RICERCHE

SOPRA

LA TEORICA DELLE SUPERFICIE

DI

ULISSE DINI

Nella Memoria *Sopra alcuni punti della teoria delle superficie*, pubblicata nel Volume precedente di questi Atti, prendendo per coordinate su una superficie i due sistemi di linee di curvatura e sulla sfera di raggio uno le linee ortogonali che corrispondono a queste nella solita rappresentazione di Gauss, detti due formole che legano i raggi di curvatura della superficie data ai coefficienti dell'elemento lineare sferico; e da queste formole (che, come risulta dalla Memoria che quasi contemporaneamente pubblicava il sig. O. Bonnet sulle superficie applicabili, sono casi particolari di altre più generali dovute al sig. Codazzi) ne dedussi allora sotto una forma nuova le equazioni in termini finiti delle superficie a linee di curvatura piane, e insieme ad altri risultati giunsi anche (come fece pure il Bonnet nella Memoria citata) ad una nuova dimostrazione di un bel teorema del sig. Weingarten sulle superficie nelle quali un raggio di curvatura è una funzione determinata dell'altro.

La Memoria che ora ho l'onore di pubblicare è ancora una continua applicazione di quelle formole, e ne fa quindi risaltare vieppiù l'importanza.

In questa, fatte dapprima, mediante quelle formole, alcune osservazioni generali che mi tornano utili nel seguito, passo a considerare le superficie evolute di un'altra superficie qualunque, e dimostro un teorema sulle evolute rispetto alle linee di curvatura v di quelle superficie per le quali i raggi di curvatura principali r_1 e r_2 soddisfanno a una data relazione $r_1 = \varphi(r_2, v)$ lungo le linee v.

Questo teorema, che è una generalizzazione di quello del sig. Weingarten sulle superficie evolute di quelle per le quali un raggio di curvatura è una funzione determinata dell'altro, fa dipendere i problemi sulle superficie applicabili su una data superficie da quelli sulle superficie evolute di altre superficie e viceversa; e io ne faccio una applicazione cercando le superficie gobbe le cui generatrici possono, colla deformazione, ridursi linee piane o, in altri termini, linee di curvatura della superficie trasformata, o possono ridursi eliche cilindriche; e trovo allora che le superficie gobbe applicabili su quella gobba di area minima sono le sole nelle quali queste circostanze possono verificarsi; e il primo caso si presenta quando le dette superficie divengono di rivoluzione, e il secondo quando esse si trasformano in certe superficie di cui dò le equazioni in termini finiti, e che costituiscono una classe nuova (io credo) di superficie applicabili sull'elicoide gobbo di area minima.

Per giungere a questi risultati ho dovuto prima trovare le coordinate $X(u, v)$, $Y(u, v)$, $Z(u, v)$ dei punti della sfera e la forma del suo elemento lineare quando le linee coordinate u e v su essa sono ortogonali e che le linee di un sistema sono circonferenze, e ho dovuto considerare le superficie evolventi di quelle che io cercava; e con questo, servendomi sempre delle formole citate, sono giunto a determinare la classe di superficie di curvatura costante negativa che non sono di rivoluzione e che hanno un sistema di linee di curvatura piane; e dopo di ciò ho potuto facilmente dedurne anche le superficie corrispondenti di curvatura costante positiva.

Tutte queste superficie hanno le linee di curvatura dell'altro sistema sferiche e appartenenti a sfere normali alla superficie e godono anche di altre proprietà; e le equazioni di alcune di esse sono molto semplici e quelle delle altre si riducono a contenere le funzioni ellittiche.

Per mezzo poi di quelle di curvatura costante negativa si può ottenere anche un'altra classe di superficie applicabili sull'elicoide gobbo di area minima, oltre a quella (di cui sopra parlavo) che è costituita dalle superficie nelle quali le linee che corrispondono alle generatrici dell'elicoide sono eliche cilindriche; e per mezzo di quelle di curvatura costante positiva si giunge anche a trovare le superficie di curvatura media costante che non sono di rivoluzione e che hanno un sistema di linee di curvatura piane.

Infine faccio vedere come per mezzo delle osservazioni generali fatte in principio e delle formole trovate per la sfera si giunge subito a trovare le equazioni delle superficie a linee di curvatura di un sistema piane; e queste conducono anche a determinare le superficie le cui linee geodetiche di un sistema sono eliche cilindriche, e permettono di risolvere alcuni problemi su queste ultime superficie.

1. Indichiamo con x, y, z, X, Y, Z le coordinate dei punti di una superficie non sviluppabile e i coseni degli angoli che la normale ad essa fa coi tre assi ortogonali, con u e v i parametri delle linee di curvatura, con r_1 e r_2 i raggi di curvatura principali relativi alle linee u e v respettivamente. Avremo le equazioni:

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{dx}{du} = r_2 \dfrac{dX}{du}, & \dfrac{dx}{dv} = r_1 \dfrac{dX}{dv}, \\ \dfrac{dy}{du} = r_2 \dfrac{dY}{du}, & \dfrac{dy}{dv} = r_1 \dfrac{dY}{dv}, \\ \dfrac{dz}{du} = r_2 \dfrac{dZ}{du}, & \dfrac{dz}{dv} = r_1 \dfrac{dZ}{dv}; \end{array} \right.$$

e le altre

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Sigma X^2 = 1, \qquad \Sigma \frac{dX}{du}\frac{dX}{dv} = 0.$$

Inoltre essendo

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$$

il quadrato dell'elemento lineare della superficie, e

$$(4) \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad ds'^2 = E'\,du^2 + G'\,dv^2 ,$$

il corrispondente sferico nella rappresentazione di Gauss sulla sfera di raggio uno, si avranno le formole (V. la mia Mem. cit. nell'introd.):

$$(5) \ldots\ldots\ldots \qquad r_1 = \pm\sqrt{\frac{G}{G'}} , \qquad r_2 = \pm\sqrt{\frac{E}{E'}} ,$$

$$(6) \ldots\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} (r_1 - r_2)\,\dfrac{d\log\sqrt{E'}}{dv} - \dfrac{dr_2}{dv} = 0 , \\[2ex] (r_1 - r_2)\,\dfrac{d\log\sqrt{G'}}{du} + \dfrac{dr_1}{du} = 0 ; \end{array} \right.$$

2. Le formole (6) conducono subito a osservare che *quando sulla sfera le linee u e v siano ortogonali, e diano all'elemento lineare la forma*

$$ds'^2 = E'\,du^2 + G'\,dv^2 ,$$

e che r_1 e r_2 soddisfacciano alle equazioni (6), *se X, Y, Z sono le coordinate dei punti della sfera espresse pei parametri u e v, esisterà una e una sola superficie la cui normale faccia cogli assi gli angoli i cui coseni siano X, Y, Z, i cui raggi di curvatura siano r_1 e r_2, e le linee di curvatura siano le linee u e v corrispondenti alle u e v sferiche. Le equazioni di queste superficie si avranno con sole quadrature, e saranno le seguenti:*

$$(7) \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} x = \displaystyle\int_{u,v} \left(r_2 \frac{dX}{du}\,du + r_1 \frac{dX}{dv}\,dv \right) + C_1 , \\[2ex] y = \displaystyle\int_{u,v} \left(r_2 \frac{dY}{du}\,du + r_1 \frac{dY}{dv}\,dv \right) + C_2 , \\[2ex] z = \displaystyle\int_{u,v} \left(r_2 \frac{dZ}{du}\,du + r_1 \frac{dZ}{dv}\,dv \right) + C_3 , \end{array} \right.$$

ove C_1, C_2, C_3 sono costanti arbitrarie che dipendono solo dalla posizione dell'origine degli assi coordinati.

Per vedere questo osserviamo che, per le ipotesi fatte, essendo soddisfatte le (2) e (6), se si pone:

$$A=(r_1-r_2)\frac{d^2X}{du\,dv}+\frac{dr_1}{du}\frac{dX}{dv}-\frac{dr_2}{dv}\frac{dX}{du},$$

$$B=(r_1-r_2)\frac{d^2Y}{du\,dv}+\frac{dr_1}{du}\frac{dY}{dv}-\frac{dr_2}{dv}\frac{dY}{du},$$

$$C=(r_1-r_2)\frac{d^2Z}{du\,dv}+\frac{dr_1}{du}\frac{dZ}{dv}-\frac{dr_2}{dv}\frac{dZ}{du},$$

si avrà

$$A\,X+B\,Y+C\,Z=0,$$

$$A\frac{dX}{du}+B\frac{dY}{du}+C\frac{dZ}{du}=0,$$

$$A\frac{dX}{dv}+B\frac{dY}{dv}+C\frac{dZ}{dv}=0;$$

e quindi, poichè il determinante formato coi coefficienti di A, B, C non è zero, ma è uguale a $\sqrt{E'G'}$, si avrà:

$$A=0,\qquad B=0,\qquad C=0,$$

e le espressioni sotto i segni d'integrazione nelle formole (7) saranno differenziali esatti, e perciò le equazioni (7) apparterranno a una superficie per la quale si ha:

$$\Sigma X\frac{dx}{du}=0,\qquad \Sigma X\frac{dx}{dv}=0,$$

e quindi ecc., ecc.; e evidentemente la superficie (7) sarà la sola che soddisfaccia a tutte le condizioni espresse nell'enunciato.

Così si vede dunque che per avere tutte le superficie le cui linee di curvatura hanno date trasformate sferiche u e v, per le quali si ha la (4), si troveranno dapprima i valori di r_1 e r_2 che soddisfanno alle (6), e

allora se X, Y, Z sono le coordinate dei punti della sfera espresse per u e v, le equazioni delle superficie cercate saranno le (7).

Per trovare poi questi valori di r_1 e r_2, quando non si presenti altra via più semplice, e che le v non siano geodetiche, si potrà osservare che derivando la prima delle (6) rapporto ad u, si ottiene l'equazione

$$(8)\ldots \quad \frac{d^2 r_2}{du\,dv} = \left(\frac{d r_1}{du} - \frac{d r_2}{du}\right) \frac{d \log \sqrt{E'}}{dv} + (r_1 - r_2) \frac{d^2 \log \sqrt{E'}}{du\,dv},$$

la quale, quando le v non siano geodetiche, eliminandovi $\frac{d r_1}{du}$ e $r_1 - r_2$ colle (6), diviene:

$$(9)\ldots \quad \frac{d^2 r_2}{du\,dv} = \frac{d r_2}{dv} \frac{d}{du} \left\{ \log \frac{\frac{d \log \sqrt{E'}}{dv}}{\sqrt{G'}} \right\} - \frac{d r_2}{du} \frac{d \log \sqrt{E'}}{dv}.$$

e integrata ci darà r_2 con due funzioni arbitrarie.

Sostituendo nella prima delle (6) se ne ricaverà r_1, e i valori così trovati di r_1 e r_2 soddisfacendo alla (9) e alla prima delle (6), e quindi anche alla (8), soddisfaranno anche alla seconda delle (6) e saranno i valori richiesti.

Notiamo poi, che mentre qui si determina prima r_2 integrando la (9), e poi r_1 colla prima delle (6), si potrebbe invece, purchè le u non fossero geodetiche, determinare prima r_1 colla equazione analoga alla (9) che si otterrebbe derivando la seconda delle (6), e poi determinare r_2 per mezzo della seconda stessa.

In ogni caso si seguirà il processo col quale l'equazione da integrarsi è più semplice.

Sono queste le osservazioni generali che applicai già in particolare pel teorema del Weingarten, e per la ricerca delle superficie a linee di curvatura piane, e che mi torneranno utili più oltre.

3. Il problema « Dato un sistema di valori $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ per r_1 e r_2, trovare le superficie corrispondenti nella ipotesi che le u e v siano le linee di curvatura » non è sempre possibile. Si vede infatti che r_1 e r_2

devono sempre soddisfare alle (6), *ove E' e G' sono coefficienti dell'elemento lineare sferico*, e quindi, onde il problema sia possibile, bisognerà che i valori di $\frac{d \log \sqrt{E'}}{dv}$, e $\frac{d \log \sqrt{G'}}{du}$ che verranno dalle (6), dietro i valori scelti di r_1 e r_2, diano per E' e G' dei valori che appartengano a una sfera di raggio uno, e quindi tali che sia soddisfatta la condizione

$$\sqrt{E'G'} = -\frac{d}{du}\left(\frac{\frac{d\sqrt{G'}}{du}}{\sqrt{E'}}\right) - \frac{d}{dv}\left(\frac{\frac{d\sqrt{E'}}{dv}}{\sqrt{G'}}\right),$$

che esprime che la curvatura della superficie cui appartengono E' e G' è l'unità.

Se questo avverrà, esisteranno sulla sfera delle linee u e v tali che prese per coordinate i coefficienti dell'elemento lineare siano E' e G', e esisteranno i valori corrispondenti delle coordinate X, Y, Z dei punti della sfera espresse per u e v (*), e quindi esisteranno, per l'osservazione del numero precedente, delle superficie i cui raggi di curvatura siano r_1 e r_2, essendo u e v le linee di curvatura; e per determinarle basterà trovare i valori di X, Y, Z che convengono alle linee u e v della sfera. Ora, per fare questo si osserverà che essi devono soddisfare all'equazione

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 ,$$

e alle altre

$$A = 0 , \qquad B = 0 , \qquad C = 0 ,$$

ovvero, per le (6):

(*) Tutto ciò è evidente, giacchè se servendosi della forma dell'elemento lineare in cui i coefficienti di du^2 e dv^2 sono E', e G', si trovassero (il che teoricamente è possibile) un sistema α e β di coordinate isoterme, e $\alpha = \alpha(u, v)$, $\beta = \beta(u, v)$ fossero le formole di trasformazione, queste coordinate isoterme, appartenendo a una superficie di curvatura uno, apparterrebbero anche alla sfera di raggio uno (V. Monge, *Applic. de l'Anal. à la Géom. Notes par* M. Liouville, *not. IV*), e quindi passando da queste alle coordinate u e v colle formole precedenti si avrebbero le linee u e v della sfera cui corrispondono i coefficienti E' e G' dell'elemento lineare; e colle stesse formole dalle coordinate dei punti della sfera espresse per α e β, si passerebbe a quelle espresse per u e v.

$$\frac{d^2X}{du\,dv}=\frac{d\log\sqrt{E'}}{dv}\frac{dX}{du}+\frac{d\log\sqrt{G'}}{du}\frac{dX}{dv},$$

$$\frac{d^2Y}{du\,dv}=\frac{d\log\sqrt{E'}}{dv}\frac{dY}{du}+\frac{d\log\sqrt{G'}}{du}\frac{dY}{dv},$$

$$\frac{d^2Z}{du\,dv}=\frac{d\log\sqrt{E'}}{dv}\frac{dZ}{du}+\frac{d\log\sqrt{G'}}{du}\frac{dZ}{dv};$$

e basterà trovare i valori di X, Y, Z che soddisfaranno a queste quattro equazioni (e che certo esisteranno), giacchè essi saranno tutti e soli quelli che convengono alle superficie cercate. Si vede infatti che soddisfacendo essi alla $\Sigma X^2=1$, apparterranno a una sfera di raggio uno, e poichè da questa equazione si deducono le due

$$\Sigma X\frac{dX}{du}=0\,,\qquad \Sigma X\frac{dX}{dv}=0\,;$$

per queste e per le altre condizioni precedenti ne vengono le relazioni

$$\Sigma X\frac{d^2X}{du\,dv}=0\,,\qquad \Sigma\frac{dX}{du}\frac{dX}{dv}=0\,,$$

$$\Sigma\left(\frac{dX}{du}\right)^2=UE',\qquad \Sigma\left(\frac{dX}{dv}\right)^2=VG'.$$

ove U e V sono funzioni di u e v respettivamente; e queste mostrano chiaramente che vengono ad essere soddisfatte tutte le condizioni volute (*).

Trovati così i valori di X, Y, Z, si hanno, come si è detto, per mezzo delle equazioni (7) le equazioni delle superficie i cui raggi di

(*) È da notare che le equazioni a derivate parziali che compariscono in questo genere di ricerche sono tutte della forma:

$$\frac{d^2u}{du\,dv}=M\frac{du}{dv}+N\frac{du}{dv},$$

ove M e N sono funzioni di u e v. Queste equazioni sono casi particolari di quelle studiate da Eulero e da Laplace, e si sanno integrare in casi molto generali.

curvatura sono r_1 e r_2, essendo u e v le linee di curvatura, e così risolviamo la questione proposta. Inoltre notiamo che nello stesso tempo si risolve così anche l'altra questione della ricerca delle superficie i cui punti si corrispondono in modo che le linee di curvatura sono linee corrispondenti, e i raggi di curvatura sono uguali ai punti corrispondenti; e anche si risolve la questione della ricerca delle superficie i cui raggi di curvatura soddisfanno a date relazioni

$$F(r_1, r_2, u) = 0, \qquad F_1(r_1, r_2, v) = 0$$

lungo le linee di curvatura; e così con questo processo potremmo, per esempio, trovare le superficie per le quali lungo le linee di curvatura il raggio di curvatura corrispondente varia proporzionalmente al cubo dell'altro, ecc., ecc.

4. Queste osservazioni conducono ad una proprietà delle superficie a linee di curvatura piane. Ricordiamo perciò che, indicando con u e v i parametri di due sistemi di cerchi ortogonali sulla sfera, scelti in modo che si abbia

$$\sqrt{E} = \frac{U_1}{u+v}, \qquad \sqrt{G} = \frac{V_1}{u+v},$$

ove U_1 e V_1 sono funzioni di u e v respettivamente che dipendono dal sistema di cerchi che si considera, si trovò (Mem. cit.) che le superficie a linee di curvatura piane, e non geodetiche, hanno per raggi di curvatura

$$(10) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} r_1 = U - V + V'(u+v), \\ r_2 = U - V - U'(u+v), \end{cases}$$

ove U e V sono funzioni di u e v respettivamente; e le equazioni di queste superficie sono le (7), ove r_1 e r_2 hanno i valori precedenti, e X, Y, Z sono le coordinate della sfera espresse per u e v, come le determinai nella Memoria citata.

