SOPRA

ALCUNI PUNTI DELLA TEORIA DELLE SUPERFICIE

MEMORIA

DI

ULISSE DINI

Presentata all'Accademia dei XL dal Socio professore E. BETTI

La Memoria che qui ho l'onore di pubblicare, si aggira sopra più parti della teoria analitica delle superficie. In essa io prendo dapprima a studiare la rappresentazione generale di una superficie su di un'altra, e stabilisco alcune proprietà generali di queste rappresentazioni, la maggior parte delle quali erano state enunciate senza dimostrazione dal sig. TISSOT nei *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences* dell'anno 1859. Considero poi in particolare la rappresentazione di una superficie sopra una sfera di raggio uno, fatta col metodo di GAUSS, cioè conducendo pel centro di essa tanti raggi paralleli alle direzioni (esterne o interne) delle normali alla medesima superficie, e considerando come corrispondenti i punti della superficie e della sfera che hanno le normali parallele. Facendo uso allora di alcune

formole della teoria delle coordinate curvilinee, e giovandomi delle proprietà precedentemente dimostrate per le rappresentazioni generali di una superficie su di un'altra, giungo con un metodo nuovo a dimostrare l'esistenza delle linee di curvatura, e a ritrovare le proprietà ad esse riconosciute da Monge, Rodrigues e Joachimstal; e dopo di questo, le formole di Eulero, Bertrand e Bonnet sulla curvatura delle linee tracciate su una superficie e sulla distribuzione delle normali attorno ad un punto risultano subito, con semplicissime considerazioni, da quelle generali stabilite nello studio delle rappresentazioni di una superficie qualunque su di un'altra. Considerando poi la linea d'intersezione di due superficie, dimostro su essa un teorema dal quale risultano subito come corollarii i teoremi noti sulle linee di curvatura comuni a due superficie.

Dopo avere ritrovate così le note proprietà principali sulla curvatura delle superficie, passo a fare uno studio delle superficie definite da qualche loro proprietà speciale, relativa alle linee di curvatura o ai raggi di curvatura. Prendo perciò allora per coordinate su una superficie qualunque le sue linee di curvatura, e giovandomi delle formole che hanno servito a dimostrare l'esistenza di queste linee, ne deduco due altre differenziali fra i raggi di curvatura principali e i coefficienti dell'elemento lineare della superficie, e due altre pure ne ottengo (conseguenza di queste), che contengono invece i raggi di curvatura principali e i coefficienti dell'elemento lineare sferico, quando si prendono per coordinate sulla sfera le linee ortogonali che corrispondono alle linee di curvatura. Queste formole, che sono le (49) e (48) di questa Memoria, mi conducono allora alla dimostrazione di moltissimi teoremi. Ne deduco dapprima alcuni sulle superficie, i cui raggi di curvatura di un sistema sono costanti lungo le linee di curvatura dell'altro sistema, e dai quali risulta subito quello di Bertrand sulla proprietà della sfera, di essere la sola superficie non sviluppabile, i cui raggi di curvatura siano costanti. Poi, dalle stesse formole deduco una equazione fra le derivate prime e seconde dei raggi di curvatura che caratterizza le superficie a linee di curvatura isoterme, e dalla quale risulta subito che le superficie di curvatura media costante hanno le loro linee di curvatura isoterme.

Una equazione analoga l'ottengo per le superficie, le cui trasformate

sferiche sono isoterme, e mentre la precedente ci dà una relazione in coordinate ellittiche fra i raggi di curvatura delle superficie a centro del secondo ordine, questa ci dà una relazione fra i raggi di curvatura delle superficie, le cui linee di curvatura sono piane.

Continuando a fare uso delle formole (48) e (49), ritrovo i bei teoremi del sig. WEINGARTEN, ed insieme un altro teorema sulle superficie, i cui raggi di curvatura sono funzioni l'uno dell'altro; e per dare allora una nuova applicazione dei teoremi del sig. WEINGARTEN, prendo a cercare le superficie di questa classe, che godono inoltre della proprietà di avere le linee di curvatura piane. Trovo così che queste superficie sono: 1° quelle di rivoluzione; 2° quelle canali aventi per direttrice una curva piana; 3° quelle di area minima, le cui linee di curvatura sono piane; 4° quelle le cui linee di curvatura sono piane e i cui raggi di curvatura sono legati fra loro dalla relazione logaritmica (69). Questi risultati portano a concludere che oltre alle superficie di rivoluzione non esistono superficie di curvatura costante e di curvatura media costante e differente da zero, che abbiano le loro linee di curvatura piane.

Per fare questa applicazione dei teoremi di WEINGARTEN mi bisognava però conoscere dapprima la forma dell'elemento lineare della sfera, quando su essa si prendono per coordinate due sistemi di cerchi ortogonali. Per questo ho preso più generalmente a considerare una superficie su cui esistono due sistemi di linee ortogonali aventi le curvature geodetiche costanti. Queste linee godono di proprietà speciali, e, servendomi di queste, risolvo la questione precedente, e giungo ad altri teoremi mediante i quali, fondandomi sulla proprietà che nelle rappresentazioni di una superficie sopra un'altra, fatte dietro il principio della conservazione degli angoli, ad un sistema isotermo della prima superficie deve necessariamente corrispondere un sistema isotermo della seconda, ne deduco un teorema generale su queste rappresentazioni, del quale è caso particolare un altro di LAGRANGE sulle rappresentazioni di una superficie di rivoluzione su di un piano. Osservando allora che nella rappresentazione di una superficie di area minima sulla sfera, fatta col metodo di GAUSS, tutti gli angoli sono conservati, quel teorema mi porta a concludere che nelle superficie di area minima, se le linee di curvatura di un sistema sono piane, le altre

pure lo saranno, e con questo resta dimostrato che non esistono superficie di area minima che abbiano un solo sistema di linee di curvatura piane.

Ciò fatto, passo a cercare le equazioni in termini finiti delle superficie, le cui linee di curvatura sono piane. Il sig. Bonnet in una interessante Memoria pubblicata nel *Cahier* 39 del *Journal de l'École polytechnique* aveva già trovato gl' integrali delle equazioni di questa superficie in coordinate Cartesiane x, y, z, dando tre equazioni, fra le quali restano ad eliminarsi le due derivate parziali del primo ordine di z per ogni determinazione particolare delle due funzioni arbitrarie contenute in esse. Qui invece io, servendomi delle formole (48) e di alcune altre, e principalmente di quella che dà la forma dell'elemento lineare della sfera quando si prendono per coordinate su essa due sistemi di cerchi ortogonali, trovo le coordinate dei vari punti della superficie a linee di curvatura piane in funzione dei parametri delle linee di curvatura e con due funzioni arbitrarie, l'una di una variabile, l'altra dell'altra, e i calcoli da farsi per ogni determinazione speciale delle funzioni arbitrarie sono quadrature. Inoltre, venendo dati sotto forma finita anche i raggi di curvatura di queste superficie, e i coseni degli angoli della normale coi tre assi, si hanno subito, senz'altri calcoli, anche le equazioni in termini finiti delle superficie dei centri di curvatura corrispondenti. Siccome poi in tutte queste formole le funzioni arbitrarie contengono ciascuna una sola variabile, ne viene che tutti i problemi su queste superficie, la cui soluzione dipende dalla determinazione della forma di queste funzioni, vengono a dipendere dalla integrazione di equazioni a derivate ordinarie; ed io, per darne qui un esempio, prendo a cercare le superficie non di rivoluzione, le cui linee di curvatura sono piane e isoterme, e trovo così che questa classe di superficie è composta delle superficie le cui linee di curvatura sono circolari (superficie cicliche di Dupin), di quelle di area minima, le cui linee di curvatura sono piane, e di alcune altre di cui si hanno subito le equazioni in termini finiti.

In ultimo dimostro una proprietà delle superficie ciclidi, e do una nuova dimostrazione di una formola del sig. Bonnet sul raggio di curvatura delle asintotiche delle superficie a curvature opposte.

Sperando che questi risultati valgano ad attirare l'attenzione dei geometri, ho creduto bene di pubblicare ora questa Memoria.

1. Consideriamo una superficie S, e su essa prendiamo un sistema di linee coordinate u e v tali che si abbia:

$$(1) \ldots\ldots \qquad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 ,$$

essendo ds l'elemento lineare della medesima superficie. Facciamo poi corrispondere uno ad uno i punti di S a quelli di un'altra superficie S', secondo una legge qualunque; allora alle linee u e v di S corrisponderanno su S' due sistemi di linee u_1 e v_1 che, prese per coordinate, daranno per l'elemento lineare di S'

$$ds'^2 = E_1\,du_1^2 + 2F_1\,du_1\,dv_1 + G_1\,dv_1^2 ,$$

e la corrispondenza sarà data dalle formole

$$u_1 = u_1(u) , \qquad v_1 = v_1(v) .$$

Per queste formole l'elemento lineare di S' potrà anche ridursi alla forma

$$(2) \ldots\ldots \qquad ds'^2 = E'\,du^2 + 2F'\,du\,dv + G'\,dv^2 ,$$

e noi potremo servirci della (1) e di quest'ultima, considerando come corrispondenti i punti delle due superficie che hanno la stessa u e la stessa v.

Ciò posto, consideriamo su S una linea L che faccia l'angolo α colla $v = \text{cost.}$; indichiamo con ω l'angolo delle curve u e v, e poniamo

$$(3) \ldots\ldots \qquad \sqrt{EG - F^2} = \Delta ;$$

si avrà, come è noto:

$$\frac{\text{sen.}\,\alpha}{\text{sen.}\,(\omega - \alpha)} = \sqrt{\frac{G}{E}} \cdot \frac{dv}{du} , \qquad \text{sen.}\,\omega = \frac{\Delta}{\sqrt{EG}} , \qquad \cos.\,\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}} ;$$

e quindi

$$\text{sen.}\,\alpha = \sqrt{\frac{G}{E}} \cdot \frac{dv}{du} \cdot (\text{sen.}\,\omega \cos.\alpha - \cos.\omega\,\text{sen.}\,\alpha) =$$

$$\frac{\Delta}{E} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \cos.\alpha - \frac{F}{E} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \text{sen.}\,\alpha\ ,$$

e

$$(4) \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad E\,tg\,\alpha + F(tg\,\alpha - \Delta) . \frac{dv}{du} = 0\ .$$

Poniamo analogamente per S'

$$(5) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \sqrt{E'G' - F'^2} = \Delta'\ ,$$

e consideriamo su S' la linea L' che corrisponde alla linea L di S, e indichiamo con α' l'angolo di essa colla linea $v = \text{cost.}$ della stessa S'; si avrà:

$$(6) \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad E'\,tg\,\alpha' + (F'\,tg\,\alpha' - \Delta') . \frac{dv}{du} = 0\ .$$

Il rapporto $\frac{dv}{du}$ è lo stesso per le linee corrispondenti L e L'; eliminando dunque questo rapporto fra le equazioni (4) e (6), si avrà la relazione seguente:

$$(7) \ldots \quad (EF' - E'F)\,tg\,\alpha . tg\,\alpha' - E\Delta'\,tg\,\alpha + E'\Delta\,tg\,\alpha' = 0\ ,$$

che lega fra loro gli angoli α e α' che due linee corrispondenti L e L' su S e S' fanno colle due linee corrispondenti $v = \text{cost.}$

Notiamo che in questa formola le quantità $EF' - E'F$, $E\Delta'$, $E'\Delta$ sono funzioni di u e v che dipendono dalla legge di corrispondenza che si è stabilita fra i punti delle due superficie S e S', ma non dipendono punto dalle linee L ed L' che abbiamo considerate su esse.

2. La formola precedente (7) conduce subito a delle conseguenze notevoli, delle quali ora andremo a mostrarne alcuna.

Osserviamo però prima di tutto che facendovi $\alpha = \alpha'$, essa diviene identica per quelle corrispondenze per le quali si ha:

$$\frac{E}{E'} = \frac{F}{F'} = \frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{G}{G'}\ ,$$

che, come è ben naturale, sono quelle che conservano la similitudine nelle parti finite o infinitesime. Noi, a meno che non avvertiamo il contrario, intenderemo escluso questo caso dalle nostre considerazioni.

Inoltre porremo, per abbreviare:

$$(8) \ldots\ldots \quad EF' - E'F = \lambda\,, \qquad E\Delta' = \mu\,, \qquad E'\Delta = \nu\,,$$

con che la (7) stessa ci darà:

$$(9) \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad tg\,\alpha' = \frac{\nu\, tg\,\alpha}{\lambda\, tg\,\alpha + \mu}\,,$$

e per l'esclusione ora fatta non si potrà avere al tempo stesso $\lambda = 0$, e $\mu = \nu$.

3. Ciò posto, cerchiamo colla (9) quelle direzioni ortogonali su S che restano ortogonali anche nella rappresentazione su S'.

Considerando perciò oltre alle linee corrispondenti L e L' due altre linee pure corrispondenti L_1 e L'_1 di direzioni β e β' rispettivamente, si avrà per esse:

$$tg\,\beta' = \frac{\nu\, tg\,\beta}{\lambda\, tg\,\beta + \mu}\,,$$

e se si vuole che le linee L e L_1 su S siano ortogonali, e le linee L' e L'_1 su S' siano pure ortogonali, dovremo avere le due relazioni

$$tg\,\alpha . tg\,\beta = -1\,, \qquad tg\,\alpha' . tg\,\beta' = -1\,,$$

la seconda delle quali, per la (9) e per la precedente, si ridurrà all'altra

$$\nu^2 = -\lambda^2 + \lambda\mu\,(tg\,\alpha + tg\,\beta) + \mu^2\,,$$

la quale ci darà la seguente:

$$tg\,\alpha + tg\,\beta = \frac{\lambda^2 + \nu^2 - \mu^2}{\lambda\mu}\,,$$

che insieme all'altra

$$tg\alpha . tg\beta = -1 ,$$

ci mostra che $tg\alpha$ e $tg\beta$ sono le due radici della equazione di 2° grado

$$(10) \ldots\ldots\ldots \qquad Z^2 - \frac{\lambda^2 + \nu^2 - \mu^2}{\lambda\mu} . Z - 1 = 0 .$$

Di qui si conclude subito che per ogni punto su S si hanno sempre due e due sole direzioni ortogonali (α) e (β), che restano ortogonali anche nella rappresentazione su S' quando questa rappresentazione non è fatta dietro il principio della conservazione degli angoli, o in altri termini si ha che: *In qualunque rappresentazione di una superficie sopra un'altra* (che non dia la similitudine nelle parti finite o infinitesime) *vi ha sempre sulla prima superficie uno ed un solo doppio sistema di linee ortogonali che si mantengono tali anche nella rappresentazione sull'altra superficie.*

La equazione differenziale di queste linee è la (10) quando per Z vi si pone il valore di $tg\alpha$, che si deduce dell'equazione (4).

Questo bel teorema fu enunciato senza dimostrazione dal sig. Tissot (*Comptes rendus*, 1859), e le linee in questione furono dette da lui *direzioni principali.*

4. Dimostrata così l'esistenza di queste direzioni principali, noi possiamo prenderle per linee coordinate u e v sulle superficie S e S'; allora si avrà per gli elementi lineari di queste superficie:

$$(11) \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \begin{cases} ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2 , \\ ds'^2 = E'\,du^2 + G'\,dv^2 ; \end{cases}$$

e la (7) diverrà:

$$(12) \ldots\ldots\ldots \qquad tg\alpha' = \sqrt{\frac{E\,G'}{E'\,G}} . tg\alpha = \frac{h_1}{h_2} . tg\alpha ,$$

indicando con h_1 e h_2 i rapporti $\sqrt{\frac{G'}{G}}$, $\sqrt{\frac{E'}{E}}$ degli elementi lineari corrispondenti delle direzioni principali u e v sulle superficie S ed S'.

5. Ciò posto, passiamo a cercare le altre linee che conservano gli angoli nella rappresentazione. Considerando perciò, oltre alla linea (α) su S, un'altra linea (β) e la sua corrispondente (β') su S', si avrà:

$$tg\,\beta' = \frac{h_1}{h_2} . tg\,\beta \ ,$$

e per questa e per la (12) se ne dedurrà

$$tg\,(\alpha' - \beta') = h_1 h_2 . \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{h_2^{\,2} + h_1^{\,2}\, tg\,\alpha . tg\,\beta} \ .$$

Da questa, se si pone la condizione che le linee (α) e (β) sieno tali che il loro angolo non venga modificato nella rappresentazione (dovendo aversi $\alpha' - \beta' = \alpha - \beta$), se ne dedurrà subito che per le linee di S che soddisfano a questa condizione, si ha:

(13) . . . . . $$tg\,\alpha . tg\,\beta = \frac{h_2}{h_1} \ ,$$

e per le corrispondenti di S' si ha:

$$tg\,\alpha' . tg\,\beta' = \frac{h_1}{h_2} \ .$$

Di qui risulta subito che per ogni direzione (α) su S ne esiste sempre un'altra ed una sola (β) tale, che l'angolo delle medesime direzioni non riesce modificato nella rappresentazione, a meno che non si considerino le due direzioni (α_1) su S definite dalla equazione

$$tg^2\,\alpha_1 = \frac{h_2}{h_1} \ ,$$

le quali hanno ciascuna per corrispondenti loro stesse. Includendo anche questo caso nel caso generale, si potrà dunque enunciare il seguente teorema, notato pure dal sig. Tissot: *In qualunque rappresentazione di una superficie su di un'altra, per ogni sistema di linee della prima superficie, ne esiste sempre un altro ed uno solo tale, che l'angolo di queste linee non riesce alterato nella rappresentazione, e quindi per ogni punto delle*

due superficie esistono infiniti gruppi di due direzioni, che fanno fra loro lo stesso angolo sulle due superficie. Chiameremo *direzioni coniugate* le direzioni che compongono ciascuno di questi gruppi.

6. Queste direzioni coniugate potranno ottenersi tutte con una semplice costruzione geometrica. S' immagini infatti una iperbola tracciata nel piano tangente al punto M della superficie S col centro in M e cogli assi a_u, a_v tangenti alle direzioni principali u e v, e tali che il rapporto dei loro quadrati $\frac{a_u^2}{a_v^2}$ sia $\frac{h_2}{h_1}$; evidentemente, per la (13), le direzioni coniugate saranno tangenti a due diametri coniugati di questa iperbola, e quindi si otterranno tutte costruendo questi sistemi di diametri coniugati.

Questa iperbola può dirsi perciò la *iperbola indicatrice* delle direzioni coniugate, e giova notare che essa può considerarsi anche sul piano tangente di S', quando si avverta che in questo caso il rapporto dei quadrati degli assi deve essere $\frac{h_1}{h_2}$, talchè si può considerare la stessa che su S, purchè si faccia ruotare nel suo piano attorno al punto M e di un angolo retto. Considerata sul piano tangente di S' questa indicatrice, ci dà subito il mezzo per riconoscere se due direzioni L', L_1' nella rappresentazione riproducano o no in vera grandezza l'angolo delle direzioni corrispondenti della superficie rappresentata S, giacchè per vedere se ciò accada o no, basterà vedere se quelle direzioni L', L_1' sono o no tangenti a due diametri coniugati della iperbola indicatrice sulla stessa S'. Notiamo ancora che, servendosi delle iperbole indicatrici, le direzioni che hanno per coniugate loro stesse sono quelle tangenti agli asintoti delle medesime iperbole.

