Ricerche sul coefficiente di rifrazione terrestre eseguite a Roma nel 1895.

Memoria di V. REINA e G. CICCONETTI

La settima Conferenza generale dell'Associazione geodetica internazionale, riunitasi in Roma nell'Ottobre 1883, approvando una proposta del maggiore HARTL, delegato austriaco, esprimeva il desiderio di veder moltiplicarsi, negli Stati facenti parte della Associazione, le ricerche sulla rifrazione terrestre, allo scopo di stabilire l'influenza che le circostanze locali e le condizioni climateriche esercitano sopra questo fenomeno.

Non ci consta che delle serie ordinate di osservazioni venissero dopo d'allora ed a tale scopo eseguite in Italia, all'infuori di quelle recentemente compiute in Sicilia [1]. Volendo da parte nostra ottemperare al voto espresso dalla Associazione geodetica, venimmo nella determinazione di eseguire alcune serie di misure zenitali coniugate contemporanee fra la Specola geodetica di S. Pietro in Vincoli a Roma ed il segnale trigonometrico di Monte Cavo, già, per precedenti lavori, determinati l'uno rispetto all'altro in distanza ed in azimut.

Il Gabinetto di Geodesia di questa Scuola degli Ingegneri possiede un teodolite STARKE di prima grandezza. Occorreva uno strumento di pari bontà per l'esecuzione delle osservazioni contemporanee. Ci rivolgemmo perciò al Direttore dell'Istituto Geografico Militare, il quale, in mancanza di un altro teodolite STARKE, ci volle concedere in prestito uno strumento universale di PISTOR e MARTINS. Questo strumento, attese le maggiori sue dimensioni, venne trattenuto a Roma e sistemato sul pilastro della Specola geodetica, dove rimase durante tutto il tempo delle osservazioni, protetto da un apposito robusto capannone di legno. Il teodolite STARKE servì invece a fare le osservazioni sul segnale di Monte Cavo.

Il presente lavoro è diviso in quattro parti:

Nella prima vengono assoggettati ad esame i due strumenti goniometrici, solo però in quelle parti che hanno attinenza colla misura di distanze zenitali.

[1] A. VENTURI ed E. SOLER « *Prime ricerche sul coefficiente di rifrazione in Sicilia* ». Atti della R. Acc. di Palermo, Vol. III, Serie 3ª, 1893.

Nella seconda sono esposte le operazioni eseguite per ottenere la differenza di livello fra i due punti di osservazione.

Nella terza sono riassunte le osservazioni zenitali, e ne vengono dedotti i valori del coefficiente medio di rifrazione, ponendo in evidenza il suo modo di variazione col variare del periodo diurno.

Nella quarta vengono confrontati i valori dei coefficienti di rifrazione risultanti dalla osservazione con quelli dati dalla teoria. Vi si instituisce altresì il confronto delle differenze di livello fra le due stazioni, calcolate in base alle osservazioni meteorologiche contemporanee, colla differenza di livello risultante dalla livellazione geometrica.

Ci è grato esprimere i più vivi ringraziamenti: al signor direttore dell'Istituto Geografico Militare per il prestito su accennato dell'Universale Pistor; al direttore dell'Ufficio metrico centrale, sig. N. Reggiani, per le premure usateci nel mettere a nostra disposizione tutto l'occorrente per la campionatura del comparatore delle mire, e per aver voluto egli stesso eseguire la campionatura dei termometri annessi al psicrometro; al dott. L. Palazzi, dell'Osservatorio del Collegio Romano, per essersi assunto l'incarico della campionatura dei barometri; al sig. A. Lucchesi, direttore dell'Osservatorio meteorologico sul Monte Cavo, per lo zelo col quale volle in molti modi coadiuvare e facilitare le operazioni, ed all'ing. D. Ruggeri per il volonteroso sussidio prestatoci in parecchie circostanze.

PARTE PRIMA

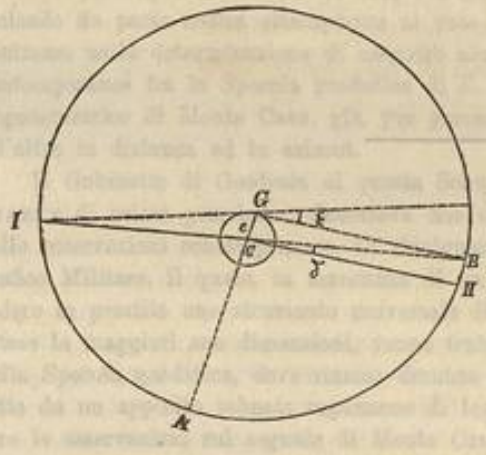
Studio degli strumenti.

Il teodolite Starke.

Il teodolite Starke, appartenente al Gabinetto di Geodesia, è di prima grandezza, cioè col cerchio orizzontale di 26 cm. ed il verticale di 21 cm. di diametro: il cannocchiale, coll'apertura di 48 mm., colla distanza focale di 237 mm. e l'ingrandimento di 22 volte, è foggiato a forma conica dalla parte dell'oculare. Ai microscopi dei due cerchi si leggono direttamente i 2″.

Determinazione della distanza fra l'asse di rotazione e l'asse di reiterazione del cerchio zenitale.

Si deve al prof. Venturi la distinzione fra *eccentricità di reiterazione* ed *eccentricità di rotazione* (¹): esse dipendono da ciò che l'asse di rotazione autonoma del cerchio graduato (*asse di reiterazione*) e l'asse di rotazione del cannocchiale non passano (in generale) per il centro della graduazione. La prima si determina facendo girare il solo cerchio graduato davanti ai microscopi (fissi), la seconda facendo girare il cerchio unitamente al cannocchiale.



Si rammenti qui il procedimento solitamente seguìto in entrambe le determinazioni.

Sia G il centro di graduazione del cerchio, C il punto in cui il suo piano è incontrato dall'asse di reiterazione. Facendo girare il cerchio il punto G descriverà intorno a C un cerchietto di raggio eguale alla eccentricità lineare di reiterazione e. Si indichino con I II tanto i microscopi fissi quanto le letture fatte con essi, con δ il piccolo angolo B C II

(¹) Pubblicazioni della R. Commissione geodetica italiana. « *Azimut di Monte Alfano sull'orizzonte della Specola geodetica della Martorana in Palermo* ».

formato dalle congiungenti C I e C II, con φ_0 la lettura della graduazione nel punto A in cui essa è incontrata dal diametro dei centri C G, con ε l'angolo che la G B forma colla I G prolungata, con d_1 d_2 le differenze delle letture dei due microscopi, corrispondenti a due posizioni girate di 180° l'una rispetto all'altra, con r il raggio del cerchio. Si avrà [1]:

$$d_1 = \delta + \varepsilon = \delta + \varepsilon_m \operatorname{sen}(\varphi_0 - \mathrm{I})$$

$$d_2 = \delta - \varepsilon = \delta - \varepsilon_m \operatorname{sen}(\varphi_0 - \mathrm{I})$$

$$\delta = \frac{d_1 + d_2}{2} \qquad \varepsilon = \varepsilon_m \operatorname{sen}(\varphi_0 - \mathrm{I}) = \frac{d_1 - d_2}{2}$$

1) $$e = \frac{1}{2}\varepsilon_m r \operatorname{arc} 1''.$$

La equazione che dà ε si può anche scrivere

$$\varepsilon = \varepsilon_m \operatorname{sen}\varphi_0 \cos \mathrm{I} - \varepsilon_m \cos\varphi_0 \operatorname{sen} \mathrm{I}$$

ossia, posto

2) $$\varepsilon_m \operatorname{sen}\varphi_0 = x \qquad \varepsilon_m \cos\varphi_0 = y,$$

$$\cos \mathrm{I}\, x - \operatorname{sen} \mathrm{I}\, y - \varepsilon = 0.$$

Se al posto di ε si sostituisce il valore osservato $\left(\varepsilon = \frac{d_1 - d_2}{2}\right)$ si otterrà l'equazione generata

$$\cos \mathrm{I}\, x - \operatorname{sen} \mathrm{I}\, y - \varepsilon = v,$$

e di queste equazioni, moltiplicando opportunamente le osservazioni, se ne avranno quante si vogliono: x ed y si ricaveranno allora dalle equazioni normali

$$[\cos^2 \mathrm{I}]\, x - [\operatorname{sen} \mathrm{I} \cos \mathrm{I}]\, y - [\varepsilon \cos \mathrm{I}] = 0$$

$$-[\operatorname{sen} \mathrm{I} \cos \mathrm{I}]\, x + [\operatorname{sen}^2 \mathrm{I}]\, y + [\varepsilon \operatorname{sen} \mathrm{I}] = 0,$$

mentre le 2) daranno

3) $$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{x}{y} \qquad \varepsilon_m = \frac{x}{\operatorname{sen}\varphi_0} = \frac{y}{\cos\varphi_0}.$$

Per rendere più semplici le equazioni normali conviene distribuire uniformemente le letture I sul cerchio: se questo viene diviso in $2n$ parti, e si considerano quindi n equazioni generate, per noti teoremi, le equazioni normali assumeranno la forma

$$\frac{n}{2} x - [\varepsilon \cos \mathrm{I}] = 0$$

$$\frac{n}{2} y + [\varepsilon \operatorname{sen} \mathrm{I}] = 0,$$

mentre l'errore medio dell'unità di peso assumerà la forma

4) $$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-2}} \qquad [v\,v] = [\varepsilon\,\varepsilon] - \frac{n}{2}\varepsilon_m^2.$$

[1] Cfr. W. Jordan « *Handbuch der Vermessungskunde* »: dritte Auflage, 2ᵉʳ Band, S. 170.

Applicando questo procedimento per determinare la eccentricità di reiterazione, si ottennero i risultati registrati nel seguene specchio:

Lembo	I	II	I	II	d_1	d_2	$\delta = d_1 + d_2$	$\varepsilon = d_1 - d_2$
	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	″	″	″	″
0°	3.13.1	2.59.2	3.05.6	2.47.2	13.9	18.4	32.3	— 4.5
10	1.34.0	1.20.5	2.40.8	2.20.2	13.5	20.6	34.1	— 7.1
20	2.08.5	1.56.7	3.02.3	2.43.9	11.8	18.4	30.2	— 6.6
30	1.54.7	1.42.3	3.06.1	2.48.1	12.4	18.0	30.4	— 5.6
40	1.47.6	2.34.5	2.13.8	1.55.9	13.1	19.9	33.0	— 6.8
50	2.04.1	1.49.4	2.07.6	1.49.4	14.5	18.2	32.7	— 3.7
60	3.05.4	2.50.9	2.56.3	1.38.9	14.5	17.4	31.9	— 2.9
70	2.56.8	2.43.9	2.17.3	1.58.3	13.9	19.0	32.9	— 5.1
80	1.17.9	1.04.0	2.03.5	1.46.1	13.9	19.4	33.3	— 5.5
90	1.45.7	1.32.2	1.08.1	1.49.9	13 5	18.2	31.7	— 4.7
100	2.55.6	2.41 5	1.55.9	1.37.5	14.1	18.4	32.5	— 4.3
110	1.24.3	1.10.1	2.40.0	2.23.6	14.2	16.4	30.6	— 2.2
120	1.30.0	1.15.2	1.43.5	1.25.8	14.8	17.7	32.5	— 2.9
130	2.43.5	2.29.7	3.06.9	2.49.7	13.8	17.2	31.0	— 3.4
140	1.26.7	1.11.2	2.19.2	2.02.8	15.5	16.4	31.9	— 0.9
150	1.56.7	1.40.9	2.58.3	2.44.0	15.8	14.3	30.1	+ 1.5
160	1.59.5	2.42.9	2.06.6	1.52.6	16.6	14.0	30.6	+ 2.6
170	1.36.7	1.18.1	2.09.3	1.54.5	18.6	14.8	33.4	+ 3.8

Nella 1ª colonna sono segnate le letture fatte al nonio del cerchio: questo venne quindi ruotato di 10° in 10°: le due coppie di letture dei microscopi I e II, segnate in ogni riga orizzontale, corrispondono a due posizioni del cerchio ruotate di 180° l'una rispetto all'altra. Nelle ultime due colonne, nella formazione di δ ed ε, fu trascurato il fattore $\frac{1}{2}$, avuto riguardo al fatto che le letture dei microscopi sono espresse in doppi secondi.

Questi dati dànno luogo alla formazione di 18 equazioni generate, alle quali corrispondono le due equazioni normali

$$9x + 35.942 = 0$$
$$9y - 40.214 = 0.$$

Di qui si ricava:

$$x = -3.994 \qquad x = 4.468$$

e per le 1) 3):

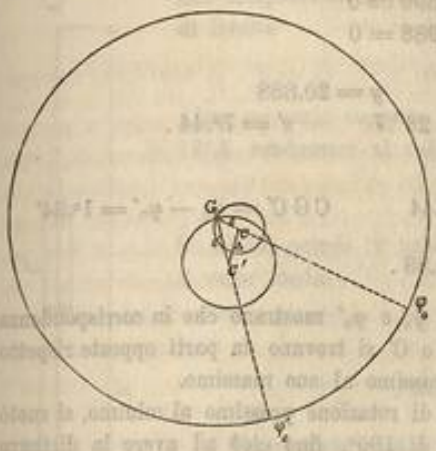
$$\varphi_0 = 318°.12' \qquad \varepsilon_m = 6''.0 \qquad \varepsilon = 1^{p}.56,$$

mentre per le 4) l'errore medio corrispondente alla determinazione dei singoli ε risulta

$$m = 1''.6.$$

Si immagini ora segnato insieme al punto C anche il punto C′ in cui l'asse di rotazione del cannocchiale incontra il piano della graduazione. Se si fa ruotare il cannocchiale unitamente al cerchio, tanto il punto G che il punto C descriveranno una circonferenza intorno a C′, ossia la posizione reciproca dei tre punti resterà immutata, ed applicando il procedimento già seguìto, si determinerà la eccentricità lineare di

rotazione e', come pure la lettura φ_0' corrispondente alla intersezione della congiungente G C′ colla graduazione. Ma se si fa ruotare il solo cerchio, C′ rimane fisso, mentre G descrive una circonferenza intorno a C: ne vengono quindi alterate tanto e' che φ_0'. Come osserva il prof. Venturi, mentre unico è il valore della eccentricità di reiterazione, infiniti risultano quelli della eccentricità di rotazione. Volendo dunque determinare quest'ultima, occorre precisare la posizione del cerchio rispetto al cannocchiale, il che p. e. si ottiene determinandone lo *zenit istrumentale*.



Per avere una chiara idea della *esattezza di centratura* del cerchio, si pensò allora di determinare la *distanza invariabile* Δ fra i due punti C e C′, ossia fra l'asse di reiterazione e l'asse di rotazione.

Si supponga di aver determinata per un dato zenit istrumentale, ossia in una determinata posizione reciproca dei tre punti C C′ G, la eccentricità e' e la lettura φ_0': nel triangolo C G C′ saranno allora noti due lati e ed e' e l'angolo compreso $\varphi_0' - \varphi_0$ e se ne potrà ricavare il terzo Δ.

Ecco i risultati ottenuti applicando questo procedimento:

Eccentricità di rotazione. — Zenit strumentale $\zeta = 158°$.