Viceversa, se essendo u e v le linee di curvatura di una superficie, i loro raggi di curvatura sono dati dalle (10) (o possono ridursi a questi

sostituendo nelle loro espressioni per u una conveniente funzione di u, e per v una conveniente funzione di v), la superficie sarà a linee di curvatura piane, giacchè per le (6) si vede che i coefficienti dell'elemento lineare sferico corrispondente saranno dati dalle formole:

$$\sqrt{E} = \frac{U_1}{u+v}, \qquad \sqrt{G} = \frac{V_1}{u+v},$$

e quindi sulla sfera le linee u e v saranno circonferenze; dunque evidentemente si può concludere il seguente teorema: *Le superficie a linee di curvatura piane si dividono in infinite classi complete di superficie i cui punti si corrispondono in modo che le linee di curvatura sono corrispondenti e i raggi di curvatura (e quindi anche la curvatura delle superficie) ai punti corrispondenti sono eguali. Le equazioni di una stessa classe di queste superficie si ottengono con quadrature dalle* (7), *quando* r_1 *e* r_2 *hanno i valori* (10), *lasciando alle funzioni* U *e* V *uno stesso valore, o valori tali che* r_1 *e* r_2 *possano ridursi alla forma dovuta col cangiare* u *in* $au+b$, *e* v *in* $av-b$, *e variando le costanti arbitrarie contenute in* X, Y, Z *in tutti i modi possibili, talchè le linee* u *e* v *vengano ad essere tutti i possibili differenti sistemi di cerchi ortogonali della sfera che non rientrano nel sistema dei meridiani e dei paralleli.*

5. In particolare si osservi che per le superficie di area minima $r_1+r_2=0$ a linee di curvatura piane e non geodetiche, si ha dalle (10):

$$U = cu^2 + c'u + c'', \qquad V = cv^2 - c'v + c'';$$

e cangiando u in $\frac{u}{\sqrt{c}}$, v in $\frac{v}{\sqrt{c}}$, il che evidentemente può farsi supponendo c positivo (come può sempre supporsi, poichè se nol fosse si cangerebbero i segni di r_1 e r_2), ne verrà:

$$r_1 = (u+v)^2, \qquad r_2 = -(u+v)^2,$$

e così le costanti c, c', c'' non compariscono in r_1 e r_2, e si può perciò concludere che: *Le superficie di area minima a linee di curvatura piane*

e non di rivoluzione costituiscono una classe completa di superficie i cui punti si corrispondono in modo che le linee di curvatura sono corrispondenti e i raggi di curvatura ai punti corrispondenti sono uguali. Una proprietà analoga ha luogo per le superficie parallele a queste $r_1 + r_2 = \text{cost.}$

6. Passiamo ora a studiare la superficie *evoluta* (luogo dei centri di curvatura) di una superficie data rispetto ad uno dei sistemi di linee di curvatura. Lo studio delle superficie evolute di quelle per le quali un raggio di curvatura è una funzione determinata dell'altro, condusse il sig. Weingarten a dimostrare un elegantissimo teorema sulle superficie applicabili su quelle di rivoluzione. Studiando ora le superficie evolute in generale si otterranno dei teoremi meno semplici, ma che però hanno una certa utilità, come avremo occasione di mostrare.

Per questo cominciamo dall'osservare che le equazioni della superficie evoluta E_v rispetto alle linee v sono le seguenti:

$$(11) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \xi = x - r_2 X , \\ \eta = y - r_2 Y , \\ \zeta = z - r_2 Z . \end{cases}$$

In queste le variabili indipendenti sono u e v; ma qui, supponendo che r_2 non sia costante lungo le linee v (poichè altrimenti le linee v sarebbero circolari, e la superficie evoluta si ridurrebbe a una curva), prenderemo per variabili coordinate sulla superficie E_v la v e la r_2, giacchè, come è noto, le linee corrispondenti a queste variabili sulla stessa superficie E_v sono ortogonali. Dietro ciò, si avrà dalla prima delle (11):

$$\frac{d\xi}{dr_2} = \frac{dx}{dr_2} - r_2 \frac{dX}{dr_2} - X ,$$

$$\frac{d\xi}{dv} = \frac{d\xi}{du}\left(\frac{du}{dv}\right) + \frac{d\xi}{dv} = \left(\frac{dx}{du} - r_2 \frac{dX}{du}\right)\left(\frac{du}{dv}\right) + \frac{dx}{dv} - r_2 \frac{dX}{dv} ,$$

nella seconda delle quali r_2 è stato considerato come costante nella derivazione, e il $\left(\frac{du}{dv}\right)$ deve essere tratto dalla $r_2 = \text{cost.}$

Per questo e per le (1) si avrà dunque:

$$\frac{d\xi}{dr_2}=-X\,,\qquad \frac{d\xi}{dv}=(r_1-r_2)\frac{dX}{dv}\,,$$

e analogamente per η e ζ; e quindi si avrà:

$$d\sigma^2=dr_2^2+(r_1-r_2)^2\,G'\,dv^2\,,$$

per l'elemento lineare della superficie (11).

Chiamando dunque g^2 il coefficiente di dv^2, si avrà:

$$(12)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\qquad g^2=(r_1-r_2)^2\,G'\,,$$

e di qui:

$$\log g=\log(r_1-r_2)+\log\sqrt{G'}\;;$$

e perciò la seconda delle (6), che considerando u come funzione di r_2 e di v, può scriversi

$$\frac{d\log\sqrt{G'}}{dr_2}=-\frac{\frac{dr_1}{dr_2}}{r_1-r_2}=-\frac{d\log(r_1-r_2)}{dr_2}-\frac{1}{r_1-r_2}\,,$$

ci darà la seguente:

$$(13)\ldots\ldots\ldots\ldots\qquad \frac{d\log g}{dr_2}=\frac{1}{r_2-r_1}\,.$$

Ma $\frac{d\log g}{dr_2}$ non è altro che la curvatura geodetica delle linee r_2 sulla superficie E_0, dunque di qui si può concludere che: *Nelle superficie evolute delle non sviluppabili, il raggio di curvatura geodetica delle linee traiettorie ortogonali delle geodetiche evolute delle linee di curvatura della superficie evolvente, è eguale alla differenza dei raggi di curvatura della superficie evolvente.*

Questo teorema risultava subito dalle formole del Weingarten, e già

da quelle formole ne dedussi altra volta la (13), che fu data anche dal sig. BELTRAMI. Qui l'ho nuovamente dedotta per avere occasione di trovare la (12) che poi ci sarà utile.

7. Supposto che la superficie data fosse sviluppabile, e che le u fossero le generatrici, la evoluta E_v sarebbe pure sviluppabile, e le linee corrispondenti alle u su essa sarebbero le generatrici; inoltre, dall'osservare che sulla evolvente X, Y, Z sarebbero funzioni della sola u, e G sarebbe una funzione $\varphi(v)$ di v, ne risulta che in coordinate r_2 e v l'elemento lineare di E_v si avrebbe, per mezzo delle (11), sotto la forma:

$$dE^2 = dr_2^2 + \varphi(v)\,dv^2 \;;$$

e quindi si può dire che: *Nella sviluppabile E_v evoluta di un'altra sviluppabile le linee $r_2 = \text{cost}$, cioè le traiettorie ortogonali delle geodetiche v sono esse pure geodetiche;* e per ciò che precede questa proprietà delle superficie evolute delle sviluppabili non appartiene ad altre superficie evolute.

8. Il risultato del § 6 contiene in sè il teorema di WEINGARTEN sulle superficie evolute di quelle per le quali un raggio di curvatura è una funzione determinata dell'altro. Nel caso generale esso dà luogo alle osservazioni seguenti.

Supponiamo che r_1, espresso per r_2 e per v, sia dato dalla formola:

$$r_1 = \varphi(r_2, v) \;,$$

e consideriamo tutte le superficie evolute E_v di quelle i cui raggi di curvatura soddisfanno a questa relazione lungo le linee v. Per queste superficie la differenza $r_1 - r_2$ nei punti corrispondenti agli stessi valori di r_2 e di v sarà sempre la stessa, e quindi si può dire che: *Le superficie E_v evolute di quelle i cui raggi di curvatura soddisfanno a una stessa relazione $r_1 = \varphi(r_2, v)$ lungo le linee di curvatura v, rapporto a cui si prende la superficie evoluta, godono della proprietà che su esse le linee $r_2 = \text{cost.}$ hanno la stessa curvatura geodetica nei punti corrispondenti agli stessi*

valori di r_2 e di v; e inoltre in questi punti le stesse superficie E_v hanno anche la stessa curvatura, giacchè la curvatura di una superficie per la quale si ha:

$$d\sigma^2 = dr_2^2 + g^2 dv^2,$$

è $-\frac{1}{g}\frac{d^2 g}{dr_2}$.

9. Viceversa, sia S una superficie (sviluppabile o no) nella quale le linee v sono geodetiche senza essere rettilinee, e le linee ortogonali r_2 non sono geodetiche; e si consideri il sistema delle tangenti a queste geodetiche v. Questo sistema di rette sarà (come è noto) normale a un sistema di superficie parallele Σ, e la superficie S sarà perciò la evoluta E_v di queste superficie: quindi, per ciò che precede, dietro l'ipotesi fatta sulle linee v e r_2 di S, queste superficie Σ non saranno sviluppabili, e se si chiamano r_1 e r_2 i loro raggi di curvatura, le linee ortogonali alle geodetiche v su S avranno per curvatura geodetica $\frac{1}{r_2 - r_1}$; e si può quindi concludere che: *Se su una superficie un sistema di geodetiche v sono tali che si abbia per essa:*

$$d\sigma^2 = dr_2^2 + g^2 dv^2,$$

e se le linee r_2 non sono geodetiche, la classe completa delle superficie per le quali le linee v sono geodetiche ma non rettilinee, e le linee r_2 hanno la stessa curvatura geodetica nei punti corrispondenti agli stessi valori di r_2 e di v, è costituita dalle evolute E_v di quelle per le quali si ha:

$$\frac{1}{r_1 - r_2} = \frac{d \log g}{dr_2},$$

essendo r_1 e r_2 i raggi di curvatura, e le v un sistema di linee di curvatura. Se poi le linee v possono essere rettilinee, il che avviene nel caso che g^2 sia una funzione di secondo grado di r_2 della forma

$$g^2 = V^2 \left\{ (r_2 - \alpha)^2 + \beta^2 \right\},$$

ove V, α, β sono funzioni reali di v, per completare la classe delle superficie per le quali le linee $r_2 =$ cost. hanno la stessa curvatura geodetica $\frac{d \log g}{d r_2}$ bisogna aggiungere alla classe precedente di superficie evolute quella delle superficie rigate per le quali questa condizione è soddisfatta.

10. Essendo ora

$$d\sigma^2 = d r_2^2 + g^2 d v^2 ,$$

il quadrato dell'elemento lineare di una delle superficie evolute o rigate testè considerate, e supponendo che le linee r_2 non siano esse pure geodetiche, g conterrà certo r_2 e per tutte le altre superficie per le quali le linee r_2 hanno la stessa curvatura geodetica, il quadrato dell'elemento lineare sarà:

$$d\sigma_1^2 = d r_2^2 + V_1^2 g^2 d v^2 ,$$

essendo V_1 una funzione di v.

Nel caso adunque che g contenga anche la v, queste superficie non saranno tutte applicabili, almeno finchè si considerano come corrispondenti le linee v ed r_2; però si decomporranno in infinite classi complete di superficie applicabili l'una sull'altra, in modo che le linee v ed r_2 siano corrispondenti.

Ora per una stessa classe di queste superficie applicabili il coefficiente di dv^2 nel quadrato dell'elemento lineare si riduce alla stessa espressione in funzione di r_2 e di v, ed altrettanto avviene di $r_2 - r_1$ nelle corrispondenti evolute; quindi per la (12) anche G' avrà una stessa espressione, e lo stesso accadrà di G perchè si ha $G = r_1^2 G'$; e viceversa le evolute delle superficie, per le quali $r_1 = \varphi(r_2, v)$ e G o G' hanno la stessa espressione in funzione di r_2 e di v, sono applicabili l'una sull'altra. Dunque, se si osserva che nel caso che la (14) possa appartenere anche a superficie rigate, cioè nel caso che si abbia:

$$(15) \ldots\ldots\ldots \qquad g^2 = V^2 \left\{ (r_2 - \alpha)^2 + \beta^2 \right\} ,$$

la relazione (15) si trasforma nell'altra:

$$(16) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \alpha(r_1+r_2)-r_1 r_2=\alpha^2+\beta^2,$$

se ne potrà concludere il teorema seguente: *La classe delle superficie evolute E_v di quelle per le quali lungo le linee di curvatura del sistema v che si considera viene soddisfatta fra i raggi di curvatura una stessa relazione $r_1=\varphi(r_2, v)$ che è diversa dalla* (16) *e che contiene v, è composta di infinite classi complete di superficie applicabili l'una sull'altra in modo che le linee v ed r_2 siano corrispondenti; e reciprocamente tutte le superficie applicabili su una superficie data, per la quale si ha:*

$$ds^2=dr_2^2+g^2 dv^2,$$

ove g^2 contiene r_2, e non rientra nella (15), *sono evolute di superficie per le quali fra r_1, r_2 e v esiste la relazione*

$$\frac{1}{r_1-r_2}=\frac{d\log g}{dr_2},$$

dipendente dal coefficiente g^2 di dv^2 nell'elemento lineare della superficie data. Inoltre per una stessa classe di superficie applicabili il valore del coefficiente di dv^2 nel quadrato dell'elemento lineare della superficie evolvente e in quello sferico corrispondente quando si prendono per coordinate le linee di curvatura u e v sulla superficie evolvente e le linee corrispondenti sulla sfera hanno (o si riducono ad avere) una stessa espressione quando si esprimano in funzione di r_2 e di v; e reciprocamente.

Nel caso che la relazione data fra i raggi di curvatura sia la (16), *per ottenere le classi complete di superficie applicabili sulle evolute corrispondenti, bisogna aggiungere a queste evolute le differenti classi di superficie rigate per le quali, quando le v sono le generatrici, si ha:*

$$d\sigma^2=dr_2^2+V^2\left\{(r_2-\alpha)^2+\beta^2\right\}dv^2,$$

essendo V una funzione di v che dipende dalla forma dell'elemento lineare della classe speciale di superficie applicabili che si considera.

Notiamo ancora che se per una superficie evolvente per la quale:

$$r_1 = r_1(r_2, v),$$

G e G' hanno i valori $G_1(r_2, v)$, $G_1'(r_2, v)$, per un'altra superficie qualunque della stessa classe G e G' avranno per rispettivi valori VG_1, VG_1'; e per una stessa classe di superficie applicabili V sarà lo stesso o potrà ridursi lo stesso quando a v si sostituisca una funzione di v tale che l'espressione $r_1(r_2, v)$ di r_1 non resti alterata per questa sostituzione.

11. Questi teoremi fanno dipendere i problemi sulle superficie applicabili da quelli sulle superficie evolute e viceversa; ed io, per dare qui un cenno delle applicazioni che per questo essi possono avere, passerò a ricercare se esistano superficie gobbe le cui generatrici possano colla deformazione della superficie ridursi piane, o più generalmente eliche cilindriche.

Per questo osserverò dapprima che, siccome le superficie che si cercano non sono gobbe ma solo applicabili sulle superficie gobbe, talchè per esse si abbia:

$$(17) \ldots\ldots\ldots \qquad d\sigma^2 = dr_2^2 + \left\{(r_2 - \alpha)^2 + \beta^2\right\} dv^2,$$

ove α e β sono funzioni reali di v, così, se esistono, pel teorema precedente saranno fra le superficie evolute E_v di quelle per le quali si ha:

$$(18) \ldots\ldots\ldots \qquad \alpha(r_1 + r_2) - r_1 r_2 = \alpha^2 + \beta^2;$$

e poichè le v sulla E_v devono essere eliche cilindriche, così si vede che saranno fra le evolute di quelle di questa classe (18) (se pure ve ne ha), le cui linee di curvatura v siano tali che le geodetiche v, che loro corrispondono sulla E_v, siano eliche cilindriche.

Ora questo porta che la sviluppabile luogo delle normali alla superficie evolvente lungo le linee v sia un elicoide, e quindi (per un teorema di Joachimstal) le sue linee di curvatura, e perciò anche quelle della superficie evolvente dovranno esser piane; dunque la nostra ricerca si riduce così a quella delle superficie le cui linee di curvatura del sistema v sono piane e i raggi di curvatura sono legati dalla relazione (18).

Ora, per questo osserviamo che dalla (18) si ricava:

$$r_1 = \alpha + \frac{\beta^2}{\alpha - r_2},$$

e quindi, indicando con g^2 il coefficiente di dv^2 nell'elemento lineare delle superficie evolute, e supponendo il parametro v scelto in modo che sia sempre $g^2 = (r_2 - \alpha)^2 + \beta^2$, come nella (17), si avrà:

$$r_1 - r_2 = \frac{(\alpha - r_2)^2 + \beta^2}{\alpha - r_2} = \frac{g^2}{\alpha - r_2},$$

e per la (12):

$$r_1 - r_2 = \frac{(r_1 - r_2)^2}{\alpha - r_2} G';$$

da cui

$$r_1 - r_2 = \frac{\alpha - r_2}{G'};$$

e per la precedente:

$$(\alpha - r_2)^2 (G' - 1) = -\beta^2 G',$$

e quindi, intendendo incluso in β il doppio segno, si avrà:

$$(19) \ldots\ldots \quad r_2 = \alpha + \frac{\beta\sqrt{G'}}{\sqrt{1-G'}}, \qquad r_1 - r_2 = \frac{-\beta}{\sqrt{G'}\sqrt{1-G'}};$$

e così la nostra ricerca si riduce a quella delle superficie a linee di curvatura v piane, e nelle quali, fra i raggi di curvatura r_1 e r_2 ed il coefficiente G' di dv^2 nell'elemento lineare sferico, esistono queste due relazioni.

12. Ciò posto, distinguiamo il caso in cui le linee v (della evolvente) sono geodetiche, da quello in cui non lo sono, e consideriamo ora il primo caso.

In questo caso le geodetiche v della evoluta sono piane e viceversa; dunque questa prima parte della nostra ricerca conduce a risolvere il problema della ricerca delle superficie gobbe, le cui generatrici colla deformazione della superficie possono divenire piane e quindi linee di curvatura della superficie trasformata.

Ora si osservi che, ritenendo i raggi di curvatura r_1 e r_2 dati dalle (19), ove $\sqrt{G'}$ è il coefficiente di dv^2 nell'elemento lineare sferico, la relazione (18) e la seconda delle (6) sarebbero già soddisfatte, e quindi non ci resterebbe da soddisfare che alla prima di queste (6), la quale nel nostro caso per essere le v geodetiche richiede che sia $r_2 = \varphi(u)$. Questa condizione posta nella prima delle (19) porta ad un'altra condizione, perchè nelle relazioni (19) $\sqrt{G'}$ deve appartenere, come si è detto, all'elemento lineare sferico; dunque per le superficie che cerchiamo bisognerà che α, β, φ siano tali che si abbia:

$$\sqrt{G'} = \frac{\alpha - \varphi(u)}{\sqrt{(\alpha-\varphi)^2 + \beta^2}} ;$$

essendo $\sqrt{G'}$ il coefficiente dell'elemento lineare sferico.

