sqrt{-j}} \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\right| <$$

$$< M \int_0^a \int_0^b e^{-(2a-\xi-x)\sqrt{\varrho}\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{2}-(2b-\eta-y)\sqrt{\varrho'}\,\mathrm{sen}\frac{\omega'}{2}}\, d\xi\, d\eta < \frac{M}{\sqrt{\varrho}\sqrt{\varrho'}\,\mathrm{sen}^2\,\varepsilon}.$$

Tutte queste formole sono sufficienti per concludere che, *data una quantità positiva σ' piccola ad arbitrio, si può fissare una quantità positiva ϱ_1 convenientemente grande, ma finita, tale che per qualunque sistema di valori di ϱ, ϱ' non minori di ϱ_1, per qualunque sistema di valori di ω, ω' tali che siano soddisfatte le* (42), *e qualunque sia il punto (x, y) del campo C (i punti del contorno compresi) si avrà*:

$$|kju - \psi(x, y)| < \sigma'. \tag{43}$$

Osserviamo che la quantità ϱ_1 dipende esclusivamente da σ' e da ε.

35. La formola $(20)_1$ del § 22 ci dà, in forza delle equazioni $(40)'$, per una qualsiasi delle circonferenze $C_1, C_2, \ldots$, per i valori di j che non sono radici dell'equazione $(3)_1$ e per un punto qualsiasi del campo C (i punti del contorno compresi),

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k} u(x, y, k, j)\,dk = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k.u(x, y, k, j)\,d\omega = -\sum_1^{i}{}_r A_r \{\sqrt{k_r}\cos(x\sqrt{k_r}) + h\,\mathrm{sen}(x\sqrt{k_r})\},$$

nella quale formola si ha:

$$A_r = \frac{2\int_0^a \{\sqrt{k_r}\cos(\xi\sqrt{k_r}) + h\,\mathrm{sen}(\xi\sqrt{k_r})\}\,w(\xi, y, j)\,d\xi}{ah^2 + 2h + ak_r}.$$

Di qui risulta, per i valori di j corrispondenti ai punti di una qualsiasi delle circonferenze $C'_1, C'_2, \ldots$, adoperando il teorema dell'integrazione sotto il segno,

$$\frac{1}{4\pi^2 i^2}\int_{C_k}\int_{C'_{k'}} u(x, y, k, j)\,dk\,dj = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} k.j.u(x, y, k, j)\,d\omega\,d\omega' =$$

$$= -\sum_1^{i}{}_r \{\sqrt{k_r}\cos(x\sqrt{k_r}) + h\,\mathrm{sen}(x\sqrt{k_r})\}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} j\,A_r\,d\omega' =$$

$$= -\sum_1^{i}{}_r \frac{\sqrt{k_r}\cos(x\sqrt{k_r}) + h\,\mathrm{sen}(x\sqrt{k_r})}{ah^2 + 2h + ak_r}\,2\int_0^a \Big[\{\sqrt{k_r}\cos(\xi\sqrt{k_r}) + h\,\mathrm{sen}(\xi\sqrt{k_r})\}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} j.w(\xi, y, j)\,d\omega'\Big]\,d\xi.$$

Intanto si ha dalle equazioni $(39)'$, applicando ancora una volta la formola $(20)_1$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} j.w(\xi, y, j)\,d\omega' = -\sum_1^{i'}{}_{r'} B_{r'} \{\sqrt{j_{r'}}\cos(y\sqrt{j_{r'}}) + h\,\mathrm{sen}(y\sqrt{j_{r'}})\}$$

con

$$B_{r'} = \frac{2\int_0^b \{\sqrt{j_{r'}}\cos(\eta\sqrt{j_{r'}}) + h\,\mathrm{sen}(\eta\sqrt{j_{r'}})\}\,\psi(\xi, \eta)\,d\eta}{bh^2 + 2h + bj_{r'}};$$

di modo che, sostituendo nella formola precedente, si otterrà:

$$\frac{1}{4\pi^2 i^2}\int_{C_r}\int_{C'_{s'}} u(x,y,k,j)\,dk\,dj = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} k.j.u(x,y,k,j)\,d\omega\,d\omega' =$$

$$= \sum_1^{r}{}_r \sum_1^{s'}{}_{s'} \frac{4\int_0^a\int_0^b \{\sqrt{k_r}\cos(\xi\sqrt{k_r}) + h\,\mathrm{sen}(\xi\sqrt{k_r})\}\{\sqrt{j_{s'}}\cos(\eta\sqrt{j_{s'}}) + h\,\mathrm{sen}(\eta\sqrt{j_{s'}})\}\psi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{(ah^2+2h+ak_r)(bh^2+2h+bj_{s'})} \times$$