7. Passiamo adesso a mostrare che *le linee, il cui angolo colle linee principali v soffre la massima alterazione nella rappresentazione, sono sempre due, e sono tangenti agli asintoti della iperbola indicatrice.*

Osserviamo perciò che dalla (12) si ha:

$$tg(\alpha'-\alpha)=(h_1-h_2)\cdot\frac{tg\,\alpha}{h_2+h_1\,tg^2\,\alpha}\,;$$

e quindi per le linee in questione si dovrà avere

$$\frac{d}{d\alpha}\cdot\left\{\frac{tg\,\alpha}{h_2+h_1\,tg^2\,\alpha}\right\}_0=0\ ,$$

cioè:

$$tg^2\,\alpha=\frac{h_2}{h_1}\ ,$$

escludendo il caso di $\alpha=\frac{\pi}{2}$, che corrisponde ad un minimo di deviazione. Questa formola ci mostra il teorema, e per la (12) ci mostra ancora che per le linee in quistione si ha:

$$tg\,\alpha.\,tg\,\alpha'=1\ ,\qquad \text{ovvero}\qquad \alpha+\alpha'=\frac{\pi}{2}\ .$$

Notiamo qui che se la rappresentazione è di eguale superficie, vale a dire se si ha $EG=E'G'$, ovvero $h_1 h_2=1$, l'angolo α di deviazione massima, rispetto alle direzioni principali su S, viene dato dalla equazione

$$(14)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\qquad tg\,\alpha=\pm h_2\ .$$

8. Cerchiamo adesso (quando esistono) le linee per le quali le lunghezze degli elementi lineari non vengono alterate nella rappresentazione, e che possono perciò dirsi *isoperimetre*.

Per la (11) si vede subito che queste linee saranno quelle per le quali si ha:

$$(E-E')\,du^2+(G-G')\,dv^2=0\ ,$$

ovvero

$$(15)\ \ldots\ldots\qquad \frac{dv}{du}=\pm\sqrt{\frac{E'-E}{G-G'}}=\pm\sqrt{\frac{E}{G}}\cdot\sqrt{\frac{h_1^{\,2}-1}{1-h_2^{\,2}}}\ ;$$

e quindi pei punti nei quali una delle quantità h_1, h_2 sia maggiore della unità e l'altra minore, vi passeranno sempre due linee isoperimetre, la cui direzione su S sarà definita dalla formola

$$(16)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\qquad tg\,\alpha=\pm\sqrt{\frac{h_1^{\,2}-1}{1-h_2^{\,2}}}\ ,$$

e queste linee saranno ugualmente inclinate una da una parte e l'altra dall'altra sopra una stessa direzione principale.

Se dunque le condizioni $h_1 \gtrless 1$ con $h_2 \lessgtr 1$ saranno soddisfatte per ogni punto della rappresentazione, allora per ogni punto delle due

superficie passeranno due linee isoperimetre che godranno (rispetto agli angoli) della proprietà ora citata, e formeranno un doppio sistema di linee la cui equazione è data dalla (15).

In particolare, se la rappresentazione è di uguale superficie, le condizioni $h_1 \gtreqless 1$ con $h_2 \lesseqgtr 1$ sono soddisfatte in ogni punto, e di più dalla (16) si ha:

$$tg\,\alpha = \pm h_2 \ ,$$

che coincide colla (14); quindi se ne conclude che *nelle rappresentazioni di uguale superficie le linee che conservano le lunghezze sono quelle che subiscono la massima deviazione rispetto alle direzioni principali e quindi sono tangenti agli asintoti della iperbola indicatrice delle direzioni coniugate.*

9. Consideriamo ora una linea qualunque (α) su S, il cui elemento lineare sia ds; e la sua corrispondente (α') su S', di cui l'elemento lineare sia ds'; e proponiamoci di trovare l'espressione del rapporto $\frac{ds'}{ds}$ che misura l'amplificazione dell'elemento ds nella rappresentazione, e che diremo perciò *rapporto di amplificazione della direzione* (α).

Facendo le proiezioni di ds e ds' sulle linee $v = \text{cost.}$ delle superficie corrispondenti S e S', si avrà:

$$\sqrt{E}\,du = ds \cos.\alpha \ , \qquad \sqrt{E'}\,du = ds' \cos.\alpha' \ ,$$

e quindi

$$\frac{ds'}{ds} = \sqrt{\frac{E'}{E}} \cdot \frac{\cos.\alpha}{\cos.\alpha'} \ ,$$

ovvero

$$(17) \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \frac{ds'}{ds} = h_2 \cdot \frac{\cos.\alpha}{\cos.\alpha'} \ ;$$

e da questa, quadrando e ponendovi per $\cos.^2\alpha'$ il suo valore tratto dalla formola (12), si otterrà subito la seguente

$$(18) \ldots\ldots\ldots \qquad \left(\frac{ds'}{ds}\right)^2 = h_1^{\,2}\,\text{sen.}^2\alpha + h_2^{\,2}\cos.^2\alpha \ ,$$

che ci dà sotto una forma semplicissima l'espressione del quadrato del rapporto di amplificazione della direzione (α).

10. Questa formola conduce a delle conseguenze notevoli, delle quali ora andiamo a mostrarne alcuna.

Consideriamo perciò anche la linea $\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ su S e la sua corrispondente su S', e indichiamo con ds_1 e ds'_1 i rispettivi loro elementi lineari, si avrà:

$$\left(\frac{ds_1'}{ds_1}\right)^2 = h_1^2 \cos.^2 \alpha + h_2^2 \operatorname{sen.}^2 \alpha \ ,$$

e quindi, sommando, se ne dedurrà

$$\left(\frac{ds'}{ds}\right)^2 + \left(\frac{ds_1'}{ds_1}\right)^2 = h_1^2 + h_2^2 \ ,$$

per la quale si conclude che *la somma dei quadrati dei rapporti di amplificazione di due direzioni ortogonali è costante per uno stesso punto, ed è uguale alla somma dei quadrati dei rapporti di amplificazione delle direzioni principali.*

La formola (18) mostra anche che *le linee i cui elementi lineari subiscono la massima alterazione nella rappresentazione sono ortogonali, e sono appunto le direzioni principali.*

Nella proiezione di Lorgna adunque, per esempio, le linee i cui elementi lineari subiscono la massima alterazione sono appunto i meridiani ed i paralleli.

Per la formola (18) si vede anche che costruendo nel piano tangente di S una ellisse i cui assi siano tangenti alle direzioni principali, e rappresentino le inverse dei rapporti di amplificazione delle direzioni principali a cui sono tangenti, un diametro qualunque di questa ellisse rappresenterà l'inversa del rapporto di amplificazione della direzione tangente ad essa.

Si ha così una indicatrice ellittica pei valori inversi dei rapporti di amplificazione analoga alla indicatrice di Dupin, e dessa ci fa vedere chiaramente come variino colle direzioni i rapporti di amplificazione.

11. Questa indicatrice conduce subito ad un'altra legge assai notevole delle rappresentazioni generali di una superficie sopra un'altra.

Supponiamo che delle due quantità h_1 e h_2 sia h_2 la più grande; e

immaginiamo che il piano P, tangente ad S nel punto M, ruoti attorno alla linea v, alla quale è tangente l'asse minore $\frac{1}{h_2}$ della indicatrice, di un angolo θ, tale che la proiezione dell' indicatrice sul nuovo piano P' sia un cerchio di raggio $\frac{1}{h_2}$, vale a dire in modo che

$$\cos.\theta = \frac{h_1}{h_2} .$$

Un semidiametro qualunque $\frac{ds}{ds'}$ della indicatrice avrà per proiezione un raggio $\frac{1}{h_2}$ del cerchio di proiezione, quindi se si chiama θ_1 l'angolo di ds colla sua proiezione, si avrà:

$$\frac{ds}{ds'} . \cos.\theta_1 = \frac{1}{h_2} ,$$

ovvero

$$ds' = h_2\, ds \cos.\theta_1 ,$$

o anche

$$(19) \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad ds' = h_2\, \delta s ,$$

chiamando δs la proiezione di ds sul piano P'.

Se ora s' indica con β l'angolo di δs colla linea v, e con α l'angolo di ds colla stessa v, evidentemente le proiezioni di ds e δs su questa linea saranno uguali, e si avrà:

$$ds \cos.\alpha = \delta s \cos.\beta ,$$

e, poichè la (17) dà

$$ds \cos.\alpha = \frac{ds' \cos.\alpha'}{h_2} ,$$

se ne dedurrà per la (19)

$$\alpha' = \beta ;$$

e quindi per questa e per la precedente si concluderà che: *se si fa ruotare il piano P tangente ad S nel punto M attorno alla direzione prin-*

cipale che corrisponde al massimo h_2 *di un angolo* θ, *tale che* $\cos.\theta = \frac{h_1}{h_2}$, *e si proiettano su questo nuovo piano* P' *gli elementi lineari* ds *di* S *uscenti da* M, *le proiezioni ottenute ci daranno nella vera direzione i corrispondenti elementi lineari* ds' *di* S', *e per averli anche in vera grandezza basterà ridurre le proiezioni stesse nel rapporto di* h_2 *all'unità, prendendo sempre per centro di similitudine il punto* M. *Portando allora questo secondo piano* P' *sul piano tangente di* S', *in modo che le direzioni principali coincidano, si avrà su* S' *la rappresentazione di tutti i punti di* S *infinitamente vicini al punto considerato* M.

Questa proprietà singolare che lega così tutte le proiezioni con quelle che conservano gli angoli, fu enunciata dal Tissot (*Comptes rendus*, 1859); e per essa si vede che: *ogni rappresentazione di una superficie su di un'altra può esser rimpiazzata in ogni punto da una proiezione ortogonale fatta ad una scala conveniente.*

12. Mi piace adesso di mostrare come da questa teoria generale della rappresentazione di una superficie sopra un'altra possa facilmente dedursi tutta la teoria della curvatura delle superficie non sviluppabili.

Supponiamo che la superficie S', su cui si fa la rappresentazione, sia una sfera di raggio uno, e la proiezione sia fatta col metodo di Gauss, cioè conducendo pel centro della sfera dei raggi paralleli alle normali (sempre esterne o sempre interne) di S, e considerando come punti corrispondenti i punti di S e S', pei quali le normali sono parallele (*).

(*) Studiando qui la rappresentazione di una superficie sulla sfera di raggio uno, fatta col metodo di Gauss, noi veniamo a studiare le proprietà dei sistemi di rette normali ad una data superficie. Giova notare che pei sistemi di rette più generali (considerati da Kummer e da altri), tali che per ogni punto dello spazio passi una retta del sistema, potrebbe evidentemente farsi uno studio analogo. Se si osserva infatti, che queste rette possono anch'esse considerarsi come emananti dai punti di una superficie S (arbitraria) secondo una certa legge, e se pel centro della sfera di raggio uno si conducono tanti raggi paralleli alle direzioni di quelle rette, e si considerano come corrispondenti i punti di S e della sfera pei quali passano respettivamente una retta del sistema e un raggio della sfera, che hanno la stessa direzione, si viene così ad avere sulla sfera una rappresentazione speciale della superficie S, e insieme di quel sistema di rette; e potrebbe farsi uno studio delle proprietà di questo sistema di rette studiando le proprietà di quella rappresentazione.

Una tale rappresentazione, per le superficie non isviluppabili, sarà del genere di quelle considerate fin'ora, e con essa ci sarà facile di mostrare l'esistenza e le proprietà delle linee di curvatura di ogni superficie.

Osserviamo perciò, prima di tutto, che le linee di curvatura, se esistono, evidentemente saranno tutte e sole quelle le cui tangenti sono parallele alle tangenti alle linee corrispondenti sulla sfera, e dirette nello stesso senso o in senso contrario; quindi, per vedere se esistano, e quali siano queste linee di curvatura, bisognerà cercare le linee di S che, nell'attuale rappresentazione sulla sfera, godono della citata proprietà.

Ora, servendoci dei teoremi precedenti, noi vedremo che in generale queste linee sono due per ogni punto di una superficie, e sono le direzioni principali. Ma per questo premetteremo prima alcune formole della teoria delle coordinate curvilinee su una superficie, che si trovano dimostrate anche nell'eccellente *Traité de calcul différentiel* par M. Bertrand, pag. 799, e che ci giova di dimostrare di nuovo qui.

13. Siano u e v i parametri di due sistemi di linee tracciate su una superficie S; siano x, y, z (funzioni di u e v) le coordinate del punto (u, v); X, Y, Z (funzioni pure di u e v) siano i coseni degli angoli della normale alla superficie nello stesso punto coi tre assi. Avremo le seguenti equazioni:

$$(20) \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} X.\dfrac{dx}{du} + Y.\dfrac{dy}{du} + Z.\dfrac{dz}{du} = 0 \ , \\[2ex] X.\dfrac{dx}{dv} + Y.\dfrac{dy}{dv} + Z.\dfrac{dz}{dv} = 0 \ ; \end{cases}$$

e le altre

$$(21) \ldots\ldots\ldots \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 \ ;$$

$$(22) \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} X.\dfrac{dX}{du} + Y.\dfrac{dY}{du} + Z.\dfrac{dZ}{du} = 0 \ , \\[2ex] X.\dfrac{dX}{dv} + Y.\dfrac{dY}{dv} + Z.\dfrac{dZ}{dv} = 0 \ ; \end{cases}$$

e poichè così si hanno cinque equazioni fra X, Y, Z che non possono essere distinte, poichè sarebbero incompatibili, così, se le (22) sono

distinte, bisognerà che ciascuna delle (20) risulti dalle (22) moltiplicate per dei coefficienti convenienti; e conseguentemente, se le (22) sono distinte, indicando con M, N, M', N' delle funzioni finite di u e v, avremo le seguenti equazioni:

$$(23)\ldots\begin{cases} \dfrac{dx}{du}=M.\dfrac{dX}{du}+N.\dfrac{dX}{dv}, & \dfrac{dx}{dv}=M'.\dfrac{dX}{du}+N'.\dfrac{dX}{dv}, \\ \dfrac{dy}{du}=M.\dfrac{dY}{du}+N.\dfrac{dY}{dv}, & \dfrac{dy}{dv}=M'.\dfrac{dY}{du}+N'.\dfrac{dY}{dv}, \\ \dfrac{dz}{du}=M.\dfrac{dZ}{du}+N.\dfrac{dZ}{dv}, & \dfrac{dz}{dv}=M'.\dfrac{dZ}{du}+N'.\dfrac{dZ}{dv}; \end{cases}$$

e se le (22) non sono distinte, queste equazioni non sussisteranno più, ma questo però avviene soltanto nel caso che qui escludiamo delle superficie sviluppabili, giacchè, evidentemente, se le (22) non sono distinte, si avrà:

$$(23')\ldots\ldots\ldots\ldots\quad \frac{\dfrac{dX}{du}}{\dfrac{dX}{dv}}=\frac{\dfrac{dY}{du}}{\dfrac{dY}{dv}}=\frac{\dfrac{dZ}{du}}{\dfrac{dZ}{dv}},$$

e quindi

$$X=f(Y)=F(Z);$$

ciò che mostra che lungo le linee $X=$ cost. la normale ha una stessa direzione, e quindi la superficie è l'inviluppo di un piano.

Le formole (23) sono quelle di cui avevamo bisogno; con esse torniamo ora al nostro soggetto.

14. Osserviamo dapprima che se si chiamano u e v i parametri delle linee della sfera che corrispondono alle u e v di S, e si riferisce la sfera a tre assi condotti pel suo centro parallelamente a quelli delle x, y, z, evidentemente X, Y, Z saranno le coordinate del punto (u, v) della sfera che corrisponde al punto (u, v) di S; quindi, se si suppone inoltre che le u e v siano appunto le direzioni principali (o due direzioni ortogonali nel caso della similitudine) e si ritengono le denominazioni già usate, si avrà:

$$(24)\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2+\left(\frac{dz}{du}\right)^2=E\,, \\ \frac{dx}{du}\cdot\frac{dx}{d\varphi}+\frac{dy}{du}\cdot\frac{dy}{d\varphi}+\frac{dz}{du}\cdot\frac{dz}{d\varphi}=0\,, \\ \left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2=G\,; \end{cases}$$

$$(25)\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \left(\frac{dX}{du}\right)^2+\left(\frac{dY}{du}\right)^2+\left(\frac{dZ}{du}\right)^2=E'\,, \\ \frac{dX}{du}\cdot\frac{dX}{d\varphi}+\frac{dY}{du}\cdot\frac{dY}{d\varphi}+\frac{dZ}{du}\cdot\frac{dZ}{d\varphi}=0\,, \\ \left(\frac{dX}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dY}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dZ}{d\varphi}\right)^2=G'\,. \end{cases}$$

Ciò posto, cerchiamo quali valori debbano avere M, N, M', N' nelle (23) quando devono essere soddisfatte queste condizioni.

Ricavando dalla (23) il valore di $\Sigma.\frac{dx}{du}\cdot\frac{dx}{d\varphi}$ (*), e avendo riguardo alle condizioni (24) e (25), se ne deduce intanto che dovrà aversi

$$(26)\ldots\ldots\ldots\ldots \quad MM'E'+NN'G'=0\,.$$

Di più, siccome le (20) danno

$$(27)\ldots \quad -\Sigma X.\frac{d^2x}{du\,d\varphi}=\Sigma.\frac{dX}{du}\cdot\frac{dx}{d\varphi}=\Sigma.\frac{dX}{d\varphi}\cdot\frac{dx}{du}\,,$$

così si dovrà anche avere

$$(28)\ldots\ldots\ldots\ldots \quad M'E'=NG'\,.$$

Da queste, poichè E' e G' non possono essere nulli, si ottiene la seguente

(*) Indichiamo in generale, per abbreviare, con $\Sigma f\left(x, X, \frac{dx}{du}, \ldots\right)$ la somma

$$f\left(x, X, \frac{dx}{du}, \ldots\right)+f\left(y, Y, \frac{dy}{du}, \ldots\right)+f\left(z, Z, \frac{dz}{du}, \ldots\right)\,.$$

$$N M' (M + N') = 0 \ ;$$

e quindi se non si avrà

$$M = - N' \ ,$$

per questa e per le precedenti si vede che si dovrà avere

$$N = 0 \ , \qquad M' = 0 \ ;$$

e così resta intanto dimostrato che, per le superficie per le quali non si ha $M = - N'$, colle condizioni che abbiamo poste, le (23) si riducono alle seguenti:

$$(29) \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{dx}{du} = M . \dfrac{dX}{du} \ , & \dfrac{dx}{dv} = N' . \dfrac{dX}{dv} \ , \\ \dfrac{dy}{du} = M . \dfrac{dY}{du} \ , & \dfrac{dy}{dv} = N' . \dfrac{dY}{dv} \ , \\ \dfrac{dz}{du} = M . \dfrac{dZ}{du} \ , & \dfrac{dz}{dv} = N' . \dfrac{dZ}{dv} \ . \end{array} \right.$$

Consideriamo ora il caso di $M = - N'$. In questo caso resta a soddisfarsi alla (28), e poichè le (23) danno (quadrando e sommando):

$$E = M^2 E' + N^2 G' \ , \qquad G = M'^2 E' + M^2 G' \ ,$$

ovvero

$$\frac{E}{E'} = M^2 + N^2 . \frac{G'}{E'} \ , \qquad \frac{G}{G'} = \frac{M'^2 E'}{G'} + M^2 \ ;$$

così per la (28) si ottiene

$$\frac{E}{E'} = \frac{G}{G'} \ ,$$

e di qui si deduce, che in questo caso tutti gli angoli sono conservati nella rappresentazione.

