SOPRA

LA DETERMINAZIONE DELLE TEMPERATURE

NEI

CORPI SOLIDI ED OMOGENEI

MEMORIA

DI

ENRICO BETTI

La determinazione delle temperature di un corpo solido omogeneo, quando queste sono note in un dato tempo in tutto il corpo, e sono date in alcune parti della superficie in tutto il tempo che si considera, mentre altre parti sono esposte all'aria libera, della quale sono note le temperature, è stata ridotta da Fourier e da Poisson alla integrazione di una equazione a derivate parziali lineare di secondo ordine, con date condizioni ai limiti. Nella presente Memoria dimostro prima che esiste sempre una sola funzione del tempo e dei punti del corpo, che sodisfa a quella equazione a derivate parziali e a queste condizioni ai limiti, e trovo alcuni principii analoghi a quelli ai quali suol ridursi la meccanica razionale. Quindi per eseguire la integrazione applico il metodo della funzione moltiplicatrice, che è di tanto vantaggio in altre parti della fisica matematica, e che pone

in luce un principio importante, cioè che ad ogni fenomeno di propagazione continua ne corrisponde uno identico dovuto ad un'azione a distanza, che varia con legge determinata, il quale colla proposizione reciproca rende possibile di concepire ogni stato della materia, o come dipendente solo dallo stato dei punti infinitamente vicini, o come dovuto ad azioni esercitate a distanza.

Ho determinato poi le temperature stazionarie di una sfera con una sorgente costante di calore in un punto, quando con tutta la sua superficie sia esposta all'aria libera, e di una mezza sfera quando nella parte piana sia mantenuta a temperature date, e la parte sferica della superficie sia esposta all'aria libera.

Nel caso delle temperature variabili ho considerato i due casi di un parallelepipedo rettangolo e di una sfera le cui superficie sono mantenute a temperature date comunque, i quali ambedue danno una nuova applicazione delle funzioni *Jacobiane*. Ho osservato poi che la determinazione delle temperature dei corpi celesti dipende dalla stessa funzione moltiplicatrice. Onde, tenendo anche conto delle variazioni di temperatura dello spazio in cui si trova l'astro, le quali debbono avvenire col tempo secondo la ipotesi di Poisson, ho ottenuto le temperature dei diversi strati di un corpo celeste per mezzo di due integrali definiti, il primo dei quali è un integrale semplice che ha per elementi i valori delle temperature iniziali moltiplicati per la differenza di due funzioni *Jacobiane*, e il secondo è un integrale doppio che ha per elementi i valori delle temperature dello spazio moltiplicati anch'essi per la differenza di due funzioni *Jacobiane*. Con una trasformazione di primo ordine di queste funzioni, dalla formola adattata a un tempo grandissimo da che è principiato il raffreddamento, si deduce quella adattata ai tempi prossimi al principio del medesimo. Dal primo integrale si può anche ottenere facilmente la espressione che il mio amico Brioschi dedusse dalla serie data da Fourier per le temperature degli strati prossimi alla superficie (*).

(*) *Instituto Lombardo*, nuova serie, t. I, pag. 295.

I.

Il problema generale della determinazione delle temperature nei corpi solidi omogenei, come è noto, si riduce alla risoluzione del seguente problema di analisi:

Determinare una funzione v del tempo t, e dei punti di uno spazio connesso S, la quale sodisfaccia alle seguenti condizioni:

1° Sia finita e continua insieme colle sue derivate prime rapporto alle coordinate, da $t=0$ a $t=\infty$ e in tutto lo spazio S, ed in questo campo verifichi la equazione:

$$(1) \ldots\ldots\ldots \qquad \frac{dv}{dt} - k\,\Delta^2 v = 0 \,,$$

dove col simbolo Δ^2 denotiamo la somma delle tre derivate seconde rapporto alle tre coordinate rettilinee ortogonali, e k è uguale al rapporto della conducibilità interna al prodotto del calorico specifico C moltiplicato per la densità D del corpo;

2° Sopra una parte σ' della superficie σ che limita lo spazio S sia:

$$(2) \ldots\ldots\ldots \qquad v = V \,,$$

essendo V una funzione arbitraria dei punti di σ' e del tempo; e sopra la rimanente porzione σ'' della superficie σ verifichi la equazione:

$$(3) \ldots\ldots\ldots \qquad \frac{dv}{dp} = h\,(v - \zeta) \,,$$

dove p denota la normale alla superficie σ'' contata andando da σ'' verso l'interno dello spazio S; h è il rapporto della conducibilità esterna alla conducibilità interna, e ζ una funzione arbitrariamente data del tempo e dei punti di σ'';

3° Per $t = 0$ sia:

$$v = v_0 ,$$

essendo v_0 una funzione arbitrariamente data in tutti i punti di S.

Se le funzioni V e ζ sono indipendenti dal tempo, v_0 sodisfa alla seconda condizione, ed è:

$$(4) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \Delta^2 v_0 = 0 ;$$

è evidente che tutte tre le poste condizioni saranno sodisfatte prendendo:

$$v = v_0 ,$$

e sarà v indipendente dal tempo, cioè le temperature del solido saranno stazionarie e il flusso permanente.

Dimostriamo che la funzione che dà le temperature stazionarie esiste sempre quando V e ζ sono indipendenti dal tempo, e che è unica.