$$\times \{\sqrt{k_r}\cos(x\sqrt{k_r}) + h\,\mathrm{sen}(x\sqrt{k_r})\}\{\sqrt{j_{s'}}\cos(y\sqrt{j_{s'}}) + h\,\mathrm{sen}(y\sqrt{j_{s'}})\} =$$

$$= \sum_1^{r}{}_r \sum_1^{s'}{}_{s'} p_{rs'}(x,y).$$

Da questa e dalle (41), (43) segue:

$$\left|\sum_1^{r}{}_r \sum_1^{s'}{}_{s'} p_{rs'}(x,y) - \psi(x,y)\right| = \left|\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\{k.j.u(x,y,k,j) - \psi(x,y)\}\,d\omega\,d\omega'\right| <$$

$$< \frac{\sigma'}{4\pi^2}\int_{2\varepsilon}^{2\pi-2\varepsilon}d\omega\int_{2\varepsilon}^{2\pi-2\varepsilon}d\omega' + \frac{K+M}{4\pi^2}\left|\int_0^{2\pi}d\omega\int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon}d\omega' + \int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon}d\omega\int_{2\varepsilon}^{2\pi-2\varepsilon}d\omega'\right| < \sigma' + 4\,\frac{K+M}{\pi}\,\varepsilon$$

per $\varrho = \left\{\frac{(2l+1)\pi}{2a}\right\}^2$, $\varrho' = \left\{\frac{(2l'+1)\pi}{2b}\right\}^2$ con $l \geq \frac{m(2m+1)-1}{2}$, $l' \geq \frac{m'(2m'+1)-1}{2}$ numeri interi talmente grandi che risulti $\varrho > \varrho_1$, $\varrho' > \varrho_1$ e con m, m' numeri interi e positivi abbastanza grandi, e per qualunque punto (x,y) del campo C (i punti del contorno compresi). Ne concludiamo subito che *la serie* $\sum_1^{\infty}{}_r \sum_1^{\infty}{}_s p_{rs}(x,y)$ *è convergente in ugual grado in tutto il campo* C (*i punti del contorno compresi*) *e rappresenta in ogni punto di questo campo la funzione arbitraria* $\psi(x,y)$.

È evidente poi la convergenza in ugual grado in tutto il campo C di tutte le serie semplici $\sum_1^{\infty}{}_r p_{rs}$, $\sum_1^{\infty}{}_s p_{rs}$ (cfr. § 26).

Questo risultato differisce da quello del § 26 in ciò che, mentre ivi la convergenza della serie doppia richiede che i passaggi al limite per $r=\infty$, $s=\infty$ si facciano successivamente, qui invece i passaggi al limite possono farsi in un modo qualsiasi, in modo cioè che, data una quantità positiva σ piccola ad arbitrio, si possono fissare due numeri interi e positivi finiti m', n' tali che per $m \geq m'$, $n \geq n'$ e per p, q numeri interi e positivi qualsiasi, si abbia:

$$\left|\sum_1^{m+p}{}_r \sum_1^{n+q}{}_s p_{rs} - \sum_1^{m}{}_r \sum_1^{n}{}_s p_{rs}\right| < \sigma \tag{44}$$

qualunque sia il punto (x,y) del campo C (i punti del contorno compresi).

36. Dalle proprietà della serie $\sum_1^\infty{}_r \sum_1^\infty{}_s p_{rs}$, enunciate nel paragrafo precedente, risulta che, data una quantità positiva σ' piccola ad arbitrio, si possono fissare due numeri interi m_1, n_1 talmente grandi che, per $m'_1 \geq m_1$, $n'_1 \geq n_1$ e per p_1, q_1 numeri interi qualsiasi positivi o nulli, si abbia:

$$\left|\sum_1^{m'_1+p_1}{}_r \sum_1^{n'_1+q_1}{}_s p_{rs} - \sum_1^{m'_1}{}_r \sum_1^{n'_1}{}_s p_{rs}\right| = \left|\sum_{m'_1+1}^{m'_1+p_1}{}_r \sum_1^{n'_1}{}_s p_{rs} + \sum_1^{m'_1}{}_r \sum_{n'_1+1}^{n'_1+q_1}{}_s p_{rs} + \sum_{m'_1+1}^{m'_1+p_1}{}_r \sum_{n'_1+1}^{n'_1+q_1}{}_s p_{rs}\right| < \frac{\sigma'}{6}.$$