Lembo	I	II	I	II	d_1	d_2	$\delta = d_1 + d_2$	$e = d_1 - d_2$
0°	1′42″.6	1′41″.0	1′51″.6	1′28″.6	+1″.6	23″.0	24.6	−21.4
10	1.43.0	1.45.5	1.50.8	1.24.8	−2.5	26.0	23.5	−28.5
20	1.42.0	1.44.0	1.39.4	1.12.6	−2.0	26.8	24.8	−28.8
30	1.41.4	1.41.5	1.49.8	1.23.0	−0.1	26.8	26.7	−26.9
40	1.44.0	1.44.5	1.59.4	1.34.4	−0.5	25.0	24.5	−25.5
50	1.44.6	1.45.4	1.59.5	1.33.6	−0.8	25.9	25.1	−26.7
60	1.41.8	1.42.8	1.51.2	1.28.3	−1.0	22.9	21.9	−23.9
70	1.40.5	1.43.8	1.46.0	1.21.5	−3.3	24.5	21.2	−27.8
80	1.49.5	1.50.2	1.39.7	1.16.7	−0.7	23.0	22.3	−23.7
90	1.43.6	1.41.0	1.43.0	1.21.4	+2.6	21.6	24.2	−19.0
100	1.45.3	1.41.3	1.39.2	1.17.8	+4.0	21.4	25.4	−17.4
110	1.47.0	1.42.0	1.43.0	1.23.6	+5.0	19.4	24.4	−14.4
120	2.06.0	1.58.7	1.39.2	1.22.4	+7.3	16.8	24.1	−9.5
130	1.56.4	1.47.7	1.44.5	1.29.6	+8.7	15.9	24.6	−7.2
140	1.47.4	1.35.0	1.46.3	1.34.0	+12.4	12.3	24.7	+0.1
150	1.55.0	1.40.6	1.48.0	1.41.0	+14.4	7.0	21.4	+7.4
160	1.50.8	1.34.5	1.51.8	1.48.3	+16.3	3.5	19.8	+12.8
170	1.50.4	1.32.0	1.52.7	1.48.0	+18.4	4.7	23.1	+13.7

Con questi dati si formarono le due equazioni normali

$$9x + 177.596 = 0$$
$$9y - 187.988 = 0$$

e quindi si ebbe

$$x = -19.732 \qquad y = 20.888$$
$$\varphi_0' = 316^\circ.38' \qquad \varepsilon'_m = 28''.7 \qquad e' = 7^{\mu}.44 .$$

Risolvendo il triangolo C G C′ coi dati

$$CG = e = 1^{\mu}.56 \qquad C'G = e' = 7^{\mu}.44 \qquad CGC' = \varphi_0 - \varphi_0' = 1^\circ.34'$$

si ottenne

$$\Delta = 5^{\mu}.88 .$$

I valori quasi coincidenti delle letture φ_0 e φ_0' mostrano che in corrispondenza allo zenit strumentale $\zeta = 158^\circ$ i punti G e C′ si trovano da parti opposte rispetto a C, e quindi il valore trovato per e' è prossimo al suo massimo.

Per avere un valore della eccentricità di rotazione prossimo al minimo, si ruotò il cerchio graduato rispetto al cannocchiale di 180°, fino cioè ad avere la distanza zenitale $\zeta = 338^\circ$ e si rifece una seconda determinazione. Quì non se ne riportano per brevità che i risultati, i quali furono

$$\varphi_0' = 129^\circ.20' \qquad \varepsilon'_m = 14''.66 \qquad e' = 3^{\mu}.8$$

Risolvendo il triangolo C G C′ coi dati

$$e = 1^{\mu}.56 \qquad e' = 3^{\mu}.80 \qquad \varphi_0 - \varphi_0' = 188^\circ.52'$$

si ottenne

$$\Delta = 5^{\mu}.34 .$$

Si eseguì finalmente per controllo una terza determinazione della eccentricità di rotazione in corrispondenza allo zenit strumentale $\zeta = 68^\circ$, e si ottenne

$$\varphi_0' = 228^\circ.42 \qquad \varepsilon'_m = 17''.80 \qquad e' = 4^{\mu}.62$$

quindi

$$\Delta = 5^{\mu}.00 .$$

Si hanno quindi, riassumendo, i seguenti valori della distanza Δ:

$$\Delta = 5^{\mu}.9 \qquad \Delta = 5^{\mu}.3 \qquad \Delta = 5^{\mu}.0$$

e si può ritenere come suo valor medio

$$\Delta = 5^{\mu}.4 .$$

La *centratura* del cerchio zenitale è pertanto da ritenersi soddisfacentissima. La coincidenza dei tre risultati costituisce poi una prova dell'alto grado di esattezza raggiungibile, col metodo su esposto, nella determinazione della distanza fra i due assi del cerchio.

Sensibilità della livelletta zenitale.

Venne determinata col comparatore di livelle della fabbrica Bamberg. Il tamburo della vite è diviso in 60 parti aventi il valore angolare medio di 0″.997: esso veniva girato di 5 in 5 parti in guisa da far correre la bolla da un estremo all'altro

del tubo della livella. Sei serie di determinazioni eseguite nell'ottobre 1894 con una temperatura di 21° diedero per il valore angolare della parte di livella

$$2''.29 .$$

Altre sei serie eseguite nel gennaio 1895 con una temperatura di 12°.5 condussero al valore angolare

$$2''.31 .$$

Si adottò quindi in tutte le misure contenute nel presente lavoro il valor medio

$$2''.30 .$$

Flessione del cannocchiale.

Venne determinata col metodo di Bessel [1]. Si collocò il teodolite Starke sul pilastro dell'universale Bamberg nel giardino della Scuola degli Ingegneri, ed i due collimatori (per i quali si adoperarono i cannocchiali di due livelli) si sistemarono su due pilastrini, l'uno a Nord e l'altro a Sud, in guisa da potersi fare il puntamento dell'uno sull'altro attraverso il tubo vuoto del cannocchiale del teodolite (toltone cioè l'obbiettivo e l'oculare).

I primi tentativi riescirono infruttuosi, ma si riconobbe tosto dipendere ciò dal non essere i collimatori esattamente puntati a distanza infinita, e dal non essere i loro assi coincidenti in un'unica retta. Se i reticoli dei collimatori fossero esattamente situati nei piani focali delle lenti obbiettive, ossia se essi determinassero due fasci veramente cilindrici di raggi emergenti, basterebbe teoricamente che solo una parte dell'obbiettivo del teodolite fosse investita da tali cilindri luminosi per ottenere un risultato esatto. Puntando cioè prima l'un collimatore poi l'altro, l'angolo compreso fra le due visuali dovrebbe essere di 180°. Nel fatto però, come volle gentilmente farmi notare il prof. Schiaparelli, quando solo una parte dell'obbiettivo è investita, l'immagine di un punto cessa di essere simmetrica, le aberrazioni si fanno sentire in grado diverso nelle diverse direzioni, l'occhio non stima più bene il centro di essa immagine. Se oltre a ciò i reticoli a ed a' dei collimatori C e C' cadono fuori dei piani focali, p. es. più vicini alle lenti obbiettive, essi avranno per immagine dei punti A ed A' situati a distanze finite D e D' dal centro del teodolite, supposto in O. Se il centro O è elevato al di sopra degli assi dei collimatori delle quantità

[1] W. Bessel « *Eine neue Methode, die Biegung der Fernröhre astronomischer Instrumente zu bestimmen* ». Abhandlungen, 2r Band, S. 43.

h ed h' rispettivamente, puntando questi si determineranno due visuali formanti l'angolo

$$180^\circ + \frac{h}{D \text{ arc } 1''} + \frac{h'}{D' \text{ arc } 1''}.$$

Posto p. es. $h = 1^{cm}$, $D = 1000^m$ si avrebbe $\frac{h}{D \text{ arc } 1''} = 2''$. È noto come uno spostamento piccolissimo del reticolo, dal piano focale dell'obbiettivo, valga a portare la sua immagine ad una distanza finita ed anche piccola. Si comprende quindi, avuto riguardo alle ragioni suesposte, quanto scrupolo si esiga nel disporre i collimatori in condizione telescopica, e nel renderne gli assi coincidenti fra loro e con quello del cannocchiale del teodolite, per ottenere buoni risultati dalla applicazione del metodo di Bessel.

Tutte le misure furono effettuate col cerchio zenitale ad Est. Indicando allora con L_s ed L_n le letture (corrette per la livella) corrispondenti ai puntamenti del collimatore Sud e del collimatore Nord rispettivamente, con f la costante di flessione, si ha

$$2f = 180^\circ - (L_n - L_s).$$

Nel seguente specchio sono registrati i risultati ottenuti ruotando il cerchio di 10° fra l'una e l'altra determinazione. Per meglio accertare l'indipendenza delle osservazioni, di tanto in tanto veniva levato il cannocchiale del teodolite, e l'uno dei collimatori veniva spuntato, ripuntandolo poi di nuovo sull'altro.

Collimatore	L_s / L_n	$2f$	f	Collimatore	L_s / L_n	$2f$	f
S	100°.05'.33''.4			S	111°.15'.24''.3		
N	280.05.32.8	+ 0''.6	+ 0''.30	N	291.15.23.7	+ 0''.6	+ 0''.30
S	120.05.47.1			S	130.25.23.6		
N	300.05.44.6	+ 2.5	+ 1.25	N	310.25.22.0	+ 1.6	+ 0.80
S	160.12.39.7			S	150.27.06.6		
N	340.12.37.7	+ 2.0	+ 1.00	N	330.27.00.5	+ 6.1	+ 3.05
S	180.05.16.0			S	170.46.24.6		
N	0.05.17.0	— 1.0	— 0.50	N	350.46.20.1	+ 4.5	+ 2.25
S	200.07.19.7			S	210.05.23.8		
N	20.07.15.0	+ 4.7	+ 2.35	N	30.05.23.3	+ 0.5	+ 0.25
S	220.07.17.7			S	230.06.12.5		
N	40.07.20.1	— 2.4	— 1.20	N	50.06.14.7	— 2.2	— 1.10
S	240.06.36.4			S	250.03.45.7		
N	60.06.32.2	+ 3.2	+ 1.60	N	70.83.46.8	— 1.1	— 0.55
S	259.51.35.5			S	270.06.28.7		
N	79.51.31.3	+ 4.2	+ 2.10	N	90.06.24.8	+ 3.9	+ 1.95
S	280.05.31.3			S	290.06.12.8		
N	100.05.32.5	— 1.2	— 0.60	N	110.06.07.0	+ 5.8	+ 2.90

Il valore medio di tutti questi risultati è

$$f = + 0''.90.$$

L' Universale Pistor e Martins.

L' Universale Pistor, appartenente all'Istituto Geografico Militare ha entrambi i cerchi di 28 cm. di diametro e divisi di 5′ in 5′. Il cannocchiale coll' apertura di 48 mm., la distanza focale di 52 cm. e l'ingrandimento di 36 volte è eccentrico: esso presenta in tutta la sua lunghezza la forma cilindrica. Le letture ai microscopi di ogni cerchio si fanno direttamente fino al secondo.

Eccentricità del cerchio zenitale.

Si determinò la eccentricità di reiterazione del cerchio zenitale seguendo il medesimo procedimento già tenuto per il teodolite Starke. Si omettono qui per brevità le osservazioni e non si riportano che i risultati i quali furono:

$$\varphi_0 = 51^\circ.57 \qquad \varepsilon_m = 6''.73 \qquad e = 2^\mu.29 .$$

Una ricerca instituita nel modo già indicato, per determinare la distanza fra l'asse di reiterazione e quello di rotazione, non condusse a buon risultato per la seguente ragione. Qui, a differenza del teodolite Starke, dove i microscopi zenitali sono affatto indipendenti dal cannocchiale, essi sono portati da un collare che abbraccia l'albero del cannocchiale. Quando si tratta di determinare la eccentricità di reiterazione, basta girare il solo cerchio zenitale, ed i microscopi rimangono perfettamente fissi. Ma se si tratta di determinare l'eccentricità di rotazione allora bisogna girare il cannocchiale unitamente al cerchio: l'albero di quello, ruotando dentro il collare di sostegno dei microscopi, produce in questi degli spostamenti che mascherano l'andamento periodico delle loro letture. Ad ogni modo la piccolezza degli ε, ottenuti nelle varie serie di osservazioni eseguite, costituì una prova evidente della bontà di centratura del cerchio.

Sensibilità della livelletta zenitale.

Sei serie di osservazioni eseguite col comparatore di livelle Bamberg, alla temperatura di 12°.5, condussero ai seguenti valori della sensibilità:

$$2''.55 \qquad 2''.42 \qquad 2''.41 \qquad 2''.35 \qquad 2''.60 \qquad 2''.35$$

ai quali corrisponde il valor medio

$$2''.46 .$$

Queste osservazioni furono eseguite nel gennaio, subito dopo l'arrivo dello strumento da Firenze. Altre osservazioni compiute nel marzo, alla temperatnra di 22°, quando l'istrumento era installato sul pilastro d'osservazione, servendosi dello stesso cerchio zenitale, condussero ai risultati:

$$2''.53 \qquad 2''.46 \qquad 2''.38 \qquad 2''.48 .$$

Si ritenne quindi, per tutto il tempo delle osservazioni, il valor medio precedentemente determinato 2″.46.

Flessione del cannocchiale.

Fu determinata come quella del teodolite Starke, sistemando però l'Universale sul pilastro dello strumento a passaggi nel giardino della Scuola, ed avendo l'avvertenza, prima di far la lettura della livella zenitale, di portar la bolla prossimamente in centro facendola muovere sempre da sinistra verso destra, col girare opportunamente la vite che la comanda. Ecco i risultati ottenuti:

Collimatore	L_s / L_n	$2f$	f	Collimatore	L_s / L_n	$2f$	f
S	0°.14′.05″.4	+6″.2	+3″.10	S	100°.04′.16″.9	+8″.9	+4″.45
N	180.13.59.2			N	280.04.08.0		
S	10.02.40.6	+7.6	+3.80	S	110.03.11.3	+7.8	+3.90
N	190.02.33.0			N	290.03.03.5		
S	20.03.31.3	+9.0	+4.50	S	120.03.12.2	+4.6	+2.30
N	200.03.22.3			N	300.03.07.6		
S	40.03.42.9	+4.3	+2.15	S	130.03.47.0	+7.2	+3.60
N	220.03.38.6			N	310.03.39.8		
S	50.04.14.7	+6.2	+3.10	S	140.03.33.8	+8.5	+4.25
N	230.04.08.5			N	320.03.25.3		
S	60.04.26.7	+8.4	+4.20	S	150.01.19.6	+4.6	+2.30
N	240.04.18.3			N	330.01.15.0		
S	70.04.08.5	+8.9	+4.45	S	160.02.03.9	+8.4	+4.20
N	250.03.59.6			N	340.01.55.5		
S	80.02.15.1	+8.4	+4.20	S	170.02.13.8	+7.1	+3.55
N	260.02.06.7			N	350.02.06.7		
S	90.03.02.5	+5.8	+2.90	S	180.02.12.4	+8.1	+4.05
N	270.02.56.7			N	0.02 04.3		

Come media di tutti questi risultati si ottiene

$$f = +3''.61 .$$

Questo valore della flessione, tanto maggiore di quello trovato per lo Starke, si spiega colla forma allungata e cilindrica del cannocchiale del Pistor, messa a confronto con quella raccorciata e conica del cannocchiale dello Starke.

PARTE SECONDA

La livellazione geometrica.

Il livello.

Per determinare con precisione la differenza d'altezza dei due punti di osservazione, essi vennero collegati per mezzo di una livellazione geometrica.

Assogettati ad un esame comparativo i diversi livelli posseduti dal Gabinetto di Geodesia, si riconobbe a tutti superiore per precisione e per robustezza, un livello della fabbrica Troughton e Simms di tipo Egault, cioè con una sola livella fissa al supporto del cannocchiale. Per le costanti caratteristiche dello strumento, si trovarono i seguenti valori:

Diametro dell'obbiettivo	40 mm.
Distanza focale	313 mm.
Ingrandimento	22 volte
Valore angolare della parte di livella	6″.85

Il reticolo presenta un solo filo orizzontale per le letture delle mire.

È noto come un livello del tipo Egault non presenti modo di constatare direttamente la eguaglianza dei diametri dei collari. Per esaminare lo strumento anche sotto questo aspetto, si fece costruire una apposita armatura da sovrapporsi ai collari, adattandovi la livella zenitale del teodolite Starke. Con questa venne eseguita una serie di letture, sovrapponendo l'armatura ai due collari ed invertendola, ed invertendo alternativamente anche il cannocchiale sui suoi appoggi. Distinguendo le due posizioni del cannocchiale colle scritture — Oculare sinistra — Oculare destra — indicando le inclinazioni delle generatrici d'appoggio della livella nei due casi con i_s i_D, con s e d le letture corrispondenti agli estremi sinistro e destro della bolla, si ha:

Oculare sinistra . . . . . $i_s = \frac{1}{4} \{(d_1 + d_2) - (s_1 + s_2)\}$

Oculare destra . . . . . $i_D = \frac{1}{4} \{(d_3 + d_4) - (s_3 + s_4)\}$

La formola che dà la differenza dei raggi dei collari diventa [1]:

$$\frac{r_1 - r}{\mathrm{L\,arc}\,1''} = \frac{1}{2}(i_s - i_D)\frac{\operatorname{sen}\lambda \operatorname{sen} g}{\operatorname{sen}\lambda + \operatorname{sen} g},$$

[1] Cfr. Herr und Tinter « *Lehrbuch der sphärischen Astronomie in ihrer Anwendung auf geographische Ortsbestimmung* », pag. 210 e seg.

essendo L la lunghezza della livella (fra i punti di appoggio), λ l'angolo fra le tangenti ai collari nei punti d'appoggio della livella, g l'angolo fra le tangenti ai collari nei loro punti d'appoggio sul supporto.