Prendiamo la espressione:

$$\Omega_v = \int_S \Delta v \, ds + h \int_{\sigma''} (v - \zeta)^2 \, d\sigma'' ,$$

dove con Δ denotiamo la somma dei tre quadrati delle derivate prime rapporto alle coordinate rettilinee ortogonali, e consideriamo il campo infinito delle funzioni dei punti di S, le quali sono finite e continue insieme colle loro derivate prime, e prendono sopra σ' valori uguali a quelli della funzione V. È evidente che tra queste infinite funzioni ve ne sarà almeno una che renderà Ω_v un minimo, e quindi:

$$\delta \, \Omega_v = 0 ,$$

e riducendo la variazione con metodi noti:

$$-\int_{\sigma'} \delta v \frac{dv}{dp} d\sigma' - \int_{\sigma''} \delta v \left(\frac{dv}{dp} - h(v - \zeta) \right) d\sigma'' - \int_S \delta v \, \Delta^2 v = 0 .$$

Ora sopra σ':

$$\delta v = 0 \ ,$$

perchè ivi la funzione non varia. Inoltre le variazioni sopra σ'' essendo arbitrarie indipendenti da quelle in S, non potrà verificarsi questa equazione a meno che non sia sopra σ'':

$$(3)' \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \frac{dv}{dp} = h(v - \zeta) \ ,$$

e in tutto lo spazio S:

$$(4)' \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \Delta^2 v = 0 \ .$$

Dunque esisterà almeno una funzione che sodisfarà la seconda condizione e la equazione (4), e che quindi darà temperature stazionarie.

Dimostriamo ora che questa funzione è unica. Supponiamo infatti che di queste funzioni ne esistano due: v ed u. Ambedue renderanno un minimo Ω. Avremo quindi:

$$\Omega_v = \Omega_{v+u-v} = \Omega_v + \int_S \Delta(u - v)\, ds + h \int_{\sigma''} (u - v)^2\, d\sigma'' \ ,$$

$$\Omega_u = \Omega_{u+v-u} = \Omega_u + \int_S \Delta(u - v)\, ds + h \int_{\sigma''} (u - v)^2\, d\sigma'' \ ;$$

e sommando

$$0 = 2 \int_S \Delta(u - v)\, ds + 2h \int_{\sigma''} (u - v)^2\, d\sigma'' \ ,$$

che non può verificarsi a meno che non sia:

$$u - v = \textit{costante}$$

in tutto S; ma

$$u - v = 0$$

sopra σ' e σ'', cioè sopra tutta la superficie σ; quindi:

$$\textit{costante} = 0 \ ,$$

ed

$$u = v$$

in tutto il corpo. Abbiamo dunque il seguente:

Teorema I. — *Esiste sempre una funzione v ed una sola che in tutto uno spazio connesso S è finita e continua insieme colle sue derivate prime e vi sodisfa alla equazione:*

$$\Delta^2 v = 0 ,$$

sopra una parte σ' della superficie che limita S è uguale a V, e nella rimanente σ'' sodisfa alla equazione:

$$\frac{dv}{dp} = h(v - \zeta) ;$$

e soltanto quando le temperature in un dato tempo sono espresse da questa funzione rimangono stazionarie e il flusso permanente.

Poichè, denotando con H la conducibilità esterna e con K la conducibilità interna del corpo, abbiamo:

$$h = \frac{H}{K} ,$$

sarà:

$$K\,\Omega_v = \frac{K^2 \int_S \Delta v\, ds}{K} + \frac{H^2 \int_{\sigma''} (v - \zeta)^2 d\sigma''}{H} ,$$

e $K^2 \Delta v$ ed $H^2 (v - \zeta)^2$ sono proporzionali ai quadrati dei flussi del calore, si ottiene il seguente:

Teorema II. — *Affinchè le temperature siano stazionarie è necessario e sufficiente che siano minimi i quadrati dei flussi divisi per le conducibilità.*

Se $V = 0$ e $\zeta = 0$, la funzione che sodisfa alle condizioni del teorema è

$$v = 0 .$$

Quindi non può aversi stato permanente di temperature quando il corpo abbia in qualche parte temperature diverse da zero, e quando tutte le temperature sono uguali a zero, non è possibile alcun flusso.

II.

Se la funzione v_0, che esprime le temperature iniziali, non sodisfa alla equazione:

$$\Delta^2 v_0 = 0 \ ,$$

ma soltanto alla seconda condizione del § I, le temperature del solido non saranno stazionarie, ma variabili col tempo. Ora la funzione v, come funzione di t, è soggetta alla sola condizione di essere continua e di avere la sua derivata prima finita, quindi è evidente che si potrà prendere in modo che sodisfi alla equazione:

$$\frac{dv}{dt} - k\,\Delta^2 v = 0 \ ,$$

ossia, poichè $k = \frac{K}{CD}$:

$$(5) \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad CD\frac{dv}{dt} = K\Delta^2 v \ .$$

Esiste dunque sempre una funzione che sodisfa alle condizioni del § I, quando V e ζ sono indipendenti dal tempo.

In questo caso la funzione

$$(6) \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \Omega = \frac{K}{2}\int_S \Delta v\, ds + \frac{H}{2}\int_{\sigma''} (v-\zeta)^2\, d\sigma''$$

non sarà un minimo, e la sua variazione nel tempo dt sarà:

$$(7) \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \frac{d\Omega}{dt}\,dt = -K\,dt\int_S \frac{dv}{dt}\,\Delta^2 v\, ds \ ;$$

sostituendo nella equazione (7) il valore di $K\Delta^2 v$ tratto dalla (5), si ottiene:

$$\frac{d\Omega}{dt}dt = -CD\,dt\int_S \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 ds\,,$$

e integrando fra $t=0$ e $t=t'$, si ha:

$$(8)\ \ldots\ldots\ldots\ \ \Omega_0 - \Omega_t = CD\int_0^t dt\int_S \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 ds\,,$$

la quale esprime un principio generale che può enunciarsi nel modo seguente:

Teorema III. — *Se le temperature iniziali non sono stazionarie e le condizioni alla superficie sono indipendenti dal tempo, le variazioni di temperatura avvengono in modo, che la somma dei quadrati delle variazioni delle temperature, estesa a tutto il corpo da $t=0$ a $t=t'$ e moltiplicata per CD, è uguale alla diminuzione della metà della somma dei rapporti dei quadrati dei flussi alle conducibilità.*

L'equazione (8) ci mostra che dopo un tempo più o meno lungo dovranno aversi le temperature stazionarie, qualunque siano le iniziali. Infatti, il secondo membro necessariamente aumenta col tempo finchè le temperature non sono stazionarie; quindi deve aumentare anche il primo, ed Ω_t convergere al valore minimo.