Facendo nella precedente una prima volta $q_1 = 0$ e una seconda $p_1 = 0$, si trovano le due formole:

$$\left|\sum_{m'_1+1}^{m'_1+p_1}{}_r \sum_1^{n'_1}{}_s p_{rs}\right| < \frac{\sigma'}{6}, \quad \left|\sum_1^{m'_1}{}_r \sum_{n'_1+1}^{n'_1+q_1}{}_s p_{rs}\right| < \frac{\sigma'}{6};$$

e quindi si avrà ancora:

$$\left|\sum_{m'_1+1}^{m'_1+p_1}{}_r \sum_{n'_1+1}^{n'_1+q_1}{}_s p_{rs}\right| < \frac{\sigma'}{2}. \tag{45}$$

Dalla convergenza delle serie $\sum_1^\infty{}_r p_{rs}$, $\sum_1^\infty{}_s p_{rs}$ risulta poi che, fissati i numeri m_1, n_1, si possono fissare due numeri interi e positivi m_2, n_2 talmente grandi che, per $m'_2 \geq m_2$, $n'_2 \geq n_2$ e per p_2, q_2 numeri interi qualsiasi positivi o nulli, si abbia:

$$\left|\sum_{m'_2+1}^{m'_2+p_2}{}_r p_{rs}\right| < \frac{\sigma'}{2n_1}, \ (s = 1, 2, \dots n_1); \quad \left|\sum_{n'_2+1}^{n'_2+q_2}{}_s p_{rs}\right| < \frac{\sigma'}{2m_1}, \ (r = 1, 2, \dots m_1);$$

di modo che, per $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ numeri interi e positivi tali che soddisfino alle disuguaglianze:

$$1 \leq \alpha \leq \beta \leq m_1, \qquad 1 \leq \gamma \leq \delta \leq n_1,$$

si potrà scrivere:

$$\left|\sum_{m'_2+1}^{m'_2+p_2}{}_r \sum_\gamma^\delta{}_s p_{rs}\right| < \frac{\sigma'}{2}, \quad \left|\sum_\alpha^\beta{}_r \sum_{n'_2+1}^{n'_2+q_2}{}_s p_{rs}\right| < \frac{\sigma'}{2}.$$

Finalmente, indicando con m, n i massimi rispettivamente di m_1, m_2 e di n_1, n_2; con μ, ν due numeri interi positivi qualsiasi; e con p, q, π, χ quattro numeri interi qualsiasi positivi o nulli, risulterà dalle due disuguaglianze precedenti e dalla (45), per $m' \geq m, n' \geq n$,

$$\left|\sum_{m'+1}^{m'+p}{}_r \sum_\nu^{\nu+\chi}{}_s p_{rs}\right| < \sigma', \quad \left|\sum_\mu^{\mu+\pi}{}_r \sum_{n'+1}^{n'+q}{}_s p_{rs}\right| < \sigma'. \tag{46}$$

37. Come applicazione del risultato precedente risolviamo il seguente problema: *Determinare l'integrale regolare delle equazioni*:

$$\begin{cases} \text{(nei punti del campo } C) & \Delta^2 u + f(x, y) = 0, \\ \text{(nei punti del contorno } c) & \dfrac{\partial u}{\partial n} = hu + \varphi. \end{cases} \tag{47}$$

in cui $f(x,y)$ è una data funzione dei punti del campo C finita e continua insieme alle sue derivate $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e φ una funzione finita e continua dei punti del contorno c.

Anzitutto osserveremo che questo problema in generale si può sempre ridurre all'altro più semplice di *determinare l'integrale regolare delle equazioni*:

$$(47)' \quad \text{(nei punti di } C) \quad \Delta^2 v + \psi(x,y) = 0, \qquad \text{(nei punti di } c) \quad \frac{\partial v}{\partial n} = hv,$$

essendo la funzione $\psi(x,y)$ della stessa natura della precedente funzione $f(x,y)$.