Ciò posto, si consideri una superficie S_1 parallela alla nostra S, cioè tale che le sue equazioni siano

$$x_1 = x + tX\,, \qquad y_1 = y + tY\,, \qquad z_1 = z + tZ\,,$$

essendo t una costante (*).

Ad un punto di S corrisponderà un punto di S_1, quindi vi saranno due sistemi di linee corrispondenti che saranno ortogonali su S_1 e su S, e quindi anche sulla sfera. Siano queste le u e v.

Se per S_1 si hanno le (23), per S si avranno le seguenti:

$$\frac{dx_1}{du} = (M+t).\frac{dX}{du} + N.\frac{dX}{dv}\,, \qquad \frac{dx_1}{dv} = M'.\frac{dX}{du} + (N'+t).\frac{dX}{dv}\,,$$

$$\frac{dy_1}{du} = (M+t).\frac{dY}{du} + N.\frac{dY}{dv}\,, \qquad \frac{dy_1}{dv} = M'.\frac{dY}{du} + (N'+t).\frac{dY}{dv}\,,$$

$$\frac{dz_1}{du} = (M+t).\frac{dZ}{du} + N.\frac{dZ}{dv}\,, \qquad \frac{dz_1}{dv} = M'.\frac{dZ}{du} + (N'+t).\frac{dZ}{dv}\,,$$

e poichè evidentemente è impossibile ora che per S e S_1 sia verificata al tempo stesso la condizione (28), così con queste linee u e v (che certo devono esistere) bisognerà ancora che si abbia:

$$N = 0\,, \qquad M' = 0\,,$$

e quindi anche per S esisteranno due sistemi di linee u e v ortogonali, tali che le equazioni di S siano date dalle (29).

Per ogni superficie non sviluppabile adunque esistono sempre due sistemi di linee ortogonali che si mantengono tali nella rappresentazione sulla sfera, e per le quali si hanno le (29); e non ne esistono che due a meno che non ne esista un numero infinito.

Ora, poichè dalle (29) stesse si ricava

$$(30) \ldots\ldots \quad M = \pm\sqrt{\frac{E}{E'}}\,, \qquad N' = \pm\sqrt{\frac{G}{G'}}\,,$$

così si avranno le seguenti:

(*) È noto che questa superficie S_1 ha le stesse normali che S, e ciò d'altra parte risulta subito dall'aversi

$$X\,dx_1 + Y\,dy_1 + Z\,dz_1 = 0\,.$$

$$\frac{dx}{\sqrt{E}\,du}=\pm\frac{dX}{\sqrt{E'}\,du}\,,\quad \frac{dy}{\sqrt{E}\,du}=\pm\frac{dY}{\sqrt{E'}\,du}\,,\quad \frac{dz}{\sqrt{E}\,du}=\pm\frac{dZ}{\sqrt{E'}\,du}\,;$$

$$\frac{dx}{\sqrt{G}\,dv}=\pm\frac{dX}{\sqrt{G'}\,dv}\,,\quad \frac{dy}{\sqrt{G}\,dv}=\pm\frac{dY}{\sqrt{G'}\,dv}\,,\quad \frac{dz}{\sqrt{G}\,dv}=\pm\frac{dZ}{\sqrt{G'}\,dv}\,;$$

le quali ci mostrano che le tangenti alle linee u e v sulla superficie e nella sua rappresentazione sono parallele, e quindi queste linee sono di curvatura. D'altra parte, avendo riguardo alla formola (12) e al teorema del § 5, si vede che qualunque siano i segni di M e N', non esistono altre linee di curvatura a meno che fra S e la sfera non si abbia similitudine diretta nelle parti infinitesime; quindi, osservando che questo accade soltanto nei punti pei quali si ha $M=N'$ (*), se ne concluderà che: *eccettuando i punti singolari pei quali $M=N'$, per ogni punto di una superficie passano sempre due e due sole linee di curvatura, e queste sono inoltre ortogonali.*

Osservando che per le (30) M ed N' sono uguali rispettivamente a $\pm\frac{ds_v}{ds'_v}$, $\pm\frac{ds_u}{ds'_u}$, si conclude che i valori assoluti di M ed N' sono appunto le lunghezze dei raggi di curvatura delle sezioni normali tangenti alle linee di curvatura v ed u, o, come si dice, dei *raggi di curvatura principali;* e in quanto ai segni, se si conviene di dare ai raggi di curvatura lo stesso segno quando i corrispondenti centri di curvatura sono situati sulla stessa parte della normale rispetto alla superficie, e segno contrario nel caso opposto, allora evidentemente (scegliendo convenientemente la direzione positiva della normale) si potrà dire che M ed N' rappresentano in valore ed in segno i raggi di curvatura principali, e quindi, chiamando r_2 e r_1 questi raggi, si avrà:

(*) Per $M=N'$ si ha similitudine diretta, e nei punti corrispondenti passano infinite linee di curvatura (*ombilichi*). Per $M=-N'$ si ha una similitudine soltanto inversa, quindi sono conservati gli angoli, ma non tutte le direzioni, ed esistono ancora due sole linee di curvatura. Osservando che N' ed M rappresentano appunto i raggi di curvatura r_1 e r_2 della superficie, si vede che questa circostanza si verifica in tutti i punti per le superficie per le quali $r_1+r_2=0$, cioè per le superficie di area minima; quindi si conclude che: *quando si rappresenta col metodo di* GAUSS *una superficie di area minima sulla sfera, la rappresentazione nelle parti infinitesime è simile inversamente alla figura rappresentata.* Questa osservazione tornerà utile più oltre.

$$(31)\ldots\quad N'=r_1=\pm\sqrt{\frac{G}{G'}}=\pm\frac{1}{h_1}\,,\qquad M=r_2=\pm\sqrt{\frac{E'}{E}}=\pm\frac{1}{h_2}\,,$$

$$(32)\ldots\ldots\ldots\ldots\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{dx}{du}=r_2.\dfrac{dX}{du}\,, & \dfrac{dx}{dv}=r_1.\dfrac{dX}{dv}\,,\\[2ex] \dfrac{dy}{du}=r_2.\dfrac{dY}{du}\,, & \dfrac{dy}{dv}=r_2.\dfrac{dY}{dv}\,,\\[2ex] \dfrac{dz}{du}=r_2.\dfrac{dZ}{du}\,, & \dfrac{dz}{dv}=r_2.\dfrac{dZ}{dv}\,,\end{array}\right.$$

quando le u e v sono linee di curvatura, e che la superficie non è sviluppabile (*).

15. Affinchè questa teoria sia completa, conviene ora dimostrare che anche nelle sviluppabili esistono sempre due linee di curvatura che sono inoltre ortogonali.

Ora, questo potrebbe dimostrarsi subito geometricamente, ma può anche dimostrarsi con una via analoga a quella tenuta precedentemente.

Osserviamo infatti dapprima che in questo caso le (22) riducendosi a una sola, che deve essere conseguenza delle (20), se si suppone che le linee v non siano le generatrici, e che quindi $\frac{dX}{du}$, $\frac{dY}{du}$, $\frac{dZ}{du}$ non siano nulli, si vede che la prima delle (22) deve risultare dalle (20); e quindi, indicando con M, M_1, N delle funzioni di u e v, si avranno le equazioni seguenti:

$$(33)\ldots\ldots\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}M.\dfrac{dx}{du}+M_1.\dfrac{dx}{dv}+N.\dfrac{dX}{du}=0\,,\\[2ex] M.\dfrac{dy}{du}+M_1.\dfrac{dy}{dv}+N.\dfrac{dY}{du}=0\,,\\[2ex] M.\dfrac{dz}{du}+M_1.\dfrac{dz}{dv}+N.\dfrac{dZ}{du}=0\,,\end{array}\right.$$

(*) Infatti, se i raggi di curvatura r_1 e r_2 hanno lo stesso segno, le linee sferiche corrispondenti alle linee u e v di S hanno la stessa direzione di queste linee, mentre, se r_1 e r_2 sono di segno contrario, le linee che sulla sfera corrispondono alle u e v di S hanno una la stessa direzione che su S, l'altra una direzione parallela ma opposta, e quindi M ed N sono di segno contrario.

le quali si verificano per tutti i punti di una sviluppabile, e qualunque siano le u e v, purchè le $v =$ cost. non siano le generatrici.

Ciò posto, suppongasi che le $u =$ cost. siano le generatrici, e le $v =$ cost. il sistema delle loro traiettorie ortogonali; ne verrà:

$$(34) \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \Sigma . \frac{dx}{du} \cdot \frac{dx}{dv} = 0 \ ;$$

e quindi

$$M_1 G + N \Sigma . \frac{dX}{du} \cdot \frac{dx}{dv} = 0 \ .$$

Ma essendo X, Y, Z funzioni di u soltanto, si ha

$$(35) \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \Sigma . \frac{dX}{dv} \cdot \frac{dx}{du} = 0 \ ,$$

e quindi per la (27) anche

$$(36) \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \Sigma . \frac{dX}{du} \cdot \frac{dx}{dv} = 0 \ ;$$

conseguentemente si avrà $M_1 = 0$, e quindi, ponendo $-\frac{N}{M} = N_1$, le (33) si ridurranno alle seguenti:

$$\frac{dx}{du} = N_1 . \frac{dX}{du} \ , \qquad \frac{dy}{du} = N_1 . \frac{dY}{du} \ , \qquad \frac{dz}{du} = N_1 . \frac{dZ}{du} \ ,$$

che coincidono colle prime tre delle (29), e mostrano che la linea sferica che rappresenta la sviluppabile ha le tangenti parallele a quelle delle linee $v =$ cost., e quindi queste linee sono di curvatura, ed oltre alle generatrici (che lo sono pure) non ve ne possono essere altre. Così il teorema sulle linee di curvatura resta dimostrato anche per le sviluppabili, quando se ne escluda il piano pel quale ogni linea è di curvatura (*).

(*) Supponendo che v sia la lunghezza di una generatrice della sviluppabile contata da una traiettoria ortogonale delle generatrici stesse, si ha:

$$ds^2 = dv^2 + t^2 du^2 \ ,$$

16. Per ciò che precede resta dunque dimostrato che, per ogni punto di una superficie passano sempre due e due sole linee di curvatura in ogni punto, a meno che non si abbia in quel punto $r_1 = r_2$, nel qual caso tutte le linee condotte per esso sulla superficie sono di curvatura. Fra le superficie sviluppabili evidentemente il piano è la sola superficie per la quale questa circostanza si verifica in ogni punto; fra le non sviluppabili vi è la sfera, e, come venne dimostrato da Monge, non vi è che questa superficie.

Monge dedusse questo teorema dalla integrazione dell'equazione a derivate parziali delle superficie $r_1 = r_2$; qui possiamo dedurlo subito dalle formole (32) nel modo seguente.

Supponendo $r_1 = r_2 = r$, e moltiplicando le prime tre delle equazioni (32) per du e le altre per dv, e sommando le equazioni corrispondenti si otterrà:

$$dx = r dX , \qquad dy = r dY , \qquad dz = r dZ ,$$

qualunque siano du e dv.

Da queste osservando che i primi membri sono differenziali esatti, e che quindi anche i secondi devono esserlo, se ne conclude che dovrà aversi

$$r = F(X) = \psi(Y) = \varphi(Z) ,$$

e questa condizione (come già abbiam visto al § 13) non può verificarsi che pei punti di una sviluppabile, a meno che r non sia costante.

Dopo questa condizione integrando se ne deduce subito

---

essendo $t = U\delta$, ove U è una funzione di u, e δ la distanza del punto (u, v) dallo spigolo di regresso sulla stessa generatrice.

Ora, poichè dalle prime tre delle (32) (che ora abbiamo visto sussistere anche per le sviluppabili) si ha:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = r_2^2 E' ,$$

essendo E' una funzione di u soltanto, se ne conclude che $r_2 = U_1 \delta$, e quindi, poichè U_1 è costante lungo le generatrici, si ha di qui il teorema che: *nelle sviluppabili lungo una stessa generatrice, il raggio di curvatura varia proporzionalmente alla distanza del punto che si considera dal punto corrispondente dello spigolo di regresso sulla stessa generatrice.*

$$x = rX + c \;, \qquad y = rY + c' \;, \qquad z = rZ + c'' \;,$$

ove c, c', c'' sono costanti arbitrarie; e da queste si ottiene

$$(x-c)^2 + (y-c')^2 + (z-c'')^2 = r^2 \;,$$

che è la equazione di una sfera.

Così resta dimostrato che *la sfera è la sola superficie le cui linee di curvatura siano indeterminate, ed è la sola superficie nella quale i raggi di curvatura principali siano uguali in ogni punto.* Fra le sfere nell'enunciato di questo teorema s'intende compreso anche il piano.

17. Continuiamo questi studi sulle linee di curvatura.

Le (32) ci danno lungo una stessa linea di curvatura le equazioni

$$dx = r\,dX \;, \qquad dy = r\,dY \;, \qquad dz = r\,dZ \;,$$

ovvero

$$(37) \ldots\ldots\ldots \qquad \frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dy} = \frac{dZ}{dz} \;,$$

e si hanno così le formole di Rodrigues per rappresentare le linee di curvatura di una superficie qualunque anche sviluppabile.

Dalle (32) stesse si deduce

$$\Sigma . \frac{dX}{du} \cdot \frac{dx}{dv} = \Sigma . \frac{dX}{dv} \cdot \frac{dx}{du} = 0 \;;$$

quando le linee u e v sono linee di curvatura ed anche se la superficie è sviluppabile (§ 15).

Conseguentemente per le (27) si avrà

$$\Sigma X . \frac{d^2 x}{du\,dv} = 0 \;,$$

e poichè se si pone con Gauss

$$A = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dz}{du} - \frac{dy}{du} \cdot \frac{dz}{dv} \;, \qquad B = \frac{dz}{dv} \cdot \frac{dx}{du} - \frac{dz}{du} \cdot \frac{dx}{dv} \;,$$

$$C = \frac{dx}{dv} \cdot \frac{dy}{du} - \frac{dx}{du} \cdot \frac{dy}{dv} \;,$$

si ha per le (20) e (21)

$$X=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,\quad Y=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,\quad Z=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,;$$

così se ne concluderà con JOACHIMSTAL (Crelle 1846) che: *se le linee u e v di una superficie sono le sue linee di curvatura si avranno le due equazioni*

$$(38)\ \ldots\ldots\ldots\ \begin{cases} \dfrac{dx}{du}\cdot\dfrac{dx}{dv}+\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{dy}{dv}+\dfrac{dz}{du}\cdot\dfrac{dz}{dv}=0\,, \\[2ex] A.\dfrac{d^2x}{du\,dv}+B.\dfrac{d^2y}{du\,dv}+C.\dfrac{d^2z}{du\,dv}=0\,, \end{cases}$$

la seconda delle quali è un determinante (*).

(*) È facile vedere che queste equazioni sono caratteristiche delle linee di curvatura. Osserviamo infatti che per le (27) la seconda delle condizioni (38) equivale alle due

$$\Sigma.\frac{dX}{dv}\cdot\frac{dx}{du}=0\,,\qquad \Sigma.\frac{dX}{du}\cdot\frac{dx}{dv}=0\,,$$

ovvero, per le (23), se la superficie non è sviluppabile,

$$(\mathbf{a})\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \begin{cases} M'E'+N'F'=0\,, \\ M\,F'+N\,G'=0\,, \end{cases}$$

ponendo

$$F'=\Sigma.\frac{dX}{du}\cdot\frac{dX}{dv}\,.$$

La prima delle (38) poi equivale all'altra

$$MM'E'+NN'G'+MN'F'+M'NF'=0\,,$$

che per la prima delle (**a**) diviene

$$(\mathbf{b})\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ M'NF'+NN'G'=0\,;$$

e, unita alle (**b**) stesse, mostra che deve aversi

$$\begin{vmatrix} 0 & M & N \\ M' & N' & 0 \\ 0 & M'N & NN' \end{vmatrix}=0\,,\qquad \text{ovvero}\qquad M'N(MN'-M'N)=0\,.$$

Ma può dimostrarsi (V. BERTRAND, l. c.) che

$$r_1 r_2=MN'-M'N'\,,$$

quindi, affinchè la precedente sia soddisfatta, non potrà aversi che $M'=0$, o $N=0$, e poichè per le (**a**) e (**b**) stesse l'una di queste condizioni porta subito l'altra, ne segue che si avranno le (29), e quindi le linee u e v saranno appunto le linee di curvatura.

Nel caso poi che la superficie sia sviluppabile supponendo che delle u e v le v non siano le generatrici, si avranno le (33), e poichè le equazioni (38) corrispondono appunto alle (34), (35) e (36), ne verrà $M_1=0$, e le u e v saranno ancora le linee di curvatura.

18. Troviamo adesso le formole che danno la distribuzione delle normali di una superficie intorno ad un punto ed il raggio di curvatura di una sezione normale.

Osserviamo perciò prima di tutto che la proiezione che ora consideriamo della superficie sulla sfera possiamo farla anche nel caso di una sviluppabile; in questo caso la rappresentazione si ridurrà ad una linea le cui tangenti saranno parallele a quelle delle traiettorie ortogonali delle generatrici della superficie, e supponendo sempre che le u e v sieno le generatrici e le loro traiettorie ortogonali, le formole che abbiamo dato al § 11 sussistono anche in questo caso quando si faccia $\alpha' = 0$, $h_1 = 0$: quindi ciò che ora diremo varrà anche per le sviluppabili quando si faccia $r_1 = \infty$.

Ciò posto, osserviamo che se s' indica al solito con ds' l'arco sferico che corrisponde a ds, ds' sarà l'angolo delle normali alla superficie alla estremità di ds; quindi chiamandolo η, e osservando alle (31), dalle (18) si avrà subito la formola

$$(39) \ldots\ldots\ldots \qquad \eta = ds . \sqrt{\frac{\text{sen.}^2 \alpha}{r_1^2} + \frac{\cos.^2 \alpha}{r_2^2}} ,$$

che è una formola nota dovuta al Bonnet.

Se $r_1 = \pm r_2$, si ha di qui

$$(40) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \eta = \frac{ds}{r_1} .$$

19. Troviamo adesso l'espressione dell'angolo θ che la normale in un punto m infinitamente vicino al punto considerato M fa col piano della sezione normale in M che passa pel punto m.

Sia $Mm = ds$, e siano Mz, mz_1 le normali alla superficie in M e m. Sia $M'm' = ds'$ la linea che sulla sfera corrisponde a ds. Siano α e α' gli angoli di ds e ds' colla direzione principale v. Se la superficie è convessa, le direzioni principali sulla superficie S e sulla sfera, avranno le tangenti parallele e nello stesso senso, e quindi $\alpha' - \alpha$ sarà l'angolo del piano normale mMz col piano parallelo alle normali Mz, mz_1. Se la

superficie non è convessa, soltanto due direzioni principali avranno le tangenti parallele e nello stesso senso, e se si suppone che queste siano le v, l'angolo del piano mMz col piano delle due normali sarà $\alpha' + \alpha$.