Se V e ζ sono variabili col tempo, la variazione di Ω è data da

$$-K\int_S \frac{dv}{dt}\Delta^2 v\,ds - K\int_{\sigma'} \frac{dV}{dt}\frac{dv}{dp}\,d\sigma' - H\int_{\sigma''} \frac{d\zeta}{dt}(v-\zeta)\,d\sigma''\,;$$

quindi, prendendo

$$CD\frac{dv}{dt} = K\Delta^2 v\,,$$

invece della equazione (8), abbiamo:

$$(9)\quad \int_0^t dt \left\{ CD \int_S \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 ds + K \int_{\sigma'} \frac{dV}{dt}\frac{dv}{dp}\, d\sigma' + H \int_{\sigma''} \frac{d\zeta}{dt}(v-\zeta)\, d\sigma'' \right\} =$$

$$\Omega_0 - \Omega_t \;;$$

ed abbiamo il seguente principio :

Teorema IV. — *Le temperature di un corpo variano in modo, che la somma dei quadrati delle variazioni moltiplicata per CD in tutto il corpo e in tutto il tempo da $t = 0$ a $t = t'$, più la somma delle variazioni delle temperature date sopra la superficie moltiplicate per i rispettivi flussi, più la somma delle variazioni della funzione ζ moltiplicate per i flussi che vi corrispondono alla superficie, sia uguale alla diminuzione della metà della somma dei rapporti dei quadrati dei flussi iniziali alle conducibilità.*

Rimane ora da dimostrare che le condizioni poste al principio del § I determinano la funzione v, in guisa che non vi possono essere due funzioni differenti che le sodisfacciano tutte.

Supponiamo che vi siano due funzioni v ed u, che in tutto il tempo ed in tutto lo spazio S sodisfacciano a quelle condizioni. Ponendo :

$$w = v - u \;,$$

avremo :

$$\frac{dw}{dt} = k\,\Delta^2 w$$

in tutto S. Sopra la superficie σ' :

$$w = 0 \;,$$

e sopra σ'' :

$$\frac{dw}{dp} = h\,u \;.$$

Per $t = 0$:

$$w = 0 \;;$$

ora abbiamo veduto che con queste condizioni si ha (§ I):

$$w = 0$$

in tutto il tempo ed in tutto lo spazio S. Dunque:

$$v = w \ .$$

Quindi:

Teorema V. — *Esiste sempre una funzione ed una sola che sodisfa a tutte le condizioni del* § I.

III.

È noto che una funzione v finita e continua insieme colle sue derivate prime in uno spazio connesso S, che in questo sodisfa alla equazione:

$$(10) \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \Delta^2 v = 0 \ ,$$

è data dalla formola:

$$(11) \ldots\ldots\ldots \qquad v' = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(u\frac{dv}{dp} - v\frac{du}{dp}\right) d\sigma \ ,$$

essendo al solito σ la superficie che limita S, p la normale a σ contata andando verso l'interno di S, ed u una funzione che sodisfa in S alla equazione:

$$\Delta^2 u = 0 \ ,$$

che nel solo punto α' di coordinate (x', y', z'), cui si riferisce il valore v', cessa di esser finita e continua, e in esso diviene infinita come $\frac{1}{\rho_{\alpha\alpha'}}$, denotando con $\rho_{\alpha\alpha'}$ la distanza dal punto α' del punto α di coordinate (x, y, z). Poniamo:

(12) ..... $$u = \frac{1}{\rho_{\alpha\alpha'}} + G ,$$

ed assoggettiamo G alle condizioni, che possono sempre essere sodisfatte, di verificare in S la equazione

$$\Delta^2 G = 0 ,$$

di avere sopra una parte σ' della superficie σ i valori della funzione $-\frac{1}{\rho_{\alpha\alpha'}}$, e sopra la rimanente parte σ'' di verificare la equazione:

$$\frac{dG}{dp} - hG = \frac{h}{\rho_{\alpha\alpha'}} - \frac{d\frac{1}{\rho_{\alpha\alpha'}}}{dp} ,$$

e di essere finita e continua insieme colle sue derivate prime in tutto lo spazio S.

Ponendo questa funzione G nel valore (12) di u, abbiamo una funzione che sodisfa nello spazio S alla equazione:

$$\Delta^2 u = 0 ,$$

sopra σ':

$$u = 0 ,$$

sopra σ'':

$$\frac{du}{dp} = hu ,$$

e se descriviamo una sfera infinitesima intorno al punto α', sopra la superficie di questa sfera avrà valori costanti. Quindi u rappresenta le temperature stazionarie in un solido omogeneo che ha una temperatura costante sopra una sfera piccolissima col centro nel punto α', ossia che ha in un punto dato α' qualunque una sorgente costante di calore, che ha una parte σ' di superficie alla temperatura zero, e l'altra σ'' esposta all'aria libera che pure è alla temperatura zero.