Ma essendo le v geodetiche sulla sfera, e le u loro traiettorie ortogonali, si può (come è noto) supporre che u sia scelto in modo che si abbia:

$$E' = 1 , \qquad \frac{d^2\sqrt{G'}}{du^2} = -\sqrt{G'} ;$$

quindi, ricavando dalla precedente il valore di $\frac{d^2\sqrt{G'}}{du^2}$, si vede che, onde la precedente sia soddisfatta, si deve avere identicamente:

$$3\beta^2(\alpha-\varphi)\varphi'^2 + \beta^2\varphi''\left\{(\alpha-\varphi)^2+\beta^2\right\} = (\alpha-\varphi)\left\{(\alpha-\varphi)^2+\beta^2\right\}^2 .$$

Ora, se α non è costante, supponendo $\alpha = \varphi$, questa ci darebbe $\varphi'' = 0$ per qualunque valore di u, poichè β non è zero, altrimenti la superficie evoluta sarebbe sviluppabile; quindi se ne dedurrebbe $\varphi' = c$, e l'equazione precedente si cangierebbe nell'altra:

$$3\beta^2 c^2 = \left\{(\alpha-\varphi)^2+\beta^2\right\}^2 ,$$

che non può sussistere perchè α e β non contengono che v, mentre φ deve contenere la u, altrimenti sarebbe $r_2 = \text{cost.}$, e la superficie evoluta si ridurrebbe a una curva.

Dunque dovrà essere intanto $\alpha = \text{cost.}$, e ora per questo cangiando φ in $\varphi + \alpha$, la equazione precedente diverrà:

$$3\beta^2 \varphi \varphi'^2 - \beta^2 \varphi'' (\varphi^2 + \beta^2) = -\varphi (\varphi^2 + \beta^2)^2,$$

e se β non fosse costante, questa equazione, dovendo essere identica, ci darebbe $\varphi = 0$, il che è pure assurdo.

Dunque α e β devono essere costanti, e quindi cangiando r_2 in $r_2 + \alpha$ nella (17), si avrà:

$$d\sigma^2 = d r_2^2 + (r_2^2 + \beta^2)\, d v^2,$$

che appartiene alle superficie gobbe applicabili su quella gobba di area minima.

Ora le generatrici di queste superficie (come è noto e come risulta subito dalla ispezione della forma precedente del loro elemento lineare) divengono effettivamente piane quando la superficie viene di rivoluzione. D'altra parte, per essere in questo caso, dietro le formole precedenti, G' e r_1 funzioni di u soltanto, si vede subito che sulla evolvente le linee u sono in piani paralleli e sono circolari; quindi queste evolventi, e perciò anche le loro evolute, non possono essere che di rivoluzione; e con questo evidentemente si può ora concludere il seguente teorema: *Le sole superficie gobbe le cui generatrici possono colla deformazione della superficie ridursi piane, e quindi linee di curvatura della superficie trasformata, sono quelle applicabili sulla superficie gobba di area minima. Questa circostanza avviene soltanto quando esse divengono di rivoluzione, nel qual caso le generatrici si trasformano nei meridiani della superficie.*

13. Resta ora a considerarsi il caso in cui le v della superficie evolvente non sono geodetiche. Ma per considerare questo caso mi è prima necessario di trovare la forma dell'elemento lineare della sfera, quando in essa le coordinate u e v sono ortogonali, e un sistema di queste è formato da circonferenze che non sono circoli massimi.

Siano perciò le linee v sulla sfera un sistema di circonferenze e (A_1, A_2, A_3) (funzioni di v) siano le coordinate dei centri di queste circonferenze, supposto che l'origine delle coordinate sia al centro della sfera.

Ponendo $\lambda^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$, è chiaro che la retta che fa cogli assi gli angoli i cui coseni sono $\left(\frac{A_1}{\lambda}, \frac{A_2}{\lambda}, \frac{A_3}{\lambda}\right)$ (e che è quella che va dal centro della sfera al centro dei cerchi v), è perpendicolare al piano delle circonferenze v, e quindi se r (funzione di v) è il raggio di queste circonferenze, e se X_1, Y_1, Z_1 sono i coseni degli angoli che una retta situata nel piano di queste linee fa coi tre assi, e sono funzioni di v e di un altro parametro t, si avrà:

$$\Sigma A_1 X_1 = 0 \,, \qquad \Sigma X_1^2 = 1 \,, \qquad \Sigma A_1^2 + r^2 = 1 \,;$$

e le equazioni della sfera saranno le seguenti:

$$\begin{aligned} X &= A_1 + r X_1 \,, \\ Y &= A_2 + r Y_1 \,, \\ Z &= A_3 + r Z_1 \,. \end{aligned}$$

Ora, siccome X_1, Y_1, Z_1 soddisfanno alle condizioni $\Sigma X_1^2 = 1$, $\Sigma A_1 X_1 = 0$, così le potremo considerare come coordinate dei punti di una sfera di raggio uno, nella quale le linee v sono circoli massimi (*); quindi se si prende pel parametro t (che è ancora indeterminato) l'arco di questi cerchi contato a partire da una linea arbitraria L, e se s'indicano con (B_1, B_2, B_3) (funzioni di v) le coordinate dei punti di questa curva, e con (C_1, C_2, C_3) (funzioni di v) i coseni degli angoli che una retta perpendicolare alla direzione (B_1, B_2, B_3) e situata nel piano del cerchio v fa coi tre assi, le equazioni di questa sfera ausiliaria saranno le seguenti:

$$(20) \ldots\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} X_1 &= B_1 \cos t + C_1 \operatorname{sen} t \,, \\ Y_1 &= B_2 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t \,, \\ Z_1 &= B_3 \cos t + C_3 \operatorname{sen} t \,; \end{aligned} \right.$$

(*) Su questa sfera i circoli v si riducono a uno solo quando le linee v sono in piani paralleli; ma i ragionamenti che qui si fanno valgono anche in questo caso.

e quindi quelle richieste della sfera si potranno scrivere

$$(21) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} X = A_1 + r(B_1 \cos t + C_1 \operatorname{sen} t) \,, \\ Y = A_2 + r(B_2 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t) \,, \\ Z = A_3 + r(B_3 \cos t + C_3 \operatorname{sen} t) \,; \end{cases}$$

e in queste le tre direzioni $\left(\frac{A_1}{\lambda}, \frac{A_2}{\lambda}, \frac{A_3}{\lambda}\right)$, (B_1, B_2, B_3), (C_1, C_2, C_3) saranno tre direzioni ortogonali, e quindi legate dalle solite sei equazioni che si riducono però a cinque, giacchè una di esse, la $\Sigma\left(\frac{A_1}{\lambda}\right)^2 = 1$, è subito soddisfatta per essere $\Sigma A_1^2 = \lambda^2$; inoltre fra le A e la quantità r, che è positiva e minore di uno, si avrà la relazione:

$$\lambda^2 + r^2 = 1 \,.$$

Ricavando ora dalle (21) i valori di dX, dY, dZ, e quadrando e sommando coll'avere riguardo alle relazioni che sussistono fra le A, B, C, e a quelle che se ne deducono colla derivazione, si avrà pel quadrato dell'elemento lineare della sfera in coordinate t e v:

$$ds'^2 = r^2 dt^2 + 2r\left\{\Sigma A_1 B_1' \operatorname{sen} t - \Sigma A_1 C_1' \cos t + r \Sigma B_1 C_1'\right\} dt\, dv + G_1 dv^2,$$

indicando con G_1 il coefficiente di dv^2.

Se ora per semplicizzare si suppone che le linee t e v sulla sfera ausiliaria (20) siano ortogonali (ciò che evidentemente si otterrebbe prendendo la linea iniziale L ortogonale alle linee v), si avrà:

$$(22) \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \Sigma B_1 C_1' = 0 \,,$$

e quindi ponendo

$$(23) \ldots \quad \Sigma A_1 C_1' = M \operatorname{sen} W \,, \qquad \Sigma A_1 B_1' = M \cos W \,,$$

ove M e W sono funzioni convenienti di v, si avrà:

$$ds'^2 = r^2 dt^2 + 2rM \operatorname{sen}(t - W)\, dt\, dv + G_1 dv^2 \,.$$

Introduciamo ora in luogo delle linee t il parametro u delle linee ortogonali alle v. Osservando perciò che quando si sostituisce a t una funzione di u e di v, si ha:

$$ds'^2 = r^2\left(\frac{dt}{du}\right)^2 du^2 + 2r\left\{M \operatorname{sen}(t-W) + r\frac{dt}{dv}\right\}\frac{dt}{du}\,du\,dv + G'dv^2,$$

ove G' è il nuovo coefficiente di dv^2, si vede che t deve essere determinato in funzione di u e v mediante l'equazione

$$(24) \ldots\ldots\ldots \qquad M \operatorname{sen}(t-W) + r\frac{dt}{dv} = 0\ ;$$

e allora sarà:

$$(25) \ldots\ldots\ldots \qquad ds'^2 = r^2\left(\frac{dt}{du}\right)^2 du^2 + G'dv^2.$$

Ora, per vedere che cosa è G', osserviamo che se si chiama θ l'angolo che il piano dei cerchi v fa colla sfera, la curvatura geodetica dei detti cerchi è $\frac{\cos\theta}{r}$, e poichè evidentemente $\operatorname{sen}\theta = r$, così la loro curvatura geodetica sarà $\frac{\sqrt{1-r^2}}{r} = \frac{\lambda}{r}$. Ma, d'altra parte, dalle formole generali che danno la curvatura geodetica delle linee v, si ha che questa curvatura geodetica è $\pm\frac{\frac{d\log\sqrt{E'}}{dv}}{\sqrt{G'}}$; quindi dovremo avere:

$$(26) \ldots\ldots\ldots \qquad \frac{\frac{d\log\sqrt{E'}}{dv}}{\sqrt{G'}} = \frac{\lambda}{r},$$

intendendo ora che il doppio segno sia incluso nel valore $\sqrt{1-r^2}$ di λ.

Ora dalla (25) si ha:

$$\frac{d\log\sqrt{E'}}{dv} = \frac{d\log\left(r\frac{dt}{du}\right)}{dv} = \frac{r'}{r} + \frac{\frac{d^2t}{du\,dv}}{\frac{dt}{du}}\ ;$$

e poichè dalla (24) si ha:

$$r\frac{d^2t}{du\,dv}=-M\cos(t-W)\frac{dt}{du},$$

così si avrà:

$$(27)\ldots\ldots\ldots\quad \frac{d\log\sqrt{E'}}{dv}=\frac{r'}{r}-\frac{M}{r}\cos(t-W),$$

e quindi per la (26) si dovrà avere:

$$\frac{r'-M\cos(t-W)}{\sqrt{G'}}=\frac{\lambda}{r},$$

e perciò, poichè nella nostra ipotesi, che le v non siano geodetiche, il λ è differente da zero, si avrà:

$$\sqrt{G'}=\frac{1}{\lambda}\left\{r'-M\cos(t-W)\right\};$$

e quindi il quadrato dell'elemento lineare della sfera sarà:

$$(28)\ldots\ ds'^2=r^2\left(\frac{dt}{du}\right)^2du^2+\frac{1}{\lambda^2}\left\{r'-M\cos(t-W)\right\}^2dv^2,$$

essendo t legato ad u e v dalla formola (24); cioè essendo le u le traiettorie ortogonali dei cerchi v, e t il parametro che avevamo scelto avanti (*).

14. Premesse queste formole, torniamo ora al nostro soggetto della ricerca delle superficie, nelle quali le linee di curvatura del sistema v sono piane e non geodetiche, e i raggi di curvatura sono legati dalla relazione (18).

Per questo osserviamo che per le superficie a linee di curvatura v piane e non geodetiche, l'elemento lineare sferico prende la forma precedente (28); quindi nelle formole (19), cui devono soddisfare le superficie che cerchiamo,

(*) Notiamo che quantunque la dimostrazione della formola (28) escluda il caso che le v siano circoli massimi, pure anche in quest'ultimo caso si ha una formola che è caso particolare della (28) stessa.

il valore di G' dovrà intendersi dedotto dalla (28) col prendere per esso il coefficiente di dv^2 in questa.

Ora, quando siano soddisfatte queste condizioni (come già si disse al § 12), resterà soddisfatta la seconda delle (6) e la (18); quindi, onde i valori di r_1 e r_2, dedotti dalle (19), appartengano a una superficie i cui coseni degli angoli della normale coi tre assi sono dati dalle (21), basterà (§ 2) di soddisfare anche alla prima delle (6), nell'ipotesi che E' sia il coefficiente di du^2 nella (28).

Per vedere come questo possa farsi osserviamo che, considerando r_2 espresso per t e v [essendo t determinato dalla (24)], la prima delle (6) si può scrivere:

$$(r_1 - r_2)\frac{d\log\sqrt{E'}}{dv} = \frac{dr_2}{dt}\frac{dt}{dv} + \frac{dr_2}{dv},$$

e questa per le (24) e (26) si trasforma nell'altra:

$$\frac{\lambda}{r}(r_1 - r_2)\sqrt{G'} = -\frac{M}{r}\operatorname{sen}(t - W)\frac{dr_2}{dt} + \frac{dr_2}{dv},$$

che vale per tutte le superficie in cui le linee di curvatura v sono piane e non geodetiche.

Sostituendo ora in questa per $r_1 - r_2$, $\frac{dr_2}{dt}$, $\frac{dr_2}{dv}$ i loro valori dedotti dalle (19), si avrà:

$$\frac{2\lambda\beta}{r}\sqrt{G'}(1 - G') = \frac{M\beta}{r}\operatorname{sen}(t - W)\frac{dG'}{dt} - \beta\frac{dG'}{dv}$$
$$- 2\alpha'\sqrt{G'}\sqrt{(1 - G')^3} - 2\beta' G'(1 - G');$$

e ponendo $G' = g_1^2$, e osservando che per la (28) si ha:

$$g_1 = \frac{1}{\lambda}\left\{r' - M\cos(t - W)\right\},$$

se ne dedurrà la seguente:

$$(29)\ldots\ldots \quad \frac{\lambda\beta}{r}(1-g_1^2)=\frac{M^2\beta}{\lambda r}\operatorname{sen}^2(t-W)-\beta\frac{dg_1}{dv}$$
$$-\alpha'\sqrt{1-g_1^2}\,(1-g_1^2)-\beta' g_1(1-g_1^2)\,,$$

che dovrà essere identica.

Ora, se si pone $\cos(t-W)=x$, questa equazione si riduce alla forma:

$$P+Q\sqrt{1-x^2}+R\sqrt{1-\frac{1}{\lambda^2}(r'-Mx)^2}=0\,.$$

ove P, Q e R sono funzioni razionali in x; quindi, onde sia identica, non si potranno avere che i seguenti casi:

1° $Q=0$ e la quantità sotto il secondo radicale sia il quadrato di una funzione lineare in x;

2° $Q=0$, $M=0$, cioè il secondo radicale sia indipendente da x;

3° $Q=0$, $R=0$, e quindi anche $P=0$;

4° Q differente da zero, e il secondo radicale si riduca al primo.

Esaminiamo separatamente questi diversi casi.

Il primo è evidentemente impossibile a verificarsi. Il secondo darebbe $G'=\varphi(v)$, e le linee u della nostra superficie evolvente sarebbero geodetiche, e quindi si avrebbe $r_1=\varphi(v)$. Allora per questa e per la (18), non potendo β essere zero (poichè si esclude il caso che le superficie evolute che cerchiamo siano sviluppabili), ne verrebbe anche $r_2=\varphi(v)$, e quindi la superficie evoluta si ridurrebbe a una curva.

Questo secondo caso è dunque pure da escludersi; e quindi non restano ora che il terzo e quarto caso.

Ora, incominciando da quest'ultimo, si osserverà che per essere $Q=\frac{\beta M W'}{\lambda}$, nè M, nè W' saranno nulli, e dovendo il secondo radicale ridursi al primo, si dovrebbe avere:

$$r'=0\,,\qquad M^2=\lambda^2,\quad \text{e quindi } g_1=\pm\cos(t-W)\,.$$

Per questa la (29) diverrebbe:

$$\beta W' \pm \alpha' \operatorname{sen}^2(t-W) + \beta' \operatorname{sen}(t-W)\cos(t-W) = 0 \ ,$$

e non essendo $W'=0$, e non potendosi avere $\beta=0$, questa è impossibile a verificarsi.

Il quarto caso è dunque pure da escludersi; e quindi non resta più che il terzo, vale a dire quello in cui $P=0$, $Q=0$, $R=0$.

Ora l'essere $Q=0$, $R=0$ porta subito anche $W'=0$, $\alpha'=0$; e per queste si vede subito che, non potendo essere $M=0$, la condizione (29) dà anche $\beta'=0$; quindi in questo caso W, α e β sono costanti, e perciò, avendo riguardo alla forma (17) di $d\sigma^2$, si può dire che le superficie evolute cercate, anche in questo caso in cui le v della superficie evolvente non sono geodetiche, se esistono, saranno fra quelle applicabili sulla superficie gobba di area minima.

Ciò posto, se s'introducono le condizioni di W, α e β costanti nella (29), quest'equazione diverrà:

$$\frac{1}{\lambda r}\left\{\lambda^2 - r'^2 + 2Mr'\cos(t-W) - M^2\cos^2(t-W)\right\} =$$
$$\frac{M^2}{r\lambda}\operatorname{sen}^2(t-W) - \left(\frac{r'}{\lambda}\right)' + \left(\frac{M}{\lambda}\right)'\cos(t-W) \ ,$$

ovvero

$$\frac{1}{\lambda r}(\lambda^2 - r'^2 - M^2) + \left(\frac{r'}{\lambda}\right)' + \left\{2\frac{Mr'}{\lambda r} - \left(\frac{M}{\lambda}\right)'\right\}\cos(t-W) = 0 \ ,$$

e quindi si dovranno avere le due

$$\frac{1}{\lambda r}(\lambda^2 - r'^2 - M^2) + \left(\frac{r'}{\lambda}\right)' = 0 \ , \qquad 2\frac{M}{\lambda}\frac{r'}{r} - \left(\frac{M}{\lambda}\right)' = 0 \ ,$$

le quali stabiliscono due nuove relazioni (oltre la $W=\text{cost.}$), cui devono soddisfare le quantità A, B, C, r.

Ora queste due condizioni sono soddisfatte prendendo $r=\text{cost}$, $M=\pm\lambda=\pm\sqrt{1-r^2}$; quindi si ha intanto una soluzione corrispondente a questo caso.