L'angolo θ che noi cerchiamo verrà dunque misurato dal lato di un triangolo rettangolo sensibilmente piano, di cui ds' è l'ipotenusa, e $\alpha' \mp \alpha$ è l'angolo opposto a θ; quindi si avrà:

$$(41) \ldots\ldots\ldots \qquad \theta = ds' \operatorname{sen.}(\alpha' \mp \alpha) ,$$

ovvero

$$\theta = ds' (\operatorname{sen.}\alpha'. \cos.\alpha \mp \cos.\alpha'. \operatorname{sen.}\alpha) ;$$

e poichè dalla (17) si ha

$$ds' = h_2 . \frac{ds \cos.\alpha}{\cos.\alpha'} ;$$

così si avrà:

$$\theta = ds \left\{ h_2 \, tg\, \alpha'. \cos.^2\alpha \mp h_2 \cos.\alpha. \operatorname{sen.}\alpha \right\} ,$$

e, per la (12),

$$\theta = ds \operatorname{sen.}\alpha. \cos.\alpha (h_1 \mp h_2) ,$$

ovvero

$$(42) \ldots \quad \theta = ds \operatorname{sen.}\alpha. \cos.\alpha. \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{2} ds \operatorname{sen.} 2\alpha. \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) ,$$

ove r_1 e r_2 sono i raggi di curvatura principali che devono essere presi coi loro segni.

Questa formola è dovuta a Bertrand.

Per due direzioni ortogonali ds e ds_1 essa dà, come è noto:

$$\frac{\theta}{ds} + \frac{\theta_1}{ds_1} = 0 ,$$

e quindi chiamando, con Bonnet, la quantità $\frac{\theta}{ds}$ *torsione geodetica* della linea Mm al punto M, e θ l'angolo di torsione geodetica della stessa linea, si potrà dire che *le torsioni geodetiche di due linee ortogonali su una superficie sono uguali e di segno contrario.*

Notiamo ancora che chiamando ε l'angolo $\alpha' \mp \alpha$ del piano normale mMz con un piano parallelo alle due normali ai punti M e m, si ha dalla (41):

$$\text{sen.}\,\varepsilon = \frac{\theta}{ds'},$$

e quindi

$$\text{sen.}\,\varepsilon = \frac{1}{2}\cdot\frac{ds}{ds'}\cdot\text{sen.}\,2\alpha\cdot\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right),$$

e, per la (39):

$$(43)\ldots\ldots\ldots\quad \text{sen.}\,\varepsilon = \frac{\text{sen.}\,2\alpha\,(r_2-r_1)}{2\,.\sqrt{r_1^2\cos.^2\alpha + r_2^2\,\text{sen.}^2\alpha}};$$

e se $r_1 = -r_2$, cioè per le superficie di area minima, si avrà

$$\varepsilon = 2\alpha,$$

come doveva essere.

20. Passiamo adesso a trovare la formola che dà il raggio di curvatura r di una sezione normale qualunque.

Siano perciò, come precedentemente, Mz e mz_1 le normali alla superficie nei punti M ed m infinitamente vicini, e sia mN la normale al punto m della sezione Mmz normale nel punto M. Sia $d\omega$ l'angolo di Mz con mN; $d\omega$ sarà l'angolo di contingenza della stessa sezione normale nel punto M.

Pel centro O della nostra sfera di raggio uno si conducano tre rette OM', Om', Om_1' parallele alle tre normali Mz, mz_1, mN; si formerà così un triangolo $m'M'm_1'$ nel quale si avrà

$$M'm_1' = d\omega\,,\qquad M'm' = ds'\,,\qquad m_1'M'm_1' = \alpha' \mp \alpha\,,$$

e poichè la normale mN al punto m della sezione normale è la proiezione di mz_1 sul piano di questa sezione, così si avrà $m'm_1' = \theta$, e il triangolo $m'M'm_1'$ sarà rettangolo in m_1'. Conseguentemente si avrà

$$ds'^2 = d\omega^2 + \theta^2,$$

e quindi sarà

$$\left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2 = \left(\frac{ds'}{ds}\right)^2 - \frac{\theta^2}{ds^2} = \frac{\text{sen.}^2\alpha}{r_1^{\,2}} + \frac{\cos.^2\alpha}{r_2^{\,2}} - \text{sen.}^2\alpha\cos.^2\alpha.\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^2$$

$$= \frac{\text{sen.}^4\alpha}{r_1^{\,2}} + \frac{\cos.^4\alpha}{r_2^{\,2}} + \frac{2\,\text{sen.}^2\alpha.\cos.^2\alpha}{r_1\,r_2}\,;$$

e da questa si trarrà

$$(44)\ \ldots\ldots\ldots \qquad \frac{1}{r} = \frac{\text{sen.}^2\alpha}{r_1} + \frac{\cos.^2\alpha}{r_2}\,,$$

che è la nota formola di Eulero che dà i raggi di curvatura di una sezione normale qualunque in funzione dei raggi di curvatura principali.

Da questa formola si deducono, come è noto, molte proprietà dei raggi di curvatura delle sezioni normali attorno a un punto di una superficie, e, fra le altre, se ne deduce l'esistenza di una indicatrice di secondo grado (indicatrice di Dupin) per le radici quadrate dei valori assoluti dei raggi di curvatura delle stesse sezioni normali. Questa indicatrice per le superficie convesse è una ellisse ai cui assi possono ridursi uguali quelli della iperbola indicatrice delle direzioni che conservano gli angoli (§ 6) quando si fa la solita proiezione della superficie sulla sfera; per le superficie a curvature opposte poi queste due indicatrici possono farsi coincidere, e quindi si vede che *nella rappresentazione di* Gauss *delle superficie a curvature opposte sulla sfera, le direzioni che conservano gli angoli sono quelle che diconsi a tangenti coniugate*, e le linee le cui direzioni rispetto alle linee principali subiscono la massima deviazione sono quelle le cui sezioni normali tangenti hanno un raggio di curvatura infinito, cioè sono le *asintotiche*.

21. Così sono trovate tutte le formole della curvatura delle superficie. Adesso, servendoci sempre della rappresentazione sulla sfera, daremo qui una formola che condurrà subito ai teoremi snlle linee di curvatura comuni a più superficie.

Supponiamo che due superficie qualunque S e S_1 si taglino secondo una linea L, e escludiamo dapprima il caso che una di queste superficie sia piana, o che essendo sviluppabile, L sia una generatrice di essa. Sia ω

l'angolo, che potrà variare da punto a punto, sotto cui le superficie S e S_1 si tagliano; siano θ e θ_1 gli angoli di torsione geodetica di L su queste due superficie, e sia $Mm = ds$ un elemento di L. Siano poi $M'm' = ds'$, $M_1'm_1' = ds_1'$ gli elementi della sfera che corrispondono a ds quando si fa la rappresentazione di S e S_1.

Pei punti M', M_1' della sfera e pel centro O di essa si conducano due piani perpendicolari al piano $OM'M_1'$ che è parallelo a quello delle normali in M alle due superficie. Questi due piani saranno paralleli ai piani delle sezioni normali di S e S_1 tangenti ad L, e intersecheranno la sfera secondo due linee $M'n'$, $M_1'n_1'$ perpendicolari all'arco $M'M_1'$ di circolo massimo, e, trascurando gl'infinitesimi del second'ordine, queste linee si potranno risguardare come confuse cogli archi di parallelo relativi al polo p d'intersezione dei due piani $OM'M_1'$, $Om'm_1'$ paralleli alle due normali in M e m. Inoltre gli archi $m'n'$, $m_1'n_1'$, trascurando sempre gli infinitesimi di ordine superiore al primo, saranno uguali rispettivamente a θ e θ_1.

Conseguentemente si avrà

$$nm_1' = \omega + \theta' = \theta_1 + \omega + d\omega \ ,$$

e quindi

$$(45) \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \theta_1 = \theta + d\omega \ ;$$

e questa è la formola cercata nel caso che abbiamo considerato.

Questa formola sussiste pure quando una delle superficie S e S_1 è un piano, e quando una o tutte e due di esse essendo sviluppabili, la linea d'intersezione L è una generatrice.

Nell'ultimo caso infatti la cosa è evidente poichè si ha $\theta = \theta_1 = d\omega = 0$; e negli altri due si vede che, se S_1 è la superficie piana o sviluppabile, ad L nella rappresentazione di S_1 le corrisponderà sulla sfera un punto P, e nella rappresentazione di S un arco $M'm' = ds'$, e si vede subito che si avrà la formola

$$\theta = d\omega \ ,$$

che combina colla formola precedente, poichè in questo caso $\theta_1 = 0$.

La formola (45) è vera dunque in generale, e quindi si può dire che: *quando due superficie si tagliano, la differenza fra gli angoli di torsione geodetica della loro linea d'intersezione sulle due superficie è eguale alla variazione dell'angolo secondo cui le due superficie si tagliano.*

22. Come abbiamo detto, la formola (45) conduce a tutti i teoremi sulle linee di curvatura comuni a due superficie.

Supponendo dapprima $\omega = \text{cost.}$, si deduce da essa

$$\theta = \theta_1 ,$$

e quindi se ne conclude che: *se due superficie si tagliano sotto angoli costanti, le torsioni geodetiche della linea d' intersezione sono uguali per le due superficie.*

Di qui risulta subito il teorema di Dupin, il quale ci dice che: *se tre sistemi di superficie si tagliano in ogni punto ad angolo retto, le linee d' intersezione di questa superficie saranno le loro linee di curvatura.*

Sia infatti M un punto dell' intersezione; $M\xi$, $M\eta$, $M\zeta$ le tangenti (ortogonali) alle linee d' intersezione. Queste superficie tagliandosi in ogni punto ad angolo retto, pel teorema precedente, le torsioni geodetiche di una stessa linea saranno uguali sulle due superficie cui essa appartiene. Inoltre queste intersezioni essendo ortogonali si avrà (§ 19):

$$\theta_\xi + \theta_\eta = 0 , \qquad \theta_\eta + \theta_\zeta = 0 , \qquad \theta_\zeta + \theta_\xi = 0 ;$$

e da queste si dedurranno le altre

$$\theta_\xi = 0 , \qquad \theta_\eta = 0 , \qquad \theta_\zeta = 0 ,$$

le quali dimostrano il teorema.

23. Osservando che se delle tre quantità θ, θ_1, $d\omega$ due sono nulle, la terza lo è pure per la (45) stessa, se ne conclude che: *se due superficie si tagliano sotto un angolo costante e la linea d' intersezione è linea di curvatura di una di queste superficie, essa lo sarà pure dell'altra.*

E reciprocamente: *se due superficie s' incontrano secondo una loro linea di curvatura, esse si taglieranno sotto un angolo costante.*

In particolare, siccome sul piano e sulla sfera tutte le linee sono di curvatura, si può dire che: *se un piano o una sfera tagliano una superficie sotto un angolo costante, la linea d' intersezione sarà linea di curvatura della medesima superficie, e quindi essa sarà piana o sferica.*

E reciprocamente: *se una superficie ha una linea di curvatura piana o sferica, l'angolo sotto cui essa sarà tagliata dal piano o dalla sfera cui appartiene quella linea, sarà costante.*

Se una linea di curvatura di una superficie è piana, e ω è l'angolo costante sotto cui il suo piano taglia la superficie, la sua rappresentazione sferica sarà evidentemente il circolo che è parallelo di colatitudine ω rispetto al punto P che rappresenta il piano. Se una superficie ha tutte le sue linee di curvatura piane, le loro rappresentazioni sferiche saranno due sistemi di circonferenze ortogonali che, come vedremo e come è noto, sono anche isotermi.

La rappresentazione di una sviluppabile sulla sfera riducendosi ad una linea le cui tangenti sono parallele a quelle delle linee di curvatura traiettorie ortogonali delle generatrici, si vede subito di qui che se in queste superficie una di queste linee di curvatura è piana, tutte le altre pure lo saranno, e saranno tutte situate in piani paralleli; le generatrici poi faranno evidentemente un angolo costante con questi piani, e quindi lo spigolo di regresso sarà una elica appartenente ad un cilindro avente le generatrici perpendicolari al piano delle linee di curvatura. Da ciò risulta che: *le superficie sviluppabili a linee di curvatura piane sono gli elicoidi, e reciprocamente*, giacchè evidentemente le linee sviluppate di un'elica (che sono le linee di curvatura di un elicoide sviluppabile) per la definizione della elica sono curve piane e situate in piani normali alle generatrici del cilindro cui appartiene l'elica.

Questo teorema è dovuto a Joachimstal.

24. Riprendendo adesso le equazioni (32), sarà facile dedurne alcune formole che conducono a molti altri teoremi.

Dalle (32) infatti si deducono colla derivazione le seguenti:

$$(46)\ldots\ldots\begin{cases}(r_1-r_2).\dfrac{d^2X}{du\,dv}+\dfrac{dr_1}{du}.\dfrac{dX}{dv}-\dfrac{dr_2}{dv}.\dfrac{dX}{du}=0\,,\\[2ex](r_1-r_2).\dfrac{d^2Y}{du\,dv}+\dfrac{dr_1}{du}.\dfrac{dY}{dv}-\dfrac{dr_2}{dv}.\dfrac{dY}{du}=0\,,\\[2ex](r_1-r_2).\dfrac{d^2Z}{du\,dv}+\dfrac{dr_2}{du}.\dfrac{dZ}{dv}-\dfrac{dr_2}{dv}.\dfrac{dZ}{du}=0\,;\end{cases}$$

$$(47)\ldots\ldots\begin{cases}\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right).\dfrac{d^2x}{du\,dv}+\dfrac{d\frac{1}{r_1}}{du}.\dfrac{dx}{dv}-\dfrac{d\frac{1}{r_2}}{dv}.\dfrac{dx}{du}=0\,,\\[2ex]\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right).\dfrac{d^2y}{du\,dv}+\dfrac{d\frac{1}{r_1}}{du}.\dfrac{dy}{dv}-\dfrac{d\frac{1}{r_2}}{dv}.\dfrac{dy}{du}=0\,,\\[2ex]\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right).\dfrac{d^2z}{du\,dv}+\dfrac{d\frac{1}{r_1}}{du}.\dfrac{dz}{dv}-\dfrac{d\frac{1}{r_2}}{dv}.\dfrac{dz}{du}=0\,.\end{cases}$$

Moltiplicando le equazioni (46) una volta per $\frac{dX}{du}$, $\frac{dY}{du}$, $\frac{dZ}{du}$, e un'altra per $\frac{dX}{dv}$, $\frac{dY}{dv}$, $\frac{dZ}{dv}$, e sommando ogni volta, coll'avere riguardo alle relazioni (24) e (25), nelle quali E' e G' hanno ancora gli stessi significati, si otterranno le equazioni seguenti:

$$\frac{1}{2}(r_1-r_2).\frac{dE'}{dv}-E'.\frac{dr_2}{dv}=0\,,\qquad \frac{1}{2}(r_1-r_2).\frac{dG'}{du}+G'.\frac{dr_2}{du}=0\,.$$

Operando analogamente sulle (47), si troveranno le altre

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right).\frac{dE}{dv}-E.\frac{d\frac{1}{r_2}}{dv}=0\,,\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right).\frac{dG}{du}+G.\frac{d\frac{1}{r_1}}{du}=0\,;$$

e questi due sistemi di equazioni potranno anche porsi sotto la forma seguente:

$$(48) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} (r_1 - r_2) \cdot \dfrac{d \log. \sqrt{E'}}{d v} - \dfrac{d r_2}{d v} = 0 \,, \\[2ex] (r_1 - r_2) \cdot \dfrac{d \log. \sqrt{G'}}{d u} + \dfrac{d r_1}{d u} = 0 \,; \end{cases}$$

$$(49) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} \left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right) \cdot \dfrac{d \log. \sqrt{E}}{d v} - \dfrac{d \dfrac{1}{r_2}}{d v} = 0 \,, \\[2ex] \left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right) \cdot \dfrac{d \log. \sqrt{G}}{d u} + \dfrac{d \dfrac{1}{r_1}}{d u} = 0 \,. \end{cases}$$

Questi sistemi di equazioni sono le formole cercate. Di essi (come dei due precedenti) il secondo si deduce dal primo sostituendo ai raggi di curvatura r_1, r_2 le loro inverse, e ai coefficienti E', G' dell'elemento lineare sferico quelli E, G dell'elemento lineare della superficie. L'uno di questi sistemi però è conseguenza dell'altro per le (31).

25. Le equazioni ora trovate conducono a moltissimi teoremi.

Osserviamo dapprima che se $r_2 = \varphi(u)$ per le formole precedenti, si vede che si avrà $E = \psi(u)$ o $r_1 = r_2$ e viceversa; e poichè l'essere $E = \psi(u)$ porta che le linee $v =$ cost. sono geodetiche, così se ne conclude che: *escludendo la sfera, le superficie nelle quali un raggio di curvatura di un sistema è costante lungo le linee di curvatura dell'altro sistema, sono tutte e sole quelle nelle quali le linee di curvatura del primo di questi sistemi sono geodetiche.*

Supponendo anche $r_1 = \varphi_1(v)$, ne verrebbe $r_1 = r_2$ o $G = \psi_1(v)$, e poichè le condizioni $E = \psi(u)$, $G = \psi_1(v)$ non possono verificarsi che per una sviluppabile, così se ne conclude che: *esclusa la sfera, non esistono superficie non sviluppabili nelle quali i raggi di curvatura di ciascun sistema siano rispettivamente costanti lungo le linee di curvatura dell'altro sistema.*

In particolare si ha subito di qui il teorema di Bertrand che: *la sfera è la sola superficie nella quale i due raggi di curvatura siano costanti.*

26. Le equazioni (49) conducono subito a trovare una relazione notevole fra i raggi di curvatura caratteristica delle superficie nelle quali le linee di curvatura formano un doppio sistema isotermo.

Osserviamo infatti che le (49), derivando e sottraendo, danno

$$\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\cdot\left\{\frac{d^2\log.\sqrt{E}}{du\,dv}-\frac{d^2\log.\sqrt{G}}{du\,dv}\right\}+\frac{d^2\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)}{du\,dv}$$
$$-\frac{d\log.\sqrt{E}}{dv}\cdot\frac{d}{du}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)+\frac{d\log.\sqrt{G}}{du}\cdot\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=0\ ;$$

e per le (49) stesse, sostituendo per $\frac{d\log.\sqrt{E}}{dv}$ e $\frac{d\log.\sqrt{G}}{du}$ i loro valori, e riducendo, si otterrà la seguente:

$$\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)^2\cdot\left\{\frac{d^2\log.\sqrt{E}}{du\,dv}-\frac{d^2\log.\sqrt{G}}{du\,dv}\right\}+\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\cdot\frac{d^2\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)}{du\,dv}$$
$$+\frac{d\frac{1}{r_2}}{du}\cdot\frac{d\frac{1}{r_2}}{dv}-\frac{d\frac{1}{r_1}}{du}\cdot\frac{d\frac{1}{r_1}}{dv}=0\ .$$

Ora, supponendo che le linee u e v siano anche isoterme, e che quindi si abbia

$$E=\lambda U\ ,\qquad G=\lambda V\ ,$$

ove U è una funzione di u, e V una funzione di v, si ha di qui la seguente:

$$(50)\ldots\quad\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\cdot\frac{d^2\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)}{du\,dv}+\frac{d\frac{1}{r_2}}{du}\cdot\frac{d\frac{1}{r_2}}{dv}-\frac{d\frac{1}{r_1}}{du}\cdot\frac{d\frac{1}{r_1}}{dv}=0\ ,$$

che è la relazione cercata e che è inoltre caratteristica per le superficie nelle quali le u e v sono linee di curvatura e sono isoterme, giacchè se essa è soddisfatta, per la precedente ne verrà

$$\frac{d^2 \log. \sqrt{E}}{du\,dv} - \frac{d^2 \log. \sqrt{G}}{du\,dv} = 0 \,,$$

e quindi sarà $E = G.\frac{U}{V}$, ovvero $E = \lambda U$, $G = \lambda V$.