Sostituendo questa funzione u nella formula (11) abbiamo:

$$(13)\ldots \qquad v' = -\frac{1}{4\pi}\int_{\sigma'} v\,\frac{du}{dp}\,d\sigma' - \frac{1}{4\pi}\int_{\sigma''} u\left(\frac{dv}{dp} - hv\right)d\sigma''.$$

Onde, determinata per un corpo solido di data forma la funzione G, e quindi la u, saranno determinate le temperature stazionarie corrispondenti a temperature date comunque in una parte di superficie, qualunque anche sieno le temperature degli spazi ai quali sono esposte le parti libere della superficie.

IV.

Lo spazio S occupato dal solido sia una sfera di raggio R, e tutta la superficie di questa sia mantenuta a temperature date.

La funzione u in questo caso è:

$$u = \frac{1}{\rho_{\alpha\alpha'}} - \frac{R}{r'\,\rho_{\alpha\beta'}},$$

dove r' è la distanza del punto α' dal centro della sfera, e β' è il punto reciproco ad α' rispetto alla sfera di raggio R, cioè è il punto che si trova sul prolungamento di r' alla distanza $\frac{R^2}{r'}$ dal centro della sfera. Da quanto abbiamo detto sul significato generale di u nel numero precedente si ricava il seguente:

Teorema VI. — *La temperatura stazionaria di una sfera che ha in un punto α' una sorgente costante di calore, e la superficie mantenuta ad una temperatura costante uguale a zero, è uguale alla funzione potenziale del punto α', e del punto reciproco ad α' rispetto alla sfera, quando da questi emanino due forze una attrattiva e l'altra ripulsiva, che agiscono secondo la legge di* Newton, *e le cui intensità sono nel rapporto di r' ad R; e il flusso permanente del calore in ogni punto della sfera è uguale in intensità e direzione all'azione che vi eserciterebbero queste forze.*

Se le temperature saranno sopra la superficie della sfera mantenute costantemente uguali a quelle espresse dalla funzione arbitrariamente data V, avremo per le temperature stazionarie:

$$v' = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{V\, d.\frac{1}{\rho_{\alpha\alpha'}}}{dr} - \frac{R}{4\pi r'}\int_\sigma \frac{V\, d.\frac{1}{\rho_{\alpha\beta'}}}{dr}\, d\sigma\ .$$

V.

Sia ora la sfera di raggio R immersa in uno spazio le cui temperature siano date nelle diverse direzioni, ed h sia il rapporto della conducibilità esterna alla interna. Dovremo determinare la funzione u in modo che sia in tutta la sfera:

$$(4)'' \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \Delta^2 u = 0\ ,$$

e sopra la superficie:

$$\frac{du}{dr} + hu = 0\ ;$$

poichè

$$\frac{du}{dp} = -\frac{du}{dr}\ .$$

La funzione che sodisfa a queste condizioni è:

$$(14)\ \ldots\quad u = \frac{1}{\rho_{\alpha\alpha'}} + \frac{R}{r'\rho_{\alpha\beta'}} + \frac{(1-2hR)R^{2hR-1}}{r'^{hR}}\int_{\frac{R^2}{r'}}^{\infty}\frac{dx}{x^{hR}\rho_{\alpha\gamma}}\ ,$$

dove γ denota un punto sopra il prolungamento di r' distante dal centro di una lunghezza x. Tutti i termini di questa funzione verificano la equazione (4), poichè:

$$\Delta^2 \frac{1}{\rho_{\alpha\delta}} = 0\ ,$$

qualunque sia il punto δ. Abbiamo poi per $r = R$:

$$\frac{du}{dr} = -\frac{1}{R\rho_{\alpha\alpha'}} + \frac{(1-2hR)R^{2hR-1}}{r'^{hR}} \int_{\frac{R^2}{r'}}^{\infty} \frac{dx}{x^{hR}} \left\{ \frac{d\frac{1}{\rho_{\alpha\gamma}}}{dr} \right\}_{r=R}.$$

Ma

$$\frac{d\frac{1}{\rho_{\alpha\gamma}}}{dr} = -\frac{x}{r}\frac{d\frac{1}{\rho_{\alpha\gamma}}}{dx} - \frac{1}{r\rho_{\alpha\gamma}};$$

onde:

$$\frac{du}{dr} = -\frac{1}{R\rho_{\alpha\alpha'}} - \frac{(1-2hR)R^{2hR-2}}{r'^{hR}} \int_{\frac{R^2}{r'}}^{\infty} dx \left\{ \frac{1}{x^{hR-1}} \frac{d\frac{1}{\rho_{\alpha\gamma}}}{dx} + \frac{1}{x^{hR}\rho_{\alpha\gamma}} \right\},$$

$$hu = \frac{2hR}{R\rho_{\alpha\alpha'}} + \frac{(1-2hR)R^{2hR-2}}{r'^{hR}} \int_{\frac{R^2}{r'}}^{\infty} \frac{hR\,dx}{x^{hR}\rho_{\alpha\gamma}};$$

e quindi:

$$\frac{du}{dr} + hu = \frac{(2hR-1)}{R} \left\{ \frac{1}{\rho_{\alpha\alpha'}} - \frac{R^{2hR-1}}{r'^{hR}} \int_{\frac{R^2}{r'}}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{1-hR}}{\rho_{\alpha\gamma}}\right) dx \right\} =$$

$$\frac{2hR-1}{R}\left(\frac{1}{\rho_{\alpha\alpha'}} - \frac{R}{r'\rho_{\alpha\beta'}}\right)_{r=R} = 0.$$

Osservando il significato della funzione u trovato al § III, abbiamo il seguente:

Teorema VII. — *Le temperature stazionarie dei punti di una sfera di raggio R, la quale ha in un suo elemento α' una sorgente costante di calore, e la superficie esposta all'aria libera alla temperatura zero, sono date dalla funzione potenziale del punto α', del punto β' reciproco ad α' rispetto alla sfera, e di una retta che si estende da β' all'infinito nella direzione del raggio che va ad α'; quando una materia che agisca*

colla legge di NEWTON *sia in* α' *colla densità* 1, *in* β' *colla densità* $\frac{R}{r'}$, *e nei punti* γ *della retta colle densità* $\frac{(1-2hR)R^{2hR-1}}{r'^{hR}x^{hR}}$, *denotando con* x *le loro distanze dal centro.*

Se una sfera sia esposta colla sua superficie all'aria libera, ma le condizioni di temperatura nelle differenti direzioni si mantengano continuamente differenti, allora alla superficie avremo:

$$\frac{dv}{dp} = h(v - \zeta) ,$$

essendo ζ una funzione dei punti della superficie, e quindi, prendendo per u la funzione (14), avremo dalla equazione (13), in cui σ' è posto uguale a zero e σ'' è la superficie totale della sfera σ di raggio R:

$$v = \frac{h}{4\pi}\int_{\sigma} u\zeta\, d\sigma .$$

Questa funzione non è altro che il potenziale della materia, di cui u è funzione potenziale, sopra una materia distribuita sopra la superficie della sfera colla densità $\frac{h\zeta}{4\pi}$.

VI.

Prendiamo ora un solido omogeneo terminato da una mezza sfera di raggio R e da un piano ω che passa per il centro della sfera.

È facile a verificarsi che la funzione

$$(15) \ldots \quad u = \frac{1}{\rho_{\alpha\alpha'}} + \frac{R}{r'\rho_{\alpha\beta'}} + (1-2hR)\frac{R^{2hR-1}}{r'^{hR}}\int_{\frac{R^2}{r'}}^{\infty}\frac{dx}{x^{hR}\rho_{\alpha\gamma}}$$

$$- \frac{1}{\rho_{\alpha\alpha''}} - \frac{R}{r'\rho_{\alpha\beta''}} - (1-2hR)\frac{R^{2hR-1}}{r'^{hR}}\int_{\frac{R^2}{r'}}^{\infty}\frac{dx}{x^{hR}\rho_{\alpha\gamma'}} ,$$

dove α'', β'', γ' sono punti simmetrici rispettivamente ai punti α', β' γ, rispetto al piano ω; sodisfa alle seguenti condizioni: in tutto il solido è:

$$\Delta^2 u = 0 \ ;$$

sopra il piano ω:

$$u = 0 \ ;$$

sopra la superficie della mezza sfera:

$$\frac{du}{dp} = hu \ .$$

Quindi se il piano ω è mantenuto a temperatura costante espressa da una funzione V dei suoi punti, e se lo spazio in cui è immerso il solido è alla temperatura zero, dalla formula (13) avremo:

$$v' = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} V \frac{du}{dz} \, d\omega \ ,$$

dove v' denota la temperatura stazionaria che avrà il punto qualunque α' del solido; u è dato dalla formula (15), e z rappresenta la coordinata rettilinea ortogonale che è normale al piano ω, del punto α a cui si riferisce la integrazione.

VII.

Quando le temperature sono variabili bisogna determinare una funzione che sodisfi a tutte le condizioni poste al principio del § I. Questa funzione esiste sempre ed è unica come abbiamo veduto. Per averne il valore in un punto qualunque α', dopo il tempo t', moltiplichiamo per $u\,dt\,ds$ la equazione:

$$(1)' \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \frac{dv}{dt} - k\,\Delta^2 v = 0 \ ,$$

ed integriamo da $t=0$ a $t=t'-\varepsilon$, ed in tutto lo spazio connesso S occupato dal solido, essendo u una funzione finita e continua insieme colle sue derivate prime rapporto alle coordinate, finchè $t<t'$, ma che per $t=t'$ diviene zero per tutto S, fuori che in un punto α', dove diviene infinita. Pertanto, per quanto piccolo si prenda ε, avremo sempre:

$$\int_0^{t'-\varepsilon} dt \int_S u\left(\frac{dv}{dt} - k\,\Delta^2 v\right) ds = 0 \;,$$

e colle note riduzioni:

$$\int_S (uv)_{t'-\varepsilon}\, ds - \int_S u_0 v_0\, ds + k \int_0^{t'-\varepsilon} dt \int \left(u\frac{dv}{dp} - v\frac{du}{dp}\right) d\sigma$$
$$- \int_0^{t'-\varepsilon} dt \int_S v\left(\frac{du}{dt} + k\,\Delta^2 u\right) ds = 0 \;.$$

Affinchè in questa equazione rimanga il solo valore ignoto di v corrispondente a $t=t'$ nel punto α', dovrà essere primieramente:

$$\frac{du}{dt} + k\,\Delta^2 u = 0 \;.$$

Prendendo poi sopra la parte σ' della superficie σ del corpo in cui la temperatura è uguale a V:

$$u = 0 \;,$$

e sopra la rimanente σ'':

$$\frac{du}{dp} = h\,u \;,$$

avremo:

$$\int_S (uv)_{t'-\varepsilon}\, ds = \int_S u_0 v_0\, ds + k \int_0^{t'-\varepsilon} dt \int_{\sigma'} V \frac{du}{dp}\, d\sigma' + kh \int_0^{t'-\varepsilon} dt \int_{\sigma''} u\,\zeta\, d\sigma''$$

Ora, col diminuire di ε la funzione u converge a zero in tutto lo spazio S, fuori che nel punto α', dove cresce oltre ogni limite; dunque denotando con v' il valore di v in α' per $t=t'$, avremo:

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_S (uv)_{t'-\varepsilon}\, ds = v'.\lim_{\varepsilon=0}\int_{S_1} u_{t'-\varepsilon}\, ds_1 \ ,$$

essendo S_1 uno spazio qualunque contenuto in S, e che contiene α'. Onde, ponendo:

$$(16)\ \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \lim_{\varepsilon=0}\int_{S_1} u_{t'-\varepsilon}\, ds_1 = U \ ,$$

avremo:

$$(17)\ldots\ v' = \frac{1}{U}\cdot\left(\int_S u_0 v_0\, ds + k\int_0^{t'} dt \int_{\sigma'} V\frac{du}{dp}\, d\sigma' + kh\int_0^{t'} dt\int_{\sigma''} u\zeta\, d\sigma''\right) .$$

Poniamo:

$$(18)\ \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad u = \frac{e^{-\frac{\rho^2\alpha\alpha'}{4k(t'-t)}}}{(t'-t)^{\frac{3}{2}}} + G \ ,$$

dove G è una funzione definita dalle seguenti condizioni:

1° È finita e continua insieme colle sue derivate prime rispetto alle coordinate in tutto lo spazio S da $t=0$ a $t=t'$, ed in questo campo sodisfa alla equazione:

$$\frac{dG}{dt} + k\,\Delta^2 G = 0 \ ;$$

2° In tutto il tempo, sopra σ' è:

$$G = -\frac{e^{-\frac{\rho^2\alpha\alpha'}{4k(t'-t)}}}{(t'-t)^{\frac{3}{2}}} ,$$

e sopra σ'':

$$\frac{dG}{dp} - hG = \frac{1}{(t'-t)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(h e^{-\frac{p^2 \alpha \alpha'}{4k(t'-t)}} - \frac{d}{dp} \cdot e^{-\frac{p^2 \alpha \alpha'}{4k(t'-t)}} \right) ;$$

3° Per $t = t'$, in tutto S, è:

$$G = 0 .$$

Queste condizioni rientrano in quelle del § I, e quindi esiste sempre una funzione che le sodisfa.

Con questa funzione G la u data dalla formola (18) verifica tutte le condizioni alle quali dev'essere assoggettata secondo il numero precedente. Sostituendola nella formola (16), e ponendo mente alla condizione terza a cui sodisfa la G, abbiamo:

$$U = \lim_{\varepsilon = 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{x-x'}{2\sqrt{k\varepsilon}}\right)^2}}{\sqrt{\varepsilon}} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{y-y'}{2\sqrt{k\varepsilon}}\right)^2}}{\sqrt{\varepsilon}} dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{z-z'}{2\sqrt{k\varepsilon}}\right)^2}}{\sqrt{\varepsilon}} dz .$$

Onde:

$$U = 8\sqrt{k^3 \pi^3} ,$$

e quindi la formola (17) diviene:

$$(19) \ldots \quad v' = \frac{1}{8\sqrt{k^3\pi^3}} \left\{ \int_S u_0 v_0 \, ds + k \int_0^{t'} dt \int_{\sigma'} V \frac{du}{dp} d\sigma' + \int_0^{t'} dt \int_{\sigma''} k h u \zeta \, d\sigma'' \right\} ;$$

ed abbiamo la temperatura di un punto qualunque del corpo dopo un dato tempo espressa per le temperature iniziali, per le temperature dei punti di una parte della superficie in tutto il tempo precedente, e per le temperature dello spazio a cui è esposta l'altra parte di superficie.

VIII.

Determiniamo la funzione u nel caso in cui il solido sia un parallelepipedo rettangolo, e siano date le temperature sopra tutte le facce.

Prendiamo per assi delle coordinate tre rette parallele a tre spigoli ortogonali tra loro. Siano

$$x=\xi\,,\qquad x=\xi'\,,$$
$$y=\eta\,,\qquad y=\eta'\,,$$
$$z=\zeta\,,\qquad z=\zeta'\,,$$

le equazioni delle sei facce. Denotando con a, b, c le lunghezze degli spigoli, avremo:

$$\xi-\xi'=a\,,\qquad \eta-\eta'=b\,,\qquad \zeta-\zeta'=c\,.$$

Conduciamo per il punto m di coordinate (x', y', z') una retta parallela all'asse delle x; essa incontrerà le due facce parallele al piano yz, in due punti di cui le coordinate x saranno ξ e ξ'. Questi punti siano p, p'. Prolunghiamo la retta pp' indefinitamente dalle due parti, e prendiamo sopra i due prolungamenti i punti:

$$p_1\,,\ p_2\,,\ p_3\,,\ \ldots\ldots\ p_s\ldots\ldots,$$
$$p_1'\,,\ p_2'\,,\ p_3'\,,\ \ldots\ldots\ p_s'\ldots\ldots,$$

dei quali i primi rimarranno nello spazio esterno al parallelepipedo dalla parte della faccia $x=\xi$, e i secondi dalla parte della faccia $x=\xi'$; e prendiamoli in modo che sia:

$$p\,p_1=mp\,,\ p\,p_2=p\,p_1'\,,\ \ldots\ldots\ p\,p_s=pp'_{s-1}\ \ldots\ldots,$$
$$p'p_1'=mp'\,,\ p'p_2'=p'p_1\,,\ \ldots\ldots\ p'p_s'=p'p_{s-1}\ \ldots\ldots$$

