Aggiunta alla Memoria del sig. Enriques *in relazione ad un resultato enunciato nel n° 7.*

Questa Nota è dedicata a giustificare il resultato sui sistemi lineari di curve piane, di cui il sig. Enriques approfitta. Ricorrerò, a tal fine, a considerazioni, svolte in parte nella mia Memoria « *Sulle superficie di genere zero* » (Mem. della Società dei XL, 1896).

Ivi è dimostrato (§§ 2-7) che se un sistema lineare $|C|\infty^r$ di curve piane di genere $\pi > 1$, è *irriducibile, semplice, privo di curve fondamentali proprie ed ha la serie caratteristica non speciale* (la quale ultima condizione non costituisce propriamente una restrizione, poichè se non si verifica per $|C|$, certo si verifica pel sistema aggiunto, e tanto a noi basta), allora anche il sistema ad esso aggiunto $|C'|$ possiede le stesse proprietà, fatta eccezione per i seguenti casi:

1) se tutte le curve di $|C|$ sono iperellittiche, poichè allora ogni curva di $|C'|$ si spezza in $\pi - 1$ curve razionali appartenenti ad un fascio;

2) se $|C|$ contiene un sistema ∞^{r-1} composto di curve iperellittiche, poichè in tal caso il sistema $|C'|$ non è semplice; esso si compone precisamente (l. c. § 13) di $\infty^{\pi-1}$ curve iperellittiche di genere $\pi - 2$ secantisi a due a due in $\pi - 2$ coppie della serie g_2^1 che ciascuna C' sostiene.

Se $|C'|$ non si trova nelle condizioni 1) o 2), si possono applicare ad esso i risultati enunciati per $|C|$; e così si può continuare costruendo i successivi aggiunti di $|C|$: $|C'|, |C''| \ldots.$ Poichè le curve che li compongono hanno ordini decrescenti, si arriva in fine ad un primo sistema $|C^{(i)}|$ il quale non soddisfa più alle proprietà di $|C|$:

1) sia perchè ogni curva di $|C^{(i)}|$ si compone di un certo numero ($\geqq 1$) di curve razionali variabili in un fascio;

2) sia perchè $|C^{(i)}|$, pur essendo irriducibile, non è semplice, e si compone di ∞^{π_i+1} curve iperellittiche di genere π_i secantisi a due a due in π_i coppie di punti;

3) sia perchè $|C^{(i)}|$ è di genere $\pi_i \leqq 1$, il qual caso però ricade nei precedenti, a meno che $|C^{(i)}|$ non sia un sistema almeno ∞^2 di curve razionali, od almeno ∞^3 di curve ellittiche.

Sicchè in sostanza, per giustificare il lemma che adopera il sig. Enriques, rimane da approfondire il caso 2), e da dimostrare che esso è possibile soltanto per le reti di curve ellittiche ($\pi_i = 1$), per i sistemi ∞^3 di curve di genere 2 ($\pi_i = 2$) trasformabili in sistemi di sestiche con otto punti base, più (forse) in un caso che si riduce ad 1).

Determineremo a tal fine tutti i sistemi $|C|\infty^{\pi+1}$ di curve iperellittiche di genere π secantisi a due a due in π coppie della g_2^1 che ciascuna C sostiene; (ho tralasciato l'indice i per semplicità di scrittura).

Potremo supporre $\pi > 1$, trascurando il caso ben noto della rete di curve ellittiche, che si può ridurre sempre ad un sistema di cubiche con 7 punti base.

Mediante il sistema $|C|$ vien rappresentata sul piano una superficie F d'ordine π di $S_{\pi+1}$, contata due volte, e dotata di una curva di diramazione Δ di ordine $2\pi+2$. Ora una tale superficie è certo rigata, poichè la ipotesi che sia F una superficie di VERONESE (del 4° ordine di S_5) viene esclusa dal fatto che ognuna delle ∞^2 coniche della superficie verrebbe segata da Δ in 5 punti, e non in un numero pari di punti, come dovrebbe accadere.

Le generatrici di F (di ordine π) non possono esser segate dalla curva Δ (di ordine $2\pi+2$) in più di quattro punti; segue che quelle generatrici hanno per immagini sul nostro piano ∞^1 curve γ razionali od ellittiche formanti un fascio e bisecanti le curve di $|C|$.