Supponendo poi che r non sia costante, dalla seconda delle condizioni precedenti si dedurrà:

$$\frac{M}{\lambda} = c\, r^2 ,$$

ove c è una costante differente da zero, perchè altrimenti sarebbe $M = 0$; quindi, sostituendo nella prima, si avrà l'equazione:

$$(30) \ldots\ldots\ldots \quad \frac{1}{\lambda r}\left\{\lambda^2 (1 - c^2 r^4) - r'^2\right\} + \left(\frac{r'}{\lambda}\right)' = 0 ,$$

cui deve soddisfare r.

Ora, per integrare questa equazione osservo che essa si può scrivere:

$$\left[\frac{\left(\frac{r'}{\lambda}\right)}{r}\right]' = \left(c^2 r^2 - \frac{1}{r^2}\right)\lambda ,$$

ovvero, poichè r non è costante:

$$\frac{\left(\frac{r'}{\lambda}\right)}{r}\left[\frac{\left(\frac{r'}{\lambda}\right)}{r}\right]' = \left(c^2 r - \frac{1}{r^3}\right) r' ;$$

e quindi integrando si avrà:

$$(31) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \left(\frac{r'}{\lambda}\right)^2 = c^2 r^4 + p\, r^2 + 1 ,$$

essendo p una costante. Di qui si ha:

$$(32) \ldots\ldots\ldots \quad r' = \sqrt{(c^2 r^4 + p\, r^2 + 1)(1 - r^2)} ,$$

da cui

$$\int \frac{r'\, d\varphi}{\sqrt{(c^2 r^4 + p\, r^2 + 1)(1 - r^2)}} = \varphi + b ;$$

e questa ponendo $r^2 = \frac{1}{1+\omega^2}$, e cangiando v in $-v-b$, diviene:

$$(33) \ldots\ldots \quad \int \frac{d\omega}{\sqrt{(1+\omega^2)^2 + p(1+\omega^2) + c^2}} = v \,,$$

e ci mostra che generalmente r^2 si esprime in v colle funzioni ellittiche, essendo v il parametro pel quale l'elemento lineare della superficie evoluta prende la forma (17).

Così, chiamando m^2 e m_1^2 le radici della equazione

$$(1+z)^2 + p(1+z) + c^2 = 0 \,,$$

che possono essere reali o complesse, si avrà:

$$\int \frac{d\omega}{\sqrt{(\omega^2 - m^2)(\omega^2 - m_1^2)}} = v \,,$$

e quando m e m_1 non siano zero, ponendo $\omega = m\tau$, sarà:

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)\left(1 - \frac{m^2}{m_1^2}\tau^2\right)}} = m_1 v \,;$$

e quindi, se m e m_1 sono differenti, si avrà:

$$\tau = \mathrm{sn}\,(m_1 v) \,, \qquad \left(\mathrm{mod}\,\frac{m}{m_1}\right) \,;$$

da cui

$$(34) \ldots\ldots \quad \frac{\lambda}{r} = m\,\mathrm{sn}\,(m_1 v) \,, \qquad r^2 = \frac{1}{1 + m^2\,\mathrm{sn}^2\,(m_1 v)} \,.$$

15. Adesso che abbiamo trovato tutte queste condizioni, e abbiamo determinato il valore di r che entra nelle formole (21), si possono determinare i valori delle quantità A, B, C e quindi i coseni X, Y, Z che convengono alle superficie cercate.

Osserviamo infatti che queste quantità, in quanto appartengono alle superficie a linee di curvatura piane, devono soddisfare alle equazioni:

$$(35)\ldots\begin{cases}\Sigma B_1^2=1\,, & \Sigma C_1^2=1\,, & \Sigma A_1 B_1=0\,,\\ \Sigma A_1 C_1=0\,, & \Sigma B_1 C_1=0\,, & \Sigma A_1^2+r^2=1\,,\end{cases}$$

e all'altra (22)

$$(36)\ldots\ldots\ldots\ldots\qquad \Sigma B_1 C_1'=0\,.$$

In quanto poi le quantità A, B, C appartengono alle superficie cercate, si è trovato che si deve avere $W=\text{cost.}$; e poichè può sempre cangiarsi il t in $t+W$, il che equivale a supporre $W=0$, così potremo ritenere che $W=0$, e allora per le (23) si dovrà avere:

$$(37)\ldots\ldots\ldots\qquad \Sigma A_1 C_1'=0\,,\qquad M=\Sigma A_1 B_1'\,.$$

Inoltre alla fine del § precedente si è trovato che dovrà aversi o

$$(38)\ldots\ldots\ldots\qquad r=\text{cost.}\,,\qquad M=\pm\sqrt{1-r^2}\,,$$

ovvero

$$(39)\ldots\ldots\ldots\qquad r=\psi(v)\,,\qquad M=c\,r^2\sqrt{1-r^2}\,,$$

essendo ψ una funzione dipendente generalmente, come si è detto, dalle funzioni ellittiche di v.

Ora, per determinare le quantità A, B, C in modo che queste condizioni siano soddisfatte, si osserverà che la terza e la quinta delle (35) e la (36) sono tre equazioni lineari rispetto alle B prive di secondo membro, e quindi, poichè le B non possono essere tutte nulle, se la (36) non è identica per essere $C_1'=C_2'=C_3'=0$, dovranno sussistere fra i loro coefficienti tre equazioni lineari:

$$\begin{aligned}&L A_1+L_1 C_1+L_2 C_1'=0\,,\\ &L A_2+L_1 C_2+L_2 C_2'=0\,,\\ &L A_3+L_1 C_3+L_2 C_3'=0\,,\end{aligned}$$

essendo L, L_1, L_2 tre funzioni di v, due almeno delle quali non possono essere nulle.

Ma, moltiplicando queste equazioni per A_1, A_2, A_3, e poi per C_1, C_2, C_3, e sommando ogni volta, coll'avere riguardo alle (35) e alla prima delle (37), se ne deduce $L=0$, $L_1=0$; dunque evidentemente dovrà essere $C_1'=0$, $C_2'=0$, $C_3'=0$, ossia le C dovranno essere costanti.

La direzione (C_1, C_2, C_3) è dunque fissa, e i piani delle linee v *sono paralleli a questa direzione fissa;* prendendo l'asse delle z secondo questa direzione, si avrà $C_1=0$, $C_2=0$, $C_3=1$, e così resteranno intanto soddisfatte la seconda delle (35), la (36) e la prima delle (37).

Ora, perchè siano soddisfatte anche la quarta e la quinta delle (35), si vede che bisogna prendere $A_3=0$, $B_3=0$, e quindi ora potremo prendere:

$$A_1=\sqrt{1-r^2}\cos\varphi\,,\qquad A_2=\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{sen}\,\varphi\,,\qquad A_3=0\,,$$
$$B_1=\cos\omega\,,\qquad B_2=\mathrm{sen}\,\omega\,,\qquad B_3=0\,,$$

ove φ e ω sono due funzioni di v; e così saranno soddisfatte anche tutte le (35), tranne la terza di esse.

Per soddisfare anche a questa si vede che basta prendere $\omega=\varphi+\frac{\pi}{2}$, e quindi si avrà ora pei valori delle A, B, C:

$$(40)\ldots\begin{cases} A_1=\sqrt{1-r^2}\cos\varphi\,, & A_2=\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{sen}\,\varphi\,, & A_3=0\,,\\ B_1=-\mathrm{sen}\,\varphi\,, & B_2=\cos\varphi\,, & B_3=0\,,\\ C_1=0\,, & C_2=0\,, & C_3=1\,,\end{cases}$$

e resterà ora a determinarsi soltanto il φ, ciò che si farà colle (38) o colle (39), avendo riguardo alla seconda delle (37).

16. Osservando infatti a quest'ultima e alle precedenti (40), si vede che si ha in ogni caso $M=-\sqrt{1-r^2}\,\varphi'$; e quindi, nel caso in cui si hanno le (38), avremo per determinare φ la equazione

$$\varphi' = \mp 1 ,$$

la quale dà:

$$\varphi = \mp v + c ;$$

e per questa, cangiando la variabile v in $\mp v \pm c$, si ha:

$$\varphi = v ,$$

e ora per avere i coseni X, Y, Z in questo primo caso non vi è più che da sostituire nelle formole (21) i valori (40) delle A, B, C, nei quali sia posto $\varphi = v$.

Ma in queste formole comparisce ancora la variabile ausiliaria t. Per eliminarla si osserverà che in questo primo caso la (24), tenendo conto del cambiamento che si è fatto di v in $\mp v \pm c$, diviene:

$$\frac{dt}{dv} = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} \operatorname{sen} t ,$$

e da questa integrando e prendendo uguale ad u la funzione arbitraria di u portata dalla integrazione, il che evidentemente può farsi, si avrà:

$$\log \tan \frac{1}{2} t = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} v + u ;$$

da cui

$$\tan \frac{1}{2} t = e^{u + \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} v} ,$$

e quindi

$$\operatorname{sen} t = \frac{1}{\cos \mathrm{h} \left(u + \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} v \right)} , \qquad \cos t = - \tan \mathrm{h} \left(u + \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} v \right) .$$

Dietro queste formole, in questo primo caso, i detti coseni saranno:

$$(41)\ldots\begin{cases} X=\sqrt{1-r^2}\cos v+r\,\mathrm{sen}\,v\tan\mathrm{h}\left(u+\dfrac{\sqrt{1-r^2}}{r}v\right), \\ Y=\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{sen}\,v-r\cos v\tan\mathrm{h}\left(u+\dfrac{\sqrt{1-r^2}}{r}v\right), \\ Z=\dfrac{r}{\cos\mathrm{h}\left(u+\dfrac{\sqrt{1-r^2}}{r}v\right)}. \end{cases}$$

Osservando poi che i valori di $\sqrt{E'}$ e $\sqrt{G'}$ corrispondenti a questo caso sono:

$$(42)\ldots\ \sqrt{E'}=\frac{r}{\cos\mathrm{h}\left(u+\dfrac{\sqrt{1-r^2}}{r}v\right)},\quad \sqrt{G'}=-\tan\mathrm{h}\left(u+\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}v\right),$$

per le (19) si vede che prendendo $\sqrt{1-G'}=\dfrac{1}{\cos\mathrm{h}\left(u+\dfrac{\sqrt{1-r^2}}{r}v\right)}$, i raggi di curvatura r_1 e r_2 saranno

$$(43)\ r_1=\alpha+\frac{\beta}{\mathrm{sen}\,\mathrm{h}\left(u+\dfrac{\sqrt{1-r^2}}{r}v\right)},\quad r_2=\alpha-\beta\,\mathrm{sen}\,\mathrm{h}\left(u+\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}v\right);$$

e quindi le equazioni delle superficie corrispondenti a questo caso di $r=$ cost. saranno date (§ 2) dalle formole

$$(44)\ldots\ldots\ldots\begin{cases} x=\displaystyle\int\left(r_2\frac{dX}{du}du+r_1\frac{dX}{dv}dv\right), \\ y=\displaystyle\int\left(r_2\frac{dY}{du}du+r_1\frac{dY}{dv}dv\right), \\ z=\displaystyle\int\left(r_2\frac{dZ}{du}du+r_1\frac{dZ}{dv}dv\right), \end{cases}$$

quando in esse per X, Y, Z, r_1 e r_2 si pongano i valori precedenti (41) e (43), e che si eseguiscano le integrazioni.

17. Per le superficie poi della seconda classe per determinare il φ nelle (40), si avrà l'equazione:

$$\varphi' = -c r^2,$$

che risulta dalla seconda delle (39) coll'osservare che $M = -\lambda \varphi'$.

Di qui si dedurrà:

$$(45) \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \varphi = -c \int r^2 d v + c_1 ,$$

essendo c_1 una costante arbitraria che può supporsi nulla, e così quando per r^2 vi si ponga il suo valore in funzione di v, φ verrà a dipendere generalmente dalle funzioni Jacobiane.

L'espressione poi di φ per r si ottiene facilmente coll'osservare che si ha:

$$\varphi = -c \int \frac{r^2 d r}{r'} + c_1 ,$$

e quindi per la (32):

$$(46) \ldots \qquad \varphi = -c \int \frac{r^2 d r}{\sqrt{(1-r^2)(1+p r^2 + c^2 r^4)}} + c_1 ,$$

da cui, ponendo $r^2 = \frac{1}{1+\omega^2}$, si avrà:

$$(47) \ldots \qquad \varphi = c \int \frac{d \omega}{(1+\omega^2) \sqrt{(1+\omega^2)^2 + p(1+\omega^2) + c^2}} ;$$

e questa, esclusi certi valori speciali di p e c, dà φ espresso per un integrale ellittico di terza specie.

Per determinare ora anche il t, si avrà la formola:

$$\frac{d t}{d v} + c r \lambda \operatorname{sen} t = 0 ,$$

cui si riduce la (24) in questo caso; quindi prendendo anche qui la funzione arbitraria di u eguale ad u, si avrà:

$$\log \tan \frac{1}{2} t = u - c \int r \lambda \, d v \; ;$$

e a causa dei valori trovati per r l'integrale in v si esprime esso pure generalmente per funzioni ellittiche.

Volendolo espresso per r^2, si osserverà che si ha, per la (31):

$$\int r \lambda \, d v = \int \frac{r \, d r}{\frac{r'}{\lambda}} = \int \frac{r \, d r}{\sqrt{1 + p r^2 + c^2 r^4}} \; ;$$

e quindi, ponendo $r^2 = \tau$, si può subito eseguire l'integrazione, e se non si ha $p^2 = 4 c^2$, potremo prendere:

$$(47)' \qquad \int r \lambda \, d v = \frac{1}{2c} \log \left\{ \frac{p}{2c^2} + r^2 + \frac{1}{c} \sqrt{1 + p r^2 + c^2 r^4} \right\} ,$$

intendendo (all'occorrenza) inclusa nel logaritmo la costante $(2k+1)\pi\sqrt{-1}$, per fare sì che il valore di $\int r \lambda \, d v$ sia sempre reale.

Nel caso poi di $p = \pm 2c$ (che è quello che quando si hanno le funzioni ellittiche, conduce ad alcuni casi limiti), se si prende per $\sqrt{1 \pm 2 c r^2 + c^2 r^4}$ il valore $1 \pm c r^2$ (il che facilmente si vede potersi sempre fare), si avrà la formola:

$$\int r \lambda \, d v = \int \frac{r \, d r}{1 \pm c r^2} = \pm \frac{1}{c} \int \frac{r \, d r}{\pm \frac{1}{c} + r^2} = \pm \frac{1}{2c} \log \left\{ \pm \frac{1}{c} + r^2 \right\} ,$$

che nel caso del segno superiore può farsi rientrare nella precedente coll'aggiungere la costante $\frac{1}{2c} \log 2$; e per questo, poichè, come vedremo, le superficie corrispondenti al segno inferiore non differiscono da quelle che corrispondono al segno superiore, potremo considerare sempre la (47)', prendendo $p = 2c$ quando $p^2 = 4c^2$, e ritenendo che allora il radicale abbia il valore $1 + c r^2$ e c possa essere positivo o negativo, ma non uguale a zero.

In ogni caso, indicando con $\frac{R}{c}$ il valore di $\int r \lambda \, d v$, si avrà:

$$\tan\frac{1}{2}t = e^{u-R}, \quad \operatorname{sen} t = \frac{1}{\cos\mathrm{h}\,(u-R)}, \quad \cos t = -\tan\mathrm{h}\,(u-R),$$

e i valori di X, Y, Z saranno i seguenti:

$$(48)\ldots\ldots \begin{cases} X = \sqrt{1-r^2}\operatorname{sen}\varphi + r\cos\varphi\tan\mathrm{h}\,(u-R), \\ Y = \sqrt{1-r^2}\cos\varphi - r\operatorname{sen}\varphi\tan\mathrm{h}\,(u-R), \\ Z = \dfrac{r}{\cos\mathrm{h}\,(u-R)}, \end{cases}$$

ove φ e R sono espressi per r o per v colle formole precedenti.

I valori di $\sqrt{E'}$ e $\sqrt{G'}$ sono in questo caso:

$$(49)\ldots \quad \sqrt{E'} = \frac{r}{\cos\mathrm{h}\,(u-R)}, \qquad \sqrt{G'} = \frac{r'}{\lambda} + c\,r^2\tan\mathrm{h}\,(u-R),$$

ove $\frac{r'}{\lambda}$ è dato in funzione di r dalla (31), e può esprimersi esso pure generalmente per funzioni ellittiche per mezzo della variabile v.

Infine i raggi di curvatura sono:

$$(50)\ldots \quad r_1 = \alpha - \beta\frac{\sqrt{1-G'}}{\sqrt{G'}}, \qquad r_2 = \alpha + \beta\frac{\sqrt{G'}}{\sqrt{1-G'}},$$

quando in essi per $\sqrt{G'}$ si ponga il valore precedente; e in questi il radicale $\sqrt{1-G'}$, prendendo convenientemente le costanti, sarà reale per infiniti sistemi di valori di u e v o di u e r, giacchè a causa della (31) il valore di G' potrà sempre rendersi positivo e minore dell'unità.

Anche le superficie corrispondenti a questo caso saranno dunque reali, e le loro equazioni saranno le seguenti:

$$(51)\ldots\ldots\ldots \begin{cases} x = \displaystyle\int\left(r_2\frac{dX}{du}du + r_1\frac{dX}{dv}dv\right), \\ y = \displaystyle\int\left(r_2\frac{dY}{du}du + r_1\frac{dY}{dv}dv\right), \\ z = \displaystyle\int\left(r_2\frac{dZ}{du}du + r_1\frac{dZ}{dv}dv\right); \end{cases}$$

ove X, Y, Z hanno i valori (48) e r_1 e r_2 i valori (50), in cui $\sqrt{G}$ è dato dalla seconda delle (49).

In queste per fare le integrazioni, in luogo di v (volendo) potremmo sostituire r; ma noi non staremo a fare qui queste integrazioni, perchè vedremo che le equazioni integrali si ottengono subito sì per queste che per le (44) senza bisogno di fare integrazioni, appoggiandosi su una proprietà di cui vedremo essere dotate queste superficie.

18. Così trovate le superficie evolventi (44) e (51), si avranno subito le superficie evolute mediante le equazioni:

$$(52) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \xi = x - r_2 X , \\ \eta = y - r_2 Y , \\ \zeta = z - r_2 Z , \end{cases}$$

Queste evolute sono, come si è detto, applicabili sulle superficie di area minima e le eliche v corrispondono alle generatrici: quindi noi possiamo ora enunciare il seguente teorema: *Le superficie gobbe applicabili su quella gobba di area minima sono le sole le cui generatrici possono colla deformazione ridursi ad eliche. Questa circostanza si presenta effettivamente quando esse si trasformano nelle superficie* (52) *che sono evolute di quelle delle due classi testè considerate* (44) *e* (51).