Supponendo $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \text{cost.}$, la relazione precedente è subito soddisfatta, e quindi per essa si conclude che: *Le superficie di curvatura media costante costituiscono una classe di superficie nelle quali le linee di curvatura formano un doppio sistema isotermo.*

Osservando che nelle superficie a centro di secondo ordine le linee di curvatura sono isoterme, e i parametri delle coordinate ellittiche determinano appunto queste linee, evidentemente si potrà dire anche che: *nelle superficie a centro del second'ordine in coordinate ellittiche i raggi di curvatura soddisfanno alla relazione precedente* (50).

27. Siccome le (48) risultano dalle (49) sostituendo ad $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_2}$, E e G rispettivamente, r_1, r_2, E', G', così dalla equazione precedente si vede subito che per le superficie per le quali le rappresentazioni sferiche delle linee di curvatura sono isoterme, e per queste sole si ha la seguente relazione fra i raggi di curvatura

$$(51) \ldots \quad (r_1 - r_2).\frac{d^2(r_1 + r_2)}{du\,dv} + \frac{dr_2}{du}.\frac{dr_2}{dv} - \frac{dr_1}{du}.\frac{dr_1}{dv} = 0 \,.$$

Questa equazione è soddisfatta per $r_1 + r_2 = \text{cost.}$, quindi si ritrova così che per le superficie di area minima e per le loro parallele le linee sferiche corrispondenti alle linee di curvatura sono isoterme.

Le linee sferiche che corrispondono alle linee di curvatura delle superficie aventi le linee di curvatura piane sono due sistemi di cerchi ortogonali e sono quindi anche isotermi; dunque si conclude che: *i raggi di curvatura delle superficie a linee di curvatura piane soddisfanno alla equazione* (51) *quando u e v sono i parametri delle linee di curvatura.*

28. Mostriamo adesso come le equazioni (48) conducano subito al teorema del sig. Weingarten (*Journal de Crelle*, tom. 62) sulle superficie nelle quali un raggio di curvatura è una funzione dell'altro.

Supponiamo perciò che i raggi di curvatura della superficie che si considera debbano soddisfare a una data relazione in termini finiti, e per considerare anche il caso in cui uno di questi raggi sia costante, supponiamo che, se ciò accade, questo non sia r_2. In ogni caso allora r_1 potrà considerarsi come una funzione di r_2, e si avrà:

$$r_1 = \lambda(r_2) .$$

Ciò posto, si osservi che le (48) danno

$$(52) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{d \log. \sqrt{E'}}{dv} = \dfrac{\dfrac{dr_2}{dv}}{r_1 - r_2} , \\[2ex] \dfrac{d \log. \sqrt{G'}}{du} = - \dfrac{\dfrac{dr_1}{du}}{r_1 - r_2} , \end{cases}$$

e quindi, se r_1 è una funzione di r_2, si avrà:

$$(53) \ldots \begin{cases} \sqrt{E'} = U e^{\int \frac{\frac{dr_2}{dv}}{r_1 - r_2} . dv} = U e^{\int \frac{dr_2}{r_1 - r_2}} = U \varphi(r_2) , \\[2ex] \sqrt{G'} = V e^{-\int \frac{\frac{dr_1}{du}}{r_1 - r_2} . du} = V e^{-\int \frac{\frac{dr_1}{dr_2}}{r_1 - r_2} . dr_2} = V \psi(r_2) ; \end{cases}$$

e poichè, senza cangiare linee coordinate, si possono sempre prendere u e v in modo che si abbia $U = 1$, $V = 1$, così si vede che l'elemento lineare della sfera si potrà ridurre alla forma

$$ds'^2 = \varphi^2(r_2)\, du^2 + \psi^2(r_2)\, dv^2 ,$$

cioè dei due coefficienti E' e G' uno si potrà considerare come funzione dell'altro.

Ciò posto, osserviamo che, non essendo r_2 costante, se non si ha $r_2 = \varphi(u)$ e quindi anche $r_1 = \chi(u)$, E' sarà una funzione che conterrà v

necessariamente, e quindi, escluso questo caso di $r_2 = \varphi(u)$, E' non sarà mai costante, e indicandolo con WEINGARTEN con $\frac{1}{k^2}$, le altre quantità r_1, r_2 e G' saranno funzioni di k che devono soddisfare alle equazioni (52) e alla $r_1 = \lambda(r_2)$.

Ora, espresse queste quantità per k, esse vengono ad avere una forma notevole, giacchè la prima delle (52) dà

$$r_1 = r_2 - k \cdot \frac{d r_2}{d k} ,$$

e la seconda delle (53), con $V = 1$, dà

$$\sqrt{G'} = \frac{1}{\frac{d r_2}{d k}} ,$$

e perciò si avrà

$$d s'^2 = \frac{d u^2}{k^2} + \frac{d v^2}{\theta'(k)^2} ,$$

essendo

$$r_2 = \theta(k) , \qquad r_1 = \theta(k) - k\,\theta'(k) ;$$

e quindi $\theta(k)$ sarà una funzione tale che la relazione $r_1 = \lambda(r_2)$ risulti dalla eliminazione di k fra queste due, vale a dire $\theta(k)$ sarà l'integrale della equazione

$$\theta - k\,\theta' = \lambda(\theta) ,$$

cioè tale che

$$k = c\, e^{\int \frac{d\theta}{\theta - \lambda(\theta)}} ,$$

essendo c una costante.

Tutto questo nel caso che r_2 contenga anche la v. Ciò però sussiste anche quando r_2 contiene soltanto u, giacchè in questo caso anche k non contiene v, ma può sempre ridursi a contenere u in una maniera arbitraria; e quindi, supposto che ciò sia fatto in modo che si abbia

$$r_2 = \theta(k) , \qquad r_1 = \theta(k) - k\,\theta'(k) ;$$

ne verrà ancora

$$\sqrt{G'} = \frac{1}{\theta'(k)} .$$

Dietro ciò noi possiamo dunque enunciare il seguente teorema, che in realtà non è che il reciproco del teorema di Weingarten: *se in una superficie i raggi di curvatura sono funzioni l'uno dell'altro e si ha*

$$r_1 = \lambda(r_2) ,$$

i parametri u e v delle linee di curvatura si potranno prendere in modo che le linee sferiche corrispondenti diano all'elemento lineare della sfera la forma

$$(54) \ldots\ldots\ldots \qquad ds'^2 = \frac{du^2}{k^2} + \frac{dv^2}{\theta'(k)^2} ,$$

ove k non è costante, e θ è tale che i raggi di curvatura siano dati dalle relazioni

$$(55) \ldots\ldots\ldots \qquad \begin{cases} r_2 = \theta(k) , \\ r_1 = \theta(k) - k\,\theta'(k) , \end{cases}$$

fra le quali, eliminando il k, si ritrova la $r_1 = \lambda(r_2)$. Si suppone al solito in questo enunciato che nel caso che uno dei due raggi di curvatura sia costante, esso debba essere r_1.

Il teorema reciproco di questo (che è appunto quello dato da Weingarten) ci dice che: *se due sistemi di linee ortogonali u e v della sfera sono tali che si abbia pel suo elemento lineare*

$$(54') \ldots\ldots\ldots \qquad ds'^2 = \frac{du^2}{k^2} + \frac{dv^2}{\theta'(k)^2} ,$$

esse corrisponderanno alle linee di curvatura di una superficie (32) *nella quale i raggi di curvatura sono dati dalle formole*

$$(55') \ldots\ldots\ldots \qquad \begin{cases} r_2 = \theta(k) , \\ r_1 = \theta(k) - k\,\theta'(k) , \end{cases}$$

e quindi sono legati dalla relazione che si ottiene eliminando k fra queste due.

La dimostrazione di questo teorema si fa subito colle seguenti considerazioni. Per le condizioni dell'enunciato di essa le (48) riescono subito soddisfatte, e se si chiamano X, Y, Z le coordinate della sfera espresse per u e v, siccome le linee u e v sulla sfera sono ortogonali, sarà identicamente soddisfatta anche l'equazione che risulta dal moltiplicare le equazioni (46) respettivamente per X, Y, Z e sommare. Dunque, poichè sono soddisfatte tre equazioni che risultano dalle (46) indipendentemente l'nna dall'altra, ne segue che anche le (46) saranno tutte soddisfatte (*), e perciò le equazioni (32), nelle quali r_1, r_2, X, Y, Z hanno questi valori, ammetteranno gli integrali.

$$(56) \ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} x &= \int \left(\frac{dx}{du} . du + \frac{dx}{dv} . dv \right) = x(u, v) \ , \\ y &= \int \left(\frac{dy}{du} . du + \frac{dy}{dv} . dv \right) = y(u, v) \ , \\ z &= \int \left(\frac{dz}{du} . du + \frac{dz}{dv} . dv \right) = z(u, v) \ , \end{aligned} \right.$$

che rappresentano una superficie; per conseguenza le equazioni (32) apparterranno a questa superficie; e poichè le quantità X, Y, Z rappresentano i coseni degli angoli della normale ad essa coi tre assi, giacchè si ha

$$X dx + Y dy + Z dz = 0 \ ,$$

(*) Infatti, se si chiamano A, B, C i primi membri delle equazioni (46) per quanto abbiamo detto si ha:

$$A . \frac{dX}{du} + B . \frac{dY}{du} + C . \frac{dZ}{du} = 0 \ ,$$

$$A . \frac{dX}{dv} + B . \frac{dY}{du} + C . \frac{dZ}{du} = 0 \ ,$$

$$AX + BY + CZ = 0 \ ;$$

e poichè, a causa dei valori di X, Y, Z, il determinante formato coi coefficienti di A, B, C è uguale a $\sqrt{E'G'}$ e non a zero, ne segue che si dovrà avere

$$A = 0 \ , \quad B = 0 \ , \quad C = 0 \ .$$

così se ne conclude che le linee u e v sono appunto le linee di curvatura della stessa superficie, e r_1 e r_2 sono i raggi di curvatura principali, i quali hanno fra loro la relazione definita dalle equazioni (55).

Così resta pienamente dimostrato che la ricerca delle superficie $r_1 = \lambda(r_2)$ dipende appunto dalla ricerca delle linee sferiche u, v che danno a ds' la forma (2), e trovate queste linee e i valori di X, Y, Z, espressi per u e v, le equazioni della superficie corrispondente saranno le (56), ove $\frac{dx}{du}$, $\frac{dx}{dv}$ ... hanno i valori (32), supposto che in questi r_1 e r_2 abbiano i valori (55). Inoltre, delle superficie corrispondenti si hanno subito anche le linee di curvatura, giacchè esse non sono altro che le stesse $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$

29. Se invece di ragionare sulle equazioni (48) avessimo ragionato nello stesso modo sulle (49), evidentemente saremmo giunti a quest'altro teorema, non notato dal sig. Weingarten: *se in una superficie un raggio di curvatura è funzione dell'altro, si potranno prendere i parametri u e v delle sue linee di curvatura in modo che, prese queste linee per coordinate, l'elemento lineare della superficie prenda la forma*

$$(57) \ldots\ldots\ldots \qquad ds^2 = \frac{du^2}{h^2} + \frac{dv^2}{\theta'(h)^2},$$

ove h non è costante, e θ è tale che i raggi di curvatura sono dati dalle due equazioni

$$(58) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \frac{1}{r_2} = \theta(h), \\ \frac{1}{r_1} = \theta(h) - h\,\theta'(h), \end{cases}$$

fra le quali, eliminando h, si ritrova la relazione che sussiste fra r_1 e r_2. Anche qui si suppone che se uno dei due raggi di curvatura deve esser costante, questo non sia r_2. Supponendo $\theta'(h) = h$, si ha:

$$ds^2 = \frac{1}{h^2} \cdot (du^2 + dv^2),$$

e quindi le u e v sono isoterme; e poichè in questo caso le (58) danno $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\text{cost.}$, così si ritrova il teorema che abbiamo dato al § 26 sulle superficie di curvatura media costante.

30. Per continuare le nostre ricerche premetteremo adesso un teorema generale, il quale dandoci in particolare la forma dell'elemento lineare della sfera quando si prendono su essa per coordinate due sistemi di cerchi ortogonali, coll'applicazione dei teoremi precedenti, ci gioverà per trovare le differenti classi di superficie aventi le linee di curvatura piane e nelle quali un raggio di curvatura è funzione dell'altro, e ci condurrà anche ad altri teoremi.

Questo teorema è il seguente:

Se su una superficie esistono due sistemi di linee ortogonali aventi le loro curvature geodetiche costanti lungo ciascuna di esse, queste linee saranno al tempo stesso isoterme; e se si prendono queste linee come linee coordinate u e v, l'elemento lineare della superficie, quando nessuno dei due sistemi di linee è geodetico, avrà la forma

$$(59) \ldots\ldots \quad ds^2=\frac{1}{(U+V)^2}\cdot\left\{U_1^2\,du^2+V_1^2\,dv^2\right\},$$

ove U, U_1 sono funzioni di u, e V, V_1 sono funzioni di v, e U e V non possono essere costanti; e se uno dei due sistemi di linee u e v, per esempio il sistema v, è geodetico, il medesimo elemento lineare avrà la forma

$$(60) \ldots\ldots\ldots \quad ds^2=U_1^2\,du^2+U^2V_1^2\,dv^2,$$

che risulta anche dalla precedente col supporre V costante; e in questo caso la superficie sarà applicabile su una di rivoluzione, e quelle linee u e v corrisponderanno respettivamente ai paralleli e ai meridiani di questa.

Sia infatti

$$ds^2=E\,du^2+G\,dv^2,$$

l'elemento lineare della superficie in queste coordinate u e v. Chiamando

ρ_u e ρ_v i raggi delle curvature geodetiche delle linee u e v, si ha da formole note

$$(61)\ldots\ldots \quad \frac{1}{\rho_u} = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \cdot \frac{d.\sqrt{G}}{du}, \qquad \frac{1}{\rho_v} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \cdot \frac{d.\sqrt{E}}{dv};$$

e quindi se si vuole che ρ_u sia costante lungo le linee u, e ρ_v lo sia lungo le linee v, si dovrà avere

$$(62)\ldots\ldots \quad \frac{1}{\sqrt{EG}} \cdot \frac{d.\sqrt{G}}{du} = U, \qquad \frac{1}{\sqrt{EG}} \cdot \frac{d.\sqrt{E}}{dv} = V;$$

essendo U e V funzioni di u e v soltanto respettivamente; e se si suppone dapprima che nessuno dei due sistemi u e v sia geodetico, nè U nè V saranno nulli.

Ciò posto, si faccia

$$\sqrt{E} = e, \qquad \sqrt{G} = g,$$

si avrà:

$$(63)\ldots\ldots \quad \frac{dg}{du} = Ueg, \qquad \frac{de}{dv} = Veg,$$

e quindi, poichè U e V non sono nulli, se ne dedurrà

$$U \cdot \frac{de}{dv} = V \cdot \frac{dg}{du},$$

ovvero

$$\frac{d(Ue)}{dv} = \frac{d(Vg)}{du}.$$

Da questa, indicando con t una funzione incognita delle u e v, si avrà

$$Ue = \frac{dt}{du}, \qquad Vg = \frac{dt}{dv};$$

donde

$$(64)\ldots\ldots \quad e = \frac{dt}{U\,du}, \qquad g = \frac{dt}{V\,dv};$$

e sostituendo questi valori di e e g in una delle equazioni (63), se ne dedurrà l'altra

$$\frac{d^2 t}{du\, dv} = \frac{dt}{du} \cdot \frac{dt}{dv} ,$$

che, integrata, farà conoscere t.

Per fare l'integrazione dividiamo per $\frac{dt}{dv}$; si otterrà l'altra

$$\frac{\frac{d}{du} \cdot \left(\frac{dt}{dv}\right)}{\frac{dt}{dv}} = \frac{dt}{du} ,$$

e questa darà

$$\log. \frac{dt}{dv} = t + \log. \varphi(v) ,$$

essendo $\varphi(v)$ una funzione arbitraria.

Da questa si deduce

$$\frac{dt}{dv} = e^t \varphi(v) , \qquad \text{ovvero} \qquad e^{-t} \cdot \frac{dt}{dv} = \varphi(v) ;$$

da cui

$$e^{-t} = -\int \varphi(v)\, dv + U_1 = U_1 + V_1 ,$$

essendo U_1 e V_1 due funzioni di u e v. Di qui si ha

$$t = -\log. (U_1 + V_1) ,$$

e per le (64) si ha finalmente

$$e = \frac{U_1'}{U(U_1 + V_1)} , \qquad g = \frac{V_1'}{V(U_1 + V_1)} ;$$

e poichè queste danno a ds^2 la forma (59), il teorema resta così dimostrato pel caso che nessuno dei due sistemi u e v sia geodetico.

Nel caso poi che uno dei due sistemi u e v, per esempio il sistema v, sia geodetico, allora si avrà $V = 0$, e quindi la seconda delle (62) darà subito

$$E = \varphi(u) ;$$

e per la prima se ne dedurrà

$$\frac{d(\log.\sqrt{G})}{du} = \varphi(u) \ ,$$

da cui si trarrà

$$\sqrt{G} = e^{U_1 + V_1} = U V \ ;$$

con che il teorema resta evidentemente dimostrato anche in questo caso.

31. Notiamo che questo teorema sussiste insieme al suo reciproco, e si ha che: *se in un doppio sistema di linee ortogonali isoterme, uno dei due sistemi ha la curvatura geodetica costante lungo ciascuna linea, l'altro sistema godrà della stessa proprietà, e si avranno le formole* (59) *o* (60). Si vede infatti che se le u e v sono isoterme e quindi si ha

$$E = \lambda U^2 \ , \qquad G = \lambda V^2 \ ,$$

e se uno dei due sistemi, p. es. il sistema u ha la curvatura geodetica costante, per le (61) si avrà:

$$\frac{d\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}{U\,du} = -U_1 \ , \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{d\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}{du} = U U_1 \ ;$$

e quindi sarà

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \int U U_1 \, du + V_1 = U_2 + V_1 \ ;$$

e questa dimostra evidentemente il teorema.

In particolare da questi teoremi si ha che: *i doppi sistemi di circonferenze ortogonali sulla sfera e sul piano sono i sistemi di circonferenze isoterme;* e reciprocamente: *se sulla sfera o sul piano un sistema di linee isoterme è formato di circonferenze, il sistema ortogonale sarà pure formato di circonferenze.* La forma che si ha per l'elemento lineare della sfera o del piano quando si prendono questi cerchi come linee coordinate è la (59) o la (60), nelle quali le funzioni U, U_1, V, V_1 hanno fra loro le relazioni volute dall'essere la superficie corrispondente una sfera

o un piano. Supponendo, ciò che può sempre farsi, $U_1 = 1$, $V_1 = 1$, le funzioni U e V si determinano esprimendo che la curvatura della superficie è una costante positiva o nulla. Questa ricerca non offre veruna difficoltà, e perciò noi ci contentiamo di avere qui indicato solo il mezzo per effettuarla.