Infatti indichiamo con u' una funzione arbitraria dei punti di c finita e continua insieme alle sue derivate tangenziali; si determini una funzione u'' dei punti del campo C, la quale sia finita e continua in tutto il campo C insieme alle sue derivate dei due primi ordini rispetto ad x e y (i punti di c compresi) e nei punti di c coincida con la u' e soddisfi all'equazione:

$$\frac{\partial u''}{\partial n} = hu' + \varphi = hu'' + \varphi.$$

Questa determinazione si può fare in infiniti modi, essendo noti in questo modo nei punti di c i valori di u'', $\frac{\partial u''}{\partial n}$ e quelli della sua derivata tangenziale. Posto allora:

$$\Delta^2 u'' = f'(x,y), \quad \psi(x,y) = f(x,y) + f'(x,y), \quad u = v + u'',$$

si avrà che la funzione u, determinata dall'ultima di queste formole, è appunto l'integrale regolare delle equazioni (47).

38. Ciò premesso, si sviluppi la funzione $\psi(x,y)$ come al § 35 e si consideri la serie:

$$(48) \qquad u_1 = \sum_1^\infty{}^r \sum_1^\infty{}^s \frac{p_{rs}(x,y)}{k_{rs}} = \sum_1^\infty{}^r \sum_1^\infty{}^s \frac{p_{rs}(x,y)}{k_r + j_s}.$$

Le formole (46) ci dànno in forza del *teorema di Abel* (¹):

$$\left| \sum_{m'+1}^{m'+p}{}^r \sum_{\nu}^{\nu+\chi}{}^s \frac{p_{rs}}{k_{rs}} \right| < \frac{\sigma'}{k_{11}}, \qquad \left| \sum_{\mu}^{\mu+\pi}{}^r \sum_{n'+1}^{n'+q}{}^s \frac{p_{rs}}{k_{rs}} \right| < \frac{\sigma'}{k_{11}};$$

e queste formole alla loro volta sono sufficienti per concludere che la serie (48) è convergente in egual grado in tutto il campo C (i punti del contorno compresi) qualunque sia la legge con cui si passa al limite per $r = \infty$, $s = \infty$, e che le serie semplici $\sum_1^\infty{}^r \frac{p_{rs}}{k_{rs}}$, $\sum_1^\infty{}^s \frac{p_{rs}}{k_{rs}}$ (ciò che del resto risulta anche direttamente dalla conver-

(¹) Cfr. ad es. Dini; l. c.; n. 80, pag. 100. Nelle espressioni $\sum_{m'+1}^{m'+p}{}^r \sum_{\nu}^{\nu+\chi}{}^s p_{rs}$, $\sum_{\mu}^{\mu+\pi}{}^r \sum_{n'+1}^{n'+q}{}^s p_{rs}$ i termini $p_{rs}(x,y)$, a dir vero, non saranno sempre ordinati in modo che le corrispondenti espressioni $k_{rs} = k_r + j_s$ siano sempre crescenti o fisse; però ciò può sempre farsi (cfr. § 30).

genza delle serie semplici $\sum_1^\infty{}_r\, p_{rs}$, $\sum_1^\infty{}_s\, p_{rs}$) sono convergenti in ugual grado in tutto il campo C (i punti del contorno compresi).

39. Indichiamo con t le distanze di un punto (x, y) preso ad arbitrio sul piano del rettangolo C da un altro punto qualsiasi (ξ, η); e con n al solito la normale nei punti di c. Dalle equazioni (36) risulta per i punti dell'interno del campo C, come è noto,

$$\frac{p_{rs}(x, y)}{k_{rs}} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^a\int_0^b p_{rs}(\xi, \eta)\log t\, d\xi\, d\eta + \frac{1}{2\pi}\int_c\left(h\log t - \frac{\partial \log t}{\partial n}\right)\frac{p_{rs}}{k_{rs}}\, dc;$$

e quindi, integrando per serie [1],

$$(49)\quad \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^a\int_0^b \psi(\xi, \eta)\log t\, d\xi\, d\eta + \dfrac{1}{2\pi}\int_c\left(h\log t - \dfrac{\partial \log t}{\partial n}\right) u_1\, dc = \\ = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^a\int_0^b \log t \sum_1^\infty{}_r \sum_1^\infty{}_s\, p_{rs}\, d\xi\, d\eta + \dfrac{1}{2\pi}\int_c\left(h\log t - \dfrac{\partial \log t}{\partial n}\right)\sum_1^\infty{}_r\sum_1^\infty{}_s \dfrac{p_{rs}}{k_{rs}}\, dc = \\ = \displaystyle\sum_1^\infty{}_r\sum_1^\infty{}_s\left\{-\dfrac{1}{2\pi}\int_0^a\int_0^b p_{rs}\log t\, d\xi\, d\eta + \dfrac{1}{2\pi}\int_c\left(h\log t - \dfrac{\partial \log t}{\partial n}\right)\dfrac{p_{rs}}{k_{rs}}\, dc\right\} = \\ = \displaystyle\sum_1^\infty{}_r\sum_1^\infty{}_s \dfrac{p_{rs}}{k_{rs}} = u_1. \end{cases}$$