19. Daremo poi le equazioni integrali delle superficie (44) e (51), e quindi anche quelle delle loro evolute. Intanto ci fermeremo a studiare prima più particolarmente le superficie (44) e (51); e incomincieremo dal mostrare che (come già annunciammo) si può ritenere che il valore di R che entra nelle formole del § 15 sia dato dalla formola:

$$(53) \ldots \quad R = \frac{1}{2} \log \left\{ \frac{p}{2c^2} + r^2 + \frac{1}{c} \sqrt{1 + p r^2 + c^2 r^4} \right\} ,$$

anche per $p^2 = 4c^2$, prendendo allora per p il valore $2c$, e pel radicale il valore $1 + c r^2$, e c potendo avere qualunque valore diverso da zero.

Per questo osserviamo che la difficoltà si presenta per $p = \pm 2c$, e propriamente per $p = -c$ soltanto, giacchè per $p = c$ si ha:

$$(54) \ldots\ldots\ldots \qquad R = \frac{1}{2} \log \left\{ \frac{1}{c} + r^2 \right\};$$

e questo non differisce che per la costante $\log \sqrt{2}$ dal valore di R che si ha per $p = 2c$ dalla formola precedente, e questa costante nelle formole del § 16 può supporsi inclusa in u.

Ma nel caso di $p = -c$ si ha:

$$(55) \ldots\ldots\ldots \qquad R = -\frac{1}{2} \log \left\{ -\frac{1}{c} + r^2 \right\};$$

e questa non rientra nella formola (53), la quale per $p = -2c$ ci darebbe $R = -\infty$. Però è facile vedere che è inutile considerare quest'ultimo caso.

Trattando infatti il caso di $p = 2c$, col dare a c tutti i valori reali (escluso lo zero) si considerano le superficie S_{c_1} corrispondenti a $c = c_1$ e quelle S_{-c_1} che si hanno per $c = -c_1$.

Ora supponendo p. es. che si cercassero le superficie R'_{c_1} corrispondenti a $c = c_1$ quando R ha il valore R'_{c_1} dato dalla (55), osserveremo che questo valore di R'_{c_1} differirebbe solo nel segno dal valore di R_{-c_1}, trovato per R colla (54), quando si prendeva $c = -c_1$; e quindi se nelle equazioni delle superficie cercate S'_{c_1} si cangia u in $-u$ (ciò che evidentemente può farsi), e se si ha riguardo alle formole del § 17, si vede che il valore di $\sqrt{G}$ corrispondente a S'_{c_1} è quello che corrisponde a S_{-c_1}, e così intanto i valori di r_1 e r_2 relativi a S'_{c_1} sono quelli corrispondenti a S_{-c_1}; inoltre, per la (46) o (47) il valore di φ, relativo a S'_{c_1}, è di segno contrario a quello di φ relativo a S_{-c_1}, e quindi anche i valori di Y e Z relativi a S'_{c_1} e a S_{-c_1} sono gli stessi, sì per S'_{c_1}, che per S_{-c_1}, e il valore di X per S'_{c_1} differisce da quello di S_{-c_1} solo pel segno; talchè se si cangia la direzione positiva dell'asse delle x, gli elementi X, Y, Z, r_1 e r_2 di S'_{c_1} saranno identici ai corrispondenti

di S_{-c_1}, e quindi la superficie S'_{c_1} non sarà che la superficie già trovata S_{-c_1}; e dietro ciò sarà difatto inutile di tenere conto della formola (55), e basterà considerare i valori di R, che sono dati dalla (53), prendendo del logaritmo la parte reale soltanto quando questo venisse immaginario, e quando sia $p^2 = 4c^2$, prendendo $p = 2c$, e supponendo che allora il radicale abbia il valore $1 + cr^2$, e c possa prendere valori sì positivi che negativi, escluso lo zero.

20. Passiamo ora a mostrare alcune proprietà delle superficie che abbiamo trovate (44) e (51).

In queste equazioni α e β sono due costanti, e fra i raggi di curvatura r_1 e r_2 sussiste la relazione (18); e poichè variando la costante α, col lasciare fissa β, le superficie che si ottengono sono tutte parallele fra loro, come si vede dalle espressioni (19) dei raggi di curvatura, e dal non trovarsi α nei valori di X, Y, Z, così queste superficie saranno parallele a quelle di curvatura costante negativa $-\frac{1}{\beta^2}$, che sono quelle di questa classe che corrispondono ad $\alpha = 0$. Ora il caso escluso nelle considerazioni precedenti che le linee v fossero circolari, cioè che fosse $r_2 = \varphi(v)$, darebbe per la (18) anche $r_1 = \varphi(v)$, e porterebbe ad essere geodetiche le linee u, e allora le linee circolari v sarebbero in piani paralleli, e la superficie sarebbe di rivoluzione; inoltre, lo stesso avverrebbe (in questo caso di α e β costanti) se le v fossero geodetiche, poichè allora sarebbe $r_2 = \varphi(u)$, e perciò anche $r_1 = \varphi(u)$; quindi si può dire che le superficie (44) e (51), che abbiamo trovato, sono le sole della classe (18), quando α e β sono costanti, che non sono di rivoluzione e che hanno un sistema di linee di curvatura piane, e per questo si può evidentemente concludere che: *Esistono due sole classi di superficie di curvatura costante negativa* $-\frac{1}{\beta^2}$, *e non di rivoluzione, che hanno un sistema di linee di curvatura* v *piane, e queste sono quelle fra le superficie precedentemente trovate* (44) e (51), *che corrispondono ad* $\alpha = 0$.

21. Per vedere se si ha una proprietà analoga per le superficie di curvatura costante positiva $\frac{1}{\beta^2}$, osserverò che quando si volessero cercare

le superficie non di rivoluzione aventi un sistema di linee di curvatura piane, e i cui raggi di curvatura fossero legati dalla relazione

$$\alpha(r_1+r_2)-r_1 r_2=\alpha^2-\beta^2,$$

che risulta dalla (18) cangiandovi β in $\beta\sqrt{-1}$, si avrebbero da fare gli stessi calcoli che precedentemente, col solo cangiarvi per tutto β in $\beta\sqrt{-1}$. Si giungerebbe quindi ancora a due classi di superficie come precedentemente, ma quelle della prima classe sarebbero immaginarie, come si vede dalle espressioni (43) dei raggi di curvatura. Per le superficie della seconda classe invece questo non accadrebbe, perchè dal valore (49) di $\sqrt{G'}$, si vede che si può sempre fare in modo che G' sia maggiore dell'unità; quindi solo in questo caso r_1 e r_2 e tutte le altre formole sarebbero reali, e le superficie corrispondenti sarebbero pure reali, e le loro equazioni si dedurrebbero dalle (51) col cangiarvi β in $\beta\sqrt{-1}$. Da ciò dunque risulta che: *Esiste una classe di superficie di curvatura costante positiva* $\frac{1}{\beta^2}$ *e non di rivoluzione, le cui linee di curvatura di un sistema* v *siano piane; e queste sono quelle che si deducono dalla seconda classe delle superficie testè considerate di curvatura costante negativa* $-\frac{1}{\beta^2}$, *cangiando nelle loro equazioni il* β *in* $\beta\sqrt{-1}$.

22. Come già abbiamo notato, per essere $C_1=C_2=0$, $C_3=1$, nelle superficie che abbiamo trovato i piani delle linee di curvatura piane v sono paralleli a una retta fissa. Inoltre, per le superficie di prima classe (44) avendosi $r=$ cost., i piani delle linee di curvatura tagliano tutti la superficie sotto uno stesso angolo.

Ora, considerando le superficie di curvatura costante $\mp\frac{1}{\beta^2}$, i loro raggi di curvatura saranno dati dalle formole (V. form. 19):

$$(56)\ldots\ldots\quad r_1=-\beta\frac{\sqrt{1-G'}}{\sqrt{G'}},\qquad r_2=\beta\frac{\sqrt{G'}}{\sqrt{1-G'}},$$

per quelle di curvatura costante negativa $-\frac{1}{\beta^2}$, e saranno dati dalle

formole che si deducono da queste cangiandovi il β in $\beta\sqrt{-1}$ per quelle di curvatura costante positiva $\frac{1}{\beta^2}$.

Ma essendo u e v le linee di curvatura, questi raggi r_1 e r_2 devono soddisfare alla equazione

$$(r_1 - r_2)\,\frac{d\log.\sqrt{E'}}{dv} = \frac{dr_2}{dv}\,,$$

quindi, osservando che in questo caso tanto per β reale, che per β immaginario, si ha $r_1 = -\frac{\beta^2}{r_2}$, se ne dedurrà:

$$\sqrt{E'} = U\,e^{\int \frac{\frac{dr_2}{dv}}{r_1 - r_2}} = \frac{U}{\sqrt{r_2^2 + \beta^2}}\,,$$

essendo U una certa funzione di u.

Ma dal valore precedente di r_2 si ricava:

$$r_2^2 + \beta^2 = \frac{\beta^2}{1 - G'}\,;$$

quindi per tutte le superficie di curvatura costante si avrà la formola

$$(57)\ \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \sqrt{E'} = \frac{U}{\beta}\sqrt{1 - G'}\,.$$

Ora, per tutte le superficie speciali di curvatura costante non di rivoluzione, e a linee di curvatura piane v, che qui consideriamo, si ha:

$$\sqrt{E'} = r\frac{dt}{du} = r\,\mathrm{sen}\,t\,, \qquad \sqrt{G'} = \frac{1}{\lambda}(r' - M\cos t)\,,$$

quindi sarà:

$$\frac{d\log\sqrt{G'}}{du} = \frac{\frac{M}{\lambda}\,\mathrm{sen}\,t\,\frac{dt}{du}}{\sqrt{G'}}\,,$$

e pel valore precedente di $\sqrt{E'}$ si avrà:

$$\frac{\frac{d \log \sqrt{G'}}{du}}{\sqrt{E'}} = \frac{M}{\lambda r^2} \frac{\sqrt{E'}}{\sqrt{G'}},$$

e quindi avendo riguardo alla (57), e osservando che $\frac{M}{\lambda r^2}$ in ogni caso è una costante che potremo indicare con k, si avrà la formola:

$$\frac{\frac{d \log \sqrt{G'}}{du}}{\sqrt{E'}} = k \frac{U}{\beta} \frac{\sqrt{1-G'}}{\sqrt{G'}},$$

mediante la quale il valore (56) di r_1 si potrà porre sotto la forma:

$$r_1 = -\frac{\beta^2}{k U} \frac{\frac{d \log \sqrt{G'}}{du}}{\sqrt{E'}} = U_1 \frac{\frac{d \log \sqrt{G'}}{du}}{\sqrt{E'}}.$$

essendo $U_1 = -\frac{\beta^2}{k U}$.

Ma in un altro lavoro, che si sta pubblicando in questi Annali, dimostro che questa relazione è appunto quella necessaria e sufficiente affinchè le linee di curvatura u siano sferiche e appartengano a sfere normali alla superficie, e di raggio $\pm U_1$; dunque nelle nostre superficie di curvatura costante le linee u godranno di questa proprietà senza essere però circolari, perchè r_1 non può ridursi a contenere la sola u, altrimenti lo stesso sarebbe di r_2, e le v sarebbero geodetiche.

Ora, essendo le linee u sferiche e appartenenti a sfere normali alla superficie, le sviluppabili circoscritte alla superficie lungo le linee u saranno altrettante superficie coniche, i cui vertici saranno situati nei piani delle linee v; dunque questi piani devono avere almeno un punto a comune, e poichè essi sono paralleli a una retta fissa, ne viene che essi passeranno tutti per una stessa retta, che è il luogo dei centri delle sfere delle linee u.

Inoltre, siccome per le superficie della prima classe si hanno le (42), così si vede dalla (57) che per esse sarà $U = \beta r$; e poichè in questo

caso $k = -\frac{1}{r^2}$, sarà $U_1 = \beta r$, e quindi U_1 sarà costante, e le sfere cui appartengono le linee u verranno ad avere lo stesso raggio.

Per le superficie della seconda classe poi si vede che ciò non accade, perchè per esse $\sqrt{E}$ e $\sqrt{G}$ hanno i valori (49) che non possono soddisfare alla (57) con U costante; dunque riassumendo si può dire che: *Fra le superficie di curvatura costante ne esistono alcune che hanno un sistema di linee di curvatura piane. I piani di queste linee passano tutti per una retta fissa, e le linee di curvatura dell'altro sistema sono sferiche, ma non circolari, e appartengono a sfere normali alla superficie, e che hanno i centri sulla retta fissa. Per le superficie di curvatura costante negativa poi si ha una classe* (44) *di queste superficie che, oltre a godere delle proprietà testè enunciate, godono anche dell'altra che i piani delle linee di curvatura piane tagliano tutti la superficie sotto uno stesso angolo, e le sfere che contengono le linee di curvatura sferiche hanno tutte lo stesso raggio.*

Notiamo anche che per un teorema reciproco di uno dato dal professore Brioschi, che dimostro nella Memoria citata, si può dire che: *su tutte queste superficie le linee di curvatura u hanno la curvatura geodetica costante lungo ciascuna di esse. Per le superficie* (44) *essa è la stessa per tutte le linee u.*

23. La proprietà dimostrata, unita ad un'altra che do nel lavoro citato sulle superficie a linee di curvatura di un sistema sferiche, conduce a determinare pienamente le equazioni delle superficie in discorso, senza bisogno di fare le integrazioni indicate nelle formole (44) e (51).

Per questo però è d'uopo determinare prima la funzione $U_1 = -\frac{\beta^2}{kU}$ (che ora abbiamo visto dover esistere), che, presa positivamente, rappresenta il raggio delle sfere cui appartengono le linee u.

Ora, per le superficie della prima classe, abbiamo già trovato che $U_1 = \beta r$; resta quindi a trovarsi U_1 per quelle della seconda.

Per fare questo osserviamo che, a causa del valore di U che deve soddisfare alla (57), questo valore di U_1 dovrà soddisfare all'equazione:

$$\frac{k^2 U_1^2 E'}{\beta^2} = 1 - G' \; ;$$

e poichè, in questo caso, $k = \frac{M}{\lambda r^2} = c$, e $\sqrt{E'}$ e $\sqrt{G'}$ hanno i valori (49), così si dovrà avere:

$$\frac{c^2 U_1^2 r^2 \lambda^2}{\beta^2 \cos h^2 (u-R)} = \lambda^2 - r'^2 - c^2 r^4 \lambda^2 \tan h^2 (u-R)$$
$$- 2 c r^2 \lambda r' \tan h (u-R) \; ,$$

ovvero

$$\frac{c^2}{\beta^2} U_1^2 r^2 \lambda^2 = (\lambda^2 - r'^2) \cos h^2 (u-R) - c^2 r^4 \lambda^2 \operatorname{sen} h^2 (u-R)$$
$$- 2 c r^2 \lambda r' \operatorname{sen} h\, 2 (u-R) \; ;$$

o anche ponendo pei seni e coseni iperbolici i loro valori per le esponenziali:

$$\frac{4 c^2}{\beta^2} U_1^2 r^2 \lambda^2 = (\lambda^2 r'^2 - c^2 r^4 \lambda^2 - 2 c r^2 \lambda r') e^{-2R} e^{2u}$$
$$+ (\lambda^2 - r'^2 - c^2 r^4 \lambda^2 + 2 c r^2 \lambda r') e^{2R} e^{-2u} + 2 \left\{ \lambda^2 - r'^2 + c^2 r^4 \lambda^2 \right\} .$$

Ma calcolando e^{-2R}, e^{2R} colla formola (53), e calcolando i coefficienti di $e^{-2R} e^{2u}$, e $e^{2R} e^{-2u}$, e l'ultimo termine per mezzo delle formole (30), (31) e (32), si trova che il coefficiente di e^{2u} è sempre $-2 c^2 r^2 \lambda^2$, quello di e^{-2u} è $-\frac{p^2 - 4 c^2}{2 c^2} r^2 \lambda^2$, e l'ultimo termine è $-2 p r^2 \lambda^2$; quindi se ne deduce:

$$\frac{4 c^2}{\beta^2} U_1^2 = -2 c^2 e^{2u} + \frac{4 c^2 - p^2}{2 c^2} e^{-2u} - 2 p \; ,$$

e perciò si ha:

$$(58) \ldots \quad U_1 = \pm \frac{\beta}{2 c} \sqrt{\left(2 c^2 - \frac{p^2}{2}\right) e^{2u} - 2 c^4 e^{2u} - 2 p c^2} \; ;$$

e questa, nella quale potremo prendere il segno superiore, giacchè esso dipende da quello che si prende per $\sqrt{1-G'}$, e questo è arbitrario, ci dà il raggio delle sfere delle linee u, e ci mostra che basta scegliere convenientemente p e c (che conservano però ancora moltissima indeterminazione) per fare sì che U_1 sia reale tanto per β reale, che per β immaginario.

24. Trovato così in ogni caso il raggio $\pm U_1$ delle sfere che contengono le linee u, ci è facile di avere le equazioni delle nostre superficie, senza bisogno di eseguire le integrazioni (44) e (51).

Applicando infatti un teorema della Memoria citata, e supponendo che l'asse delle z sia la retta luogo dei centri delle sfere u, siccome in ogni caso si ha ora $\sqrt{E'}=Z$ (V. §§ 16 e 17), così se si chiama U_3' l'ordinata z del centro di queste sfere, pel detto teorema sarà:

$$U_3'=U_1\,,$$

e quindi

$$U_3=\int U_1\,du\,,$$

e le equazioni delle nostre superficie saranno le seguenti:

$$x=U_1\frac{\frac{dX}{du}}{\sqrt{E'}}\,,\qquad y=U_1\frac{\frac{dY}{du}}{\sqrt{E'}}\,,\qquad z=U_1\frac{\frac{dZ}{du}}{\sqrt{E'}}+\int U_1\,du\,,$$

ove X, Y, Z sono i coseni corrispondenti della normale.

Per le superficie dunque della prima classe, per le quali si ha $U_1=\beta r$, e X, Y, Z hanno i valori (41), avremo le seguenti equazioni:

$$(59)\ldots\ldots\left\{\begin{aligned} x&=\beta r\frac{\operatorname{sen} v}{\cos\mathrm{h}\left(u+\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}v\right)}\,,\\ y&=-\beta r\frac{\cos v}{\cos\mathrm{h}\left(u+\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}v\right)}\,,\\ z&=-\beta r\tan\mathrm{h}\left(u+\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}v\right)+r\beta u\,,\end{aligned}\right.$$

ove u e v sono le linee di curvatura, e r è una costante positiva minore dell'unità che rappresenta il seno dell'angolo sotto cui i piani delle linee v tagliano le superficie.