Denotiamo con ξ_s l'ordinata di p_s, con ξ_s' quella di p_s'; avremo:

$$\xi - x' = \xi_1 - \xi \ , \ \ldots\ldots \ \xi_s - \xi = \xi \quad - \xi'_{s-1} \ ,$$
$$x' - \xi' = \xi' - \xi_1' \ , \ \ldots\ldots \ \xi' - \xi_s' = \xi_{s-1} - \xi' \quad ;$$

ossia:

$$\xi_s' + \xi_{s-1} = 2\,\xi' \ ,$$
$$\xi_s + \xi'_{s-1} = 2\,\xi \ ;$$

dalle quali si deduce:

$$(20) \begin{cases} \xi_{2s+1} = 2\,s\,(\xi - \xi') + 2\,\xi - x', & \xi'_{2s+1} = 2\,s\,(\xi' - \xi) + 2\,\xi' - x', \\ \xi_{2s} \ = 2\,s\,(\xi - \xi') + x', & \xi'_{2s} \ = 2\,s\,(\xi' - \xi) + x'. \end{cases}$$

Prendiamo ora la funzione:

$$\Omega_1(x) = e^{-\tau(x-x')^2} + \sum_1^\infty (-1) \left\{ e^{-\tau(x-\xi_n)^2} + e^{-\tau(x-\xi_n)^2} \right\} ;$$

dove

$$\tau = \frac{1}{4\,k\,(t'-t)} \ .$$

Sostituendovi i valori (20) abbiamo:

$$\Omega_1(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau(x-x'+2na)^2} - \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau(2\xi-x-x'+2na)^2}.$$

Se prendiamo:

$$\Omega_2(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau(y-y'+2nb)^2} - \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau(2\eta-y-y'+2nb)^2},$$

$$\Omega_3(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau(z-z'+2nc)^2} - \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau(2\zeta-z-z'+2nc)^2},$$

ed

$$u = \frac{\Omega_1(x)\,\Omega_2(y)\,\Omega_3(z)}{(t'-t)^{\frac{3}{2}}} \ ,$$

è facile a verificarsi che saranno sodisfatte tutte le condizioni poste per la u. Infatti tutti i termini saranno della forma:

$$\frac{e^{-\frac{\beta^2 \alpha \beta}{4k(t'-t)}}}{(t'-t)^{\frac{3}{2}}};$$

e quindi, sodisfanno alla equazione (1). Tutti i punti β con cui sono costruiti quei termini sono fuori dello spazio occupato dal parallelepipedo, eccettuato uno solo che è il punto m; ed abbiamo inoltre:

$$\Omega_1(\xi) = 0\,, \qquad \Omega_1(\xi') = 0\,,$$
$$\Omega_2(\eta) = 0\,, \qquad \Omega_2(\eta') = 0\,,$$
$$\Omega_3(\zeta) = 0\,, \qquad \Omega_3(\zeta') = 0\,.$$

Ora, dalla teorica delle funzioni ellittiche, ponendo:

$$\Theta_{00}(z, \omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi\left((2n)^2 \frac{\omega}{4} + 2nz\right)},$$

abbiamo:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau(x-x'+2na)^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{\tau}} \cdot \Theta_{00}\left(\frac{x-x'}{2a}, \frac{\pi i}{4a^2\tau}\right);$$

onde

$$\Omega_1(x) = \frac{\sqrt{\pi k(t'-t)}}{a}\left\{\begin{array}{l} \Theta_{00}\left(\frac{x-x'}{2a}, \frac{\pi k i(t'-t)}{a^2}\right) \\ -\Theta_{00}\left(\frac{2\xi-x-x'}{2a}, \frac{\pi k i(t'-t)}{a^2}\right) \end{array}\right\};$$

e quindi

$$u = \frac{\sqrt{\pi^3 k^3}}{abc}\left\{\Theta_{00}\left(\frac{x-x'}{2a}, \frac{\pi i k(t'-t)}{a^2}\right) - \Theta_{00}\left(\frac{2\xi-x-x'}{2a}, \frac{\pi k i(t'-t)}{a^2}\right)\right\}$$
$$\left\{\Theta_{00}\left(\frac{y-y'}{2a}, \frac{\pi i k(t'-t)}{b^2}\right) - \Theta_{00}\left(\frac{2\eta-y-y'}{2b}, \frac{\pi k i(t'-t)}{b^2}\right)\right\}$$
$$\left\{\Theta_{00}\left(\frac{z-z'}{2c}, \frac{\pi i k(t'-t)}{c^2}\right) - \Theta_{00}\left(\frac{2\zeta-z-z'}{2c}, \frac{\pi k i(t'-t)}{c^2}\right)\right\}.$$

Questa funzione u sostituita nella equazione (19), dove si pone σ'' uguale a zero e per σ' si prendono le sei facce del parallelepipedo, serve a determinare le temperature di un punto qualunque del corpo dopo un tempo qualunque, quando siano date le temperature iniziali, e quelle delle superficie del parallelepipedo. Considerata poi come funzione di t' sodisfa la equazione (1), ed esprime le temperature variabili di un parallelepipedo che nel tempo $t' = t$ era per tutto alla temperatura zero, fuori che nel punto (x', y', z'), dove aveva una temperatura grandissima, e che in tutto il tempo ha la superficie mantenuta alla temperatura zero.

IX.

Il metodo del paragrafo precedente dà anche la funzione u nel caso in cui il solido occupi lo spazio compreso tra due sfere concentriche, una di raggio R e l'altra di raggio minore R', e siano uguali le temperature iniziali nei punti equidistanti dal centro, e uguali tra loro in tutto il tempo le temperature dei punti della superficie sferica di raggio R, e uguali pure tra loro le temperature dei punti della superficie sferica di raggio R'.