32. Dai teoremi ora dimostrati se ne deducono immediatamente alcuni altri.

Ricordiamo infatti che quando si fa la rappresentazione di una superficie su di un'altra dietro il principio della conservazione degli angoli, ad un sistema di linee isoterme della prima superficie corrisponde necessariamente un sistema di linee isoterme della seconda; per questo, e pel teorema precedente, se ne concluderà allora immediatamente che: *facendo la rappresentazione di una superficie su di un'altra, dietro il principio della conservazione degli angoli, se ad un sistema di linee isoterme della prima superficie gli corrisponde nella seconda un sistema di linee aventi la curvatura geodetica costante, il sistema di linee della seconda superficie che corrisponde alle linee della prima che sono ortogonali al sistema isotermo che si considera, avranno pure la loro curvatura geodetica costante.*

In particolare, si ha di qui il seguente teorema che, nel caso del piano, è dovuto a Lagrange: *facendo la rappresentazione di una superficie di rivoluzione su di un piano o su di una sfera, in modo che gli angoli siano conservati, se le linee che corrispondono ai meridiani sono circolari, le linee che corrisponderanno ai paralleli saranno pure circolari; e viceversa.*

Notiamo che nel caso del piano per linee circolari s' intendono anche le rette che sono infatti delle circonferenze di raggio infinito.

33. Da questo teorema ne risulta subito un altro sulle superficie di area minima. Ricordiamo infatti (§ 26) che le linee di curvatura di queste superficie costituiscono un doppio sistema ortogonale isotermo; e quindi, poichè facendo la rappresentazione di queste superficie sulla sfera col metodo di Gauss, tutti gli angoli sono conservati (§ 14 nota) pel teorema precedente si conclude che, se le rappresentazioni sferiche delle linee di curvatura di un sistema sono circolari, anche le rappresentazioni sferiche

delle linee di curvatura dell'altro sistema saranno circolari. Di qui risulta evidentemente il seguente teorema: *in una superficie di area minima se le linee di curvatura di un sistema sono piane, le altre lo saranno pure;* o in altri termini: *non esistono superficie di area minima aventi un solo sistema di linee di curvatura piane.*

Notiamo poi, come del resto vedremo tra poco, che pel teorema di Weingarten esistono difatto delle superficie di area minima, oltre a quelle di rivoluzione, che hanno le loro linee di curvatura piane, giacchè quando si prendono per coordinate sulla sfera i sistemi di circonferenze ortogonali, l'elemento lineare della sfera può ridursi alla forma

$$ds^2 = \frac{1}{k^2} \cdot (du^2 + dv^2) ,$$

e quindi fra le superficie corrispondenti ne esistono di quelle per le quali si ha

$$r_1 + r_2 = 0 .$$

34. Passiamo adesso a vedere come coll'applicazione del teorema di Weingarten e di quelli dei §§ 30 e 31 si possono subito trovare le differenti classi di superficie aventi le linee di curvatura piane, e nelle quali un raggio di curvatura è una funzione dell'altro.

Distinguiamo perciò il caso in cui le linee di curvatura di un sistema sono situate in piani paralleli, e quello in cui questa circostanza non si verifica, e consideriamo intanto il primo caso. Per questo basteranno le formole (48) e (49).

Supponendo infatti che le linee situate in piani paralleli siano le $u = \text{cost.}$, si vedrà subito che sulla sfera a queste linee corrisponderanno un sistema di paralleli, e quindi alle $v = \text{cost.}$ corrisponderanno un sistema di meridiani, e si avrà:

$$\frac{dE'}{dv} = 0 .$$

La prima delle (48) darà dunque in questo caso

$$r_2 = F(u) ,$$

e quindi la prima delle (49) darà

$$\frac{dE}{dv} = 0 \; ;$$

talchè si ritrova così che la condizione che un sistema di linee di curvatura di una superficie siano situate in piani paralleli, porta che le altre sieno pure piane e geodetiche, e che il raggio di curvatura principale corrispondente a queste linee sia costante lungo le linee dell'altra curvatura o su tutta la superficie. Ciò d'altra parte risulta anche dalla nota generazione di queste superficie.

Ciò posto, distinguiamo i due casi di

$$r_1 = \lambda(r_2) \; , \qquad \text{e} \qquad r_2 = \text{cost.} \; .$$

Nel primo caso, siccome $r_2 = F(u)$, si avrà anche

$$r_1 = \varphi(u) \; ;$$

e quindi se si chiama r il raggio di curvatura delle linee u, ed ω l'angolo che il loro piano fa colla superficie, e che è soltanto funzione di u (§ 23), pel teorema di Meunier si avrà

$$r = r_1 \, \text{sen.} \, \omega = \psi(u) \; .$$

Conseguentemente le linee $u = \text{cost.}$ (situate in piani paralleli) saranno tutte circolari, e quindi le superficie corrispondenti a questo caso saranno tutte e sole quelle di rivoluzione.

Consideriamo ora il caso di $r_2 = \text{cost.}$ In questo caso, siccome le linee v essendo geodetiche hanno per raggio di curvatura r_2, così si vede che queste linee sono tutte circolari e dello stesso raggio, e le superficie corrispondenti sono evidentemente le superficie canali aventi per direttrice una curva piana.

Da ciò dunque risulta intanto che: *le superficie aventi un sistema di linee di curvatura in piani paralleli, e nelle quali un raggio di curvatura è funzione dell'altro, sono tutte e sole quelle nelle quali uno almeno dei*

due sistemi di linee di curvatura sono circolari; e quindi sono le superficie di rivoluzione e le superficie canali r_1 *o* $r_2 =$ cost. *aventi per direttrice una curva piana.*

35. Resta adesso a considerarsi il caso più generale in cui tutte le linee di curvatura essendo piane, nessuno dei due sistemi di queste linee si trova situato in piani paralleli fra loro. In questo caso le linee sferiche u e v corrispondenti alle linee di curvatura sono due sistemi di cerchi ortogonali differenti dai sistemi di meridiani e paralleli, e pei quali l'elemento lineare della sfera prende la forma (§ 31):

$$(65) \ldots\ldots\ldots \quad ds'^2 = \frac{U_1^2\, du^2}{(U+V)^2} + \frac{V_1^2\, dv^2}{(U+V)^2},$$

ove U e V sono due funzioni di u e v che non possono essere costanti. In questa formola poi U, U_1, V, V_1 devono soddisfare alla condizione richiesta dall'essere ds' l'elemento lineare di una sfera di raggio uno; però siccome ad u e v (senza cangiare linee coordinate) possono sempre sostituirsi delle funzioni arbitrarie $\varphi(u')$, $\psi(v')$ di due altre variabili, così possono ancora farsi variare in infiniti modi i coefficienti di du^2 e dv^2, e pel teorema di Weingarten per ogni sistema di variabili che stabilisce fra questi coefficienti una relazione finita, esisterà una classe di superficie a linee di curvatura piane, nelle quali i raggi di curvatura sono legati da una relazione che dipende da quella che esiste fra i medesimi coefficienti, in forza delle formole (55); e non esisteranno altre di queste superficie.

Per trovare dunque le superficie che cerchiamo conviene prima trovare le relazioni che possono stabilirsi fra i coefficienti di du^2 e dv^2 nella (65).

Poniamo perciò

$$e = \frac{U_1}{U+V}, \qquad g = \frac{V_1}{U+V};$$

bisognerà qui cercare a quali condizioni debbano soddisfare U e U_1, e V e V_1 affinchè si abbia la relazione

$$g = \varphi(e),$$

e poi trovare questa relazione. Per questo osserveremo che avendosi

$$\frac{V_1}{U_1} = \frac{g}{e} ,$$

si dovrà avere

$$\frac{V_1}{U_1} = \frac{\varphi(e)}{e} = \psi(e) ;$$

e quindi, indicando con e_1 e e_2 le derivate di e rispetto ad u e v, le quali non possono esser nulle, bisognerà che si abbia

$$(66) \ldots\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} \frac{V_1'}{U_1} &= \left\{\frac{\varphi(e)}{e}\right\}' . e_2 , \\ -\frac{V_1 U_1'}{U_1^2} &= \left\{\frac{\varphi(e)}{e}\right\}' . e_1 . \end{aligned} \right.$$

Consideriamo subito il caso di $\left\{\frac{\varphi(e)}{e}\right\}' = 0$. Questo caso porta fra e e g la relazione $e = cg$ che corrisponde a U_1 e V_1 costanti; e ponendo, come nel teorema di Weingarten:

$$e = \frac{1}{k} , \qquad g = \frac{1}{\theta'(k)} ,$$

si avrà in questo caso

$$\theta'(k) = ck , \qquad \theta(k) = c . \frac{k^2}{2} + \gamma ,$$

essendo γ una costante; e quindi per le (55) le superficie corrispondenti alle variabili u e v che danno a ds'^2 questa forma, avranno per raggi di curvatura

$$r_1 = \frac{ck^2}{2} + \gamma , \qquad r_2 = -\frac{ck^2}{2} + \gamma .$$

Di qui si vede che esistono delle superficie a linee di curvatura piane e non situate in piani paralleli, per le quali si ha:

$$r_1 + r_2 = \text{cost.} ,$$

e siamo quindi nel caso delle superficie di area minima e delle loro parallele.

Escludendo ora il caso di $\left\{\frac{g}{e}\right\}' = 0$, e quindi quello di $V_1' = 0$ e $U_1' = 0$, per le (66) si vede che dovremo avere

$$\frac{e_2}{e_1} = -\frac{V_1' U_1}{V_1 U_1'} ;$$

ovvero, avendo riguardo al valore di e,

$$\frac{U_1 V'}{U_1'(U+V) - U_1 U_1'} = \frac{V_1' U_1}{V_1 U_1'} ,$$

da cui

$$\frac{V' V_1}{V_1'} - V = U - \frac{U' U_1}{U_1'} ,$$

e quindi

$$\frac{V' V_1 - V V_1'}{V_1'} = c , \qquad \frac{U' U_1 - U U_1'}{U_1'} = -c$$

essendo c una costante.

Dalla prima di queste si trae

$$\frac{V' V_1 - V V_1'}{V_1^2} = c . \frac{V_1'}{V_1^2} ,$$

ovvero

$$\frac{d}{d\varphi} . \left(\frac{V}{V_1}\right) = -c . \frac{d}{d\varphi} . \left(\frac{1}{V_1}\right) ;$$

e quindi si avrà

$$\frac{V}{V_1} = -\frac{c}{V_1} + \gamma ,$$

essendo γ una costante che non può essere nulla.

Analogamente si avrà

$$\frac{U}{U_1} = \frac{c}{U_1} + \gamma' ,$$

essendo γ' un'altra costante diversa da zero. Conseguentemente, affinchè esista fra g ed e una relazione, bisognerà che si abbia

$$(67) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} V_1 = \frac{1}{\gamma} \cdot (V + c) \, , \\ U_1 = \frac{1}{\gamma'} \cdot (U - c) \, ; \end{cases}$$

e allora la relazione corrispondente fra g ed e sarà la seguente

$$(68) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \gamma g + \gamma' e = 1 \, ;$$

e poichè, come abbiamo notato in principio, le relazioni (67) possono sempre rendersi soddisfatte con una scelta conveniente di variabili, così la relazione (68) potrà sempre stabilirsi, e ad essa corrisponderanno delle superficie nelle quali le linee di curvatura sono piane, e i raggi di curvatura sono legati da una certa relazione.

Per trovare questa relazione si porrà, come nel teorema di Weingarten,

$$e = \frac{1}{k} \, , \qquad g = \frac{1}{\theta'(k)} \, ;$$

allora per la (68) se ne trarrà

$$\gamma k + (\gamma' - k)\, \theta'(k) = 0 \, ,$$

e da questa si avrà

$$\theta'(k) = \frac{\gamma k}{k - \gamma'} = \gamma \cdot \left(1 + \frac{\gamma'}{k - \gamma'}\right) ;$$

da cui

$$\theta(k) = \gamma k + \gamma\gamma' \log. (k - \gamma') + \gamma'' \, ,$$

essendo γ'' un'altra costante.

Per questa le formole (55) ci mostrano che le superficie corrispondenti alle variabili u e v che stabiliscono fra e e g la relazione (68), hanno per raggi di curvatura

$$r_2 = \gamma k + \gamma\gamma' \log. (k - \gamma') + \gamma'' \, , \qquad r_1 = r_2 - \frac{\gamma k^2}{k - \gamma'} \, ;$$

e quindi questi raggi di curvatura saranno legati fra loro dalla relazione

$$(69) \ldots\ldots \quad r_1 + r_2 \mp 2 . \sqrt{\frac{(r_1 - r_2)^2}{4\gamma^2} - \frac{\gamma'}{\gamma} . (r_1 - r_2) - \gamma''}$$

$$= \gamma\gamma' \log . \left\{ \frac{r_1 - r_2}{2\gamma} \pm \sqrt{\frac{(r_1 - r_2)^2}{4\gamma^2} - \frac{\gamma'}{\gamma} . (r_1 - r_2) - \gamma'} \right\} ;$$

che si ottiene ricavando il k dalla seconda delle due precedenti e ponendolo nella prima; e in questa relazione γ, γ', γ'' sono tre costanti, le due prime delle quali non possono essere nulle.

Dietro ciò noi possiamo ora enunciare il seguente teorema:

Fra le superficie che hanno le linee di curvatura piane, quelle nelle quali un raggio di curvatura è una funzione dell'altro sono: 1° *le superficie di rivoluzione;* 2° *le superficie canali* r_1 *o* $r_2 =$ cost. *aventi per direttrice una curva piana;* 3° *alcune superficie di area minima insieme alle loro parallele;* 4° *alcune superficie della classe* (69).

Le equazioni in termini finiti delle prime tre classi di queste superficie sono conosciute; per quelle della quarta classe potrebbero trovarsi servendosi del teorema di Weingarten, ma noi non crediamo utile di fare qui questa ricerca.

Notiamo che il teorema dimostrato conduce in particolare al seguente: *le superficie di curvatura costante* $r_1 r_2 =$ cost., *o di curvatura media* $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ *costante e differente da zero che hanno le linee di curvatura piane sono soltanto quelle delle rispettive classi che sono al tempo stesso di rivoluzione, ecc.*

36. Passiamo adesso a cercare le equazioni in termini finiti delle superficie a linee di curvatura piane. Queste superficie sono state soggetto di studio di molti distinti geometri, e di esse il sig. Bonnet ha dato pel primo le equazioni in termini finiti in coordinate Cartesiane nel *Journal de l'École polytechnique*, cah. 39. Queste equazioni però si presentano sotto una forma abbastanza complicata, e perciò credo ora utile di mostrare come le formole di questa Memoria conducano subito ad

una proprietà di queste superficie, mediante la quale si trovano subito sotto una forma notevole le equazioni in termini finiti delle superficie in questione, e con esse un grandissimo numero di problemi relativi a queste superficie vengono a dipendere soltanto da quadrature.

Osserviamo perciò che per le superficie a linee di curvatura piane si ha:

$$\sqrt{E'} = \frac{U_1}{U+V}, \qquad \sqrt{G'} = \frac{V_1}{U+V};$$

e con una scelta conveniente di variabili, quando la superficie non ha un sistema di linee di curvatura in piani paralleli, si potrà rendere

$$(70) \ldots\ldots\ldots \quad \sqrt{E'} = \frac{U_1}{u+v}, \qquad \sqrt{G'} = \frac{V_1}{u+v},$$

ove U_1 e V_1 hanno i valori che si convengono ad una sfera di raggio uno, e come potremmo riscontrare servendoci della formola che dà la curvatura di una superficie, esse non possono divenire costanti.

Per queste le equazioni (48) daranno le seguenti:

$$(71) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \dfrac{d r_2}{d v} = -\dfrac{r_1 - r_2}{u+v}, \\[2ex] \dfrac{d r_1}{d u} = \dfrac{r_1 - r_2}{u+v}; \end{cases}$$

e da queste si avrà l'altra

$$(72) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{d r_1}{d u} = -\frac{d r_2}{d v},$$

la quale ci mostra che: *nelle superficie a linee di curvatura piane i raggi di curvatura sono le derivate parziali (una negativa) di una stessa funzione θ, e si ha:*

$$(73) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} r_2 = \dfrac{d\theta}{du}, \\[2ex] r_1 = -\dfrac{d\theta}{dv}, \end{cases}$$

ove θ deve soddisfare alla equazione a derivate parziali

$$(74) \ldots\ldots\ldots \qquad \frac{d^2\theta}{du\,dv} = \frac{\frac{d\theta}{du} + \frac{d\theta}{dv}}{u+v},$$

che risulta dalle (71).

Osservando dunque che l' integrale di questa equazione è

$$(75) \ldots\ldots\ldots \qquad \theta = 2(U+V) - (U'+V').(u+v),$$

ove U e V sono funzioni arbitrarie di u e v respettivamente, se ne concluderà che nelle superficie a linee di curvatura piane si ha

$$r_1 = U' - V' + V''.(u+v) = -(V' - V''v) + U' + V''u,$$
$$r_2 = U' - V' - U''.(u+v) = \quad (U' - U''u) - V' - U''v.$$

ovvero

$$(76) \begin{cases} r_1 = U - V + V'.(u+v) = -(V - V'v) + U + V'u, \\ r_2 = U - V - U'.(u+v) = \quad (U - U'u) - V - U'v, \end{cases}$$

sostituendo per semplicità ad U' e V' respettivamente U e V, ciò che evidentemente può farsi.

37. Queste proprietà sono quelle che conducono subito alle equazioni in termini finiti delle superficie a linee di curvatura piane, e non situate in piani paralleli (*).

Se s' indicano infatti al solito con X, Y, Z i coseni degli angoli della normale alla superficie coi tre assi, e se u e v sono sempre i parametri delle linee di curvatura scelti in modo che si abbiano le (70), dovranno sussistere le equazioni seguenti:

(*) Le equazioni delle superficie aventi un sistema di linee di curvatura in piani paralleli si conoscono già sotto una forma semplicissima.

$$(77) \ldots\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{dx}{du} = r_2 \cdot \dfrac{dX}{du}, & \dfrac{dx}{dv} = r_1 \cdot \dfrac{dX}{dv}, \\ \dfrac{dy}{du} = r_2 \cdot \dfrac{dY}{du}, & \dfrac{dy}{dv} = r_2 \cdot \dfrac{dY}{dv}, \\ \dfrac{dz}{du} = r_2 \cdot \dfrac{dZ}{du}, & \dfrac{dz}{dv} = r_2 \cdot \dfrac{dZ}{dv}; \end{array} \right.$$

e conseguentemente si avranno le equazioni (46), le quali esprimono che $\dfrac{dx}{du}du + \dfrac{dx}{dv}dv, \ldots$ sono differenziali esatti.

Ora le (46) per le (71) divengono

$$(78) \ldots\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2X}{du\,dv} = -\dfrac{\dfrac{dX}{du} + \dfrac{dX}{dv}}{u+v}, \\ \dfrac{d^2Y}{du\,dv} = -\dfrac{\dfrac{dY}{du} + \dfrac{dY}{dv}}{u+v}, \\ \dfrac{d^2Z}{du\,dv} = -\dfrac{\dfrac{dZ}{du} + \dfrac{dZ}{dv}}{u+v}; \end{array} \right.$$

quindi, integrando queste equazioni e indicando con U_1, U_2, U_3 tre funzioni di u, e con V_1, V_2, V_3 tre funzioni di v, si avrà:

$$(79) \ldots \quad X = \frac{U_1 + V_1}{u+v}, \quad Y = \frac{U_2 + V_2}{u+v}, \quad Z = \frac{U_3 + V_3}{u+v},$$

e queste formole, nelle quali tutte le funzioni U e V non sono arbitrarie ma hanno, come vedremo, una forma determinata, daranno i coseni degli angoli della normale alle superficie a linee di curvatura piane con i tre assi.