Per le superficie della seconda classe poi, per le quali U_1 è dato dalla (58), e i coseni X, Y, Z sono dati dalle (48), si hanno le equazioni:

$$(60)\left\{\begin{aligned} x &= \frac{\beta}{2c}\sqrt{\left(2c^2-\frac{p^2}{2}\right)e^{-2u}-2c^4e^{2u}-2pc^2}\;\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cosh(u-R)}, \\ y &= -\frac{\beta}{2c}\sqrt{\left(2c^2-\frac{p^2}{2}\right)e^{-2u}-2c^4e^{2u}-2pc^2}\;\frac{\cos\varphi}{\cosh(u-R)}, \\ z &= -\frac{\beta}{2c}\sqrt{\left(2c^2-\frac{p^2}{2}\right)e^{-2u}-2c^4e^{2u}-2pc^2}\;\tanh(u-R) \\ &\quad +\frac{\beta}{2c}\int\sqrt{\left(2c^2-\frac{p^2}{2}\right)e^{-2u}-2c^4e^{2u}-2pc^2}\;du\;; \end{aligned}\right.$$

nelle quali c e p sono due costanti arbitrarie che devono essere tali che (per β reale o immaginario) i valori di x, y, z non siano sempre immaginari; c poi (come si vedrebbe facilmente) quando non sia $p^2=4c^2$, basta prenderlo positivo e differente da zero, e quando sia $p^2=4c^2$, si deve prendere $p=2c$, e allora c può anche essere negativo; r è ora una variabile che ha lo stesso significato che precedentemente; R è dato dall'equazione (53), che è:

$$(61)\ldots\qquad R=\frac{1}{2}\log\left\{\frac{p}{2c^2}+r^2+\frac{1}{c}\sqrt{1+pr^2+c^2r^4}\right\},$$

ove del logaritmo si deve prendere la parte reale, e il radicale $\sqrt{1+pr^2+c^2r^4}$ per $p=2c$ ha il valore $1+cr^2$; φ poi è dato dall'equazione:

$$(62)\ldots\ldots\qquad \varphi=-c\int\frac{r^2\,dr}{\sqrt{(1-r^2)(1+pr^2+c^2r^4)}},$$

che si riduce all'altra:

$$(63)\ldots\ldots\qquad \varphi=c\int\frac{d\omega}{(1+\omega^2)\sqrt{(1+\omega^2)^2+p(1+\omega^2)+c^2}},$$

ove $r^2 = \frac{1}{1+\omega^2}$, talchè φ con queste variabili dipende generalmente dagli integrali ellittici.

Le linee r ed u sono le linee di curvatura; il radicale in u (che si può supporre preso positivamente quando è reale, e sotto la forma $-m^2\sqrt{-1}$ quando è immaginario) rappresenta, a meno del fattore $\frac{\beta}{2c}$, il raggio delle sfere che contengono le linee u; l'ultimo termine di z è l'ordinata z dei centri di queste sfere, e l'integrale in u che vi comparisce si riduce esso pure generalmente agli integrali ellittici col porre $e^{-u} = t$.

25. Le equazioni (59) e (60) ci danno così le equazioni in termini finiti delle superficie di curvatura costante che abbiamo trovate. Per β reale esse appartengono alle superficie di curvatura costante negativa $-\frac{1}{\beta^2}$, e quando vi si cangia β in $\beta\sqrt{-1}$, esse vengono ad appartenere a quelle di curvatura costante positiva $\frac{1}{\beta^2}$; ma in questo caso soltanto le equazioni (60) danno superficie reali per convenienti valori di c e p.

I coseni degli angoli della normale coi tre assi per queste superficie sono dati respettivamente dalle (41) e (48) tanto per β reale, che per β immaginario, talchè essi sono reali anche per le superficie immaginarie (59), che corrispondono a β immaginario. I raggi di curvatura poi per le superficie di curvatura costante negativa della classe (59) sono dati dalle (43), cioè sono:

$$r_1 = \frac{\beta}{\operatorname{sen h}\left(u + \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}v\right)}, \qquad r_2 = -\beta \operatorname{sen h}\left(u + \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}v\right);$$

e per le corrispondenti di curvatura costante positiva sono immaginarii.

Per le superficie della seconda classe poi essi sono dati dalle formole:

$$r_1 = \frac{\beta}{2}\sqrt{\left(2c^2 - \frac{p^2}{2}\right)e^{-2u} - 2c^4 e^{2u} - 2pc^2}\,.\,\frac{r}{\frac{r'}{\lambda}\cos\mathrm{h}\,(u-R) + c\,r^2\,\mathrm{sen\,h}\,(u-R)}\,,$$

$$r_2 = -2\beta\,\frac{\frac{r'}{\lambda}\cos\mathrm{h}\,(u-R) + c\,r^2\,\mathrm{sen\,h}\,(u-R)}{r\sqrt{\left(2c^2 - \frac{p^2}{2}\right)e^{-2u} - 2c^4 e^{2u} - 2pc^2}}\,,$$

ove $\frac{r'}{\lambda} = \sqrt{1 + p\,r^2 + c^2 r^4}$; e in queste β è reale per le superficie di curvatura costante negativa $-\frac{1}{\beta^2}$, e si cangia in $\beta\sqrt{-1}$ per quelle di curvatura costante positiva $\frac{1}{\beta^2}$.

26. Fra poco vedremo come con questi elementi si formino subito le equazioni delle superficie evolute di quelle (59) e (60) che abbiamo trovato, e quelle delle superficie parallele alle stesse (59) e (60). Ora ci fermeremo ancora a studiare separatamente, mediante le equazioni (59) e (60), queste stesse classi di superficie di curvatura costante.

Incominciando da quelle della classe (59) (per β reale) che, come già abbiamo visto, godono di molte proprietà, osserveremo che facendo nelle loro equazioni $u + \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}v = \text{cost.}$, si vede che le linee corrispondenti sono eliche appartenenti a cilindri circolari paralleli all'asse delle z, e di raggio $\frac{\beta r}{\cos\mathrm{h}\left(u + \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}v\right)}$; e se si indica questo raggio con R, e si introduce questo parametro R invece di u nelle equazioni stesse (59), si vede subito che queste superficie sono elicoidi, i cui profili sono le linee di curvatura piane v; e poichè le tangenti a queste linee comprese fra la curva e la retta fissa z sono uguali al raggio βr delle sfere che contengono le linee u, e sono costanti, se ne deduce che la curva dei profili è quella dalle tangenti di lunghezza costante βr, e quindi se ne conclude che: *Le superficie* (59) *di curvatura costante negativa* $-\frac{1}{\beta^2}$ *hanno anche*

una generazione ben semplice, poichè esse sono elicoidi il cui profilo è la curva dalle tangenti di lunghezza costante βr. Questi profili non sono altro che le linee di curvatura piane della superficie.

A causa della variabilità di r fra 0 e 1, si vede dunque che queste superficie notevoli sono quegli elicoidi di curvatura costante negativa che io detti già nei *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris (février, 1865)* (*).

27. Riguardando questi elicoidi come risultanti dalla deformazione della superficie di rivoluzione, tipo di quelle di curvatura costante negativa $-\frac{1}{\beta^2}$, che ha pure per meridiano la curva dalle tangenti di lunghezza costante β (Liouville), dimostrai già in un altro lavoro (**) che le eliche provenivano dalla deformazione di certi sistemi (in numero infinito) di lossodromiche di quella superficie.

Ora, se si osserva che per le superficie (59) $\sqrt{E'}$, $\sqrt{G'}$, r_1 e r_2 sono date dalle (42) e (43), si vede che i coefficienti E e G dell'elemento lineare di queste superficie in coordinate u e v sono:

$$E = r_2^2 E' = r^2 \beta^2 \tanh^2 \left(u + \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} v \right),$$

$$G = r_1^2 G' = \frac{\beta^2}{\cosh^2 \left(u + \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} v \right)};$$

e da ciò, con formole note, si ricava che le eliche $u + \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} v = \text{cost.}$ tagliano ad angoli costanti le linee u e le linee v. Dunque evidentemente si potrà anche dire che: *Considerando gli elicoidi* (59) *come risultanti dalla deformazione della superficie di* Liouville, *le linee di curvatura provengono dalla deformazione di infiniti sistemi di linee, di cui certi sistemi di lossodromiche sono traiettorie sotto angoli costanti.*

(*) Vedasi anche un'altra mia Memoria *Sopra alcuni punti della teoria delle superficie applibili* nel giornale del prof. Tortolini, 1865.

(**) *Sulle superficie di curvatura costante.* Giorn. di matem. di Napoli, 1865.

28. Passando ora a considerare le superficie (60) per β reale o immaginario, osserveremo che nelle loro equazioni, invece degli integrali ellittici, si possono introdurre generalmente le funzioni ellittiche con dei cangiamenti semplici di variabili. Intanto, se in luogo del parametro r si introduce il parametro v, che avevamo avanti, si hanno subito, come già notammo, le funzioni ellittiche in v, giacchè indicando (per comodo) con m^2 e m_1^2 le radici (reali o complesse) della equazione in z:

$$(1+z)^2+p(1+z)+c^2=0 ,$$

si trovò già (§ 14) che se m e m_1 non sono zero, e sono differenti, si ha:

$$\frac{\lambda}{r}=m\,\mathrm{sn}(m_1 v) , \qquad \left(\mathrm{mod}\,\frac{m}{m_1}\right) ,$$

$$r^2=\frac{1}{1+m^2\,\mathrm{sn}^2(m_1 v)} ;$$

e quindi per la (45) con formole note si troverà [Briot et Bouquet, *Fonct. doubl. périod.*, § 162, form. (11)]:

$$\varphi(r)=-c\int r^2\,dv=c\,v\,\frac{\Theta_{11}(\alpha)\Theta'_{10}(\alpha)}{\Theta_{00}(\alpha)\Theta_{01}(\alpha)}-\frac{c}{2m_1}\,\frac{\mathrm{sn}\,\alpha}{\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\alpha}\log\frac{\Theta_{11}(\alpha+m_1 v)}{\Theta_{11}(\alpha-m_1 v)} ,$$

essendo le Θ funzioni Jacobiane e α essendo tale che

$$\mathrm{sn}\,\alpha=\frac{1}{m\sqrt{-1}} ,$$

e l'immaginario (ove comparisce) non essendo che apparente.

Inoltre, avendosi (§ 14):

$$\sqrt{1+p\,r^2+c^2\,r^4}=\frac{\sqrt{(1+\omega^2)^2+p(1+\omega^2)+c^2}}{1+\omega^2}=$$

$$m\,m_1\,\frac{\mathrm{cn}(m_1 v)\,\mathrm{dn}(m_1 v)}{1+m^2\,\mathrm{sn}^2(m_1 v)} ,$$

si ha:

$$R=\log\left\{\frac{p}{2c^2}+\frac{1\pm\mathrm{cn}(m_1 v)\,\mathrm{dn}(m_1 v)}{1+m^2\,\mathrm{sn}^2(m_1 v)}\right\}^{\frac{1}{2}} ,$$

ove si deve prendere il segno + o — secondochè si avrà $c = \pm m m_1$; e così anche φ ed R sono espresse per funzioni ellittiche e Jacobiane, e in queste espressioni il modulo $\frac{m}{m_1}$, come le quantità m e m_1, potranno anche essere complesse, ma l'immaginario sparirebbe con convenienti trasformazioni.

Nel caso in cui si avesse $m^2 = m_1^2$, il modulo di queste funzioni ellittiche diviene l'unità, e le formole si ridurrebbero a contenere le sole esponenziali. Così pure, se una o tutte due le quantità m e m_1 sono zero, si hanno formole più semplici.

In quanto poi ad u, si osservi che indicando con A l'integrale della terza delle (60), si ha:

$$A = \int \frac{\left(2c^2 - \frac{p^2}{2}\right) e^{-2u} - 2c^4 e^{2u} - 2pc^2}{\sqrt{\left(2c^2 - \frac{p^2}{2}\right) e^{-2u} - 2c^4 e^{2u} - 2pc^2}} du =$$

$$\sqrt{\left(2c^2 - \frac{p^2}{2}\right) e^{-2u} - 2c^4 e^{2u} - 2pc^2}$$

$$+ (\tfrac{1}{2}c^2 - p^2) \int \frac{e^{-2u} du}{\sqrt{\left(2c^2 - \frac{p^2}{2}\right) e^{-2u} - 2c^4 e^{2u} - 2pc^2}}$$

$$- 2pc^2 \int \frac{du}{\sqrt{\left(2c^2 - \frac{p^2}{2}\right) e^{-2u} - 2c^4 e^{2u} - 2pc^2}} ;$$

e ponendo

$$e^{-u} = t , \qquad 2c^2 - \frac{p^2}{2} = \lambda , \qquad 2pc^2 = \lambda_1 , \qquad 2c^4 = \lambda_2 ,$$

sarà:

$$A = \sqrt{\lambda t^2 - \frac{\lambda_2}{t^2} - \lambda_1} - 2\lambda \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{\lambda t^4 - \lambda_1 t^2 - \lambda_2}} + \lambda_1 \int \frac{dt}{\sqrt{\lambda t^4 - \lambda_1 t^2 - \lambda_2}} .$$

Ora, se λ non è zero, cioè se p^2 non è uguale a $4c^2$, osserviamo che il trinomio sotto il radicale è di quarto grado, e le radici della equazione

$$\lambda z_1^2 - \lambda_1 z_1 - \lambda_2 = 0 \,, \quad \text{ovvero} \quad \left(\frac{p^2}{4c^2} - 1\right) z_1^2 + p z_1 + c^2 = 0 \,,$$

sono reali e differenti, e inoltre non sono nulle.

Chiamandole dunque (per comodo) n^2 e n_1^2, e ponendo $t = n\tau$, si avrà:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{\lambda t^4 - \lambda_1 t^2 - \lambda_2}} = \frac{1}{n_1 \sqrt{\lambda}} \int \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)\left(1 - \frac{n^2}{n_1^2}\tau^2\right)}} \,,$$

e il rapporto $\frac{n^2}{n_1^2}$ sarà reale e potrà essere positivo o negativo.

Chiamando u_1 l'integrale del primo membro, u_1 sarà reale nel caso delle superficie di curvatura costante negativa $-\frac{1}{\beta^2}$, e *puramente* immaginario per quelle di curvatura costante positiva $\frac{1}{\beta^2}$, e prendendo convenientemente l'origine di u_1, si avrà:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{\lambda t^4 - \lambda_1 t^2 - \lambda_2}} = u_1 \,, \quad \tau = \mathrm{sn}(n_1 \sqrt{\lambda} u_1) \,, \quad \left(\mathrm{mod}\, \frac{n}{n_1}\right) \,,$$

e quindi

$$e^{-u} = n\, \mathrm{sn}(n_1 \sqrt{\lambda} u_1) \,,$$

$$\sqrt{\lambda t^2 - \frac{\lambda_2}{t^2} - \lambda_1} = n_1 \sqrt{\lambda}\, \frac{\mathrm{cn}(n_1 \sqrt{\lambda} u_1)\, \mathrm{dn}(n_1 \sqrt{\lambda} u_1)}{\mathrm{sn}(n_1 \sqrt{\lambda} u_1)}$$

$$\int \frac{t^2\, dt}{\sqrt{\lambda t^4 - \lambda_1 t^2 - \lambda_2}} = n^2 \int \mathrm{sn}^2(n_1 \sqrt{\lambda} u_1)\, du_1 =$$

$$\frac{1}{\lambda}\left[-\frac{d \log \Theta_{10}(n_1 \sqrt{\lambda} u_1)}{du_1} + u_1 \left\{ \frac{d^2 \Theta_{10}(n_1 \sqrt{\lambda} u_1)}{du_1^2} \right\}_0 \right] .$$

E così ora le equazioni (60) prenderebbero la forma:

$$
(64)\quad \left\{
\begin{aligned}
x &= \frac{\beta n}{c}\,\frac{n_1\sqrt{\lambda}\,\mathrm{cn}(n_1\sqrt{\lambda}u_1)\,\mathrm{dn}(n_1\sqrt{\lambda}u_1)\left\{\frac{p}{2c^2}+\frac{1\pm\mathrm{cn}(m_1v)\,\mathrm{dn}(m_1v)}{1+m^2\,\mathrm{sn}^2(m_1v)}\right\}^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen}\varphi(r)}{1+n^2\,\mathrm{sn}(n_1\sqrt{\lambda}u_1)\left\{\frac{p}{2c^2}+\frac{1\pm\mathrm{cn}(m_1v)\,\mathrm{dn}(m_1v)}{1+m^2\,\mathrm{sn}^2(m_1v)}\right\}}\,,\\
y &= -\frac{\beta n}{c}\,\frac{n_1\sqrt{\lambda}\,\mathrm{cn}(n_1\sqrt{\lambda}u_1)\,\mathrm{dn}(n_1\sqrt{\lambda}u_1)\left\{\frac{p}{2c^2}+\frac{1\pm\mathrm{cn}(m_1v)\,\mathrm{dn}(m_1v)}{1+m^2\,\mathrm{sn}^2(m_1v)}\right\}^{\frac{1}{2}}}{1+n^2\,\mathrm{sn}(n_1\sqrt{\lambda}u_1)\left\{\frac{p}{2c^2}+\frac{1\pm\mathrm{cn}(m_1v)\,\mathrm{dn}(m_1v)}{1+m^2\,\mathrm{sn}^2(m_1v)}\right\}}\cos\varphi(r)\,,\\
z &= -\frac{\beta}{2c}\,\frac{n_1\sqrt{\lambda}\,\mathrm{cn}(n_1\sqrt{\lambda}u_1)\,\mathrm{dn}(n_1\sqrt{\lambda}u_1)}{\mathrm{sn}(n_1\sqrt{\lambda}u_1)}\,\frac{1-n^2\,\mathrm{sn}^2(n_1\sqrt{\lambda}u_1)\left\{\frac{p}{2c^2}+\frac{1\pm\mathrm{cn}(m_1v)\,\mathrm{dn}(m_1v)}{1+m^2\,\mathrm{sn}^2(m_1v)}\right\}}{1+n^2\,\mathrm{sn}^2(n_1\sqrt{\lambda}u_1)\left\{\frac{p}{2c^2}+\frac{1\pm\mathrm{cn}(m_1v)\,\mathrm{dn}(m_1v)}{1+m^2\,\mathrm{sn}^2(m_1v)}\right\}}\\
&\quad+\frac{\beta}{2c}\left\{\begin{aligned}&n_1\sqrt{\lambda}\,\frac{\mathrm{cn}(n_1\sqrt{\lambda}u_1)\,\mathrm{dn}(n_1\sqrt{\lambda}u_1)}{\mathrm{sn}(n_1\sqrt{\lambda}u_1)}\\&-2\left(\left\{\frac{d^2\Theta_{10}(n_1\sqrt{\lambda}u_1)}{du_1^{\,2}}\right\}_0-pc^2\right)u_1+2\,\frac{d\log\Theta_{10}(n_1\sqrt{\lambda}u_1)}{du_1}\end{aligned}\right\}\,;
\end{aligned}
\right.
$$

e in queste se β è reale, u_1 è reale; se β è puramente immaginario, u_1 è anch'esso puramente immaginario, e le costanti hanno valori tali che i valori di x, y, z siano reali.