Applicando questo procedimento si trovò:

$i_n - i_n = 7''.06$ L = 201 mm. $\lambda = g = 90$

$r_1 - r = 0^{mm}.0017$.

Questo risultato è da ritenersi pienamente soddisfacente. Ad ogni modo nelle operazioni riferite più sotto venne eliminata ogni influenza dovuta alla ineguaglianza dei collari, livellando esclusivamente dal mezzo, ed effettuando sempre la inversione del cannocchiale sugli appoggi.

Le mire: loro comparazione.

Non possedendo delle mire atte ad eseguire una livellazione di precisione, venne affidata la loro costruzione alla officina *La Filotecnica* diretta dall'ing. A. Salmoiraghi. Esse sono a cassetta, cioè a sezione rettangolare cava: la faccia anteriore graduata, è formata da una tavola d'abete; le facce laterali e posteriori sono in mogano. La graduazione è a scacchi alternati bianchi e neri, procedenti di centimetro in centimetro e numerati ogni 10 centimetri, ed è doppia, cioè da una parte la numerazione procede dal basso in alto da 0 a 300 cm., dall'altra procede dall'alto al basso. Essa è fatta in modo che ad uno scacco bianco da una parte corrisponda uno scacco nero dall'altra, cosicchè il filo del cannocchiale si proietta sempre su due scacchi di diverso colore, permettendo di fare due letture aventi una somma pochissimo diversa da 300 cm. Questa disposizione ha per oggetto di evitare errori grossolani di lettura. Per disporre verticalmente la mira serve una livella sferica applicata alla sua parete posteriore, ed a mantenerla tale si prestano egregiamente due bastoni a snodatura sferica pure applicati alla parete posteriore e che si appoggiano al terreno. Le mire portano inferiormente uno sperone di ferro terminato a foggia di segmento sferico da introdursi in una apposita cavità, pure di forma sferica con egual raggio, praticata in uno zoccolo di ghisa.

Questo è del peso di circa 3 Kg., ed è munito di tre punte colle quali, durante la livellazione, viene conficcato nel terreno. Per tal modo viene eliminato ogni pericolo di spostamento della mira in altezza, allorchè essa viene girata su se stessa, per passare dalla battuta alla controbattuta.

Avuto riguardo al forte dislivello da superarsi (circa 900 m.) ed alle notevoli variazioni di lunghezza che le mire subiscono, specialmente per effetto delle condizioni igrometriche dell'atmosfera, variazioni che spesso raggiungono un terzo di millimetro per metro durante una stagione [1], si decise di determinare giorno per giorno durante tutto il periodo della livellazione, la lunghezza del *metro medio* delle mire. Si intende con questa denominazione la media delle lunghezze dei vari metri determinati dalla graduazione. Si assunse perciò come *metro base* la lunghezza dell'intervallo compreso fra i tratti 100^{cm} e 200^{cm} della graduazione, misurato sempre nello stesso modo (ad un millimetro di distanza dalla linea mediana della mira, dalla parte della numerazione crescente dal basso all'alto), e si determinò la differenza fra il metro base ed il metro medio. Ammesso che le variazioni di lunghezza delle mire avvengano uniformemente in tutta la loro estensione, bastava allora determinare giornalmente la lunghezza del metro base per avere anche quella del metro medio.

Per eseguire queste operazioni si ricorse ad uno dei piccoli comparatori fatti costruire dalla Giunta Superiore del Catasto e distribuiti alle Direzioni Compartimentali del Catasto. Uno di essi venne acquistato da questo Gabinetto di Geodesia. Esso consiste in un regolo di ottone poco più lungo di un metro, smussato lungo uno spigolo e graduato in cm. da 0 fino a 100, col primo e l'ultimo cm. suddiviso in mm. Due sostegni scorrevoli lungo il regolo portano due microscopi micrometrici coi fili abbinati dei quali, mobili per mezzo di una rotella divisa in 100 parti, si puntano con esattezza tanto i tratti della graduazione del regolo, quanto quelli di un altro metro o di una mira, cui il regolo venga sovrapposto. Due maniglie facilitano il maneggio del comparatore: una cassetta, nella quale esso viene fissato per mezzo di due viti, ne permette il trasporto.

Occorreva prima di tutto conoscere l'*equazione* di questo comparatore catastale M, ed a tal uopo esso venne trasportato nell'Ufficio metrico centrale e confrontato col metro Ginevrino d'ottone n. 26, facendo uso del comparatore Gambey. Si trovò, come risultato della comparazione,

$$M = M_{26} + 41^{\mu}.$$

L'equazione del metro Ginevrino è

$$M_{26} = 1^{m} - 79^{\mu}.7, \text{ (a } 0^{\circ})$$

e perciò si ottenne per l'equazione del metro catastale

$$M = 1^{m} - 38^{\mu}.7 \qquad \text{(a } 0^{\circ})$$
$$M = 1^{m} - 38^{\mu}.7 + 18^{\mu}.8\, t \text{ (a } t^{\circ}).$$

Rimaneva a determinare il valore della parte micrometrica dei due microscopi I e II annessi al metro catastale. Perciò, servendosi dello stesso Comparatore Gambey, si determinò la lunghezza del suo primo e del suo ultimo millimetro, ottenendosi:

[1] Vedi per es. il « *Bericht über das Präcisions-Nivellement in Europa* », von A. von Kalmar. Verhandlungen der zehnten allgemeinen Conferenz der internationalen Erdmessung, pag. 165.

primo millimetro $= 401^{p}.2$ del micrometro GAMBEY
ultimo " $= 400.0$ " " "

La parte del micrometro GAMBEY ha il valore

$$1^{p} = 2^{\mu}.4807 ,$$

epperò ne risultò:

primo millimetro del metro catastale $= 995^{\mu}.2$,
ultimo " " " $= 992^{\mu}.3$.

Si puntarono allora i tratti estremi del primo millimetro col microscopio I, quelli dell'ultimo millimetro col microscopio II e si ottenne:

primo millimetro $= 196^{p}$ del microscopio I
ultimo " $= 202^{p}$ " " II

da cui si ricavarono finalmente i valori cercati:

$$\text{Valore della parte del microscopio I} = \frac{995^{\mu}.2}{196} = 5^{\mu}.1 ,$$

$$\text{" " " " II} = \frac{992^{\mu}.3}{202} = 4^{\mu}.9 .$$

In tutte le comparazioni seguenti si ritenne pertanto il valore comune della parte dei due microscopi $= 5^{\mu}$.

Con questi dati vennero eseguiti i seguenti confronti fra il metro base ed i metri singoli di ciascuna delle due mire, le quali vengono distinte colle scritture N. 1 e N. 2 corrispondentemente alle due cifre 1 e 2 stampate col punzone al loro piede:

Mira N. 1					Mira N. 2				
	cm cm			mm		cm cm			mm
Intervallo	20-120 =	Metro base		— 0.06	Intervallo	20-120 =	Metro base		+ 0.02
"	30-130 =	"	"	— 0.13	"	30-130 =	"	"	+ 0.05
"	40-140 =	"	"	— 0.14	"	40-140 =	"	"	(1)
"	50-150 =	"	"	— 0.18	"	50-150 =	"	"	+ 0.01
"	60-160 =	"	"	— 0.04	"	60-160 =	"	"	+ 0.13
"	70-170 =	"	"	— 0.11	"	70-170 =	"	"	+ 0.17
"	80-180 =	"	"	— 0.18	"	80-180 =	"	"	+ 0.13
"	90-190 =	"	"	— 0.04	"	90-190 =	"	"	+ 0.07
"	100-200 =	"	"	0.00	"	100-200 =	"	"	0.00
"	110-210 =	"	"	— 0.04	"	110-210 =	"	"	+ 0.05
"	120-220 =	"	"	— 0.12	"	120-220 =	"	"	+ 0.14
"	130-230 =	"	"	— 0.23	"	130-230 =	"	"	+ 0.13
"	140-240 =	"	"	— 0.17	"	140-240 =	"	"	+ 0.24
"	150-250 =	"	"	— 0.20	"	150-250 =	"	"	+ 0.08
"	160-260 =	"	"	— 0.20	"	160-260 =	"	"	+ 0.06
"	170-270 =	"	"	— 0.05	"	170-270 =	"	"	+ 0.02
"	180-280 =	"	"	— 0.04	"	180-280 =	"	"	+ 0.01
"	190-290 =	"	"	— 0.17	"	190-290 =	"	"	+ 0.18
Metro medio = Metro base — 0.13					Metro medio = Metro base + 0.09				

(1) Un tratto sbavato della mira rende incerto il puntamento.

Si riassumono ora i risultati delle comparazioni eseguite in campagna, in ciascun giorno di osservazione, per determinare la lunghezza del metro base, facendo uso del piccolo comparatore catastale sopra studiato. Queste comparazioni si effettuavano nei locali stessi che servivano di deposito agli strumenti (ville, case coloniche, cascine ecc.) avendo ben riguardo che il comparatore fosse in equilibrio di temperatura col termometro annesso.

Lunghezze del metro base.

	Mira N. 1	Mira N. 2	Temperatura
	m mm	m mm	°
21 marzo 1895	1 + 0.05	1 — 0.16	14.6
5 aprile	+ 0.05	— 0.23	16.3
6 »	+ 0.06	— 0.20	16.4
22 »	+ 0.05	— 0.18	17.6
25 »	+ 0.06	— 0.27	15.2
26 »	+ 0.10	— 0.17	15.8
28 »	+ 0.09	— 0.22	18.2
3 maggio	+ 0.06	— 0.23	15.8
6 »	+ 0.01	— 0.26	18.3
19 »	+ 0.09	— 0.21	15.0
20 »	+ 0.10	— 0.16	16.0
23 »	+ 0.11	— 0.20	16.2
24 »	+ 0.05	— 0.26	16.2
4 giugno	+ 0.08	— 0.27	19.7
11 »	+ 0.12	— 0.17	18.0

Applicando a questi numeri le correzioni precedentemente determinate per passare dal metro base al metro medio, si ottengono le seguenti

Lunghezze del metro medio.

	Mira N. 1	Mira N. 2	Media	Temperatura
	m mm	m mm	m mm	°
21 marzo	1 — 0.08	1 — 0.07	1 — 0.075	14.6
5 aprile	0.08	0.14	0.110	16.3
6 »	0.07	0.11	0.090	16.4
22 »	0.08	0.09	0.085	17.6
25 »	0.07	0.18	0.125	15.2
26 »	0.03	0.08	0.055	15.8
28 »	0.04	0.13	0.085	18.2
3 maggio	0.07	0.14	0.105	15.8
6 »	0.12	0.17	0.145	18.3
19 »	0.04	0.12	0.080	15.0
20 »	0.03	0.07	0.050	16.0
23 »	0.02	0,11	0.065	16.2
24 »	0.08	0.17	0.125	16.2
4 giugno	0.05	0.18	0.115	19.7
11 »	0.01	0.08	0.045	18.0

È coi numeri della penultima colonna che vennero ridotte alla vera unità di lunghezza le differenze di livello determinate in ciascun giorno di osservazione. Non è dato però rilevare da questi numeri che, durante il periodo delle osservazioni, le mire abbiano subìto una variazione graduale di lunghezza.

Le operazioni di livellazione.

Le operazioni di livellazione, iniziate il 21 marzo, ebbero termine l'11 giugno, procedendo interrottamente, come risulta dal precedente specchio delle comparazioni, dipendentemente dalle esigenze dell'insegnamento. Il punto di partenza della livellazione fu il caposaldo stabilito nel luglio 1891, dall'Istituto Geografico Militare, sul secondo gradino della porta d'ingresso alla Scuola degli Ingegneri. La quota del caposaldo, come risulta da una comunicazione dell'Istituto, è

$$47^m.910:$$

essa è riferita al livello medio del mare determinato dal mareografo di Genova, e proviene dalla livellazione di precisione eseguita lungo la linea Genova-Pisa-Livorno-Civitavecchia-Roma. L'Istituto Geografico non ha ancora pubblicato la Compensazione de' suoi poligoni di livellazione, la quale avrà per effetto di far subire una piccola modificazione alla quota precedente: ma ciò non ha importanza nel caso attuale, in cui si trattava solo di determinare una *differenza* di livello. Il caposaldo di chiusura della livellazione venne stabilito sulla soglia della chiesetta di M. Cavo.

La linea livellata fu la più breve possibile: cioè uscendo da Porta S. Giovanni in Laterano si seguì la via Tuscolana fino a Torre di Mezzavia, quindi la via Anagnina fino al Ponte degli Squarciarelli, la strada di Rocca di Papa fino al piazzale Regina Margherita, la strada che circuisce il paese ad Ovest fino ai Campi di Annibale, e di qui la via mulattiera fino alla sommità del M. Cavo. Questo percorso risultò di circa 30 Km., fu livellato in doppio in 103 ore, epperò venne impiegata in media $1^h.45^m$ per la livellazione semplice di un tratto di un Km.

Tutta la linea venne divisa in tratti per mezzo di capisaldi intermedi consistenti in circolini incisi sopra paracarri, colonnine chilometriche, soglie di case ecc., ed ognuno di questi tratti veniva livellato in doppio, in uno stesso giorno, scambiandosi gli operatori (Reina e Cicconetti). Per circoscrivere i possibili errori e poterli eliminare senza perdite soverchie di tempo, si moltiplicarono i capisaldi intermedi o provvisorî in guisa da averne uno ogni otto o dieci stazioni circa, ma questi vennero poi soppressi in guisa da avere tratti della lunghezza media di circa un Km.

In pianura la distanza fra lo strumento e le mire fu sempre tenuta di 50 m.; in terreno accidentato essa veniva accorciata solo quanto era necessario per poter *battere* sulla mira. Tali distanze venivano misurate a passi, ed a tale oggetto ciascun operatore, dopo aver determinata la lunghezza del proprio passo normale con ripetute

prove preliminari, si era formata una tabelletta per la trasformazione dei passi in metri. La livellazione fu sempre eseguita dal mezzo, ed al principio di ogni giornata di lavoro si ebbe cura di accertarsi della esatta rettificazione del livello e delle mire.

Ecco come procedevano le operazioni. Mentre il primo operatore, misurando le distanze nel modo ora detto, faceva collocare le mire, il secondo collocava in stazione e correggeva il livello, leggeva quindi nel cannocchiale la graduazione diretta e la complementare della *mira indietro*, e subito dopo la graduazione della livella in corrispondenza ai due estremi della bolla; queste letture venivano registrate dal primo operatore, tornato nel frattempo presso allo strumento, il quale verificava anche subito se la somma delle due letture complementari non differiva da 3^m per più di uno o due mm. Invertito il cannocchiale sui suoi appoggi, si rifaceva la medesima serie di letture sulla *mira indietro* e sulla livella. Ruotato quindi lo strumento intorno all'asse verticale, si facevano due serie di letture simili, separate da una inversione del cannocchiale sugli appoggi, battendo la *mira avanti*. Alle letture dirette della mira (fatte sulla graduazione numerata dal basso in alto) veniva poi applicata la correzione data in grandezza ed in segno dalla formola

$$\frac{1}{2}\, p\, (oc - obb)\, D \text{ arc } 1'' ,$$

dove $p = 6''.85$ rappresenta il valore angolare della parte di livella, D la distanza delle mire dallo strumento in metri, mentre *oc* ed *obb* rappresentano le letture agli estremi della bolla situati verso l'oculare e verso l'obbiettivo rispettivamente. Il calcolo di questa formola era facilitato dall'uso di una tabelletta a doppia entrata, corrispondentemente ai diversi valori di D e della differenza *oc-obb*.

Si riproducono qui ad esempio le letture fatte in una stazione.