Per determinare queste funzioni U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3, osserviamo che deve aversi

$$(80) \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \Sigma X^2 = 1;$$

da cui

$$\Sigma U_1^2 + \Sigma V_1^2 + 2\Sigma U_1 V_1 = u^2 + v^2 + 2uv \;;$$

quindi sarà intanto

$$(81) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \Sigma U_1 V_1 = uv + \varphi(u) + \psi(v) \;, \\ \Sigma U_1^2 = u^2 - 2\varphi(u) - m \;, \\ \Sigma V_1^2 = v^2 - 2\psi(v) + m \;. \end{cases}$$

e queste equazioni bastano, come vedremo, per determinare le funzioni $U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3$.

Ritenendo per ora che queste funzioni siano definite da queste equazioni, si vede che la nostra questione è già risoluta. Infatti, quando nelle (77) si pongono per r_1 e r_2 i valori (76), e per X, Y, Z i valori (79) che soddisfanno alle equazioni (81), le equazioni (46) riescono soddisfatte, quindi le espressioni $\frac{dx}{du}du + \frac{dx}{dv}dv, \ldots$ sono differenziali esatti, i cui integrali (che si ottengono con sole quadrature) appartengono per conseguenza ad una superficie. D'altra parte, avendosi la (80) si ha anche

$$\Sigma X . \frac{dX}{du} = 0 \;, \qquad \Sigma X . \frac{dX}{dv} = 0 \;,$$

e quindi dalle (78) si ha

$$\Sigma X . \frac{dx}{du} = 0 \;, \qquad \Sigma X . \frac{dx}{dv} = 0 \;;$$

dal che si conclude che X, Y, Z rappresentano effettivamente i coseni degli angoli della normale alla superficie coi tre assi e quindi le linee u e v sono le linee di curvatura.

Ora, calcolando le derivate di X, Y, Z, si trova che

$$E' = \Sigma . \left(\frac{dX}{du}\right)^2 = \frac{\Sigma U_1'^2 - 1}{(u+v)^2} \;,$$

$$G' = \Sigma . \left(\frac{dX}{dv}\right)^2 = \frac{\Sigma V_1^2 - 1}{(u+v)^2} \;;$$

quindi si vede che sono soddisfatte anche le condizioni necessarie e sufficienti affinchè le linee u e v siano piane, e se ne conclude per conseguenza che le equazioni (77) appartengono difatti alle superficie, le cui linee di curvatura sono piane e situate in piani non paralleli.

Le equazioni in termini finiti di queste superficie sono dunque le seguenti:

$$(82)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \int_{u,v}\left\{\begin{aligned} &\frac{\{U-V-U'(u+v)\}\{U_1'(u+v)-(U_1+V_1)\}}{(u+v)^2}\,.\,du \\ &+\frac{\{U-V+V'(u+v)\}\{V_1'(u+v)-(U_1+V_1)\}}{(u+v)^2}\,.\,dv \end{aligned}\right\}, \\ y &= \int_{u,v}\left\{\begin{aligned} &\frac{\{U-V-U'(u+v)\}\{U_2'(u+v)-(U_2+V_2)\}}{(u+v)^2}\,.\,du \\ &+\frac{\{U-V+V'(u+v)\}\{V_2'(u+v)-(U_2+V_2)\}}{(u+v)^2}\,.\,dv \end{aligned}\right\}, \\ z &= \int_{u,v}\left\{\begin{aligned} &\frac{\{U-V-U'(u+v)\}\{U_3'(u+v)-(U_3+V_3)\}}{(u+v)^2}\,.\,du \\ &+\frac{\{U-V+V'(u+v)\}\{V_3'(u+v)-(U_3+V_3)\}}{(u+v)^2}\,.\,dv \end{aligned}\right\}, \end{aligned}\right.$$

ove le funzioni U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3 sono legate dalle relazioni

$$(83)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\quad \left\{\begin{aligned} \Sigma\, U_1^2 &= u^2 - 2\,\varphi(u) - m\,, \\ \Sigma\, V_1^2 &= v^2 - 2\,\psi(v) + m\,, \\ \Sigma\, U_1 V_1 &= u v + \varphi(u) + \psi(v)\,, \end{aligned}\right.$$

Le linee u e v sono le linee di curvatura; i coseni degli angoli che la normale alla superficie fa coi tre assi sono

$$(84)\ldots\quad X = \frac{U_1+V_1}{u+v}\,,\qquad Y = \frac{U_2+V_2}{u+v}\,,\qquad Z = \frac{U_3+V_3}{u+v}\,;$$

e i raggi di curvatura sono

$$(85) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} r_1 = U - V + V'(u+v) \,, \\ r_2 = U - V - U'(u+v) \,. \end{cases}$$

Conoscendo tutti questi elementi si hanno subito, senz'altri calcoli, anche le superficie dei centri di curvatura, giacchè le coordinate ξ, η, ζ delle due falde di queste superficie sono date dalle formole

$$\begin{cases} \xi = x - r_1 X \,, \\ \eta = y - r_1 Y \,, \\ \zeta = z - r_1 Z \,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi = x - r_2 X \,, \\ \eta = y - r_2 Y \,, \\ \zeta = z - r_2 Z \,, \end{cases}$$

e in queste non vi ha nulla d'ignoto.

Le funzioni arbitrarie che entrano nelle nostre equazioni sono soltanto U e V, poichè ora vedremo che le equazioni (84) bastano a determinare le U_1, U_2, U_3, $\psi(u)$, V_1, V_2, V_3, $\psi(v)$. Queste ultime vengono a contenere soltanto delle costanti arbitrarie, e per ogni sistema di valori di queste costanti, lasciando le U e V indeterminate, le equazioni (83) danno classe per classe le superficie a linee di curvatura piane che hanno le stesse trasformate sferiche delle linee di curvatura, o, in altri termini, i punti delle superficie di ciascuna classe si corrispondono in modo che le linee di curvatura sono corrispondenti, e le normali nei punti corrispondenti sono parallele.

38. Abbiamo detto che le funzioni U_1, U_2, U_3 ... possono determinarsi dietro le equazioni (83). Vediamo ora come questa determinazione possa farsi, e così avremo completato la ricerca delle equazioni in termini finiti delle superficie a linee di curvatura piane, e avremo anche trovato le equazioni della sfera in funzione dei parametri di due sistemi di cerchi ortogonali di essa, giacchè queste equazioni non saranno altro che le (84).

Per questo osserviamo prima che la terza delle equazioni (83) dà

$$U_1' V_1' + U_2' V_2' + U_3' V_3' = 1 \,;$$

e poichè le U_1', U_2', U_3' non possono essere tutte costanti, giacchè altrimenti si avrebbe

$$E' = \frac{c}{(u+v)^2} \quad (\text{con } c \text{ cost.}) \,,$$

mentre invece E' è dato dalle (70), ove il numeratore non può essere costante, così si può supporre che U_3' non sia costante, e quindi l'equazione precedente si potrà scrivere

$$(86) \ldots\ldots\ldots \quad \frac{U_1'}{U_3'} \cdot V_1' + \frac{U_2'}{U_3'} \cdot V_2' = \frac{1}{U_3'} - V_3' \,,$$

e il secondo membro conterrà la U, e quindi nel primo uno almeno dei rapporti $\frac{U_1'}{U_3'}$, $\frac{U_2'}{U_3'}$ dovrà pure contenere la u. Supponiamo che questo sia $\frac{U_2'}{U_3'}$. Da questo ne verrà che V_1' dovrà contenere la v, poichè altrimenti derivando rapporto ad u si vede che anche V_2' e quindi anche V_3' non conterrebbero la v, e questo non può essere.

Ciò posto, osserviamo che avendosi una espressione come

$$(87) \ldots\ldots\ldots \quad \varphi(u)\,\psi(v) + \varphi_1(u)\,\psi_1(v) \,,$$

ove $\varphi_1(u)$ e $\psi(v)$ non sono costanti, affinchè questa si riduca alla forma $\lambda(u) + \lambda(v)$, bisogna che si abbia:

$$\varphi'(u)\,\psi'(v) + \varphi_1'(u)\,\psi_1'(v) = 0 \,,$$

ovvero

$$\frac{\varphi'(u)}{\varphi_1'(u)} = -\frac{\psi_1'(v)}{\psi'(v)} = a \,,$$

essendo a una costante, e quindi bisogna che si abbia

$$(88) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \varphi(u) = -a\,\varphi_1(u) + b \,, \\ \psi_1(v) = \quad a\,\psi(v) + b' \,, \end{cases}$$

essendo b e b' due nuove costanti.

Nel nostro caso adunque, affinche la (86) possa sussistere, bisogna che si abbia:

$$U_1' = a\,U_2' + b\,U_3' \,, \qquad V_2' = -a\,V_1' + b' \,;$$

e per queste la (86) stessa darà:

$$b V_1' + b' . \frac{U_2'}{U_3'} = \frac{1}{U_3'} - V_3' \; ;$$

da cui si trarranno le altre due

$$b V_1' = - V_3' - c \; , \qquad b' U_2' = 1 + c U_3' \; ;$$

dall'ultima delle quali si vede che b' non può esser nullo.

Da queste si trae

$$U_1 = a . U_2 + b U_3 + d \; , \qquad V_2 = - a V_1 + b' v + f \; ,$$

$$U_2 = \frac{c}{b'} . U_3 + \frac{u}{b'} + e \; , \qquad V_3 = - b V_1 - c v + g \; ,$$

le quali danno anche

$$(89) \ldots\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} U_1 = \left(\frac{a c}{b'} + b \right) . U_3 + \frac{a}{b'} . u + (d + a e) \; , \\ U_2 = \frac{c}{b'} . U_3 + \frac{u}{b'} + e \; , \\ U_3 = U_3 \; ; \end{array} \right.$$

$$(90) \ldots\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} V_1 = V_1 \; , \\ V_2 = - a V_1 + b' v + f \; , \\ V_3 = - b V_1 - c v + g \; ; \end{array} \right.$$

e con queste la questione si riduce a determinare U_3 e V_1.

Ora osserviamo che da queste si ha:

$$\Sigma U_1 V_1 = u v + \left\{ \left(f . \frac{c}{b'} + g \right) . U_3 + \left(f . \frac{u}{b'} + e f \right) \right\} + d V_1 + e b' v \; .$$

e per la terza delle (83) se ne conclude che

$$\varphi(u) = \left(f . \frac{c}{b'} + g \right) . U_3 + f . \frac{u}{b'} + e f \; , \qquad \psi(v) = d V_1 + e b' v \; .$$

Adesso abbiamo subito il mezzo di calcolare U_3 e V_1, e quindi tutte le nostre funzioni.

Infatti, calcolando colle (89) e (90) ΣU_1^2 e ΣV_1^2, e sostituendo nelle due prime delle (83) coll'avere riguardo ai valori trovati per $\varphi(u)$ e $\psi(v)$ si ottengono le due equazioni seguenti:

$$\left\{1+\frac{c^2}{b'^2}+\left(\frac{ac}{b'}+b\right)^2\right\}.U_3^2$$
$$+2\left\{\left(\frac{ac}{b'}+b\right).\left(\frac{a}{b'}.u+d+ae\right)+\frac{c}{b'}\left(\frac{u}{b'}+e\right)+f.\frac{c}{b'}+g\right\}.U_3$$
$$+\left(\frac{a}{b'}.u+d+ae\right)^2+\left(\frac{u}{b'}+e\right)^2-u^2+2f.\frac{u}{b'}+2ef+m=0\ ,$$

$$(1+a^2+b^2).V_1^2-2\left\{a(b'v+f)-b(cv-g)-d\right\}.V_1+(b'v+f)^2$$
$$+(cv-g)^2-v^2+2eb'v-m=0\ ,$$

e queste che possono subito risolversi, danno i valori cercati di U_3 e V_1. Sostituendo nelle (90) e (91) si ottengono i valori cercati di U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3, e la questione è così completamente risoluta.

Notiamo che i valori di U_1, U_2, U_3 vengono tutti della forma

$$(91)\ldots\ldots\qquad mu+n+a.\sqrt{hu^2+h'u+h''}\ ,$$

e il radicale è lo stesso per tutti; e quelli di V_1, V_2, V_3 hanno la forma

$$(92)\ldots\ldots\qquad \mu v+\nu+\beta.\sqrt{kv^2+k'v+k''}\ ,$$

e il radicale è pure lo stesso per tutti. Questi radicali poi non possono ridursi razionali, e non possono sparire da tutte le funzioni U, nè da tutte le funzioni V, poichè altrimenti le derivate di tutte queste funzioni sarebbero costanti. Nelle ipotesi fatte in principio, essi devono trovarsi almeno in U_3 e V_1.

39. Così la questione della ricerca delle superficie a linee di curvatura piane è completamente risoluta dalle formole precedenti, ed oltre ad averne trovato le equazioni in termini finiti, abbiamo ancora trovato le loro linee di curvatura, i loro raggi di curvatura e i coseni degli angoli della normale alla superficie coi tre assi, e si sono pure trovate le equazioni delle superficie luogo dei loro centri di curvatura. Inoltre le nostre formole

contengono soltanto le due funzioni arbitrarie U e V (le altre essendo determinate come ora abbiamo visto), e poichè queste funzioni contengono una sola variabile, ne viene che i problemi relativi a queste superficie che richiedono la determinazione delle funzioni arbitrarie, come la ricerca delle superficie a linee di curvatura piane dotate di proprietà speciali, dipendono soltanto dalla integrazione di equazioni a derivate ordinarie.

Così, p. es., il problema della ricerca delle superficie a linee di curvatura piane applicabili su quelle di rivoluzione, quello della ricerca delle medesime superficie che sono al tempo stesso gobbe o nelle quali un raggio di curvatura è funzione dell'altro, quello della ricerca delle superficie le cui linee di curvatura sono piane e isoterme, ecc., ecc. dipendono dalla integrazione di equazioni a derivate ordinarie.

Lo studio particolare di ciascuno di questi problemi ci condurrebbe troppo in lungo, e perciò, riserbandomi di trattarli in altro lavoro, per accennare qui come essi possono risolversi, passerò ora ad occuparmi soltanto dell'ultimo, cioè passerò a cercare le superficie non di rivoluzione le cui linee di curvatura sono piane ed isoterme (*).

Per questo osserverò prima di tutto che in questo caso oltre ad aversi le (70) bisogna che si abbia anche

---

(*) Fra le superficie aventi un sistema di linee di curvatura in piani paralleli *quelle, le cui linee di curvatura sono pure isoterme, sono tutte e sole quelle di rivoluzione*, giacchè avendosi in questo caso $\sqrt{E'}=U$, $\sqrt{G'}=U_1 V$, la prima delle (48) dà $r_2=\varphi(u)$, e quindi dalla seconda si ha:

$$r_1 U_1' + U_1 \frac{dr_1}{du} = \varphi(u) U' \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{d}{du}(r_1 U_1) = \varphi(u) U' ;$$

e quindi

$$r_1 U_1 = \int \varphi(u) U' du + V_1 ,$$

essendo V_1 una funzione arbitraria di V. Ma essendo $r_1 = \sqrt{\frac{G}{G'}}$, per le ipotesi fatte, se r_1 contenesse V sarebbe della forma $r_1 = F(u) f(v)$, quindi si dovrebbe avere

$$F(u) f(v) U_1 = \int \varphi(u) U' du + V_1 ;$$

e questa è impossibile a meno che $f(v)$ e V_1 non siano costanti. Di qui risulta che $r_1 = F(u)$, e quindi le linee $u=$ cost. sono circolari e la superficie è di rivoluzione. È a causa di questa circostanza che ho detto di sopra di andare a ricercare le superficie *non di rivoluzione* a linee di curvatura piane e isoterme, e non ho detto di ricercare quelle fra queste superficie che non hanno un sistema di linee di curvatura in piani paralleli.

$$\sqrt{E} = \lambda\,\psi(u)\,, \qquad \sqrt{G} = \lambda\,\psi_1(v)\,,$$

e quindi siccome

$$r_1 = \sqrt{\frac{G}{G'}}\,, \qquad r_2 = \sqrt{\frac{E}{E'}}\,,$$

così qui bisognerà cercare le superficie (82) per le quali si ha:

$$\frac{r_1}{r_2} = -\frac{\varphi(u)}{F(v)}\,,$$

essendo $\varphi(u)$ e $F(v)$ funzioni da determinarsi; quindi la questione si riduce a determinare nelle nostre formole U e V in modo che $\frac{r_1}{r_2}$ si riduca alla forma precedente, in modo cioè che si abbia

$$(93)\ldots\ldots\ldots \quad \frac{-(V-V'v)+U+V'u}{(U-U'u)-V-U'v} = -\frac{\varphi(u)}{F(v)}\,.$$

Incominciamo dal determinare $\varphi(u)$ ed $F(v)$. Osserviamo perciò che le equazioni (49) divengono ora

$$(r_1 - r_2)\cdot\frac{d\log.\lambda}{dv} - \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{dr_2}{dv} = 0\,,$$

$$(r_1 - r_2)\cdot\frac{d\log.\lambda}{du} + \frac{r_2}{r_1}\cdot\frac{dr_1}{du} = 0\,;$$

e quindi per le (71) danno

$$\frac{d\log.\lambda}{dv} = -\frac{r_1}{r_2(u+v)}\,, \qquad \frac{d\log.\lambda}{du} = -\frac{r_2}{r_1(u+v)}\,;$$

e da queste si vede che, affinchè sia $\frac{r_1}{r_2} = -\frac{\varphi(u)}{F(v)}$, bisognerà che si abbia

$$\frac{d}{du}\cdot\left\{\frac{\varphi(u)}{F(v)(u+v)}\right\} = \frac{d}{dv}\cdot\left\{\frac{F(v)}{\varphi(v)(u+v)}\right\}.$$

Da questa si trae

$$\frac{\varphi'(u)(u+v)}{F(v)} - \frac{\varphi(u)}{F(v)} = \frac{F'(v)(u+v)}{\varphi(u)} - \frac{F(v)}{\varphi(u)},$$

ovvero

$$\left\{\varphi(u)\varphi'(u)u - \varphi^2(u)\right\} - \left\{F(v)F'(v)v - F^2(v)\right\} =$$
$$F(v)F'(v)u - \varphi(u)\varphi'(u)v \;;$$

e quindi le funzioni $\varphi(u)$ e $F(v)$ dovranno intanto esser tali che il secondo membro si riduca alla forma $\lambda(u)+\lambda_1(v)$.

Conseguentemente (§ 38), indicando con α, β, ... delle costanti, bisognerà intanto che si abbia

$$\varphi(u)\varphi'(u) = \alpha u + \beta \;, \qquad F(v)F'(v) = \alpha v + \gamma \;;$$

e quindi

$$\varphi^2(u) = \alpha u^2 + 2\beta u + \beta' \;, \qquad F^2(v) = \alpha v^2 + 2\gamma v + \gamma' \;;$$

e per questa la precedente diverrà

$$-\beta u - \beta' + \gamma v + \gamma' = \gamma u - \beta v \;,$$

e darà

$$\gamma = -\beta \;, \qquad \beta' = \gamma' \;;$$

e per conseguenza si avrà

$$(94) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \varphi^2(u) = \alpha u^2 + 2\beta u + \beta' = \Delta \;, \\ F^2(v) = \alpha v^2 - 2\beta v + \beta' = \delta \;; \end{cases}$$

indicando con Δ e δ le funzioni $\alpha u^2 + 2\beta u + \beta'$, $\alpha v^2 + 2\beta v + \beta'$.

Determinate così le funzioni $\varphi(u)$ ed $F(v)$ passiamo a determinare le funzioni U e V che soddisfanno alla (93).