Il modulo delle funzioni ellittiche in v è $\frac{m}{m_1}$, e quello delle funzioni ellittiche in u_1 è $\frac{n}{n_1}$, essendo m^2 e m_1^2 le radici della equazione in z:

$$1+z^2+p(1+z)+c^2=0\ ,$$

e n^2 e n_1^2 quelle dell'altra in z_1:

$$\left(\frac{p^2}{4c^2}-1\right)z_1^2+pz_1+c^2=0\ .$$

Il φ poi è dato per funzioni Θ dalla formola:

$$\varphi=c\,v\,\frac{\Theta_{11}(\alpha)\,\Theta_{10}(\alpha)}{\Theta_{00}(\alpha)\,\Theta_{01}(\alpha)}-\frac{1}{2m_1}\,\frac{\operatorname{sn}\alpha}{\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha}\log\frac{\Theta_{11}(\alpha+m_1v)}{\Theta_{11}(\alpha-m_1v)}\ ,$$

ove α è tale che

$$\operatorname{sn}\alpha=\frac{1}{m\sqrt{-1}}\ .$$

29. Nei casi speciali che abbiamo escluso di $p=2c$, ecc., le superficie che consideriamo si possono avere dalle (60) e sono assai semplici. Considerando infatti dapprima il caso delle superficie di curvatura costante negativa $-\frac{1}{\beta^2}$, per $p=2c$, si vede che la costante c deve supporsi negativa, onde avere superficie reali; e quindi ponendo $c=-\frac{1}{c_1^2}$, ove c_1 è reale, e cangiando u in $\log(u\sqrt{2})$, e eseguendo l'integrazione in u, per $c_1<1$, avremo le superficie:

$$(65)\begin{cases} x=-2\dfrac{\beta}{c_1^2}\sqrt{c_1^2-u^2}\,u\,\dfrac{\sqrt{r^2-c_1^2}\,\operatorname{sen}\varphi}{u^2+r^2-c_1^2}\ , \\[2ex] y=\ \ 2\dfrac{\beta}{c_1^2}\sqrt{c_1^2-u^2}\,u\,\dfrac{\sqrt{r^2-c_1^2}\,\cos\varphi}{u^2+r^2-c_1^2}\ , \\[2ex] z=-2\dfrac{\beta}{c_1^2}\sqrt{c_1^2-u^2}\,\dfrac{(r^2-c_1^2)}{u^2+r^2-c_1^2}-\dfrac{\beta}{c_1}\log\left\{\dfrac{u}{c_1+\sqrt{c_1^2-u^2}}\right\}\ ; \end{cases}$$

ove
$$\varphi=\int\frac{r^2\,dr}{\sqrt{1-r^2\,(r^2-c_1^2)}}\ .$$

Se poi $c_1 \gtrless 1$, invece della differenza $r^2 - c_1^2$, si ha la differenza $c_1^2 - r^2$, talchè per $c_1 = 1$ si hanno le equazioni:

$$(66)\ldots \begin{cases} x = -2\beta\sqrt{1-u^2}\,\dfrac{u\lambda \operatorname{sen}\varphi}{u^2+\lambda^2}, \\[2ex] y = 2\beta\sqrt{1-u^2}\,\dfrac{u\lambda\cos\varphi}{u^2+\lambda^2}, \\[2ex] z = -2\beta\sqrt{1-u^2}\,\dfrac{\lambda^2}{u^2+\lambda^2} - \beta\log\dfrac{u}{1+\sqrt{1-u^2}}; \end{cases}$$

ove $$\varphi = -\operatorname{arc\,sen} r + \frac{r}{\lambda} = -\operatorname{arc\,cos}\lambda + \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda},$$

e può prendersi per variabile indipendente il λ invece di r.

Considerando ora il caso delle superficie di curvatura costante positiva $\frac{1}{\beta^2}$, per le quali $p = 2c$, si vede che il c può essere sì positivo che negativo, e per c positivo e $= \frac{1}{c_1^2}$, cangiando ancora u in $\log(u\sqrt{2})$, si hanno le superficie:

$$(67)\ldots \begin{cases} x = 2\dfrac{\beta}{c_1^2}\sqrt{u^2+c_1^2}\,u\,\dfrac{\sqrt{r^2+c_1^2}\operatorname{sen}\varphi}{u^2+r^2+c_1^2}, \\[2ex] y = -2\dfrac{\beta}{c_1^2}\sqrt{u^2+c_1^2}\,u\,\dfrac{\sqrt{r^2+c_1^2}\cos\varphi}{u^2+r^2+c_1^2}, \\[2ex] z = 2\dfrac{\beta}{c_1^2}\sqrt{u^2+c_1^2}\,\dfrac{(r^2+c_1^2)}{u^2+r^2+c_1^2} + \dfrac{\beta}{c_1}\log\dfrac{u}{c_1+\sqrt{u^2+c_1^2}}; \end{cases}$$

ove $$\varphi = \int \frac{r^2\,dr}{\sqrt{1-r^2}\,(r^2+c_1^2)}.$$

Quando c sia negativo e $= -\frac{1}{c_1^2}$, per $c_1 < 1$, si hanno invece le equazioni:

$$(68)\ldots\begin{cases} x = -2\dfrac{\beta}{c_1^2}\sqrt{u^2-c_1^2}\,\dfrac{u\sqrt{r^2-c_1^2}\,\operatorname{sen}\varphi}{u^2+r^2-c_1^2}, \\[2ex] y = 2\dfrac{\beta}{c_1^2}\sqrt{u^2-c_1^2}\,\dfrac{u\sqrt{r^2-c_1^2}\,\cos\varphi}{u^2+r^2-c_1^2}, \\[2ex] z = -2\dfrac{\beta}{c_1^2}\sqrt{u^2-c_1^2}\,\dfrac{(r^2-c_1^2)}{u^2+r^2-c_1^2} - 2\dfrac{\beta}{c_1}\operatorname{arc\,tan}\dfrac{\sqrt{u^2-c_1^2}}{u+c_1}; \end{cases}$$

ove
$$\varphi = \int \frac{r^2\,dr}{\sqrt{1-r^2}\,(r^2-c_1^2)}.$$

Se poi $c_1 \gtrless 1$, anche qui invece della differenza $r^2-c_1^2$, si ha la differenza $c_1^2-r^2$, e in particolare per $c=1$ si hanno le equazioni:

$$(69)\ldots\begin{cases} x = -2\beta\sqrt{u^2-1}\,\dfrac{u\lambda\operatorname{sen}\varphi}{u^2+\lambda^2}, \\[2ex] y = 2\beta\sqrt{u^2-1}\,\dfrac{u\lambda\cos\varphi}{u^2+\lambda^2}, \\[2ex] z = -2\beta\sqrt{u^2-1}\,\dfrac{\lambda^2}{u^2+\lambda^2} + 2\beta\operatorname{arc\,tan}\dfrac{\sqrt{u^2-1}}{u+1}; \end{cases}$$

ove
$$\varphi = -\operatorname{arc\,cos}\lambda + \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}.$$

30. Passiamo ora a considerare le superficie evolute E_v e E_u delle superficie di curvatura costante negativa che abbiamo trovato. Le prime di queste superficie evolute costituiscono, per ciò che precede, la classe nuova di superficie applicabili sull'elicoide gobbo di area minima, nelle quali si trasforma questo elicoide quando le sue generatrici divengono eliche cilindriche; e le loro equazioni si ottengono dalle (52) facendo in esse le debite sostituzioni dei valori di $x, y, z, r_1, r_2, X, Y, Z$ che abbiamo trovati.

Così, considerando in particolare le evolute E_v degli elicoidi (59), si trova che le loro equazioni sono le seguenti:

$$(70)\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \xi = \beta\sqrt{1-r^2}\cos v \operatorname{sen h}\left(u+\dfrac{\sqrt{1-r^2}}{r}v\right) \\ \qquad\qquad + \beta r \operatorname{sen} v \cos h\left(u+\dfrac{\sqrt{1-r^2}}{r}v\right), \\ \eta = \beta\sqrt{1-r^2}\operatorname{sen} v \operatorname{sen h}\left(u+\dfrac{\sqrt{1-r^2}}{r}v\right) \\ \qquad\qquad - \beta r \cos v \cos h\left(u+\dfrac{\sqrt{1-r^2}}{r}v\right), \\ \zeta = r\beta u\ ; \end{cases}$$

e da queste si vede che:

$$(71)\ldots\ldots \qquad \xi^2+\eta^2=\beta^2 \operatorname{sen h}^2\left(u+\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}v\right)+r^2\beta^2,$$

e quindi ricavando con questa i valori del seno e del coseno iperbolici, e sostituendoli nella prima delle precedenti, si trova che *su queste superficie* (70) *le eliche che provengono dalla deformazione delle generatrici dell'elicoide gobbo di area minima sono situate su cilindri paralleli e del quart'ordine,* cilindri però che non sono quelli su cui queste eliche tagliano ad angolo costante le generatrici; inoltre, per essere $\zeta = r\beta u$, si vede che *le linee a tangenti coniugate con queste eliche sono in piani paralleli fra loro e perpendicolari alle generatrici di quei cilindri.*

Inoltre dalla (71) si vede che le linee $u+\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}v=$ cost., cioè le linee che corrispondono alle $r_2=$ cost. della evolvente, e che quindi sono ortogonali alle linee v, appartengono a cilindri circolari aventi tutti per asse l'asse z; e si vede anche facilmente che esse sono eliche di questi cilindri: quindi *quando l'elicoide gobbo di area minima si trasforma nelle superficie* (60), *le generatrici diventano eliche cilindriche, e le eliche circolari traiettorie ortogonali di queste generatrici restano ancora eliche circolari appartenenti a cilindri paralleli fra loro.*

31. Analogamente, col fare le debite sostituzioni nelle equazioni:

$$\xi_1 = x - r_1 X\,,$$
$$\eta_1 = y - r_1 Y\,,$$
$$\zeta_1 = z - r_1 Z\,,$$

si hanno le evolute E_u delle superficie (56) e (57), e queste evolute costituiscono un'altra classe di superficie applicabili sull'elicoide gobbo a piano direttore, e in queste le geodetiche u, che provengono dalla deformazione delle generatrici dell'elicoide, sono geodetiche di coni i cui vertici sono su una stessa retta, giacchè le linee u sulle superficie evolventi sono sferiche e i centri delle sfere sono in linea retta.

Considerando anche qui in particolare le evolute E_v delle superficie (56), si trova che le loro equazioni sono semplicissime e sono le seguenti:

$$(72)\ \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \xi_1 = -\beta \dfrac{\sqrt{1-r^2}\cos v}{\operatorname{sen h}\left(u + \dfrac{\sqrt{1-r^2}}{r} v\right)}\,, \\[2ex] \eta_1 = -\beta \dfrac{\sqrt{1-r^2}\operatorname{sen} v}{\operatorname{sen h}\left(u + \dfrac{\sqrt{1-r^2}}{r} v\right)}\,, \\[2ex] \zeta_1 = -\beta r \coth\left(u + \dfrac{\sqrt{1-r^2}}{r} v\right) + r\beta u\,; \end{cases}$$

e poichè da queste si ha:

$$(\zeta_1 - r\beta u)^2 = \frac{r^2}{(1-r^2)}(\xi_1^2 + \eta_1^2) + r^2\beta^2\,,$$

se ne conclude che *su queste superficie le geodetiche u, che provengono dalla deformazione delle generatrici dell'elicoide, sono linee che appartengono tutte a uno stesso iperboloide di rotazione variabile solo di posizione, e in modo che il suo asse resta sempre lo stesso e varia solo la posizione del centro. Inoltre le linee a tangenti coniugate con queste geodetiche sono tutte in piani che passano per quest'asse*, giacchè si ha:

$$\xi_1 \operatorname{sen} v - \eta_1 \cos v = 0\,.$$

Si riscontra poi facilmente che le linee $u + \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} v = \text{cost.}$ ortogonali alle geodetiche u sono eliche, e queste superficie sono fra gli elicoidi generali applicabili su quello gobbo di area minima; e sono gli elicoidi speciali che detti negli Annali di Tortolini (V. Mem. cit., § 14).

32. Per passare ora a considerare le superficie parallele a quelle di curvatura costante che abbiamo trovato, osserviamo che basta aggiungere ai secondi membri delle loro equazioni respettivamente αX, αY, αZ, ove α è una costante, e X, Y, Z sono i soliti coseni corrispondenti, per ottenere le equazioni delle superficie parallele alle stesse (59) e (60), cioè quelle (44) e (51), per le quali α non è zero. Ora, fra le superficie parallele a quelle di curvatura costante positiva $\frac{1}{\beta^2}$ vi sono quelle di curvatura media costante $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{\beta}$ (Bonnet), e dalla relazione (18) si vede che esse corrispondono ad $\alpha = \beta$; quindi le equazioni:

$$(73) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= x + \beta X, \\ y_1 &= y + \beta Y, \\ z_1 &= z + \beta Z, \end{aligned} \right.$$

ove x, y, z hanno i valori (60) o (64), ecc., nei quali β è stato cangiato in $\beta\sqrt{-1}$, e X, Y, Z sono dati dalle (48), appartengono alle superficie di curvatura media costante $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{\beta}$ che non sono di rivoluzione e che hanno un sistema di linee di curvatura v piane; e così noi abbiamo anche *la classe delle superficie di curvatura media costante che non sono di rivoluzione e che hanno un sistema di linee di curvatura piane. I piani di queste linee sono paralleli a una retta fissa, e le altre linee di curvatura sono sferiche, senza essere però circolari.*

33. Lasciando ora questo studio sulle superficie di curvatura costante a linee di curvatura di un sistema piane ecc., passerò a mostrare come fondandosi ancora sulle osservazioni generali fatte in principio, e sulle formole che abbiamo trovato per la sfera quando le linee coordinate su essa

sono ortogonali, e che un sistema di queste linee è formato da circonferenze, si possono facilmente trovare le equazioni in termini finiti delle superficie non sviluppabili, le cui linee di curvatura di un sistema sono piane e non geodetiche.

Per questo si osservi che per queste superficie i valori dei coseni X, Y, Z ci sono dati dalle formole (21), ove il t è determinato in funzione di v e di u per mezzo della equazione (24); e quindi per trovare le equazioni delle medesime superficie, se le v non sono geodetiche, basterà (§ 2) determinare i loro raggi di curvatura r_1 e r_2 mediante le equazioni

$$(74)\ldots\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2 r_2}{du\,dv}=\frac{dr_2}{dv}\frac{d}{du}\left\{\log\frac{\frac{d\log\sqrt{E'}}{dv}}{\sqrt{G'}}\right\}-\frac{dr_2}{du}\frac{d\log\sqrt{E'}}{dv}\,,\\ &r_1=r_2+\frac{\frac{dr_2}{dv}}{\frac{d\log\sqrt{E'}}{dv}}\,,\end{aligned}\right.$$

ove E' e G' sono i coefficienti dell'elemento lineare sferico (28), e poi applicare le formole (7).

Ora nel caso attuale, per la (26) il coefficiente di $\frac{dr_2}{dv}$ nella prima delle equazioni precedenti si annulla; quindi resta l'equazione

$$\frac{d^2 r_2}{du\,dv}=-\frac{dr_2}{du}\frac{d\log\sqrt{E'}}{dv}\,;$$

e questa, se r_2 contiene anche u, dà:

$$\frac{d}{dv}\left(\log\frac{dr_2}{du}\right)=-\frac{d\log\sqrt{E'}}{dv}\,,$$

e quindi

$$\frac{dr_2}{du}=\frac{U}{\sqrt{E'}}\,,$$

ove U è una funzione arbitraria di u che non è zero se r_2 contiene u, ma che noi supporremo che possa essere anche zero per comprendere anche il caso testè escluso che r_2 contenga la v soltanto.

Da questa si deduce subito pel valore di r_2:

$$(75)\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad r_2=\int\frac{U}{\sqrt{E'}}\,du+V\,,$$

ove V è una funzione arbitraria di v; quindi per la seconda delle (74) si avrà subito per l'altro raggio di curvatura r_1:

$$(76)\ldots\ldots \quad r_1=\int\frac{U}{\sqrt{E'}}\,du+V+\frac{\int U\,\dfrac{d\dfrac{1}{\sqrt{E'}}}{dv}\,du+V'}{\dfrac{d\log\sqrt{E'}}{dv}}\,,$$

e così le equazioni delle superficie nelle quali le linee di curvatura v sono piane e non geodetiche, saranno le seguenti:

$$(77)\ldots\ldots \quad \begin{cases} x=\int\left(r_2\,\dfrac{dX}{du}\,du+r_1\,\dfrac{dX}{dv}\,dv\right), \\ y=\int\left(r_2\,\dfrac{dY}{du}\,du+r_1\,\dfrac{dY}{dv}\,dv\right), \\ z=\int\left(r_2\,\dfrac{dZ}{du}\,du+r_1\,\dfrac{dZ}{dv}\,dv\right), \end{cases}$$

ove X, Y, Z sono dati dalle (21), i raggi di curvatura r_1 e r_2 sono dati dalle (75) e (76), ecc.

34. Per avere anche le superficie in cui le linee v sono geodetiche, osserveremo che in questo caso nelle (21) si $A_1=A_2=A_3=0$, $r=1$, e quindi i coseni X, Y, Z sono i seguenti:

$$(78)\ldots\ldots \quad \begin{cases} X=B_1\cos u+C_1\operatorname{sen} u\,, \\ Y=B_2\cos u+C_2\operatorname{sen} u\,, \\ Z=B_3\operatorname{sen} u+C_3\operatorname{sen} u\,, \end{cases}$$

essendo $\Sigma B_1^2 = 1$, $\Sigma C_1^2 = 1$, $\Sigma B_1 C_1 = 0$, e inoltre $\Sigma B_1 C_1' = 0$ se le u sono ortogonali alle linee v.