MIRA	DISTANZA DELLA MIRA		LETTURE DELLA MIRA			LIVELLA				LETTURA della mira corretta	
	passi	metri	diretta	complementare	compensata	Oc	Obb	Oc—Obb	Correz.		
			m	m	m	p	p	p	mm	m	
indietro	31	28	2.447	0.553	2.4470	6.0	7.0	— 1.0	— 0.5	2.4465	2.4471
			2.448	0.553	2.4475	6.6	6.2	+ 0.4	+ 0.2	2.4477	
avanti	32	29	0.211	2.789	0.2110	5.0	7.8	— 2.8	— 1.3	0.2097	0.2092
			0.211	2.789	0.2110	4.0	8.7	— 4.7	— 2.2	0.2088	

I risultati di tutta la livellazione sono riassunti nello specchio seguente, dove in testa ad ogni colonna si indica il significato di quanto viene registrato nella colonna stessa. Qui si aggiunge soltanto che i numeri delle stazioni registrati nella colonna (6) si riferiscono alla sola percorrenza in andata dei singoli tratti, e che la trasformazione delle differenze di livello della colonna (9) in quelle corrispondenti della colonna (10) venne effettuata coi valori del metro medio delle mire, ottenuti per ciascun giorno di osservazione e riassunti precedentemente (vedi pag. 139).

Num. progr. dei capisaldi (1)	Distanze progressive dalla Scuola Ing. (2)	LOCALITÀ OVE SONO STABILITI I CAPISALDI (3)	Tratto fra i capisaldi (4)	Lunghezza del tratto in Chilometri (5)	Numero delle stazioni (6)	Differenze di livello osservate in { andata / ritorno (7)	Scostamenti fra andata e ritorno (8)	Differenze di livello medie in unità delle mire (9)	Differenze di livello ridotte alla vera unità di lunghezza (10)	Quote dei capisaldi (11)
1	0	Sul 2° gradino a sinistra della porta d'ingresso alla Scuola degl'Ingegneri.								m 47.9100
2	0.540	Sul marciapiede della strada in prossimità del Colosseo.	1 — 2	0.540	9	m — 20 { ,5455 / ,5455	mm 0.0	m — 20.5455	m — 20.5440	27.3660
3	1.047	Sopra uno zoccolo in travertino a metà della via di S. Giovanni.	2 — 3	0.507	5	+ 3 { ,0765 / ,0781	— 1.6	+ 3.0773	+ 3.0770	30.4430
4	1.767	Sopra un masso di granito all'angolo N-E del palazzo Laterano.	3 — 4	0.720	9	+ 17 { ,5559 / ,5557	+ 0.2	+ 17.5558	+ 17.5542	47.9972
5	2.509	Sul marciapiede al punto di diramazione della via Tuscolana dalla via Appia nuova.	4 — 5	0.742	9	— 13 { ,1059 / ,1057	+ 0.2	— 13.1058	— 13.1047	34.8925
6	3.499	Sopra un paracarro sotto il ponte della ferrovia Roma-Civitavecchia.	5 — 6	0.990	11	+ 0 { ,5942 / ,5973	— 3.1	+ 0.5957	+ 0.5957	35.4882
7	4.945	Sopra un paracarro di fronte alla vigna del Pigno.	6 — 7	1.446	16	+ 13 { ,0269 / ,0302	— 3.3	+ 13.0285	+ 13.0273	48.5155
8	6.435	Sopra il parapetto di un muricciolo di fronte alla casa cantoniera.	7 — 8	1.490	19	— 4 { ,3246 / ,3263	— 1.7	— 4.3254	— 4.3250	44.1905
9	7.795	Sopra un paracarro poco prima del Km. VI.	8 — 9	1.360	14	+ 8 { ,6792 / ,6830	— 3.8	+ 8.6803	+ 8.6803	52.8708
10	8.445	Sopra una pietra di selce a sinistra di un ponte.	9 — 10	0.650	7	— 2 { ,8073 / ,8059	+ 1.4	— 2.8063	— 2.8063	50.0645
11	8.990	Sulla sommità della colonnina del Km. VII.	10 — 11	0.544	6	+ 3 { ,6889 / ,6939	— 5.0	+ 3.6914	+ 3.6911	53.7556
12	9.990	» » » » » VIII.	11 — 12	1.000	11	+ 9 { ,1735 / ,1744	— 0.9	+ 9.1739	+ 9.1731	62.9287
13	10.990	» » » » » IX.	12 — 13	1.000	11	+ 11 { ,6936 / ,6980	— 4.4	+ 11.6958	+ 11.6948	74.6235
14	11.990	» » » » » X.	13 — 14	1.000	11	+ 10 { ,4481 / ,4459	+ 2.2	+ 10.4470	+ 10.4461	85.0696
15	12.990	» » » » » XI.	14 — 15	1.000	10	+ 9 { ,7722 / ,7707	+ 1.5	+ 9.7714	+ 9.7706	94.8402

Num. progr. dei capisaldi (1)	Distanze progressive dalla Scuola Ing. (2)	LOCALITÀ OVE SONO STABILITI I CAPISALDI (3)	Tratto fra i capisaldi (4)	Lunghezza del tratto in Chilometri (5)	Numero delle stazioni (6)	Differenze di livello osservate in andata / ritorno (7)	Scostamenti fra andata e ritorno (8)	Differenze di livello medie in unità delle mire (9)	Differenze di livello ridotte alla vera unità di lunghezza. (10)	Quote dei capisaldi (11)
						m	mm	m	m	m
16	13.990	Sulla sommità della colonnina del Km. XII.	15 — 16	1.000	12	+ 15 ,7454 / ,7431	+ 2.3	+ 15.7442	+ 15.7426	110.5828
17	14.990	» » » » » XIII.	16 — 17	1.000	17	+ 20 ,1516 / ,1499	+ 1.7	+ 20.1507	+ 20.1487	130.7315
18	15.990	» » » » » XIV.	17 — 18	1.000	17	+ 35 ,1149 / ,1143	+ 0.6	+ 35.1146	+ 35.1118	165.8433
19	16.990	Sul piede » » » XV.	18 — 19	1.000	29	+ 65 ,2497 / ,2465	+ 3.2	+ 65.2481	+ 65.2429	231.0862
20	17.990	Sulla sommità » » » XVI.	19 — 20	1.000	23	+ 45 ,9933 / ,9947	— 1.4	+ 45.9940	+ 45.9900	277.0762
21	19.447	Sopra un capitello antico all'angolo di via Cicerone in Grotta Ferrata.	20 — 21	1.457	31	+ 55 ,4666 / ,4639	+ 2.7	+ 55.4652	+ 55.4602	332.5364
22	21.022	Sulla colonnina in travertino indicante la via di Frascati sul ponte degli Squarciarelli.	21 — 22	1.575	29	+ 31 ,2130 / ,2130	0.0	+ 31.2130	+ 31.2102	363.7466
23	22.301	Sulla soglia del cancello d'ingresso alla vigna Fondi.	22 — 23	1.279	23	+ 51 ,3389 / ,3346	+ 4.3	+ 51.3367	+ 51.3321	415.0787
24	23.213	Sopra un paracarro all'angolo della cascina Botti.	23 — 24	0.912	19	+ 42 ,8474 / ,8471	+ 0.3	+ 42.8472	+ 42.8434	457.9221
25	25.277	Sul primo gradino del fienile Ruffini.	24 — 25	2.064	67	+ 144 ,4303 / ,4332	— 2.9	+ 144.4317	+ 144.4187	602.3408
26	25.921	Sul quarto gradino della fontana nella piazza Margherita in Rocca di Papa.	25 — 26	0.644	19	+ 39 ,1434 / ,1400	+ 3.4	+ 39.1417	+ 39.1382	641.4790
27	26.513	Sul primo gradino dell'ingresso alla Villa Calzone.	26 — 27	0.592	15	+ 34 ,6707 / ,6715	— 0.8	+ 34.6711	+ 34.6687	676.1477
28	27.918	Sopra un termine di granito allo sbocco della strada militare nei Campi d'Annibale.	27 28	1.405	44	+ 78 ,7061 / ,7065	— 0.4	+ 78.7063	+ 78.7068	754.8485
29	29.065	Sul primo gradino della Cappella detta la Madonnina di fianco alla via mulatt. di M. Cavo.	28 — 29	1.147	58	+ 122 ,6471 / ,6499	— 2.8	+ 122.6485	+ 122.6399	877.4884
30	29.749	Sulla soglia della chiesa di Monte Cavo.	29 — 30	0.684	34	+ 72 ,3975 / ,3982	— 0.7	+ 72.3978	+ 72.3927	949.8811

Partendo dai due capisaldi estremi della livellazione, vennero determinate le quote dei pozzetti dei barometri e le quote dei piani superiori dei pilastri di osservazione, ottenendosi:

Quota del pozzetto del barometro a M. Cavo (zero della graduazione)	$956^m.829$
Quota del pozzetto del barometro a Roma	$58^m.802$
Differenza di livello fra i due barometri	$898^m.027$
Quota del piano superiore del pilastro d'osservazione a M. Cavo	$966^m.997$
» » » » » Roma .	$68^m.190$

Precisione della livellazione.

La prima conferenza generale della Associazione geodetica internazionale (Berlino 1864) stabiliva che *l'errore medio chilometrico* di una livellazione di precisione non dovesse eccedere 3 mm., con una tolleranza fino a 5 mm. in terreno sfavorevole. La nostra linea livellata poteva dividersi in due grandi tratti: il primo, da Roma fino al ponte degli Squarciarelli, avuto riguardo ai piccoli dislivelli superati ed alla bontà della strada, era da considerarsi come tracciato in terreno favorevole, mentre il secondo con un dislivello di circa 600 metri, e colla strada in condizioni molto meno buone, poteva ritenersi come segnato in terreno sfavorevole. Attesa però la stabilità colla quale gli zoccoli di sostegno delle mire poterono in ogni caso essere fissati al terreno, e tenuto conto delle considerazioni che verranno svolte fra poco, si decise di fare il calcolo dell'errore medio chilometrico su tutta intera la linea livellata.

Applicando la nota formola

$$m_k = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}\left[\frac{d\,d}{l}\right]},$$

che dà l'errore medio chilometrico di una linea livellata in doppio, divisa in n tratti aventi le lunghezze l (espresse in Chilometri), essendo d gli scostamenti avuti in ogni tratto fra andata e ritorno (registrati nella colonna (8) del precedente specchio), si ottiene

$$m_k = 1^{mm}.25\,.$$

L'errore medio della differenza di livello determinata fra i due estremi della linea, determinato dalla formola

$$M = m_k\sqrt{L}\,,$$

ove L rappresenta la lunghezza di tutta la linea, espressa in Chilometri, risulta quindi

$$M = 6^{mm}.83\,.$$

In una bella ricerca sperimentale sulla precisione nell'apprezzamento delle

mire, Reinhertz dimostra [1] che l'errore *relativo* di lettura μ' è da considerarsi come una funzione della grandezza apparente U dell'unità della scala, della grandezza cioè di detta unità nel piano della visione distinta. Dall'esame di molte osservazioni proprie e di altri, eseguite con procedimenti e strumenti diversi, egli ricava per tale funzione la seguente espressione analitica

$$\mu' = \frac{a}{\sqrt{U}}.$$

dove a è una costante il cui valore dipende dal metodo di osservazione, dall'osservatore e dallo strumento, ma supponendo che la lettura si faccia per apprezzamento dei due intervalli in cui il filo del cannocchiale divide una unità della scala, si può ritenere con sufficiente accordo

$$a = 0.08\,.$$

Ritenendo in media $0^m.25$ per la distanza del piano della visione distinta, indicando con u la grandezza assoluta dell'unità della scala, con D la distanza della mira in metri, con I l'ingrandimento del cannocchiale, si ha

$$U = \frac{0.25\,u}{D}\,I\,.$$

L'errore *assoluto* di lettura μ, espresso in parti dell'unità della mira, risulta quindi

$$\mu = \mu' u = \frac{au}{\sqrt{\frac{0.25\,u}{D}\,I}} = 2a\sqrt{\frac{u\,D}{I}}\,.$$

Sostituendo per u ed I i valori corrispondenti all'apparato che si considera, si trova:

a) $$\mu = C\sqrt{D}\,,$$

cioè l'errore *assoluto* di lettura cresce come la radice quadrata della distanza della mira.

Da precedenti ricerche di Reinhertz [2] risultò che l'errore nella determinazione di una inclinazione per mezzo della livella, quando si leggono gli estremi della bolla, può ritenersi dato da

$$0.20\sqrt{p''},$$

essendo p'' il valore della parte in secondi, e ritenendo che la parte abbia per lunghezza la *linea di Parigi* ($2^{mm}.26$).

L'errore proveniente dalla livella, nella lettura delle mire, sarà quindi misurato da

$$\lambda = 0.20\sqrt{p''}\ \text{arc}\ 1''\ D\,,$$

ove D deve essere espresso in mm. se anche λ si vuole espresso in mm.

[1] « *Mittheilung einiger Beobachtungen über die Schätzungsgenauigkeit an Maassstäben, insbesondere an Nivellirscalen* ». Zeitschrift für Vermessungswesen. Bd. XXIII, XXIV, 1894-95.

[2] « *Mittheilungen über einige Beobachtungen an Libellen* ». Zeitschr. für Verm. Bd. XX, 1891

L'errore complessivo nell'apprezzamento delle mire, od errore di battuta, sarà pertanto

$$m = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} + \sqrt{0.04\, p'' \operatorname{arc}^2 1''\, D^2 + 4a^2 \frac{u D}{I}}\,;$$

ma occorre però avvertire che questa espressione è puramente teorica, facendosi qui astrazione da spostamenti in altezza dello strumento o delle mire, da deviazioni di queste dalla verticale, da rifrazioni ecc.

Ponendo in queste formole, in corrispondenza al caso nostro,

$$u = 10^{mm} \qquad I = 22 \qquad p'' = 6''.85$$

si ottennero i seguenti errori, per diversi valori della distanza D,

	$D = 50^m$	$D = 30^m$	$D = 20^m$	$D = 10^m$
	mm	mm	mm	mm
λ	0.127	0.076	0.051	0.025
μ	0.763	0.591	0.482	0.341
m	0.77	0.60	0.48	0.34

Questi dati mostrano come l'errore dovuto alla livella sia pressochè insensibile, e l'errore di apprezzamento delle mire sia quasi esclusivamente costituito dall'errore di lettura.

Ora è facile vedere che, in queste condizioni, l' errore medio chilometrico è indipendente dalla lunghezza D delle battute e quindi dal loro numero. Infatti la *a*) si potrà scrivere

$$m = C\sqrt{D}\,:$$

supponendo tutte le battute eguali, il numero di esse contenuto in un chilometro sarà

$$n = \frac{1000}{D}\,;$$

l' errore medio chilometrico di una livellazione semplice sarà quindi

b) $$m\sqrt{n} = C\sqrt{1000}\,,$$

indipendente cioè da D.

Questa è la ragione alla quale si accennava poc'anzi, che ci indusse cioè, nel calcolo dell' errore chilometrico, a riunire in un unico tratto le due porzioni della linea livellata, astraendo dal fatto che nell' una di esse le battute erano per necessità tanto più brevi che nell' altra.

L' errore medio chilometrico teorico di una livellazione eseguita in doppio, per la *b*) sarà

$$m_k = \frac{C\sqrt{1000}}{\sqrt{2}}\,.$$

Sostituendo in questa formola le costanti del nostro apparato si trova

$$m_k = 2^{mm}.41\,,$$

valore molto maggiore di quello precedentemente calcolato $m_k = 1^{mm}.25$, come risultante della effettiva livellazione. Ciò prova che nella operazione di livellazione si è verificata una compensazione molto più completa di quanto non fosse dato prevedere in base alla teoria, e che, forse, la costante di Reinhertz $a = 0.08$, adoperata nel precedente calcolo, è un po' troppo elevata.

PARTE TERZA

Determinazione del coefficiente medio di rifrazione.

Programma delle osservazioni e metodo di calcolo.

Era nostra intenzione di compiere, fra le due stazioni di Roma e di M. Cavo, tre serie di osservazioni zenitali coniugate contemporanee ad intervalli di almeno un mese l'una dall'altra, per mettere in evidenza l'influenza delle condizioni climateriche sulla rifrazione. Ogni serie avrebbe dovuto avere la durata di tre giorni, ed in ciascun giorno le osservazioni dovevano essere compiute con continuità dal mattino fino a mezzogiorno e dalle 14 al tramonto. Questo programma non potè però venire attuato, come risulta dagli specchi seguenti, a cagione delle condizioni atmosferiche persistentemente cattive. Le pioggie quasi giornaliere dei mesi di marzo, aprile e maggio, le nebbie avvolgenti quasi in permanenza la cima del M. Cavo ed i venti soverchiamente impetuosi, non permisero che di fare osservazioni interrotte, malgrado l'osservatore di M. Cavo (Cicconetti) per intere settimane restasse sul posto pronto a fare i suoi puntamenti. L'unico giorno completo di osservazioni fu il 1° luglio.