Se le curve γ sono razionali, il sistema $|C|$ può trasformarsi in un sistema di curve di un certo ordine n dotate di un punto fisso $(n-2)$.uplo; e quindi ogni curva del sistema aggiunto a $|C|$ si compone di più rette uscenti da quel punto multiplo; si ricade così in un caso già contemplato.

Supponiamo invece che esista un fascio di curve ellittiche γ bisecanti le curve C. e trasformiamo il fascio delle γ in un fascio di curve d'ordine $3r\,(r \geqq 1)$ con 9 punti base r.pli (BERTINI, GUCCIA, JUNG....). Il sistema $|C|$ si trasformerà in un sistema che rappresenteremo collo stesso simbolo, le cui curve avranno un certo ordine n e le molteplicità $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_9$ nei 9 punti base nominati.

La ipotesi che le curve ellittiche bisechino le C si traduce allora nella relazione

$$3nr - r\Sigma\alpha = 2$$

la quale ci dà intanto $r=1$ o 2; però anche il valore $r=2$ va escluso perchè in contrasto colle formole che dànno il genere π e il grado 2π del sistema $|C|$ in funzione dell'ordine n e delle molteplicità dei punti base. Rimane dunque

$$3n - \Sigma\alpha = 2. \tag{1}$$

Se però si suppone che il sistema $|C|$ sia ridotto all'ordine minimo, mediante trasformazioni Cremoniane, alla formula (1) può essere aggiunta l'altra

$$\alpha_i + \alpha_j + \alpha_l \leqq n \tag{2}$$

per ogni combinazione i, j, l dei primi 9 numeri (perchè se la (2) non fosse verificata si riuscirebbe ad abbassare l'ordine n di $|C|$ colla trasformazione quadratica avente per punti fondamentali quei punti base del fascio di cubiche γ, che occupano i posti i, j, l). Ora un esame semplicissimo delle relazioni (1) e (2) tra i numeri interi n ed α conduce ai seguenti sistemi di soluzioni, dove k indica un numero intero:

a) $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_8 = k,\quad \alpha_9 = k-2,\quad n = 3k,\quad \pi = 2k-2 \qquad (k \geqq 2)$

b) $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_7 = k,\quad \alpha_8 = \alpha_9 = k-1,\quad n = 3k,\quad \pi = 2k-1 \; (k \geqq 2)$

c) $\alpha_1 = k+1,\quad \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_9 = k,\quad n = 3k+1,\quad \pi = 2k \qquad (k \geqq 1)$

(il limite inferiore di k è fissato in guisa da ottenere sistemi di genere $\pi \geqq 2$).

Rimane però da decidere quale tra i sistemi *a*), *b*), *c*) possa considerarsi come aggiunto di un sistema *semplice*; poichè tale condizione è fondamentale per noi. Ora si vede che uno qualsiasi $|C|$ dei sistemi *a*), *b*), *c*), il quale possegga *nove* punti base (di molteplicità $\geqq 1$) proviene mediante aggiunzione da quel sistema dello stesso tipo, i cui caratteri si ottengono mutando k in $k+1$ nei valori dei caratteri di $|C|$. Ma allora il nuovo sistema, come $|C|$, è *non-semplice*; il passaggio di una sua curva qualsiasi per un punto generico trae di conseguenza il passaggio per un secondo punto collegato col primo. La cosa va diversamente invece, se $|C|$ possiede meno di 9 punti base, il che è possibile soltanto pel sistema *a*) quando si pone $k=2$, vale a dire *pel sistema delle sestiche con otto punti base doppi*; poichè un tal sistema è aggiunto al sistema *semplice* delle curve di nono ordine con 8 punti base tripli. Concludiamo dunque che l'unico sistema dei tipi precedenti, il quale possa presentarsi tra i successivi aggiunti di un sistema irriducibile, semplice, privo di curve fondamentali proprie, è precisamente il sistema ∞^3 di curve di genere 2, che può trasformarsi birazionalmente nel sistema delle sestiche con 8 punti base doppi. E così il lemma di cui il sig. Enriques approfitta è pienamente giustificato.

Per incidenza si può notare che *ogni sistema di curve iperellittiche di genere* $\pi\,(>1)$ *secantisi a due a due in* π *coppie della* g_2^1 *giacente sopra ciascuna di esse, può trasformarsi birazionalmente o in un sistema di curve di un certo ordine* n *dotate di un punto base d'ordine* $n-2$. *uplo (più altri punti base semplici o doppi), oppure in uno dei sistemi a), b), c) sopra descritti.*

G. Castelnuovo.