Ora si ha dalle formole di Laplace e di Poisson:

$$(\text{nei punti dell'interno di } C)\quad \begin{cases} \Delta^2\left\{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_c\left(h\log t - \dfrac{\partial \log t}{\partial n}\right) u_1\, dc\right\} = 0, \\ \Delta^2\left\{-\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^a\int_0^b \psi(\xi, \eta)\log t\, d\xi\, d\eta\right\} = -\psi(x, y); \end{cases}$$

per cui sarà:

$$(47)'_1 \qquad (\text{nei punti dell'interno di } C)\quad \Delta^2 u_1 + \psi(x, y) = 0.$$

Come è noto, si ha per i punti (x, y) esterni al campo C:

$$0 = -\frac{1}{2\pi}\int_0^a\int_0^b p_{rs}(\xi, \eta)\log t\, d\xi\, d\eta + \frac{1}{2\pi}\int_c\left(h\log t - \frac{\partial \log t}{\partial n}\right)\frac{p_{rs}}{k_{rs}}\, dc;$$

e, integrando per serie anche qui, risulta per i detti punti (x, y):

$$(49)'\quad \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^a\int_0^b \psi(\xi, \eta)\log t\, d\xi\, d\eta + \dfrac{1}{2\pi}\int_c\left(h\log t - \dfrac{\partial \log t}{\partial n}\right) u_1\, dc = \\ = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^a\int_0^b \log t \sum_1^\infty{}_r \sum_1^\infty{}_s\, p_{rs}\, d\xi\, d\eta + \dfrac{1}{2\pi}\int_c\left(h\log t - \dfrac{\partial \log t}{\partial n}\right)\sum_1^\infty{}_r\sum_1^\infty{}_s \dfrac{p_{rs}}{k_{rs}}\, dc = \\ = \displaystyle\sum_1^\infty{}_r\sum_1^\infty{}_s\left\{-\dfrac{1}{2\pi}\int_0^a\int_0^b p_{rs}(\xi, \eta)\log t\, d\xi\, d\eta + \dfrac{1}{2\pi}\int_c\left(h\log t - \dfrac{\partial \log t}{\partial n}\right)\dfrac{p_{rs}}{k_{rs}}\, dc\right\} = 0. \end{cases}$$

[1] Cfr. per il caso degli integrali semplici: Dini; l. c.; pag. 394, n. 285.

Intanto si ha, indicando con m un punto del contorno c, che non sia uno dei vertici del rettangolo C, e con m_1, m_2 due punti il primo interno all'area C, il secondo esterno:

$$\lim_{m_1 m=0} \frac{\partial}{\partial n} \int_0^a \int_0^b \psi(\xi, \eta) \log t \, d\xi \, d\eta = \lim_{m_2 m=0} \frac{\partial}{\partial n} \int_0^a \int_0^b \psi(\xi, \eta) \log t \, d\xi \, d\eta ,$$

$$\lim_{m_1 m=0} \frac{\partial}{\partial n} \int_c h u_1 \log t \, dc - \lim_{m_2 m=0} \frac{\partial}{\partial n} \int_c h u_1 \log t \, dc = 2\pi \, h \, . \, u_1(m) \text{ (}^1\text{)};$$

e dalla (49)' risulta:

$$\lim_{m_2 m=0} \frac{\partial}{\partial n} \int_c u_1 \frac{\partial \log t}{\partial n} \, dc = - \lim_{m_2 m=0} \frac{\partial}{\partial n} \int_0^a \int_0^b \psi(\xi, \eta) \log t \, d\xi \, d\eta + \lim_{m_2 m=0} \frac{\partial}{\partial n} \int_c h u_1 \log t \, dc ;$$

per cui sarà determinato e finito ogni volta (²) il $\lim\limits_{m_1 m=0} \frac{\partial}{\partial n} \int_c u_1 \frac{\partial \log t}{\partial n} \, dc$ e si avrà:

$$\lim_{m_1 m=0} \frac{\partial}{\partial n} \int_c \frac{\partial \log t}{\partial n} u_1 \, dc = \lim_{m_2 m=0} \frac{\partial}{\partial n} \int_c \frac{\partial \log t}{\partial n} u_1 \, dc .$$