Essendo visibile da M. Cavo una larga estensione di mare, si erano incluse nel programma delle osservazioni, anche delle misure zenitali dell'orizzonte marino, per avere una nuova determinazione indipendente del coefficiente di rifrazione, ma la caligine permanentemente dominante all'orizzonte non permise di fare che scarsissime osservazioni, affatto insufficienti allo scopo.

Tanto a Roma quanto a M. Cavo, durante la misura delle distanze zenitali, vennero eseguite, di mezz'ora in mezz'ora, delle osservazioni barometriche, termometriche e psicrometriche. A Roma servì il barometro Fortin del Gabinetto, situato in una sala interna, a M. Cavo quello dell'osservatorio. Di entrambi fu determinata in precedenza la costante di correzione complessiva (per la scala e per la capillarità) per mezzo di una campionatura eseguita dal dott. Palazzi nell'Osservatorio del Collegio Romano. La temperatura e lo stato igrometrico dell'aria vennero determinati in entrambe le stazioni con un psicrometro August. I termometri annessi al psicrometro di Roma furono campionati per la circostanza nell'Ufficio metrico: quelli di M. Cavo lo erano già stati prima. Le riduzioni a 0° delle colonne barometriche ed il calcolo delle tensioni del vapor acquoso si fecero colle tavole adottate dall'Ufficio centrale di Meteorologia [1]. Delle osservazioni meteorologiche a M. Cavo e delle loro riduzioni volle gentilmente incaricarsi il sig. Luchesi.

[1] Ministero di Agric. Ind. e Comm. « *Tavole ad uso della Meteorologia* » 2ª ediz., Roma 1875.

Se si indicano con z_1 e z_2 le distanze zenitali ellissoidiche reciproche e contemporanee misurate à Roma ed a M. Cavo, con γ l'angolo di convergenza delle normali ellissoidiche nelle due stazioni, con k_1 k_2 i due coefficienti di rifrazione locali, con k il coefficiente medio di rifrazione, si ha [1]:

$$1 - k = \frac{z_1 + z_2 - 180^\circ}{\gamma}. \tag{1}$$

L'angolo γ viene determinato dalla formola

$$\gamma = \frac{s}{\varrho \operatorname{arc} 1''}, \tag{2}$$

dove s è la distanza geodetica fra le due stazioni, misurata sull'ellissoide di riferimento, e ϱ la media dei raggi di curvatura ϱ_{α_1} e ϱ_{α_2} delle due sezioni normali dell'ellissoide condotte per i due estremi della geodetica tangenzialmente alla geodetica stessa.

Le distanze zenitali ellissoidiche z_1 e z_2 si deducono da quelle osservate correggendole per la flessione del cannocchiale e per l'attrazione locale. La flessione fu determinata per entrambi i cannocchiali, come risulta dalla Parte 1ª, ma l'attrazione locale (per rispetto all'ellissoide di riferimento intersecante normalmente la verticale di Castanìa a livello del mare), fu determinata solo per la stazione di Roma [2]. Se si riflette però come, nella presente ricerca, entri solo in giuoco la variazione delle attrazioni locali nel passaggio dall'una all'altra stazione, variazione che, attesa la conformazione orografica della regione, risulterà presumibilmente piccola, e come, avuto riguardo alla notevole distanza delle due stazioni (circa 24 chilometri) tale variazione non possa avere che una influenza ben piccola nel calcolo del coefficiente di rifrazione, si comprende come si possa, senza alterare sensibilmente i risultati, sopprimere la seconda correzione.

Per fare il calcolo degli elementi ϱ e γ, che figurano nelle formole precedenti, si assuma come latitudine della Specola di S. Pietro in Vincoli quella astronomica, determinata nel 1887, cioè

$$\varphi_1 = 41^\circ.53'.35''.03,$$

come longitudine quella geodetica proveniente da Castanìa

$$\theta_1 = -3^\circ.01'.39''.417,$$

e per le coordinate polari di M. Cavo rispetto alla Specola si assumano le due

$$\log s = 4.3788283 \qquad \alpha_1 = 131^\circ.10'.13''.52.$$

(L'azimut α_1 è quello determinato astronomicamente nel 1893) [3].

(1) Cfr. F. R. Helmert « *Die mathematischen und physikalischen Theorieen der höheren Geodäsie* », vol. II, pag. 571 e seg.

(2) « *L'attrazione locale nella Specola geodetica di S. Pietro in Vincoli in Roma* ». R. Acc. dei Lincei, maggio 1895.

(3) « *Azimut assoluto di M. Cavo sull'orizzonte della Specola geodetica di S. Pietro in Vincoli in Roma* ». R. Commissione geodetica italiana, Padova 1894.

Sostituendo questi dati nelle formole per il trasporto delle coordinate geografiche [1]:

$$X = s \operatorname{sen}(\alpha_1 - \varepsilon)$$
$$Y = s \cos(\alpha_1 - 2\varepsilon)$$
$$3\varepsilon = \frac{s^2 \operatorname{sen} \alpha_1 \cos \alpha_1}{2\varrho_1 N_1 \operatorname{arc} 1''}$$
$$\log(\Phi - \varphi_1) = \log \frac{Y}{\varrho_1 \operatorname{arc} 1''} - KY - LY^2$$
$$\log(\Phi - \varphi_2) = \log \frac{X^2}{2\varrho_\Phi N_\Phi \operatorname{arc} 1''} \operatorname{tag} \Phi - EX^2$$
$$\log(\theta_2 - \theta_1) = \log \frac{X}{N_\Phi \operatorname{arc} 1'' \cos \Phi} - GX^2$$
$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} m = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\theta_2 - \theta_1) \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1)}{\cos \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)}$$
$$\alpha_2 = \alpha_1 + m \pm 180^\circ$$

si ottennero le seguenti coordinate geografiche di M. Cavo:

$$\varphi_2 = 41^\circ.45'.03''.781$$
$$\theta_2 = -2^\circ.48'.39''.846$$

Azimut della Specola sull'orizzonte di M. Cavo $\alpha_2 = 311^\circ.18'.53''.354$.

I valori dei raggi di curvatura ϱ_{α_1} ϱ_{α_2} si ottennero applicando due volte la formola di Eulero

$$\frac{1}{\varrho_{\alpha_1}} = \frac{\cos^2 \alpha_1}{\varrho_1} + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha_1}{N_1} \qquad \frac{1}{\varrho_{\alpha_2}} = \frac{\cos^2 \alpha_2}{\varrho_2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha_2}{N_2},$$

e togliendo i logaritmi di ϱ e di N, corrispondentemente alle latitudini φ_1 e φ_2, dalle tavole di Albrecht [2], ed il valore di ϱ si ricavò dalla formola

$$\varrho = \frac{1}{2}(\varrho_{\alpha_1} + \varrho_{\alpha_2}).$$

Si ebbero così i valori numerici

$$\log \varrho_{\alpha_1} = 6.8045905 \qquad \log \varrho_{\alpha_2} = 6.8045798$$
$$\log \varrho = 6.8045852.$$

Quest'ultimo valore, sostituito nella 2), condusse al seguente valore dell'angolo di convergenza delle normali ellissoidiche

$$\gamma = 773''.87.$$

Le distanze zenitali.

Indicando con D e con S le letture fatte sul cerchio zenitale nelle posizioni *cerchio a destra* e *cerchio a sinistra* rispettivamente, quando è puntato l'oggetto di cui si vuole determinare la distanza zenitale z, con Z la lettura corrispondente al puntamento dello zenit, con s e d le letture agli estremi della bolla della livelletta

[1] Cfr. Jadanza « *Guida al calcolo delle coordinate geodetiche* ». Torino 1891.

[2] Cfr. Th. Albrecht « *Formeln und Hülfstafeln für geographische Ortsbestimmungen* ». Dritte Auflage, Leipzig 1894.

zenitale (supposta graduata a partire dal mezzo) situati verso la sinistra e verso la destra dell'osservatore, con p il valore angolare della sua parte, si ha

$$z = \mathrm{D} + \frac{1}{2} p (s - d) - \mathrm{Z}$$

$$z = \mathrm{Z} - \left[\mathrm{S} + \frac{1}{2} p (s - d) \right]$$

e quindi
$$z = \frac{1}{2} \left\{ \left[\mathrm{D} + \frac{1}{2} p (s - d) \right] - \left[\mathrm{S} + \frac{1}{2} p (s - d) \right] \right\}.$$

Questa formola suppone, come accade nei nostri strumenti, che la graduazione del cerchio zenitale proceda in senso contrario a quello del movimento delle lancette di un orologio. Una piccola tabelletta dava immediatamente, per ciascuno dei due strumenti, la correzione $\frac{1}{2} p (s - d)$ la quale va sempre aggiunta col proprio segno.

Tutti i puntamenti si fecero sopra due elioscopi collocati nelle due stazioni. Lo specchietto dell'elioscopio di Roma, nelle ore antimeridiane, si teneva lateralmente allo strumento, in modo che il suo centro cadesse esattamente sul prolungamento dell'asse di rotazione del cannocchiale (puntato su M. Cavo). Nelle ore pomeridiane, pur conservandolo alla stessa altezza del centro dello strumento, lo si collocava $2^m.19$ più indietro, cioè sul prolungamento della congiungente le due stazioni, venendo a cadere in ombra la primitiva posizione.

Essendo di circa $2^\circ.14'$ l'inclinazione all'orizzonte della visuale congiungente le due stazioni, ne segue che le distanze zenitali misurate nel pomeriggio a M. Cavo, per essere ridotte a quelle che si sarebbero ottenute puntando il centro dello strumento di Roma, dovevano essere aumentate di $0''.74$.

A M. Cavo il centro dello specchietto dell'elioscopio era situato $0^m.225$ più alto del centro del teodolite, e $0^m.94$ più in avanti di esso (sulla congiungente le due stazioni). La visuale congiungente il centro dello strumento di Roma collo specchietto dell'elioscopio di M. Cavo passava quindi

$$0^m.225 + 0^m.94 \operatorname{tg} (2^\circ.14') = 0^m.262$$

più alta del centro del teodolite. Ne segue che tutte le distanze zenitali misurate a Roma, per essere ridotte al centro del teodolite di M. Cavo, dovevano essere aumentate di
$$\frac{0.262}{s \operatorname{arc} 1''} = 2''.26 .$$

Le distanze zenitali, registrate nella 5ª e nella 9ª colonna dello specchio seguente, sono già corrette per la flessione del cannocchiale e per la eccentricità dell'elioscopio. Queste distanze zenitali venivano misurate l'una di seguito all'altra, secondo lo permettevano le condizioni atmosferiche, ma venivano poi riunite in medie procedenti di quarto d'ora in quarto d'ora. Solo queste medie furono, per brevità, registrate nello specchio: gran parte di esse risultano quindi dalla riunione di due o anche di tre misure semplici.

Nella 3ª e 7ª colonna sono registrate le pressioni date dai due barometri, ridotte a 0° ed a livello del mare. Nella 10ª colonna sono segnati i coefficienti medi di rifrazione calcolati colla formola 2), nell'ultima le differenze di livello fra i due barometri, calcolate colla formola barometrica, come verrà indicato nella 4ª parte.

Specchio riassuntivo delle osservazioni.

ORA	ROMA				MONTE CAVO				Coefficiente medio di rifrazione	Differenza di altezza dei due barometri
	Temperatura	Pressione	Tensione del vapore acqueo	Distanza zenitale	Temperatura	Pressione	Tensione del vapore acqueo	Distanza zenitale		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
				29 marzo 1895.						
h m	°	mm	mm	° ′ ″	°	mm	mm	° ′ ″		m
14.15	16.0	750.56	9.11	87.56.30.60	11.4	673.92	7.84	92.14.36.80	0.138	909.42
14.30				32.45				31.40	142	
14.45				31.90				31.80	142	
15	16.4	50.36	9.10	30.25	11.2	73.82	7.84	35.60	140	907.84
15.15				32.10				36.00	137	
15.30				33.70				36.20	133	
15.45				31.40				31.70	143	
16	16.1	50.31	8.54	30.95	10.8	73.87	6.83	27.95	149	905.15
16.15				27.30				32.05	148	
16.30				28.00				28.30	152	
16.45				25.60				33.20	149	
17	15.6	50.31	9.19	26.80	10.0	74.05	6.83	28.80	153	900.83
17.15				28.00				33.90	145	
17.30				28.50				35.25	142	
				30 marzo.						
8	12.9	752.49	7.77	87.56.27.00	6.4	675.12	5.39	92.14.28.90	0.153	900.16
8.15				28.00				32.70	146	
8.30				25.90				30.50	152	
8.45				31.30				35.00	139	
9	14.2	752.79	8.00	26.90	7.4	675.45	6.09	33.25	147	904.50
9.15				32.10				35.30	138	
9.30				30.70				33.80	143	
9.45				27.80				34.40	144	
10	14.7	752.79	6.81	27.20	8.6	675.74	5.91	30.20	151	903.21
10.15				27.90				30.80	149	
10.30				27.70				32.45	147	
10.45				29.10				34.90	142	
11	15.2	752.89	6.27	30.00	9.4	675.71	4.79	33.90	142	906.26
11.15				32.20				34.70	138	
11.30				28.80				33.60	144	
11.45				30.95				34.70	140	
12	16.0	752.49	6.52	33.30	9.8	675.64	5.28	34.45	137	904.90
14.30				30.45				36.00	139	

ORA	ROMA				MONTE CAVO				Coefficiente medio di rifrazione	Differenza di altezza dei due barometri
	Temperatura	Pressione	Tensione del vapore acqueoso	Distanza zenitale	Temperatura	Pressione	Tensione del vapore acqueoso	Distanza zenitale		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
					31 marzo.					
h m				° ′ ″				° ′ ″		
7.30				87.56.06.20				92.14.17.70	0.194	
7.45				05.85				16.40	196	
8	° 9.4	mm 753.29	mm 6.83	10.60	° 5.0	mm 675.09	mm 4.70	20.10	185	m 902.07
8.15				10.45				20.30	185	
8.30				10.00				22.50	183	
8.45				14 20				18.20	183	
9	11.2	753.89	7.02	14.00	6.2	675.65	4.35	27.20	172	906.69
9.15				19.70				26.75	165	
9.30				20.45				27.20	163	
9.45				19 95				21 40	171	
10	12.8	754.09	6.76	24.50	6.8	676.22	5.76	19.70	168	905.73
10.15				19.80				18.60	175	
10.30				18.30				14.10	183	
10.44				21.20				08.10	187	
11	13.6	753.74	6.51	20.70	9.0	676.03	5.19	15.90	178	908.80
11.15				25.70				20.70	165	
11.30				29.10				24.25	156	
11.45				26.20				30.70	151	
12	15.0	752.89	6.15	24.80	9.5	675.59	4.52	29.55	155	907.55
14.30				30.20				32.65	146	
14.45				30.60				31.30	145	
					1° aprile.					
8.30	14.2	743.47	7.61		9.6	666.88	6.64	26.90		909.28
8.45				19.80				29.15	162	
9	15.0	742.97	7.62	20.55	10.5	666.86	6.47	25.20	166	908.07
9.15				16.30				29.50	166	
9.30	15.7	743.27	7.70	24.90	10.9	667.59	6.80	28.10	156	904.09
9.45				26.15				30.90	151	
10	17.3	743.62	7.64	28.10	10.8	667.84	7.18	33.50	145	907.30
10.15				28.00				33.65	145	
10.30	17.4	743.52	7.58	31.15	10.8	667.92	7.31	35.20	139	905.36
10.45				33.30				36.20	135	
11	17.4	743.72	7.71	32.00	11.3	668.09	7.12	37.10	136	906.13
11.15				33.20				37.00	134	
11.45	17.5	743.77	8.00	31.65	11.3	668.32	7.12	37.10	136	904.65