In questo caso $\sqrt{E'} = 1$, e perciò dalla prima delle (6) si ha:

$$r_2 = U ,$$

e dalla seconda:

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{G'}} \left\{ \int U \frac{d\sqrt{G'}}{du} du + V \right\} ;$$

e quindi le equazioni delle superficie cercate sono le (77), ove X, Y, Z hanno i valori (78), e r_1 e r_2 hanno i valori:

$$(79) \ldots \quad r_1 = \frac{1}{\sqrt{G'}} \left\{ \int U \frac{d\sqrt{G'}}{du} du + V \right\} , \qquad r_2 = U ,$$

essendo U una funzione arbitraria di u, V una funzione arbitraria di v, e $\sqrt{G'}$ il valore che si deduce dalle (78), e che si può porre sotto la forma $V_1 \cos(u - V_2)$, giacchè, come è noto, si ha $\frac{d^2\sqrt{G'}}{du^2} = -\sqrt{G'}$.

35. Le equazioni (77) conducono facilmente a trovare le classi speciali di superficie a linee di curvatura di un sistema piane e non geodetiche, e nelle quali i piani di queste linee sono paralleli a una retta fissa senza essere paralleli fra loro.

In questo caso infatti, prendendo questa retta per asse delle Z, si avrebbe $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 1$, e le A, B, C nelle (21) verrebbero determinate dalle (40).

Inoltre sarebbe $W = 0$, e quindi $M = \Sigma A B' = -\sqrt{1-r^2}\,\varphi'$, e la equazione (24) diverrebbe ancora:

$$\frac{dt}{dv} - \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} \varphi' \operatorname{sen} t = 0 ,$$

e quindi, se φ' non è nullo, cioè se le v non sono in piani paralleli, prendendo ancora la funzione arbitraria di u uguale ad u, se ne dedurrebbe, come nei casi precedenti:

$$\tan\frac{1}{2}t = e^{u+\int\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}\varphi' dv},$$

$$\operatorname{sen} t = \frac{1}{\cos\mathrm{h}\left(u+\int\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}\varphi' dv\right)}, \qquad \cos t = -\tan\mathrm{h}\left(u+\int\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}dv\right),$$

$$\sqrt{E'} = r.\frac{dt}{du} = \frac{r}{\cos\mathrm{h}\left(u+\int\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}\varphi' dv\right)},$$

e quindi i coseni X, Y, Z sarebbero:

$$(80)\ldots\begin{cases} X = \sqrt{1-r^2}\cos\varphi + r\operatorname{sen}\varphi\tan\mathrm{h}\left(u+\int\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}\varphi' dv\right), \\ Y = \sqrt{1-r^2}\operatorname{sen}\varphi - r\cos\varphi\tan\mathrm{h}\left(u+\int\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}\varphi' dv\right), \\ Z = \dfrac{r}{\cos\mathrm{h}\left(u+\int\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}\varphi' dv\right)}, \end{cases}$$

e i raggi di curvatura r_1 e r_2 sarebbero dati dalle (75) e (76) ove $\sqrt{E'}$ avesse il valore precedente, e le equazioni finali si otterrebbero dalle (77) facendo le debite sostituzioni.

In queste equazioni resterebbero le funzioni U, V, r e φ, le quali sono tutte arbitrarie, ad eccezione di una delle ultime tre, p. es. la φ, che può prendersi sempre per la variabile indipendente v, perchè φ non può essere costante.

36. Il caso che abbiamo escluso di $\varphi' = 0$, conduce alle superficie studiate da Monge, le cui linee di curvatura v sono in piani paralleli. Supponendo questi piani paralleli al piano yz, i coseni X, Y, Z sono allora:

$$(81)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\begin{cases} X = \sqrt{1-r^2}, \\ Y = r\cos u, \\ Z = r\operatorname{sen} u, \end{cases}$$

e prendendo r (che evidentemente non può essere costante) per la variabile indipendente v, e ponendo nelle (75) e (76) $U = F'(u)$, $V = \psi(r)$, si ha:

$$\sqrt{E'} = r\,, \qquad r_2 = \frac{F(u)}{r} + \psi(r)\,, \qquad r_1 = \frac{d\,[r\,\psi(r)]}{d\,r}\,,$$

e i valori di x, y, z sono i seguenti:

$$(82) \ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} x &= -\int \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,\frac{d\,[r\,\psi(r)]}{d\,r}\,d\,r\,, \\ y &= -\int F(u)\,\mathrm{sen}\,u\,d\,u + r\,\psi(r)\cos u\,, \\ z &= \int F(u)\cos u\,d\,u + r\,\psi(r)\,\mathrm{sen}\,u\,. \end{aligned} \right.$$

37. Supponendo nelle formole del § 35 $r = \text{cost.}$, si avrebbero le superficie in cui le linee di curvatura v sono piane e non geodetiche, e i loro piani sono paralleli a una retta fissa, e tagliano tutti la superficie sotto uno stesso angolo. Anche in questo caso poi, siccome per le (80) si vede che φ ed r non possono essere costanti insieme, il φ può prendersi sempre per la variabile indipendente v, e così facendo non restano di funzioni arbitrarie che le due U e V che entrano nei raggi di curvatura.

38. Le formole (77) dandoci le coordinate dei punti delle superficie a linee di curvatura piane, e avendo i valori (21) dei coseni X, Y, Z della normale, e i valori (75) e (76) dei raggi di curvatura, si avranno subito le equazioni:

$$(83) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} \xi &= x - r_2\,X\,, \\ \eta &= y - r_2\,Y\,, \\ \zeta &= z - r_2\,Z\,, \end{aligned} \right.$$

delle superficie E_v evolute delle (77) rispetto alle linee di curvatura piane, e queste ci daranno la classe di tutte le superficie nelle quali un sistema di geodetiche sono eliche; e dico di *tutte* perchè evidentemente le superficie che godono di questa proprietà sono tutte e sole le evolute E_v di quelle nelle quali le linee di curvatura v sono piane; e basta considerare il caso che queste evolventi non siano sviluppabili, e che le loro linee

di curvatura piane v non siano geodetiche, poichè le geodetiche delle evolute E_v, corrispondenti al caso in cui le v sulla evolvente fossero geodetiche, non sarebbero propriamente eliche, e le superficie che si avrebbero col prendere le evolute delle sviluppabili a linee di curvatura piane, cioè degli elicoidi sviluppabili, sarebbero i cilindri, e questi li otteniamo già tutti col prendere le evolute delle superficie non sviluppabili, le cui linee di curvatura v sono in piani paralleli.

39. Ora si osservi che, siccome per le (83) l'arco elementare delle geodetiche v di una evoluta E_v di una superficie qualunque è $\frac{dr_2}{du}du$, e l'angolo di contingenza è $\sqrt{\Sigma\left(\frac{dX}{du}\right)^2}\,du=\sqrt{E'}\,du$, così il loro raggio di curvatura ρ sarà:

$$\rho=\frac{\frac{dr_2}{du}}{\sqrt{E'}}\ ;$$

e quindi, se si volessero le superficie nelle quali il raggio di curvatura di un sistema di geodetiche v, di cui r_2 è l'arco, fosse $\rho=\varphi(r_2, v)$, basterebbe determinare le superficie evolventi, per le quali si ha:

$$\frac{dr_2}{du}=\sqrt{E'}\,\varphi(r_2, v)\ ;$$

e per questo sarà facile vedere che con sole quadrature si potranno determinare, quando esistono, le superficie nelle quali le linee geodetiche di un sistema sono eliche che godono di una proprietà espressa dall'equazione

$$(84)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\qquad \rho=\varphi(r_2, v)\ .$$

40. Per queste superficie infatti le evolventi dovranno essere a linee di curvatura v piane, e quindi, oltre ad aversi come precedentemente:

$$(85)\ \ldots\ldots\ldots\qquad \frac{dr_2}{du}=\sqrt{E'}\,\varphi(r_2, v)\ ,$$

per la (75) si dovrà anche avere:

$$(86) \ldots\ldots\ldots \qquad \frac{d r_2}{d u} = \frac{U}{\sqrt{E'}} ,$$

ove U è differente da zero, poichè altrimenti non esiste la superficie evoluta corrispondente.

Ora di qui si trae per la (85):

$$(87) \ldots\ldots\ldots \qquad \varphi (r_2 , v) = \frac{U}{E'} ;$$

e quindi ponendo:

$$\frac{U}{E'} = \tau ,$$

si avrà la seguente: $\qquad \varphi (r_2 , v) = \tau ,$

che non è se non che la (84), ove per ρ è posto τ; e quando φ contiene r_2, risolvendo si avrà:

$$(88) \ldots\ldots\ldots \qquad r_2 = \psi (\tau , v) ;$$

da cui

$$\frac{d r_2}{d u} = \frac{d \psi}{d \tau} \frac{d \tau}{d u} .$$

Per le precedenti si dovrà dunque avere:

$$(89) \ldots\ldots\ldots \qquad \sqrt{E'} = \frac{\frac{d \psi}{d \tau} \frac{d \tau}{d u}}{\tau} ;$$

e quando sia soddisfatta questa, ove τ è $\frac{U}{E'}$, e che $\sqrt{E'}$ sia appunto il coefficiente $r \frac{d t}{d u}$ dell'elemento lineare sferico che abbiamo trovato, ove t è determinato dalla equazione (24):

$$(90) \ldots\ldots\ldots \qquad M \operatorname{sen} (t - W) + r \frac{d t}{d v} = 0 ,$$

prendendo per r_2 il valore (88), r_2 soddisfarà alla (86), e quindi apparterrà effettivamente ad una superficie a linee di curvatura piane, e soddisfarà alla condizione (85).

La questione si riduce dunque a soddisfare alle (89) e (90) quando $\sqrt{E'} = r\frac{dt}{du}$, e $\tau = \frac{U}{E'}$. Ora la (89) dà integrando:

$$(91) \ldots\ldots \qquad rt + V = \int \frac{d\psi}{\frac{d\tau}{\tau}} d\tau = F(\tau, v) \; ;$$

ove V è una funzione arbitraria di v; quindi se ne deduce risolvendo:

$$\tau = \tau(rt + V, v) \; ,$$

e poichè $\tau = \frac{U}{E'} = \frac{U}{r^2\left(\frac{dt}{du}\right)^2}$, si avrà:

$$(92) \ldots \qquad \log U - 2\log r - 2\log\frac{dt}{du} = \log\tau(rt + V, v) \; ,$$

e basterà che sia soddisfatta questa e la (90).

Ora, perchè questo sia, bisogna che i valori di $\frac{d^2t}{du\,dv}$, dedotti da queste due equazioni, siano gli stessi, e poichè esse danno respettivamente:

$$(93) \ldots\ldots \qquad -2\frac{r'}{r} - 2\frac{\frac{d^2t}{du\,dv}}{\frac{dt}{du}} = \frac{\frac{d\tau}{dt}}{\tau}\cdot\frac{dt}{dv} + \frac{\frac{d\tau}{dv}}{\tau} \; ,$$

$$(94) \ldots\ldots \qquad M\cos(t - W) + r\frac{\frac{d^2t}{du\,dv}}{\frac{dt}{du}} = 0 \; ,$$

si dovrà avere l'equazione:

$$(95) \ldots \quad -2\frac{r'}{r} + 2\frac{M}{r}\cos(t - W) = -\frac{M}{r}\frac{\frac{d\tau}{dt}}{\tau}\operatorname{sen}(t - W) + \frac{\frac{d\tau}{dv}}{\tau} \; ,$$

la quale non contenendo che t e v, e t essendo una funzione che contiene u

dovrà essere identica; e quindi, esprimendo che essa è una identità, si avranno delle equazioni in v che, insieme a quelle del § 13, se saranno compatibili, serviranno a determinare le funzioni arbitrarie di v che entrano nei coseni X, Y, Z, e la funzione V che comparisce nelle (91); e dopo di ciò l'integrazione della (90) darà il valore di t, il quale [con un conveniente U dipendente dalla funzione arbitraria di u, portata dalla integrazione della (90) stessa], soddisfarà certamente alla (92), giacchè essendo soddisfatte la (95) e la (90), e quindi anche la (94), sarà soddisfatta anche la (93), e quindi (integrando) si vede che con un conveniente U dovrà essere soddisfatta anche la (92).

Determinato così il t, e quindi X, Y, Z e $\sqrt{E'}$, colla (88) si avrà r_2, colla (76) si avrà r_1, e quindi le (77) daranno le superficie evolventi di quelle che cerchiamo; e prendendo ora di queste le superficie evolute E_v colle (83) si avranno le superficie richieste.

Notiamo che per trovare t, dopo di avere veduto che le condizioni che vengono dalla (95) sono possibili, si potrà integrare la (92), la quale si può scrivere:

$$\sqrt{U}=\sqrt{\tau(rt+V,v)}\,r\frac{dt}{du},$$

e che quindi integrando e indicando con V_2 una funzione di v, dà:

$$\int\sqrt{U}\,du+V_2=\int\sqrt{\tau(rt+V,v)}\,d(rt)=\varphi_1(rt+V,v),$$

e questa risoluta dà il t, e questo valore di t soddisfarà alle (93) e (95), e quindi anche alla (94), e perciò, determinando convenientemente V_2, resterà soddisfatta anche la (90). Questa determinazione dipenderà pure dalle quadrature, e potrà essere che i calcoli da farsi con questa via siano più semplici di quelli necessari per l'integrazione della (90).

Notiamo che in questo caso è la funzione arbitraria di u che viene dalla integrazione della (90), che resta determinata dal valore scelto per U.

È appena necessario di osservare che quando le condizioni che provengono dalla (95) siano impossibili a soddisfarsi, si potrà subito dire che non esistono superficie in cui le linee geodetiche di un sistema siano eliche dotate della proprietà richiesta.

41. Fra poco darò delle applicazioni di questi processi; ora è da osservarsi che qui abbiamo escluso il caso in cui la relazione data (84) fosse indipendente da r_2, cioè che le eliche fossero circolari, e quindi resta a considerarsi questo caso.

Ora, affinchè fosse:

$$\rho = \varphi(v) ,$$

per la (87) si dovrebbe avere:

$$r \frac{dt}{du} = \frac{\sqrt{U}}{\sqrt{\varphi}} ,$$

e quindi, indicando con V una funzione arbitraria di v, si avrebbe:

$$t = \frac{1}{r\sqrt{\varphi}} \int \sqrt{U}\, du + V ,$$

e per la (90) dovremmo anche avere:

$$M \operatorname{sen}\left[\frac{1}{r\sqrt{\varphi}} \int \sqrt{U}\, du + V_1 - W\right] + \left(\frac{1}{r\sqrt{\varphi}}\right)' \int \sqrt{U}\, du + V' = 0 ,$$

ciò che darebbe $M = 0 \ldots$, giacchè t deve contenere u.

Ora, l'essere $M = 0$ porta, come già dicemmo altra volta, che le linee v della evolvente siano in piani paralleli, e allora le evolute corrispondenti sono superficie cilindriche. Dunque si può evidentemente concludere che *le sole superficie nelle quali un sistema di geodetiche sono eliche circolari, sono i cilindri circolari.*

42. Andiamo ora a fare delle applicazioni dei processi del § 40, cercando le superficie nelle quali le geodetiche di un sistema sono eliche cilindro-coniche, o eliche sferiche.

1° In questo caso la relazione data è la seguente:

$$\rho = \lambda r_2 + \mu ,$$

ove λ e μ sono funzioni di v, e λ non può essere zero; quindi in questo caso si ha:

$$\psi(\tau, v) = \frac{\tau - \mu}{\lambda},$$

e la relazione (91) diviene:

$$r t + V = \frac{1}{\lambda} \int \frac{d\tau}{\tau} = \frac{1}{\lambda} \log \tau ;$$

donde

$$\tau = e^{\lambda (r t + V)} ;$$

e per questa la (95) diviene:

$$-2\frac{r'}{r} + 2\frac{M}{r}\cos(t - W) = -\frac{M}{r}\lambda r \operatorname{sen}(t - W) + (\lambda r)' t + (\lambda V)' = 0 ,$$

e per essere soddisfatta richiede essa pure che sia $M = 0$, e ci fa quindi concludere che anche in questo caso le superficie cercate sono soltanto le cilindriche corrispondenti.

2° Osserviamo che, essendo ρ_1 il raggio di seconda curvatura delle eliche v delle evolute, il rapporto $\frac{\rho_1}{\rho}$ è uguale alla tangente $\frac{r}{\lambda}$ dell'angolo sotto cui le eliche v tagliano le generatrici dei cilindri corrispondenti, e poichè se queste eliche devono essere sferiche si deve avere:

$$\rho^2 + \rho_1^2 \left(\frac{d\rho}{d r_2}\right)^2 = R^2 ,$$

ove R è una funzione della sola v che rappresenta il raggio delle sfere, così in questo caso dovrà essere:

$$\rho^2 + \frac{r^2}{\lambda^2}\rho^2 \left(\frac{d\rho}{d r_2}\right)^2 = R^2 ,$$

e quindi si dovrà avere:

$$\int \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = -\frac{\lambda}{r} ;$$

da cui

$$\sqrt{R^2 - \rho^2} = \frac{\lambda}{r} r_2 + f(v) ,$$

ove $f(v)$ è una funzione arbitraria di v, e questa sarà la relazione che si dovrebbe avere fra ρ, r_2 e v in questo caso. Si avrebbe dunque ora:

$$\psi(\tau, v) = \frac{r}{\lambda}\sqrt{R^2-\tau^2} - f(v)\frac{r}{\lambda},$$

e perciò la relazione (91) diverrebbe:

$$rt + V = -\frac{r}{\lambda}\int\frac{d\tau}{\sqrt{R^2-\tau^2}} = -\frac{r}{\lambda}\operatorname{arc\,sen}\frac{\tau}{R},$$

da cui

$$\tau = -R\operatorname{sen}\left(\lambda t + \frac{V\lambda}{r}\right);$$

e per questa la (95) darebbe la seguente:

$$-2\frac{r'}{r} + 2\frac{M}{r}\cos(t-W) = -\frac{M\lambda}{r}\cot\left(\lambda t + \frac{V\lambda}{r}\right)\operatorname{sen}(t-W)$$
$$+\frac{R'}{R} + \left\{\lambda' t + \left(\frac{V\lambda}{r}\right)'\right\}\cot\left(\lambda t + \frac{V\lambda}{r}\right),$$

che dovrebbe essere identica.

Ma ora, esaminando le condizioni speciali che vengono da questa equazione e dalla equazione derivata rapporto a t, col farvi

$$t = \frac{k\pi}{\lambda} - \frac{V}{r}, \quad \text{oppure} \quad t = \frac{(2k+1)\pi}{2\lambda} - \frac{V}{r},$$

ove k è un numero intero qualunque, si trova che queste condizioni (che richiedono dapprima che λ sia una costante $\frac{1}{2m}$, ove m è un numero intero) non possono coesistere, a meno che non sia $M=0$; e questo porta a concludere che anche adesso le superficie cercate sono soltanto le cilindriche corrispondenti.

Pisa - gennaio 1869.