Queste formole e le tre precedenti ci dànno finalmente:

$$\lim_{m_1 m=0} \frac{\partial u_1}{\partial n} = \lim_{m_1 m=0} \frac{\partial}{\partial n} \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_0^a \int_0^b \psi(\xi, \eta) \log t \, d\xi \, d\eta + \frac{1}{2\pi} \int_c \left(h \log t - \frac{\partial \log t}{\partial n} \right) u_1 \, dc \right\} =$$

$$= \lim_{m_2 m=0} \left\{ -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \int_0^a \int_0^b \psi(\xi, \eta) \log t \, d\xi \, d\eta + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \int_c h \, . \log t \, . \, u_1 \, dc \right\} +$$

$$+ h \, . \, u_1(m) - \lim_{m_2 m=0} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \int_c u_1 \frac{\partial \log t}{\partial n} \, dc = h u_1(m) .$$

(¹) La sola continuità della funzione u_1 è sufficiente per la validità di questa formola, finchè il punto m non coincide con alcuno dei vertici del rettangolo (cfr. la mia Nota: *Intorno alle derivate normali* . . . . . Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino; vol. XXXV).

(²) Nella mia Memoria: *Su di una classe di equazioni alle derivate parziali del secondo ordine* (Annali di Mat.; vol. IV, serie III, pag. 333), riferendomi allo spazio a tre dimensioni, dimostrai che *se esistono e sono finiti e continui i limiti verso cui tendono le derivate normali della funzione potenziale di doppio strato quando ci si avvicina indefinitamente alla superficie da una parte della superficie stessa, esisteranno e saranno ancora finiti e continui i limiti verso cui tendono queste stesse derivate quando ci si avvicina indefinitamente alla superficie dall'altra sua parte*. Ivi è supposto che la superficie del doppio strato abbia un piano tangente in ogni punto, sia convessa o tale che per lo spazio da essa racchiuso si possa risolvere il *problema di Dirichlet* col *metodo di Neumann*; però è facile comprendere che il teorema precedente vale anche quando la superficie, non soddisfacendo alle dette condizioni, nel punto che si considera è tale che si può da essa staccarne una porzione comunque piccola, ma diversa da *zero*, la quale contenga nel suo interno il detto punto e possa considerarsi come facente parte di un'altra superficie qualsiasi per la quale però il teorema stesso è valevole. Ora riferendoci al piano, nel caso nostro del rettangolo il *metodo di Neumann* non è applicabile (cfr. Picard, *Traité d'Analyse*, vol. II, pag. 41, n. 34); però il contorno c del rettangolo è tale che qualunque sua porzione, che non racchiude nel suo interno alcun vertice, può considerarsi come facente parte di un contorno per il quale il *metodo di Neumann* è applicabile.

Osserviamo che questa formola vale finchè il punto m non coincide con nessuno dei vertici del rettangolo C; però il secondo membro è una funzione finita e continua dei punti di c (i vertici del rettangolo compresi); per cui da questa stessa formola risulta che, avvicinandosi ad uno qualunque dei vertici lungo il contorno c da una parte o dall'altra del vertice stesso, l'espressione:

$$\lim_{m_1 m = 0} \frac{\partial u_1}{\partial n},$$

che è una funzione dei punti m, tenderà verso un unico limite determinato e finito; prendendo allora come valore di detta espressione in questo vertice tale limite, avremo che la formola precedente varrà senza eccezione qualunque sia il punto m del contorno c.

Questo risultato e la formola $(47)'_1$, ci dicono che *la funzione u_1 è l'integrale regolare cercato delle equazioni* $(47)'$.

CORREZIONI.

Pag. 131, in fine, aggiungere: La $\overline{\frac{\partial P}{\partial n}}$ è finita e continua, perchè la P è tale che la funzione dalla quale si parte per costruirla col *metodo di Neumann* ammette la derivata normale.

» 202, linea 18, invece di $\sqrt{k-}$, leggere: $\sqrt{-k}$.

» 207, » 15, » $|\sqrt{-k}\cdots\cdots|$, » $\left|\frac{\sqrt{-k}}{2}\cdots\cdots\right|$.

» 216, linea 17, aggiungere: moltiplicanti per $\sqrt{-k}$.

» 231, » 18, invece di $ah^2+2h+bj_2$, leggere: $ah^2+2h+ak_r$.