ORA	ROMA				MONTE CAVO				Coefficiente medio di rifrazione	Differenza di altezza dei due barometri
	Temperatura	Pressione	Tensione del vapore acqueo	Distanza zenitale	Temperatura	Pressione	Tensione del vapore acqueo	Distanza zenitale		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
h m	°	mm	mm	° ′ ″	°	mm	mm	° ′ ″		m
14.30	16.0	745.02	8.16	87.56.29.20	9.5	669.16	6.98	92.14.36.50	0.140	902.51
14.45				28.90				33.50	144	
15	16.0	745.47	7.90	28.30	9.8	669.34	6.95	32.50	146	905.63
15.15				29.50				34.25	142	
15.45	15.3	745.92	7.57	30.70	7.7	669.82	6.28	34.60	140	899.85
17	14.8	746.62	7.88	29.15	7,1	670.26	6.41	34.90	142	900.84
				17 maggio.						
8.30	14.1	739.59	8.30	27.10	6.7	663.73	6.13	31.20	150	901.68
8.45				31.30				33.30	141	
11	17.0	739.94	7.17	30.90	8.4	664.10	6.15	37.60	136	908.07
				18 maggio.						
6.15	8.5	749.01	7.00	87.55.51.00	5.0	671.73	5.32	29.65	198	898.38
6.30	9.0	749.31	7.00	50.10	5.6	671.82	6.01	26.55	203	899.19
6.45				57.55				26.70	193	
7.15	9.3	749.41	7.01	56.08.15	5.7	672.01	6.00	29.70	176	898.51
7.30	14.7	749.63	6.21	08.05	6.1	672.41	5.69	33.40	171	905.28
7.45				21.40				33.45	154	
8	14.8	749.71	7.24	28.50	6.6	672.50	6.19	32.60	146	906.17
8.15				29.00				30.70	148	
8.30	15.4	749,81	7.44	29.50	7.4	672.59	6.15	32.10	145	908.45
				14 giugno.						
6	16.8	757.97	12.18	14.30	12.8	681.44	8.57	21.50	179	901.88
6.15				11.90				20.60	183	
6.30	16.9	757.97	12.41	15.80	13.8	681.58	8.50	23.85	173	901.84
6.45				11.90				23.30	179	
7	17.5	758.07	12.33	15.70	14.3	681.81	9.82	21.95	176	902.32
7.15				15.75				21.30	177	
7.30	17.5	758.22	12.47	16.60	13.5	681.81	9.72	26.50	169	902.84
8	17.8	758.07	12.88	19.00	14.1	681.81	10.04	26.50	166	902.84
8.15				20.00				29.20	161	
8.30	17.7	758.12	13 54	19.00	14.2	681.83	11.11	26.65	166	903.00

ORA	ROMA				MONTE CAVO				Coefficiente medio di rifrazione	Differenza di altezza dei due barometri
	Temperatura	Pressione	Tensione del vapore acqueo	Distanza zenitale	Temperatura	Pressione	Tensione del vapore acqueo	Distanza zenitale		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
h m				° ′ ″				° ′ ″		
9.45				87.56.25.40				92.14.31.10	0.152	
	°	mm	mm		°	mm	mm			m
10	20.5	758.11	13.67	28.80	14.7	682.13	10.46	35.80	141	904.34
10.15				32.40				35.85	136	
10.30	20.9	758.36	13.11	32.00	15.7	682.28	11.51	32.10	142	907.82
10.45				31.60				38.00	135	
11	21.5	758.36	13.38	28.40	16.1	682.44	11.26	37.95	139	907.42
11.15				33.80				34.30	137	
11.30	22.9	758.26	13.47	33.70	16.3	682.47	11.16	37.70	132	908.32
11.45				34.10				36.90	133	
12	22.7	758.06	12.47	30.60	17.1	682.45	12.07	37.90	136	907.05
				15 giugno.						
15	17.6	758.01	12.34	31.70		681.97	10.96	37.30	136	904.52
15.15				34.20				37.30	132	
15.30	17.6	757.66	12.22	30.70	15.2	681.87	10.71	35.80	139	902.76
16	17.3	757.46	11.88	28.00	14.4	681.76	10.91	35.40	143	900.24
				17 giugno.						
14.15				32.6				35.5	137	
14.45				35.0				35.3	134	
15	23.3	758.11	11.03	31.8	16.4	682.97	11.11	35.9	137	906.11
15.15				33.6				92.14.37.0	134	
15.30	23.3	758.61	11.19	33.2	16.9	682.81	11.64	34.8	137	909.07
15.45				32.6				33.4	139	
16	23.3	758.51	11.03	32.0	16.6	682.75	11.28	34.8	138	908.03
16.15				32.4				36.3	136	
16.30	23.3	758.41	11.19	33.1	16.5	682.74	10.67	34.1	138	906.80
16.45				31.8				37.3	135	
17	22.8	758.41	10.73	30.2	16.4	682.66	10.59	39.1	135	906.75
17.15				30.1				34.6	141	
17.30	22.2	758.51	9.90	29.4	16.0	682.73	10.67	34.3	142	905.19
17.45				30.3				33.9	142	
18	22.0	758.51	9.43	29.3	15.5	682.76	10.30	34.3	143	903.52
18.15				29.5				34.4	142	
18.30	21.5	758.51	10.33	27.8	15.0	682.73	9.68	35.4	143	902.42
18.45				29.1				34.1	143	
19	21.5	758.66	11.22	26.3	14.5	682.72	9.46	30.6	151	903.82

ORA (1)	ROMA Temperatura (2)	ROMA Pressione (3)	ROMA Tensione del vapore acqueo (4)	ROMA Distanza zenitale (5)	MONTE CAVO Temperatura (6)	MONTE CAVO Pressione (7)	MONTE CAVO Tensione del vapore acqueo (8)	MONTE CAVO Distanza zenitale (9)	Coefficiente medio di rifrazione (10)	Differenza di altezza dei due barometri (11)
				18 giugno.						
h m				° ′ ″				° ′ ″		
6.15				87.56.08.6				92.14.25.4	0.181	
	°	mm	mm		°	mm	mm			m
6.30	16.8	758.77	11.46	03.7	14.4	682.50	7.39	25.0	188	899.83
6.45				05.7				26.4	183	
7	17.3	758.77	10.88	05.3	15.7	682.60	7.83	25.4	185	901.43
7.15				08.9				22.7	184	
7.30	18.7	758.82	11.02	12.3	16.8	682.66	7.12	25.6	176	904.98
7.45				13.7				27.9	171	
8	19.9	758.77	11.31	17.1	16.6	682.95	9.20	29.3	165	902.76
8.15				21.6				30.2	158	
8.30	21.1	758.47	11.17	22.8	17.4	682.73	8.87	30.9	155	905.13
8.45				26.7				27.4	155	
9	21.7	758.62	11.55	27.9	17.2	632.81	7.87	32.0	147	906.21
9.15				29.0				32.8	145	
9.30	21.8	758.52	11.49	31.3	16.4	682.90	9.81	34.2	140	903.40
9.45				31.7				32.8	141	
10	22.3	758.42	11.33	30.4	17.6	682.87	8.76	34.5	141	904.94
10.15				31.9				35.8	137	
10.30	22.3	758.47	11.33	31.8	17.7	683.03	7.91	37 5	135	903.50
10.45				30.9				35.1	141	
11	22.3	758.52	11.33	34.4	18.0	683.09	9.85	36.3	133	904.23
11.15				34.4				38.7	131	
11.30	22.7	758.52	11.09	32.2	18.2	683.14	10.14	39.1	133	904.57
11.45				32.9				39.9	131	
12	23.3	758.52	10.87	30.4	18.6	683.10	10.59	39.8	134	906.78
14.15				32.5				31.3	142	
14.30	23.7	758.47	11.40	31.3	18.7	683.01	11.07	33.2	141	908.18
14.45				31.9				33.4	140	
15	24.2	758.52	11.56	35.2	18.6	683.09	10.99	36.1	133	908.41
15.15				31.4				34.8	144	
15.30	23.9	758.37	11.91	28.6	18.0	682.90	10.78	31.2	147	907.63
15.45				25.7				32.6	149	
16	23.7	758.17	11.97	24.6	17.2	682.61	9.89	23.3	163	907.47
16.15				26.3				25.0	158	
16.30	23.6	758.37	12.24	25.9	17.0	682.45	9.74	28.8	154	

ORA	ROMA				MONTE CAVO				Coefficiente medio di rifrazione	Differenza di altezza dei due barometri
	Temperatura	Pressione	Tensione del vapore acqueo	Distanza zenitale	Temperatura	Pressione	Tensione del vapore acqueo	Distanza zenitale		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
					21 giugno.					
h m				° ′ ″				° ′ ″		
10.15				87.56.30.4				92.14.31.6	0.145	
10.30	° 21.3	mm 758.61	mm 12.41	27.6	° 15.4	mm 682.74	mm 11.53	31.5	148	m 904.64
10.45				29.5				33.5	143	
11	21.8	758.86	11.79	29.2	16.6	682.89	11.81	33.3	144	908.20
11.15				33.0				36.9	134	
11.30	22.5	758.86	12.44	29.3	16.8	683.01	11.16	38.9	137	908.01
11.45				32.4				38.6	133	
16.30	23.5	758.76	13.59	29.7	15.4	683.32	11.06	30.0	148	902.67
16.45				28.6				30.5	148	
17	23.5		13.70	28.7	15.4		11.00	33.1	145	
17.15				29.2				28.8	150	
17.30	23.4	758.86	12.85	24.8	15.6	683.38	11.35	28.3	156	903.13
17.45				24.1				26.6	159	
18	23.2	759.01	12.65	24.3	15.4	683.53	11.06	26.5	159	902.21
18.15				23.7				30.6	155	
18.30	23.0	759.21	12.77	23.8	15.0	683.50	11.00	23.9	163	903.88
					1° luglio.					
6.30	21.2	759.54	13.87	56.00.9	21.5	684.91	9.10	26.8	189	896.93
6.45				55.55.0				28.3	194	
7	21.8	759.44	14.00	57.0	22.0	685.00	8.17	24.2	196	896.35
7.15				56.05.9				26.8	182	
7.30	23.0	759.44	14.88	05.9	22.9	685.11	12.17	27.1	182	898.98
7.45				12.7				28.5	171	
8	24.2	759.54	15.50	11.6	23.3	685.24	10.92	29.4	172	900.84
8.15				18.4				29.4	163	
8.30	25.0	759.69	15.51	19.7	23.8	685.23	11.83	28.1	163	904.88
8.45				23.1				29.5	157	
9	25.9	759.79	14.96	25.0	23.4	685.14	15.17	27.8	156	908.49
9.15				32.2				34.4	137	
9.30	26.6	759.74	14.19	31.2	23.2	685.21	15.29	35.7	138	907.74
9.45				35.8				38.8	128	
10	27.3	759.74	15.51	33.5	23.4	685.47	15.17	41.2	128	905.92
10.15				36.4				37.3	129	
10.30	27.5	759.59	15.03	32.8	23.6	685.45	14.90	39.3	131	904.92
10.45				31.7				38.5	134	

ORA	ROMA				MONTE CAVO				Coefficiente medio di rifrazione	Differenza di altezza dei due barometri
	Temperatura	Pressione	Tensione del vapore acqueo	Distanza zenitale	Temperatura	Pressione	Tensione del vapore acqueo	Distanza zenitale		
(1)	(1)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
h m	°	mm	mm	° ′ ″	°	mm	mm	° ′ ″		m
11	27.9	759.64	15.49	87.56.33.8	24.0	685.54	14.43	92.14.38.2	0.132	905.73
11.15				34.1				38.8	130	
11.30	28.2	759.64	14.96	35.4	24.8	685.46	14.04	38.8	129	908.20
11.45				34.1				40.1	129	
12	28.9	759.54	14.52	34.4	24.8	685.43	14.58	38.9	130	908.47
14.15				33.2				39.5	131	
14.30	29.1	759.24	13.34	34.0	24.8	685.25	12.96	38.5	131	906.76
14.45				34.1				39.3	129	
15	29.5	759.24	12.07	34.5	24.8	685.24	12.80	37.1	132	908.30
15.15				34.0				40.5	128	
15.30	29.5	759.24	11.73	36.5	24.6	685.14	12.90	38.8	127	908.20
15.45				31.4				33.3	141	
16	28.8	759.04	11.48	31.2	24.0	685.04	12.63	35.3	139	904.90
16.15				28.6				26.7	153	
16.30	28.5	759.04	11.51	24.6	23.8	684.99	11.98	27.4	157	904.79
16.45				22.6				24.7	164	
17	27.9	758.84	11.37	22.8	23.1	684.77	11.92	25.3	163	903.40
17.15				26.6				28.1	154	
17.30	27.9	758.74	10.73	23.9	23.0	684.64	10.51	27.6	158	903.19
17.45				24.3				32.3	152	
18	27.1	758.67	10.90	20.1	22.7	684.57	8.33	27.9	163	901.08
18.15				17.2				29.3	165	

Legge di variazione del coefficiente medio di rifrazione.

La semplice ispezione del precedente specchio mostra quanto il coefficiente medio di rifrazione sia variabile nel corso di una giornata. Esso decresce procedendo dal mattino verso le ore meridiane, nelle quali presenta un minimo, e cresce di nuovo coll'inoltrarsi della sera. Che questa variazione dipenda principalmente dal modo con cui varia il *decremento della temperatura* coll'altezza, e che gli altri fattori. come la temperatura stessa, la pressione, l'umidità ecc. non entrino in giuoco che in linea affatto secondaria, venne già riconosciuto da Baeyer (1), ed è posto in piena evidenza nella Introduzione alle belle ricerche sulla rifrazione terrestre di Hartl (2).

(1) J. J. Baeyer, « *Nivellement zwischen Swinemünde und Berlin* ». Berlin 1840, pag. 121.
(2) H. Hartl, « *Beiträge zum Studium der terrestrischen Strahlenbrechung* ». Mittheilungen des k. u. k. Militär-Geographischen Institut. B. III, IV.

Sorvolando sulle ragioni di una tale variazione, qui si ricercherà solo la legge che la governa, in guisa da poter assegnare per ciascuna ora del giorno il valore medio del coefficiente di rifrazione che ad essa compete.

Volendo riunire in una media i valori del coefficiente di rifrazione determinati per una stessa epoca del giorno, non sarebbe però corretto riunire per ore quelli dello specchio precedente, perchè essendo le varie serie di osservazioni separate da intervalli molto lunghi di tempo, alle medesime indicazioni orarie, non corrispondono le medesime epoche del giorno. Conviene perciò, seguendo l'esempio di Baeyer [1], esprimere le ore in frazioni del semiarco diurno, assumere cioè come unità di tempo l'intervallo compreso fra il mezzogiorno vero, ed il levare od il tramontare del sole.

Questa trasformazione si fa nel seguente modo:

Dal *Calendario dell' Osservatorio e dell' Ufficio centrale di Meteorologia e di Geodinamica al Collegio Romano, anno 1895,* si cavano ad esempio, in corrispondenza al 31 marzo, i seguenti dati (espressi in t. m. M. E. C.):

nascere apparente del centro del sole	$5^h.57^m$
tramontare » » »	18. 33
durata del giorno	12. 36
ora del mezzogiorno vero	12. 15

Il mezzo arco diurno equivarrà quindi a

$$6^h.18^m = 6{,}30^h.$$

Per esprimere ad es. la indicazione oraria $7^h.30^m$ nella nuova unità, basta osservare che essa dista dal mezzogiorno vero di

$$12^h.15^m - 7^h.30^m = 4^h.45^m = 4{,}75^h$$

e quindi di

$$\frac{4.75}{6.30} = 0.76 \quad \text{del semiarco diurno.}$$

Eseguita questa trasformazione per tutte le ore di osservazione, e riuniti i coefficienti di rifrazione osservati per frazioni del semiarco diurno, si ottennero i seguenti risultati:

[1] Opera citata, pag. 114.

Distribuzione dei coefficienti medi di rifrazione per frazioni del semiarco diurno.