In questo caso la equazione (1), essendo u funzione del solo raggio vettore r, diviene, come è noto:

$$(21) \ldots\ldots\ldots \qquad \frac{d.ru}{dt} + k\frac{d^2.ru}{dr^2} = 0 \,,$$

e dovrà essere inoltre:

$$ru = 0$$

sopra ambedue le superficie sferiche; e per $t = t'$ in tutto il solido fuori che nei punti nei quali $r = r'$, dovrà essere:

$$u = 0 \,,$$

e in quei punti:

$$u = \infty \ .$$

In questo caso invece di tre fattori nella funzione u basta prenderne uno solo, e sostituire in esso r ad x, R a ξ ed R' a ξ'. Si può dunque prendere:

$$(22) \ldots \quad ru = \frac{\sqrt{\pi k}}{R - R'} \left\{ \begin{array}{l} \Theta_{00}\left(\frac{r - r'}{2(R - R')}, \frac{\pi k i (t' - t)}{(R - R')^2}\right) \\ -\Theta_{00}\left(\frac{2R - r - r'}{2(R - R')}, \frac{\pi k i (t' - t)}{(R - R')^2}\right) \end{array} \right\} ;$$

ed è facile a verificare come sodisfi a tutte le condizioni cui deve sodisfare ru.

Per avere la funzione u nel caso che il solido sia una sfera, è evidente che basterà porre nella formola (22):

$$R' = 0 \ ,$$

e avremo:

$$(23) \ldots \quad ru = \frac{\sqrt{\pi k}}{R} \left\{ \begin{array}{l} \Theta_{00}\left(\frac{r - r'}{2R}, \frac{\pi k i (t' - t)}{R^2}\right) \\ -\Theta_{00}\left(\frac{r + r'}{2R}, \frac{\pi k i (t' - t)}{R^2}\right) \end{array} \right\}$$

Con i valori di u, tratti dalla equazione (23), la formola (19), in cui è posto σ'' uguale a zero, dà le temperature dei differenti strati della sfera dopo un tempo qualunque, conoscendo le temperature iniziali e le temperature della superficie in tutto il tempo.

X.

Quando il raggio della sfera è molto grande, come nel caso dei corpi celesti, la formola (23) serve a determinarne le temperature anche nel caso che siano variabili col tempo le temperature degli spazi che essi attraversano, e non si conoscano altro che queste e le temperature iniziali.

Infatti bisogna per ciò determinare una funzione u che sodisfaccia in tutta la sfera alla equazione (21); per $t = t'$ sia nulla per tutto fuori che nei punti distanti dal centro di r', e sopra la superficie della sfera sia:

$$(24) \ldots\ldots\ldots \qquad \frac{du}{dr} + hu = 0 \ .$$

La funzione data dalla formola (23) non solo sodisfa alle prime condizioni, ma anche alla equazione (24) quando R è molto grande. Infatti questa equazione può scriversi nel modo seguente:

$$(25) \ldots\ldots\ldots \qquad \left(\frac{d.ru}{dr}\right)_{r=R} + \left(h - \frac{1}{R}\right) Ru = 0 \ .$$

Sostituendo i valori dati dalla formola (23) nella equazione (25), e trascurando le potenze di $\frac{1}{R}$ superiori alle prime, abbiamo che quest'ultima è sodisfatta.

Quando $k(t'-t)$ è molto grande e confrontabile colla grandezza di R^2, il che accadrà se il numero degli anni che ha durato il raffreddamento non è molto piccolo in confronto del numero dei metri contenuti nel quadrato del raggio del corpo celeste, poste in luogo delle funzioni Jacobiane le serie che le esprimono, queste risulteranno molto convergenti. Ma se questo numero di anni fosse di molto inferiore, allora quelle serie sarebbero molto lentamente convergenti. Ma dalla teoria delle funzioni ellittiche abbiamo:

$$\Theta_{00}(\omega z, \omega)\, e^{i\pi\omega z^2} = \frac{1}{\sqrt{-i\omega}}\, \Theta_{00}\left(z, -\frac{1}{\omega}\right) ;$$

onde:

$$\Theta_{00}\left(\frac{r-r'}{2R}, \frac{\pi k i (t'-t)}{R^2}\right) = \frac{R e^{-\frac{(r-r')^2}{4k(t'-t)}}}{\sqrt{\pi k (t'-t)}}\, \Theta_{00}\left(\frac{(r-r')Ri}{2\pi k(t'-t)}, \frac{R^2 i}{\pi k (t'-t)}\right),$$

$$\Theta_{00}\left(\frac{r+r'}{2R}, \frac{\pi k i (t'-t)}{R^2}\right) = \frac{R e^{-\frac{(r+r')^2}{4k(t'-t)}}}{\sqrt{\pi k (t'-t)}}\, \Theta_{00}\left(\frac{(r+r')Ri}{2\pi k(t'-t)}, \frac{R^2 i}{\pi k (t'-t)}\right);$$

e quindi

$$(26)\ldots \quad r\,u = \frac{1}{\sqrt{t'-t}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} e^{-\frac{(r-r')^2}{4k(t'-t)}}\,\Theta_{00}\left(\frac{(r-r')\,R\,i}{2k\pi(t'-t)},\ \frac{R^2 i}{k\pi(t'-t)}\right) \\ -e^{-\frac{(r+r')^2}{4k(t'-t)}}\,\Theta_{00}\left(\frac{(r+r')\,R\,i}{2k\pi(t'-t)},\ \frac{R^2 i}{k\pi(t'-t)}\right) \end{array} \right\},$$

la quale può esprimersi in serie che sarà molto convergente, quando il numero di anni dai quali dura il raffreddamento è piccolo di fronte al numero dei metri contenuti nel quadrato del raggio del corpo celeste.

Sostituendo nella equazione (19), in cui σ' è zero, il valore di u tratto o dalla equazione (23), o dalla (26), abbiamo la temperatura in uno strato qualunque del corpo celeste di cui sono date le temperature iniziali e quelle degli spazi da esso attraversati.