Osserviamo perciò che la (93) può scriversi

$$(95) \ldots\ldots \quad (U - U'u)\varphi(u) - (V - V'v)F(v) =$$
$$V\varphi(u) + vU'\varphi(u) - F(v)U - F(v)V'u \;,$$

e quindi si vede intanto che le funzioni U e V devono esser tali che la derivata seconda rispetto ad u e a v del secondo membro sia nulla. Bisognerà dunque che si abbia

$$(96)\quad V'\varphi'(u)+U''\varphi(u)+U'\varphi'(u)-F'(v)\,U'-F'(v)\,V'-F(v)\,V''=0\ ,$$

e per questo bisognerà che la funzione

$$V'\varphi'(u)-F'(v)\,U'$$

si riduca alla forma $\lambda(u)+\lambda_1(v)$.

Ciò posto, osserviamo che dalle (94) si vede che $\varphi(u)$ e $F(v)$ non possono esser funzioni lineari che insieme, giacchè se Δ diviene un quadrato, tale diviene pure δ, e quindi $\varphi'(u)$ e $F'(v)$ non potranno ridursi costanti che insieme. Escludiamo per ora questo caso; allora $\varphi'(u)$ e $F'(v)$ essendo variabili, affinchè la condizione precedente sia soddisfatta, bisognerà che si abbia (§ 38):

$$U'=a\varphi'(u)+b\ ,\qquad V'=aF'(v)+b'\ ;$$

essendo a, b, ... delle costanti. Di qui si trae

$$U=a\varphi(u)+bu+c\ ,\qquad V'=aF'(v)+b'v+c'\ ,$$

e per le (94), prendendo, per comprendere tutti i casi, una delle due funzioni $\varphi(u)$ e $F(v)$, per es. $F(v)$, col doppio segno, si avrà:

$$U=a.\sqrt{\Delta}+bu+c\ ,\qquad V=\pm a.\sqrt{\delta}+b'v+c'\ .$$

Da queste si ha:

$$U'=a.\frac{\alpha u+\beta}{\sqrt{\Delta}}+b\ ,\qquad V'=\pm a.\frac{\alpha v-\beta}{\sqrt{\delta}}+b'\ ,$$

e quindi la (95), per queste e pei valori $\sqrt{\Delta}$ e $\pm\sqrt{\delta}$ di $\varphi(u)$ e $F(v)$, diverrà la seguente:

$$(c-c').\sqrt{\Delta}\pm(c-c').\sqrt{\delta}=(b+b')\,v.\sqrt{\Delta}\mp(b+b')\,u.\sqrt{\delta}\ .$$

Ora questa, per essere soddisfatta senza che $\sqrt{\Delta}$ e $\sqrt{\delta}$ siano razionali, richiede che si abbia:

$$c = c' , \qquad b' = -b ;$$

quindi si può concludere che le superficie a linee di curvatura piane e isoterme, corrispondenti al caso in cui $\varphi(u)$ e $F(v)$ non sono razionali, sono quelle le cui equazioni si hanno dalle (82), ponendovi per U e V i valori seguenti:

$$(97) \ldots\ldots \begin{cases} U = \quad a . \sqrt{\alpha u^2 + 2\beta u + \beta'} + b u + c , \\ V = \pm a . \sqrt{\alpha v^2 - 2\beta v + \beta'} - b v + c , \end{cases}$$

ove $\beta^2 - \alpha\beta'$ è differente da zero.

Queste equazioni si hanno sotto forma finita con sole quadrature, e qui non starò a trovarle. Solo osserverò che, avendo riguardo a questi valori di U e V, e a quelli delle altre funzioni U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3 che entrano nella (82), e che contengono esse pure un radicale quadrato [form. (91) e (92)], che non può mai ridursi razionale, si conclude che le equazioni di queste superficie, quando α, β e β' sono qualunque, vengono a contenere dei trascendenti ellittici sì in u che in v.

I raggi di curvatura r_1 e r_2 di queste superficie, per le (85), sono dati dalle formole

$$r_1 = a(\sqrt{\Delta} \mp \sqrt{\delta}) \pm \frac{a}{\sqrt{\delta}} (\alpha v - \beta)(u + v) = a(\sqrt{\Delta} \mp \sqrt{\delta}) \pm a \frac{d.\sqrt{\delta}}{dv} (u + v) ,$$

$$r_2 = a(\sqrt{\Delta} \mp \sqrt{\delta}) - \frac{a}{\sqrt{\Delta}} (\alpha u + \beta)(u + v) = a(\sqrt{\Delta} \mp \sqrt{\delta}) - a \frac{d.\sqrt{\Delta}}{du} (u + v) ,$$

e il loro rapporto è $\mp \sqrt{\frac{\Delta}{\delta}}$.

40. Considerato così il caso in cui i valori di $\varphi(u)$ e $F(v)$ non possono ridursi razionali, resta a considerarsi quello in cui essi siano razionali, cioè quello in cui si abbia

$$\varphi(u) = m u + n , \qquad F(v) = \pm m v \mp n ,$$

ove i segni delle costanti devono prendersi nel modo che qui abbiamo fatto a causa delle (94).

Distinguiamo perciò i due casi di $m=0$ e di m differente da zero. Per $m=0$ si ha $r_1=\pm r_2$, e quindi si vede che siamo nel caso della sfera e delle superficie di area minima aventi le linee di curvatura piane. Per queste ultime dalla (94) si troverebbero per U e V i valori seguenti:

$$U=au^2+bu+c\ , \qquad V=av^2-bv+c\ ,$$

ove a, b, c sono costanti arbitrarie.

Per m differente da zero osserviamo prima che potendo aumentare u della costante $-\frac{n}{m}$, purchè si diminuisca v della stessa quantità, così si può supporre

$$\varphi(u)=mu\ , \qquad F(v)=\pm mv\ ,$$

e per le superficie corrispondenti si avrà ora

$$\frac{r_1}{r_2}=\mp\frac{u}{v}\ .$$

Ora, in questa ipotesi, la (96) diviene

$$(U'u)'\mp U'\mp(V'v)'+V'=0\ ,$$

e dà

$$(U'u)'\mp U'=2c\ , \qquad (V'v)'\mp V'=\pm 2c\ ;$$

e quindi

$$(98)\ \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} U'u\mp U= \quad 2cu+d\ , \\ V'v\mp V=\pm 2cv+d'\ , \end{cases}$$

essendo c, d, d' delle costanti.

Da queste, quando si consideri il segno superiore di U e V, si ha

$$\left(\frac{U}{u}\right)'=2\cdot\frac{c}{u}+\frac{d}{u^2}\ , \qquad \left(\frac{V}{v}\right)'=2\cdot\frac{c}{v}+\frac{d'}{v^2}\ ;$$

e quindi

$$(99) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} U = 2\,c\,u \log. u - d + e\,u\,, \\ V = 2\,c\,v \log. v - d' + e'\,v\,, \end{cases}$$

essendo e, e' due altre costanti.

Quando poi nelle (98) si considerino i segni inferiori si ha:

$$(100) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} U = \quad c\,u + \dfrac{d}{u} + e\,, \\ V = -\,c\,v + \dfrac{d'}{v} + e'\,; \end{cases}$$

e ora restano solo a determinarsi le costanti in modo che la (94) riesca soddisfatta dai valori trovati in questi due casi per U' e V'.

Ora, sostituendo nella (95), nel caso che si abbiano le (99), si trova che deve aversi

$$-(d + 2\,c\,u)\,u + (d' + 2\,c\,v)\,v = d\,v - d'\,u\,,$$

ciò che porta $c = 0$, $d = d'$; quindi in questo caso si ha

$$U = e\,u - d\,, \qquad V = e'\,v - d\,;$$

e perciò

$$r_1 = (e + e')\,u\,, \qquad r_2 = -(e + e')\,v\,;$$

e da queste, siccome le linee di curvatura sono piane e i raggi di curvatura principali sono costanti lungo la linea di curvatura corrispondente, pel teorema di Meunier se ne conclude che queste linee sono circolari.

Resta a considerarsi il caso in cui si hanno le (100). In questo caso siccome dalle (100) stesse si deduce

$$U' = c - \frac{d}{u^2}\,, \qquad V' = c - -\frac{d'}{v^2}\,,$$

sostituendo nella (95) si vede che bisognerà che si abbia $d = -d'$, $e = e'$, e quindi ne verrà

$$(101) \ldots \qquad U = cu + \frac{d}{u} + e \ , \quad V = -cv - \frac{d}{v} + e \ ,$$

e se ne concluderà che fra le superficie a linee di curvatura piane e isoterme vi sono ancora quelle le cui equazioni si ottengono dalle (82) ponendovi per U e V questi valori (101). I raggi di curvatura di queste superficie sono

$$r_1 = \frac{d(u+v)^2}{uv^2} \ , \qquad r_2 = \frac{d(u+v)^2}{u^2 v} \ ,$$

e il loro rapporto è $\frac{u}{v}$.

Riassumendo dunque coll'osservare che ogni superficie che ha le linee di curvatura circolari, le ha pure isoterme, giacchè avendosi

$$r_1 = \lambda(u) \ , \qquad r_2 = \lambda(v) \ ,$$

riesce sempre soddisfatta la equazione (50) che caratterizza le superficie a linee di curvatura isoterme, se ne potrà concludere ora il seguente teorema:

Le superficie non di rivoluzione le cui linee di curvatura sono al tempo stesso piane e isoterme, sono quelle le cui linee di curvatura sono circolari (superficie cicliche di Dupin), *quelle di area minima le cui linee di curvatura sono piane, e quelle le cui equazioni in termini finiti si ottengono subito dalle* (82) *dando a U e V i valori irrazionali* (97), *e i valori* (101). In queste superficie (non escluse, se vuolsi, quelle di area minima) il rapporto dei quadrati dei raggi di curvatura r_1 e r_2 è il rapporto di due funzioni di secondo grado dei parametri u e v respettivamente.

41. Per mostrare qui un'altra applicazione delle formole (48) e (49), e del teorema del § 30, darò anche il seguente teorema: *le superficie a linee di curvatura circolari sono le sole superficie nelle quali i raggi di curvatura sono costanti lungo le linee di curvatura corrispondenti.*

Per dimostrarlo osserviamo che, avendosi in questo caso $r_1 = U$, $r_2 = V$, ove U e V sono funzioni di u e v soltanto, le equazioni (50)

e (51) sono subito soddisfatte, e quindi le linee di curvatura e le loro rappresentazioni sferiche sono linee isoterme sulle respettive superficie.

Conseguentemente si avrà:

$$E' = \lambda U_1 , \qquad G' = \lambda V_1 ;$$

e perciò le equazioni (48) diverranno

$$(102) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} (U - V) . \dfrac{d \log. \sqrt{\lambda}}{d \varphi} - V' = 0 , \\ (U - V) . \dfrac{d \log. \sqrt{\lambda}}{d u} + U' = 0 . \end{cases}$$

Da queste si trae

$$U' . \frac{d \log. \sqrt{\lambda}}{d \varphi} + V' . \frac{d \log. \sqrt{\lambda}}{d u} = 0 ,$$

e quindi, integrando colle regole note, si ottiene

$$(103) \ldots\ldots \quad \log. \sqrt{\lambda} = \varphi (U + V) , \qquad \sqrt{\lambda} = e^{\varphi (U+V)} .$$

Per questa, osservando che delle funzioni U e V una almeno non può essere costante, e supponendo che questa non sia la V, dalla prima delle formole (102) si avrà:

$$(U - V) \varphi' (U + V) = 1 ,$$

e da questa si dedurrà l'altra

$$(U - V) \varphi'' (U + V) - \varphi' = 0 ,$$

che per la precedente diviene

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = \varphi' ,$$

e dà integrando

$$\log. \varphi' = \varphi + \log. c ,$$

essendo c una costante. Di qui si trae

$$\varphi' = c\, e^{\varphi} \qquad \text{ovvero} \qquad e^{-\varphi}\varphi' = c\ ,$$

e integrando

$$e^{-\varphi} = -c(U+V) + c'\ ,$$

essendo c' un'altra costante. Per questa la (103) diviene

$$\sqrt{\lambda} = \frac{1}{c' - c(U+V)}\ ;$$

e di qui si vede che l'elemento lineare della sfera prende la forma (59) o (60), e se ne conclude che le linee di curvatura della superficie sono piane, e quindi, pel teorema di Meunier, come anche si è visto nel paragrafo precedente, esse sono circolari.

Notiamo che da questi teoremi risulta inoltre che l'elemento lineare delle superficie a linee di curvatura circolari quando si prendono queste linee per coordinate si può ridurre alla forma

$$ds'^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(U+V)^2}\ ;$$

e notiamo ancora che si può ora concludere anche che *il toro è la sola superficie canale i cui raggi di curvatura siano costanti lungo le linee di curvatura corrispondenti;* o anche: *è la sola superficie canale le cui linee di curvatura siano tutte circolari.*

41. Terminerò questo lavoro dimostrando qui per mezzo delle equazioni (49) una formola data senza dimostrazione dal sig. Bonnet nei *Nouvelles Annales* 1865 sul raggio di curvatura delle asintotiche delle superficie a curvature opposte, e di cui il sig. Beltrami dette già una dimostrazione nel *Giornale di matematiche di Napoli* pel 1866.

Osserviamo perciò che le asintotiche avendo il loro piano osculatore tangente alla superficie hanno per raggio di curvatura il raggio di curvatura geodetica stessa, e quindi per trovarlo basterà prendere l'equazione differenziale delle asintotiche e applicare ad esse la formola che dà il raggio di curvatura geodetica di una linea definita dalla sua equazione differenziale.

Per questo ricordiamo che ritenendo ancora le notazioni precedenti, cioè supponendo che si abbia:

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2\,,$$

ove le linee u e v sono le linee di curvatura, siccome per una linea qualunque che fa l'angolo α colle linee v si ha:

$$tg\,\alpha = \sqrt{\frac{G}{E}} \cdot \frac{dv}{du}\,,$$

e per le asintotiche si ha (§ 20):

$$tg\,\alpha = \pm \sqrt{\frac{r_1}{-r_2}}\,,$$

ove r_1 e r_2 sono di segno contrario, così se si suppone che r_2 sia il raggio di curvatura negativo, l'equazione differenziale delle asintotiche sarà la seguente:

$$\sqrt{\frac{-E}{r_2}} \cdot du \mp \sqrt{\frac{G}{r_1}} \cdot dv = 0\,.$$

Ora, se

$$m\,du + n\,dv = 0$$

è l'equazione differenziale di un sistema di linee, la loro curvatura geodetica $\frac{1}{\rho}$ è data dalla formola (V. Bonnet: *Mémoire sur un nouveau système des variables etc. - Journal de Lionville*, 1860):

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{1}{\sqrt{EG}} \cdot \left\{ \frac{d}{du}\left(\frac{Gm}{\sqrt{En^2+Gm^2}}\right) + \frac{d}{dv}\left(\frac{En}{\sqrt{En^2+Gm^2}}\right) \right\};$$

quindi la curvatura delle asintotiche sarà

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{1}{\sqrt{EG}} \cdot \left\{ \frac{d}{du}\left(\sqrt{G} \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{r_2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}}\right) \mp \frac{d}{dv}\left(\sqrt{E} \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{r_1}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}}\right) \right\},$$

ovvero

$$\frac{1}{\rho}=\pm\frac{1}{\sqrt{EG}}\cdot\left\{\sqrt{G}\cdot\frac{d}{du}\left(\sqrt{\frac{-\frac{1}{r_2}}{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}}\right)+\frac{d.\sqrt{G}}{du}\cdot\sqrt{\frac{-\frac{1}{r_2}}{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}}\mp\sqrt{E}\cdot\frac{d}{dv}\left(\sqrt{\frac{\frac{1}{r_1}}{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}}\right)\mp\frac{d.\sqrt{E}}{dv}\cdot\sqrt{\frac{\frac{1}{r_1}}{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}}\right\},$$

e quindi per le (49) si avrà:

$$\frac{1}{\rho}=\pm\frac{1}{\sqrt{EG}}\cdot\left\{\sqrt{G}\cdot\left\{\frac{d}{du}\left(\sqrt{\frac{-\frac{1}{r_2}}{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}}\right)-\frac{d\frac{1}{r_1}}{du}\frac{\sqrt{-\frac{1}{r_2}}}{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right\}\mp\sqrt{E}\cdot\left\{\frac{d}{dv}\left(\sqrt{\frac{\frac{1}{r_1}}{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}}\right)-\frac{d\left(-\frac{1}{r_2}\right)}{dv}\frac{\sqrt{\frac{1}{r_1}}}{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right\}\right\}.$$

Eseguendo le derivazioni indicate e riducendo si trova

$$\frac{1}{\rho}=\pm\frac{1}{\sqrt{EG}}\cdot\left\{\frac{\sqrt{G}}{2\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{-\frac{1}{r_2}}}\cdot\left(\frac{3}{r_2}\cdot\frac{d\frac{1}{r_1}}{du}-\frac{1}{r_1}\cdot\frac{d\frac{1}{r_2}}{du}\right)\mp\frac{\sqrt{E}}{2\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{1}{r_1}}}\cdot\left(\frac{3}{r_1}\cdot\frac{d\frac{1}{r_2}}{dv}-\frac{1}{r_2}\cdot\frac{d\frac{1}{r_1}}{dv}\right)\right\}=$$

$$\pm\frac{1}{\sqrt{EG}}\cdot\left\{\frac{-\sqrt{G}\,r_1^{\,2}}{2\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{-\frac{1}{r_2}}\cdot r_2^{\,2}}\frac{d}{du}\left(\frac{-r_2}{r_1^{\,3}}\right)\pm\frac{\sqrt{E}\,r_2^{\,2}}{2\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{1}{r_1}}\cdot r_1^{\,2}}\frac{d}{dv}\left(\frac{-r_1}{r_2^{\,3}}\right)\right\},$$

o anche, osservando che $\sqrt{E}\,du$ e $\sqrt{G}\,dv$ sono appunto gli elementi lineari ds_v, ds_u delle linee di curvatura $v=\text{cost.}$, $u=\text{cost.}$:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{2\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left\{r_1^{\,2}(-r_2)^{-\frac{3}{2}}\frac{d}{ds_v}\left(\frac{-r_2}{r_1^{\,3}}\right)\pm r_2^{\,2}r_1^{\,-\frac{3}{2}}\frac{d}{ds_u}\left(\frac{-r_1}{r_2^{\,3}}\right)\right\}.$$

Per ridurre questa formola alla forma datale dal sig. Bonnet osserviamo che

$$d\left(\frac{-r_2}{r_1^{\,3}}\right)^{\frac{1}{8}}=\frac{1}{8}\left(\frac{-r_2}{r_1^{\,3}}\right)^{-\frac{7}{8}}d\left(\frac{-r_2}{r_1^{\,3}}\right),$$

$$d\left(\frac{-r_1}{r_2^{\,3}}\right)^{\frac{1}{8}}=\frac{1}{8}\left(\frac{-r_1}{r_2^{\,3}}\right)^{-\frac{7}{8}}d\left(\frac{-r_1}{r_2^{\,3}}\right);$$

per queste se ne dedurrà subito l'altra

$$\frac{1}{\rho}=\mp\frac{4(-r_1r_2)^{\frac{7}{8}}}{(r_1-r_2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left\{\frac{d}{ds_v}\left(\frac{-r_2}{r_1^{\,3}}\right)^{\frac{1}{8}}\pm\frac{d}{ds_u}\left(\frac{-r_1}{r_2^{\,3}}\right)^{\frac{1}{8}}\right\},$$

la quale, all' infuori dei segni, è la formola del sig. Bonnet, e nella quale i differenziali si intendono presi lungo le linee di curvatura.