Frazioni del semiarco diurno / DATA	Mattino 0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	0.45	0.40	0.35	0.30	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.00	Sera 0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85
	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0.	0.	0,	0,	0,
29 marzo 1895																		138	142	142	140	135	143	149	148	150	153	145	
30 »			153	146	152	139	142	143	144	151	148	142	142	138	142	137													
31 »		194	190	185	183	183	168	163	171	178	177	187	178	165	153	137			146	145									
1 aprile						162	166	156	151	145	142	135	136	134	136				140	144	146	142	140						
17 maggio							150	141						136															
18 »	198	198		173	154	147	145																						
14 giugno	181	173	177	177	169	166	163				146	136	138	139	134	133	136												
15 »																			136	132	139	143							
17 »																		137	135	134	138	138	137	135	138	142	142	142	143
18 »	181	188	184	184	173	165	156	155	146	140	141	137	137	133	132	131	134	141	136	144	148	163	156						
21 »												145	145	144	135	133							148	148	147	156	159	155	163
1 luglio		189	194	189	182	171	163	160	156	137	128	128	131	133	130	129	130	131	129	130	127	140	153	160	163	156	152	164	
Medie	187	188	179	176	169	162	159	153	153	150	147	144	144	140	137	133	133	137	138	139	140	144	146	148	149	151	151	151	153

Nell' ultima linea sono eseguite le medie semplici dei valori registrati nelle singole colonne. I numeri di questa linea, risultanti da osservazioni eseguite in condizioni atmosferiche svariatissime, possono considerarsi come rappresentanti l'andamento medio del fenomeno, e pongono in evidenza la legge regolare di variazione del coefficiente di rifrazione.

Hartl ricerca, nel lavoro sopra citato, se la legge di variazione del coefficiente di rifrazione sia rappresentabile dalla formola

$$k = a + bt^2,$$

ove a e b sono due costanti, t la frazione del semiarco diurno, e mostra come i coefficienti di rifrazione determinati in occasione della livellazione fra Swinemünde e Berlino, della triangolazione delle coste prussiane (1), della determinazione altimetrica dei punti di 1° e 2° ordine della rete prussiana (2), della triangolazione del Mecklenburgo (3), e della misura del grado di latitudine della Russia Occidentale (4), con grande approssimazione siano esprimibili da tal formola.

Essa suppone però che nelle due metà della giornata, il coefficiente di rifrazione varii simmetricamente rispetto al mezzogiorno vero, ciò che non si verifica nel caso nostro. Qui la variazione nel pomeriggio è molto meno sentita che nel mattino.

Senza vincolare in una formola i risultati ottenuti, è molto più conveniente, per avere il coefficiente di rifrazione corrispondente a una determinata ora del giorno, esprimere la indicazione oraria in frazione del semiarco diurno, nel modo già indicato, e con questa entrare nell' ultima linea della precedente tabella.

(1) J. J. Baeyer, « *Die Küstenvermessung und ihre Verbindung mit der Berliner Grundlinie* ». Berlin 1849.

(2) « *Nivellements und Höhenbestimmungen der Punkte 1. und 2. Ordnung* ». Ausgeführt von dem Bureau der Landes-Triangulation — 1er. Band-Berlin 1870.

(3) « *Grossherzoglich Mecklemburgische Landesvermessung*. 1er. Theil, *Die trigonometrische Vermessung* ». Schwerin 1882.

(4) W. Struwe, « *Beschreibung der Breitengradmessung in den Ostsee Provinzen Russlands* » 1er Theil, Dorpat 1831.

PARTE QUARTA

Confronto dell' osservazione colla teoria.

I coefficienti di rifrazione locali risultanti dalla osservazione.

Se si indicano con H_1 ed H_2 le altezze sul livello del mare dei due luoghi di osservazione, con ζ_1 e ζ_2 le due distanze zenitali ellissoidiche della retta che li congiunge, si ha:

$$(1)\qquad \begin{cases} H_2 - H_1 = s_m \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1) \\ s_m = s\left(1 + \frac{H_1 + H_2}{2\varrho}\right) \\ \zeta_1 + \zeta_2 = 180 + \gamma . \end{cases}$$

Queste formole permettono di determinare separatamente ζ_1 e ζ_2, quando siano noti H_1 ed H_2, ed allora i due coefficienti di rifrazione locali k_1 e k_2 si potranno ricavare dalle formole

$$\zeta_1 = z_1 + \tfrac{1}{2} k_1 \gamma \qquad \zeta_2 = z_2 + \tfrac{1}{2} k_2 \gamma ,$$

le quali, per comodo di calcolo, si scriveranno nella forma più conveniente

$$(2)\qquad k_1 = \frac{2(\zeta_1 - z_1)}{\gamma} \qquad k_2 = \frac{2(\zeta_2 - z_2)}{\gamma} .$$

I valori di H_1 H_2 risultano dalle quote dei pilastri di appoggio dei due strumenti, ottenute colla livellazione di precisione, e date già nella 2ª parte, aggiungendovi le altezze dei centri dei due strumenti. Si ha quindi:

Quota del piano super. del pilastro d'osservaz. a Roma	m 68.190
Altezza del centro dello strumento Pistor sul piano d'appoggio . . .	0.552
Quota del centro dell'universale Pistor $= H_1 =$	68.742

Quota del piano super. del pilastro d'osservaz. a M. Cavo	m 966.997
Altezza del centro del teodolite Starke sul piano d'appoggio . . .	0.310
Quota del centro del teodolite Starke $= H_2 =$	967.307

Sostituendo questi due valori numerici di H_1 ed H_2 nelle (1), unitamente a quelli già dati di s, di ϱ e di γ, si trova

$$\zeta_1 = 87°.57'.23''.97$$
$$\zeta_2 = 92°.15'.29''.89 .$$

Le (2), in corrispondenza delle diverse coppie di distanze zenitali contemporanee z_1 e z_2, registrate nel quadro precedente, daranno altrettante coppie di coefficienti di rifrazione locali k_1 e k_2, i quali, perchè dedotti dalle misure zenitali effettivamente eseguite, si potranno chiamare *osservati*. Questi coefficienti sono registrati nello specchio che segue insieme alle loro medie k, le quali, naturalmente, coincidono coi coefficienti medi già calcolati colla formula (1) della parte terza.

I coefficienti di rifrazione locali risultanti dalla teoria.

I valori dei coefficienti di rifrazione k_1 k_2 si possono determinare anche teoricamente, per mezzo di formole risultanti dalla integrazione della equazione differenziale della traiettoria luminosa (equazione di Laplace). Essi possono cioè esprimersi mediante i valori che la grandezza

$$\varkappa = -\frac{\varrho}{n}\frac{\partial n}{\partial h}$$

e le sue derivate rispetto ad h, assumono nei due estremi della traiettoria. Con n si intende qui l'indice di rifrazione atmosferico, in un punto qualunque della traiettoria con ϱ il raggio della superficie di livello atmosferica (considerata come sferica) attraversante la traiettoria nel punto che si considera, con h l'altezza del punto sopra una data superficie di livello, quella determinata per es. dal punto iniziale della traiettoria.

Le formole complete sono date da Helmert [1], e qui non è il caso di riprodurle. Basta invece notare che, nel caso in cui la distanza geodetica s, fra i due estremi della traiettoria, sia inferiore a 64 Chilometri, esse si semplificano notevolmente, cosicchè per k_1 si può per es. assumere la serie [2]

$$k_1 = \varkappa_1 + \frac{1}{6}\varkappa_1'(h + s_m \operatorname{cotg} z_1) + \frac{1}{12}\varkappa_1'' h^2 + \cdots \tag{3}$$

dove, contraddistinguendo coll'indice 1 tutto quanto si riferisce alla stazione iniziale, si è posto

$$\varkappa_1' = \left(\frac{d\varkappa}{dh}\right)_1 \qquad \varkappa_1'' = \left(\frac{d^2\varkappa}{dh^2}\right)_1 ,$$

e con s_m si intende la distanza fra il punto iniziale ed il punto finale della traiettoria, di altezza h, misurata all'altezza media dei due punti.

Allo scopo di instituire un confronto fra i valori *osservati* ed i valori *teoretici* dei coefficienti di rifrazione, si limiti la serie (3) (e la analoga relativa al punto finale della traiettoria) ai primi due termini, ponendovi nello stesso tempo

$$s_m \operatorname{cotg} z_1 = h .$$

(1) Cfr. Helmert, op. cit. vol. II, pag. 559.
(2) " " " " 573.

Si otterrà

$$(4)\qquad \begin{cases} k_1 = \varkappa_1 + \frac{1}{3}\varkappa_1' h \\ k_2 = \varkappa_2 - \frac{1}{3}\varkappa_2' h, \end{cases}$$

mentre d'altra parte, in virtù del teorema di TAYLOR, si avrà

$$(5)\qquad \begin{cases} \varkappa_2 = \varkappa_1 + \varkappa_1' h \\ \varkappa_1 = \varkappa_2 - \varkappa_2' h. \end{cases}$$

Se fra le (4) e le (5) si eliminano $\varkappa_1'$ e $\varkappa_2'$ si otterrà

$$(6)\qquad k_1 = \frac{2\varkappa_1 + \varkappa_2}{3} \qquad k_2 = \frac{2\varkappa_2 + \varkappa_1}{3}.$$

Queste formole, che sono da ritenersi come casi particolari di quelle di HELMERT, vennero stabilite prima direttamente da JORDAN [1], nella supposizione che la traiettoria luminosa, riferita alla tangente in un estremo ed al raggio della superficie di livello sferica passante per esso, sia rappresentabile da una equazione di 3° grado fra le coordinate.

La precedente espressione di $\varkappa$, tenuto conto della relazione teorica fra l'indice di rifrazione n e la densità atmosferica, si può esprimere in funzione della temperatura e della pressione dell'aria, e si ottiene [2]:

$$\varkappa = 0{,}000293 \frac{g}{G} \varrho \frac{p}{760} \frac{1}{1+\alpha t}\left(\frac{\tau}{273+t} + \frac{1-0{,}377\frac{p_e}{p}}{7993}\frac{g}{G}\frac{1}{1+\alpha t}\right)$$

$$\frac{g}{G} = 1 - 0{,}00265 \cos 2\varphi - \frac{2H}{\varrho},$$

ove ϱ rappresenta il raggio di curvatura dell'ellissoide nell'azimut che si considera, H l'altezza sul livello del mare, φ la latitudine, p la pressione atmosferica in millimetri, ridotta a 0°, p_e la tensione del vapore acquoso, α il coefficiente di dilatazione dell'aria, t la temperatura in gradi centigradi, τ la sua variazione per la elevazione di un metro in altezza, G la intensità della gravità sotto la latitudine di 45° ed a livello del mare.

Il calcolo della formola viene facilitato scrivendola così:

$$\varkappa = 0{,}000293\left(\frac{g}{G}\right)^2 \varrho \frac{1-0{,}377\frac{p_e}{p}}{7993}\frac{p}{760}\frac{1}{(1+\alpha t)^2}\left(1 + \frac{1}{273}\frac{7993}{1-0.377\frac{p_e}{p}}\frac{G}{g}\tau\right).$$

[1] « *Ein Beitrag zur Theorie der terrestrischen Refraction* ». Astron. Nach. 88er Band, 1876. Gli sviluppi di questa Memoria sono, nella loro parte essenziale, riprodotti nel « *Handbuch der Vermessungskunde* », 2er Band, § 128 Dritte Auflage.

[2] Cfr. HELMERT, op. cit., vol. II, pag. 577.

Essa mostra come la tensione del vapor acquoso influenzi poco i valori di $\varkappa$, e come si possa per essa assumere un valor medio. Nel caso nostro si può porre

$$p_v = 10^{mm} \qquad p = 720^{mm},$$

medie dei valori osservati per p_v e per p a Roma e a Monte Cavo, e di più si avrà

$$\frac{g}{G} = 0.999546 .$$

Questi valori numerici, introdotti nella espressione di $\varkappa$, la trasformano nell'altra:

$$\varkappa = 0{,}2323 \frac{p}{760} \frac{1}{(1+\alpha t)^2} (1 + 29{,}45\, \tau) .$$

Sotto questa forma la espressione coincide sostanzialmente con quelle date da Fearnley (¹) e da Jordan (²), e pone in evidenza come i valori di $\varkappa$ dipendano quasi per intero dal modo con cui varia la temperatura coll'altezza.

Non essendo a nostra disposizione mezzi per scandagliare la temperatura della colonna atmosferica al di sopra dei due punti di osservazione, e quindi determinare la legge di decremento della temperatura nei punti stessi, si adottò l'ipotesi che questa decrescesse uniformemente nel passaggio dall'uno all'altro punto d'osservazione. Essendo di circa 900 m. il loro dislivello, si ritenne cioè

$$\tau = \frac{t_2 - t_1}{900},$$

e per il calcolo numerico si adottò quindi la formola

$$\varkappa = 0{,}2323 \frac{p}{760} \frac{1}{(1+\alpha t)^2} \left\{ 1 + \frac{29.45}{900} (t_2 - t_1) \right\},$$

ossia, più semplicemente,

$$\varkappa = [6{,}48528] \frac{p}{(1+\alpha t)^2} \left\{ 1 - [8{,}515] (t_1 - t_2) \right\}, \tag{7}$$

dove le quantità fra parentesi quadre sono i logaritmi dei coefficienti numerici.

Sostituendo successivamente in questa formola le coppie di valori osservati per p e t nelle due stazioni, si ottennero le coppie di valori di k_1 e k_2 registrati nello specchio seguente e controsegnati dalla scrittura « coefficienti di rifrazione teoretici ». Per effettuare però questi calcoli non si adoperarono le pressioni registrate nello specchio della 3ª parte, ma bensì quelle esercitantisi alle altezze dei centri dei due strumenti. Essendo cioè il centro dell'Universale Pistor più elevato del pozzetto del barometro di $9^m.940$ la riduzione a Roma risultava di $-0^{mm}.89$: il centro del teodolite Starke essendo invece elevato di $10^m.478$ sul pozzette del barometro, la

(¹) C. Fearnley, « *Zur Theorie der terrestrischen Refraction* ». Verhandlungen der vom 15 bis 24 Oktober 1883 in Rom abgehaltenen siebenten allgemeinen Conferenz der Europäischen Gradmessung. Berlin 1884.

(²) W. Jordan, « *Grundformeln der terrestrischen Refraction* » Zeitschr. für Vermessungswesen XVIII Band. 1889, S. 176. In questa Nota viene rettificata una piccola inesattezza incorsa nella Memoria delle Astron. Nachr., e nel Handbuch ecc. sopra citati.

riduzione a Monte Cavo ammontava a $-0^{mm}.85$. Entrambe le riduzioni si determinarono colle « *Barometrische Höhentafeln* » di JORDAN [1]. Per facilitare il confronto, i risultati del calcolo furono sempre arrotondati al millesimo, e nell'ultima colonna dello specchio vennero formate le differenze fra i coefficienti di rifrazione medî osservati e quelli teoretici.

Quadro comparativo dei coefficienti di rifrazione osservati e teoretici.

Ora	COEFFICIENTI DI RIFRAZIONE osservati k_1	k_2	k	teoretici k_1	k_2	k	Osservazione - teoria
			29 marzo 1895.				
h m 14.15	0.138	0.137	0.138	0.165	0.161	0.163	— 0.025
15	0.139	0.140	0.140	0.165	0.161	0.163	— 0.023
16	0.137	0.160	0.149	0.165	0.161	0.163	— 0.014
17	0.148	0.158	0.153	0.164	0.160	0.162	— 0.009
			30 marzo.				
8	0.147	0.158	0.153	0.162	0.158	0.160	— 0.007
9	0.148	0.146	9.147	0.158	0.155	0.156	— 0.009
10	0.147	0.155	0.151	0.162	0.158	0.160	— 0.009
11	0.139	0.145	0.142	0.163	0.159	0.161	— 0,019
12	0.131	0.143	0.137	0.158	0.152	0.155	— 0.018
			31 marzo.				
8	0.190	0.180	0.185	0.179	0.175	0.177	+ 0.008
9	0.181	0.162	0.172	0.173	0.168	0.170	+ 0.002
10	0.154	0.181	0.168	0.165	0.162	0.164	+ 0.004
11	0.164	0.191	0.178	0.173	0.168	0.171	+ 0.007
12	0.153	0.157	0.155	0.166	0.162	0.164	— 0.009
			1 aprile.				
9	0.164	0 167	0.166	0.170	0.166	0,168	— 0.002
9.30	0.153	0.160	0 156	0.167	0.163	0,165	— 0.009
10	0.144	0.146	0.145	0.155	0.152	0,153	— 0.008
10.30	0.137	0.141	0.139	0.154	0.151	0,152	— 0.013
11	0.135	0.137	0.136	0.157	0,154	0,155	— 0.019
14.30	0.142	0.138	0.140	0.157	0.153	0.155	— 0.015
15	0.144	0.148	0.146	0.159	0.155	0.157	— 0.011

[1] « *Handbuch der Vermessungskunde* » Bd. II, Anhang S. [27]-[30].

Ora	COEFFICIENTI DI RIFRAZIONE osservati k_1	k_2	k	teoretici k_1	k_2	k	Osservazione - teoria
			17 maggio.				
h m 8.30	0.147	0.152	0.150	0.152	0.149	0.150	0.000
11	0.137	0.135	0.136	0.142	0.139	0.140	— 0.004
			18 maggio.				
6.30	0.243	0.164	0.203	0.186	0.180	0.183	+ 0.020
7.15	0.196	0.156	0.176	0.185	0.180	0.182	— 0.006
7.30	0.196	0.146	0.171	0.146	0.144	0.145	+ 0.026
8	0.143	0.148	6.146	0.148	0.146	0.147	— 0.001
8.30	0.141	0.149	0.145	0.149	0.146	0.147	— 0.002
			14 giugno.				
6	0.180	0.178	0.179	0.174	0.170	0.172	+ 0.007
6.30	0.176	0.171	0.173	0.179	0.175	0.177	— 0.004
7	0.176	0.176	0.176	0.179	0.174	0.176	0.000
7.30	0.174	0.164	0.169	0.173	0.169	0.171	— 0.002
8	0.168	0.164	0.166	0.175	0.170	0.172	— 0.006
8.30	0.168	0.164	0.166	0.176	0.171	0.173	— 0.007
10	0.143	0.140	0.141	0.159	0.155	0.157	— 0.016
10.30	0.134	0.149	0.142	0.162	0.158	0.160	— 0.018
11	0.144	0.134	0.139	0.160	0.156	0.158	— 0.019
11.30	0.130	0.135	0.132	0.151	0.148	0.149	— 0.017
12	0.138	0.134	0.136	0.158	0.154	0.156	— 0.020
			15 giugno.				
15	0.135	0.136	0.136	0.182	0.176	0.179	— 0.043
15.30	0.138	0.140	0.139	0.183	0.177	0.180	— 0.041
16	0.145	0.141	0.143	0.202	0.195	0.198	— 0.055
			17 giugno.				
15	0.135	0.140	0.137	0.149	0.146	0.147	— 0.010
15.30	0.131	0.142	0.137	0.152	0.149	0.150	— 0.013
16	0.134	0.142	0.138	0.151	0.148	0.149	— 0.011
16.30	0.132	0.144	0.138	0.150	0.147	0.148	— 0.010
17	0.139	0.131	0.135	0.153	0.150	0.151	— 0.016
17.30	0.141	0.144	0.142	0.155	0.151	0.153	— 0.011
18	0.141	0.144	0.143	0.153	0.150	0.152	— 0.009
18.30	0.145	0.141	0.143	0.154	0.150	0.152	— 0.009
19	0.149	0.153	0.151	0.151	0.148	0.149	— 0.002

Ora	COEFFICIENTI DI RIFRAZIONE osservati k_1	k_2	k	teoretici k_1	k_2	k	Osservazione - teoria
			18 giugno.				
m h 6.30	0.208	0.168	0.188	0.184	0.179	0.182	+ 0.006
7	0.203	0.167	0.185	0.188	0.183	0.185	0.000
7.30	0.186	0.166	0.176	0.185	0.179	0.182	— 0.006
8	0.173	0.157	0.165	0.175	0.168	0.171	— 0.006
8.30	0.158	0.152	0.155	0.171	0.166	0.168	— 0.013
9	0.145	0.149	0.147	0.166	0.162	0.164	— 0.017
9.30	0.136	0.144	0.140	0.160	0.156	0.158	— 0.018
10	0.139	0.143	0.141	0.163	0.160	0.161	— 0.020
10.30	0.135	0.135	0.135	0.164	0.160	0.162	— 0.027
11	0.128	0.138	0.133	0.166	0.162	0.164	— 0.031
11.30	0.134	0.132	0.133	0.164	0.160	0.162	— 0.029
12	0.138	0.130	0.134	0.162	0.159	0.160	— 0.026
14.30	0.136	0.146	0.141	0.160	0.156	0.158	— 0.017
15	0.126	0.139	0.133	0.156	0.153	0.154	— 0.021
15.30	0.143	0.151	0.147	0.154	0.151	0.152	— 0.005
16	0.154	0.172	0.163	0.151	0.148	0.150	+ 0.013
16.30	0.150	0.158	0.154	0.151	0.148	0.150	+ 0.004
			21 giugno.				
10.30	0.146	0.151	0.148	0.158	0.154	0.156	— 0.008
11	0.142	0.146	0.144	0.162	0.157	0.159	— 0.015
11.30	0.142	0.132	0.137	0.141	0.138	0.139	— 0.002
16.30	0.140	0.155	0.148	0.142	0.140	0.141	+ 0.007
17	0.143	0.147	0.145	0.142	0.140	0.141	+ 0.004
17.30	0.153	0.159	0.156	0.144	0.141	0.142	+ 0.014
18	0.154	9.164	0.159	0.144	0.142	0.143	+ 0.016
18.30	0.156	0.170	0.163	0.143	0.141	0.142	+ 0.021
			1 luglio.				
6.30	0.215	0.163	0.189	0.195	0.188	0.191	— 0.002
7	0.223	0.170	0.196	0.194	0.187	0.190	+ 0.006
7.30	0.202	0.162	0.182	0.190	0.183	0.186	— 0.004
8	0.187	0.157	0.172	0.184	0.178	0.181	— 0.009
8.30	0.166	0.160	0.163	0.181	0.176	0.178	— 0.015
9	0.152	0.160	0.156	0.172	0.165	0.168	— 0.012
9.30	0.136	0.140	0.138	0.167	0.162	0.164	— 0.026
10	0.130	0.126	0.128	0.163	0.159	0.161	— 0.033

Ora	COEFFICIENTI DI RIFRAZIONE osservati			teoretici			Osservazione - teoria
	k_1	k_2	k	k_1	k_2	k	
h m 10.30	0.132	0.131	0.131	0.163	0.159	0.161	— 0.030
11	0.130	0.133	0.132	0.162	0.158	0.160	— 0.028
11.30	0.126	0.132	0.129	0.165	0.161	0.163	— 0.034
12	0.128	0.132	0.130	0.160	0,156	0.158	— 0.028
14.30	0.129	0.133	0.131	0.159	0.155	0.157	— 0.026
15	0.128	0.136	0.132	0.156	0.152	0.154	— 0.022
15.30	0.123	0.132	0.127	0.155	0.151	0.153	— 0.026
16	0.137	0.141	0.139	0.156	0.152	0.154	— 0.015
16.30	0.154	0.161	0.157	0.157	0.153	0.155	+ 0.002
17	0.158	0.167	0.163	0.157	0.153	0.155	+ 0.008
17.30	0.155	0.161	0.158	0.157	0.153	0.155	+ 0.003
18	0.165	0.160	0.163	0.159	0.155	0.157	+ 0.006

Da questo specchio si rileva come le differenze fra i coefficienti di rifrazione medi osservati e quelli calcolati siano, in generale, negative. Tenuta presente la costituzione 6) dei coefficienti teoretici, ne segue che sono in generale troppo grandi i valori di $\varkappa$ calcolati colla formola 7). La ipotesi precedentemente ammessa della uniformità di diminuzione della temperatura nel passaggio dalla stazione inferiore alla superiore, non è dunque in generale verificata. L'accordo fra la teoria e l'osservazione si ottiene solo quando si ritenga che la temperatura, in prossimità delle due stazioni, decresca più rapidamente di quanto risulterebbe dalla legge della uniformità, ciò che, nel fatto, effettivamente si verifica.

Una seconda conseguenza che si può trarre dall'esame di questo specchio è che le massime divergenze fra i coefficienti osservati e quelli teoretici si presentano, in generale, nelle ore meridiane, mentre si ha un migliore accordo verso gli estremi dell'arco diurno. Ma anche qui si trova facilmente la spiegazione nel fatto che nelle ore meridiane gli strati d'aria prossimi al suolo sono molto riscaldati e quindi molto rapido è l'effettivo decremento della temperatura.

Fatta eccezione dei pochi dati corrispondenti al 15 giugno, le differenze fra i coefficienti di rifrazione osservati, e quelli teoretici poche volte eccedono i 2 centesimi, epperò, avuto riguardo alle molteplici circostanze influenzanti questo fenomeno, l'accordo fra la teoria e l'osservazione può ritenersi abbastanza soddisfacente.

La livellazione barometrica.

Le osservazioni meteorologiche, eseguite contemporaneamente nelle due stazioni di mezz'ora in mezz'ora, ci indussero a fare il calcolo delle corrispondenti differenze

di livello fra i pozzetti dei due barometri, facendo uso della formola barometrica. Si adoperò perciò la formola di LAPLACE coi cofficienti di JORDAN [1]:

$$h = k(1+\beta\cos 2\varphi)\left(1+\frac{2\,h_m}{R}\right)(1+\alpha\,t_m)\left(1+\varepsilon\frac{p_v}{p_m}\right)\log\frac{p_1}{p_2}$$

$$k = \frac{0.76}{\mu}\,\frac{13.59593}{0.00129277}\,\frac{1}{1.00021} = 18400,$$

dove h è la differenza di livello espressa in metri, p_1 e p_2 le pressioni atmosferiche alla stazione inferiore e superiore rispettivamente, ridotte a 0° ed a livello del mare, t_m e p_m la temperatura e la pressione media, p_v la tensione media del vapor acquoso, h_m e φ l'altezza e la latitudine media delle due stazioni, $\alpha = 0{,}003665$, $\beta = 0{,}00265$, $\varepsilon = 0{,}377$, R il raggio della sfera osculatrice all'ellissoide terrestre in corrispondenza alla latitudine φ.

Assumendo come latitudini di Roma e di Monte Cavo

$$\varphi_1 = 41°{,}53' \qquad \varphi_2 = 41°{,}45',$$

e come altezza media prossima delle due stazioni

$$h_m = 509^m,$$

si poterono riunire i primi tre fattori della formola in un unico fattore numerico, ottenendosi

$$h = [4.26502](1+\alpha\,t_m)\left(1+\varepsilon\frac{p_v}{p_m}\right)\log\frac{p_1}{p_2},$$

dove il numero fra parentesi quadre è il logaritmo del fattore numerico.

L'uso di questa formola è semplicissimo quando si faccia uso delle tavole di JORDAN [2] contenenti i logaritmi dei fattori $1+\alpha\,t_m$, $1+\varepsilon\frac{p_v}{p_m}$. Coi dati già registrati nello specchio riassuntivo della 3ª parte si calcolarono, in corrispondenza alle varie epoche del giorno, le differenze di livello fra i pozzetti dei due barometri già segnate nell'ultima colonna dello specchio stesso.

Per mettere in evidenza il modo di variazione di queste differenze di livello col variare del periodo diurno, si tolse da ognuna di esse la differenza di livello risultante dalla livellazione di precisione, $h = 898{,}03$, ed i numeri così risultanti si ordinarono per frazioni del semiarco diurno come risulta dalla unita tabella:

[1] « *Handbuch der Vermessungskunde* » Bd. II, S. 523 (3ª Auflage).
[2] « *Handbuch* » ecc. Anhang, S. [23], [24].

Distribuzione degli errori della livellazione barometrica per frazioni del semiarco diurno.

DATA \ Frazioni del semiarco diurno	Mattino 0·80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	0.45	0.40	0.35	0.30	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.00	Sera 0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80
29 marzo 1895																				11,39		9.81			7.12			2.90	
30 »			2.13				6.47			5.18			8.23			6.87			12.00										
31 »			4.67				8.66			7.70			10.77			9.52													
1 aprile								6.06		9.27	7.33		8.10		6.62	7.51													
17 maggio							3.65						10.04																
18 »	0.35	1.16	0.48			8.14	10.42																						
13 giugno		1.74	4.29		6.14	3.54	6.49		8.54	11.05	8.02		8.93	9.46	9.85		7.24	5.77	6.04	7.68		4.33	5.22						
14 »	3.85	3.81	4.29		4.81	4.81	4.97		7.99	8.08	6.31		9.79	9.39	10.29		9.02		6.83		6.49	4.73	2.21	4.95		6.70	4.18		
15 »		1.53	6.58		5.35	6.01		8.25	9.27	9.81	5.99		9.14	3.96	7.58		8.70			9.73		10.27	7.87						
17 »																				8.08		11.04	10.00	8.77	8.72		7.16	5.49	4.39
18 »		1.80	3.40		6.95	4.73	7.10		8.18	5.37	6.91		5.47	6.20	6.54		8.75	11.25	10.15	10.38		9.60	9.44						
21 »													6.61	10.17	9.98									4.64			5.10	4.18	
1 luglio		-1.10	-1.68		0.95	2.81		6.85	10.46	9.71		7.99	6.89	7.70	10.17		10.44	10.96	8.73		10.27	10.17	6.87		6.76	5.37	5.16		3.05
Medie	2.10	1.49	3.02		4.84	5.01	6.82	7.05	8.88	8.27	6.91	7.99	8.40	7.81	8.72	7.97	8.83	9.33	8.75	8.63	8.38	8.30	6.25	6.12	6.10	6.03	4.07	3.84	3.72

I numeri dell'ultima linea rappresentano gli errori medi commessi nelle varie epoche del giorno, determinando la differenza d'altezza fra i due barometri per mezzo della formola barometrica. Nell'intervallo considerato dell'arco diurno questi errori sono sempre positivi, presentano un massimo in corrispondenza alle ore meridiane e decrescono procedendo verso gli estremi dell'arco diurno. Se si costruisce la curva avente per ascisse le frazioni del semiarco diurno e per ordinate i numeri qui considerati, si trova che essa interseca l'asse delle ascisse prossimamente intorno a quei punti che rappresentano gli estremi dell'arco diurno. Le ore prossime a questi estremi sono dunque le più adatte per fare il calcolo delle differenze di livello colla formola barometrica.

Questi risultati furono già stabiliti da Bauernfeind [1], il quale primo formulò le tre leggi:

« Le differenze di livello di due stazioni, determinate barometricamente, mostrano un periodo giornaliero dipendente dalla temperatura dell'aria, in modo che alla temperatura massima corrispondono le differenze di livello maggiori, alla temperatura minima le minori ».

« La ragione di questo periodo è a ricercarsi nella irradiazione del terreno la quale fa sì che i termometri sospesi nell'ombra, entro certe ore, mostrano temperature troppo alte, nelle rimanenti troppo basse, e solo in due epoche del giorno indicano la vera temperatura della colonna d'aria interposta fra le due stazioni ».

« La precisione della determinazione barometrica delle altezze è quindi massima in corrispondenza a queste due epoche ».

Le attuali osservazioni comprendono solo una parte dell'arco diurno e non si estendono all'arco notturno, ma, anche così limitate, esse costituiscono una piena conferma delle leggi di Bauernfeind.

[1] Carl Max von Bauernfeind « *Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen und die Veränderungen der Temperatur und Feuchtigkeit der Atmosphäre* » München 1862. — « *Neue Beobachtungen über die tägliche Periode barometrisch bestimmter Höhen* ». Abh. der k. bayer Akad. 1883.

INDICE DELLA MEMORIA

PAG.

INTRODUZIONE 124

PARTE PRIMA

Studio degli strumenti.

Il teodolite Starke 126
Determinazione della distanza fra l'asse di rotazione e l'asse di reiterazione del cerchio zenitale . . . . . »
Sensibilità della livelletta zenitale 130
Flessione del cannocchiale 131
L'Universale Pistor e Martins 132
Eccentricità del cerchio zenitale . . . . . »
Sensibilità della livelletta zenitale . . . . . »
Flessione del cannocchiale 134

PARTE SECONDA

La livellazione geometrica.

Il livello 135
Le mire: loro comparazione 136
Le operazioni di livellazione 140
Precisione della livellazione 144

PARTE TERZA

Determinazione del coefficiente medio di rifrazione.

Programma delle osservazioni e metodo di calcolo 147
Le distanze zenitali 149
Quadro riassuntivo delle osservazioni 151
Legge di variazione del coefficiente medio di rifrazione 157

PARTE QUARTA

Confronto dell'osservazione colla teoria.

I coefficienti di rifrazione locali risultanti dalla osservazione 161
I coefficienti di rifrazione locali risultanti dalla teoria 162
Quadro comparativo dei coefficienti di rifrazione osservati e teoretici 165
La livellazione barometrica 168