SULLE QUADRATURE

NOTA

DI P. TARDY

Professore di calcolo differenziale e integrale nella R. Università di Genova

Direttore degli Studi nella R. Scuola di Marina

Uno dei Quaranta della Società Italiana delle Scienze

(*Ricevuta il* 2 *Febbrajo* 1865)

Gl' integrali delle funzioni non potendosi ottenere in termini finiti o con le ordinarie trascendenti che in un numero assai ristretto di casi, i geometri in vista principalmente delle applicazioni si sono rivolti a cercare delle formole, le quali somministrino il valore numerico approssimato di un integrale definito tra limiti dati, ossia dell' area di una curva piana.

La più semplice tra esse è quella che si consegue decomponendo la differenza delle ascisse estreme, cioè dei limiti dell' integrale, in un certo numero di parti uguali, e riguardando l' area della curva siccome la somma di tanti trapezi, i cui lati paralleli sono le ordinate equidistanti, e i lati non paralleli i diversi elementi delle ascisse e le corde che congiungono le estremità delle ordinate.

Ora è importante conoscere l' espressione analitica della correzione che bisogna fare a ciascuna formola di approssimazione per avere il valore esatto dell' integrale.

Poisson (1) è stato il primo a dare sotto forma d' integrale definito la suddetta correzione per il più ovvio metodo di quadratura sopra accen-

(1) Mém. de l' Acad. R.e des Sciences T. VI.

nato. Integrando quindi successivamente per parti si giunge alla serie dovuta originariamente a Maclaurin, e che porta d'ordinario il nome di Euler, della quale si ottiene così il termine complementare.

Il ch. Generale Menabrea in una Memoria inserita tra quelle dell'Accademia delle Scienze di Torino, (2) partendo anch'egli da una formola di Fourier, à con procedimento uniforme assegnato per integrali definiti le correzioni ai valori approssimati forniti dai metodi generalmente conosciuti sotto i nomi di Legendre e di Simpson.

In questa nota ci proponiamo di ritrovare per altra via il termine complementare di Poisson, e di far vedere come da esso si possano dedurre immediatamente le correzioni relative alle formole dianzi indicate e ad altre. Soggiungeremo quindi qualche cosa intorno al metodo di Gauss generalizzato da Christoffel.

Abbiamo dal calcolo integrale

$$(1)\qquad f(x+\omega)-f(x)=\omega f'(x)+\frac{\omega^2}{\Pi(2)}f''(x)+\ldots\ldots$$

$$+\frac{\omega^m}{\Pi(m)}f^{(m)}(x)+\frac{\omega^{m+1}}{\Pi(m)}\int_0^1 dz.z^m f^{(m+1)}(x+\omega-\omega z);$$

ponendo in luogo d'x successivamente $a, a+\omega, a+2\omega, \ldots a+(n-1)\omega$, e sommando verrà

$$(2)\qquad f(a+n\omega)-f(a)=\omega\left\{f'(a)+f'(a+\omega)+\ldots\ldots+f'(a+(n-1)\omega)\right\}$$

$$+\frac{\omega^2}{\Pi(2)}\left\{f''(a)+\ldots\ldots+f''(a+(n-1)\omega)\right\}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{\omega^m}{\Pi(m)}\left\{f^{(m)}(a)+\ldots+f^{(m)}(a+(n-1)\omega)\right\}$$

$$+\frac{\omega^{m+1}}{\Pi(m)}\int_0^1 dz.z^m\left\{f^{(m+1)}(a+\omega-\omega z)+f^{(m+1)}(a+2\omega-\omega z)+\ldots+f^{(m+1)}(a+n\omega-\omega z)\right\}.$$

(2) Tom. VIII. Serie 2.ª

Facendo

$$a + n\omega = b, \qquad f'(x) = \varphi(x), \qquad \text{per cui}$$
$$f(x) = \int \varphi(x)\, dx,$$

si avrà

$$(3) \quad \int_a^b \varphi(x)\, dx = \omega \left\{ \varphi(a) + \varphi(a+\omega) + \ldots + \varphi(a+(n-1)\omega) \right\}$$
$$+ \frac{\omega^2}{\Pi(2)} \left\{ \varphi'(a) + \ldots\ldots + \varphi'(a+(n-1)\omega) \right\} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{\omega^m}{\Pi(m)} \left\{ \varphi^{(m-1)}(a) + \ldots\ldots + \varphi^{(m-1)}(a+(n-1)\omega) \right\}$$
$$+ \frac{\omega^{m+1}}{\Pi(m)} \int_0^1 dz.\, z^m \left\{ (\varphi^{(m)}(a+\omega-\omega z) + \varphi^{(m)}(a+2\omega-\omega z) + \ldots \right.$$
$$\left. + \varphi^{(m)}(a+n\omega-\omega z) \right\}$$

la quale equazione suppone che $\varphi(x), \varphi'(x), \ldots\ldots \varphi^{(m)}(x)$ rimangano finite e continue per tutti i valori della variabile compresi fra a e b. Allo stesso modo con cui siamo pervenuti alla (2) otterremo le seguenti:

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \omega \left\{ \varphi'(a) + \ldots + \varphi'(a+(n-1)\omega) \right\}$$
$$+ \frac{\omega^2}{\Pi(2)} \left\{ \varphi''(a) + \ldots\ldots + \varphi''(a+(n-1)\omega) \right\} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{\omega^{m-1}}{\Pi(m-1)} \left\{ \varphi^{(m-1)}(a) + \ldots\ldots + \varphi^{(m-1)}(a+(n-1)\omega) \right\}$$
$$+ \frac{\omega^m}{\Pi(m-1)} \int_0^1 dz.\, z^{m-1} \left\{ \varphi^{(m)}(a+\omega-\omega z) + \ldots + \varphi^{(m)}(a+n\omega-\omega z) \right\},$$

$$\varphi'(b) - \varphi'(a) = \omega \left\{ \varphi''(a) + \ldots + \varphi''(a+(n-1)\omega) \right\}$$
$$+ \frac{\omega^2}{\Pi(2)} \left\{ \varphi'''(a) + \ldots + \varphi'''(a+(n-1)\omega) \right\} + \ldots$$
$$+ \frac{\omega^{m-2}}{\Pi(m-2)} \left\{ \varphi^{(m-1)}(a) + \ldots + \varphi^{(m-1)}(a+(n-1)\omega) \right\}$$
$$+ \frac{\omega^{m-1}}{\Pi(m-2)} \int_0^1 dz.\, z^{m-2} \left\{ \varphi^{(m)}(a+\omega-\omega z) + \ldots + \varphi^{(m)}(a+n\omega-\omega z) \right\},$$

$$\varphi''(b)-\varphi''(a)=\omega\left\{\varphi'''(a)+\ldots\ldots+\varphi'''(a+(n-1)\omega)\right\}$$

$$+\frac{\omega^2}{\Pi(2)}\left\{\varphi^{\text{IV}}(a)+\ldots+\varphi^{\text{IV}}(a+(n-1)\omega)\right\}+\ldots$$

$$+\frac{\omega^{m-3}}{\Pi(m-3)}\left\{\varphi^{(m-1)}(a)+\ldots+\varphi^{(m-1)}(a+(n-1)\omega)\right\}$$

$$+\frac{\omega^{m-2}}{\Pi(m-3)}\int_0^1 dz.z^{m-3}\left\{\varphi^{(m)}(a+\omega-\omega z)+\ldots+\varphi^{(m)}(a+n\omega-\omega z)\right\},$$

$$\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots$$

$$\varphi^{(m-2)}(b)-\varphi^{(m-2)}(a)=\omega\left\{\varphi^{(m-1)}(a)+\ldots\ldots+\varphi^{(m-1)}(a+(n-1)\omega)\right\}$$

$$+\omega^2\int_0^1 dz.z\left\{\varphi^{(m)}(a+\omega-\omega z)+\ldots+\varphi^{(m)}(a+n\omega-\omega z)\right\},$$

che moltiplicate rispettivamente per $A_1\,\omega$, $A_2\,\omega^2$, ... $A_{m-1}\,\omega^{m-1}$, e sommate daranno

$$A_1\omega\left\{\varphi(b)-\varphi(a)\right\}+A_2\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}$$

$$+A_3\omega^3\left\{\varphi''(b)-\varphi''(a)\right\}+\ldots+A_{m-1}\omega^{m-1}\left\{\varphi^{(m-2)}(b)-\varphi^{(m-2)}(a)\right\}$$

$$=A_1\omega^2\left\{\varphi'(a)+\varphi'(a+\omega)+\ldots\ldots+\varphi'(a+(n-1)\omega)\right\}$$

$$+\left(\frac{A_1}{\Pi(2)}+A_2\right)\omega^3\left\{\varphi''(a)+\ldots\ldots+\varphi''(a+(n-1)\omega)\right\}$$

$$+\left(\frac{A_1}{\Pi(3)}+\frac{A_2}{\Pi(2)}+A_3\right)\omega^4\left\{\varphi'''(a)+\ldots\varphi'''(a+(n-1)\omega)\right\}+\ldots\ldots$$

$$+\left(\frac{A_1}{\Pi(m-1)}+\frac{A_2}{\Pi(m-2)}+\ldots\ldots+A_{m-1}\right)\omega^m$$

$$\times\left\{\varphi^{(m-1)}(a)+\ldots\ldots+\varphi^{(m-1)}(a+(n-1)\omega)\right\}$$

$$+\omega^{m+1}\int_0^1 dz.\left\{\frac{A_1}{\Pi(m-1)}z^{m-1}+\frac{A_2}{\Pi(m-2)}z^{m-2}+\ldots\ldots+A_{m-1}z\right\}$$

$$\times\left\{\varphi^{(m)}(a+\omega-\omega z)+\varphi^{(m)}(a+2\omega-\omega z)+\ldots+\varphi^{(m)}(a+n\omega-\omega z)\right\}.$$

Determiniamo le costanti A_1, A_2, ... A_{m-1} per mezzo delle equazioni

$$A_1 = \frac{1}{\Pi(2)},$$

$$\frac{A_1}{\Pi(2)} + A_2 = \frac{1}{\Pi(3)},$$

$$\frac{A_1}{\Pi(3)} + \frac{A_2}{\Pi(2)} + A_3 = \frac{1}{\Pi(4)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{A_1}{\Pi(m-1)} + \frac{A_2}{\Pi(m-2)} + \cdots\cdots + A_{m-1} = \frac{1}{\Pi(m)};$$

esse, com' è noto, (3) forniscono

$$A_1 = \tfrac{1}{2},\ A_2 = 0,\ A_3 = 0,\ \cdots\cdots\ A_{2r-1} = 0,\ A_{2r} = (-1)^r \frac{B_{2r-1}}{\Pi(2r)},$$

ove B_{2r-1} rappresenta l' $(r)^{esimo}$ numero di Bernoulli.

Prendendo $m = 2r+1$ avremo così

$$\frac{\omega^2}{\Pi(2)} \left\{ \varphi'(a) + \varphi'(a+\omega) + \cdots + \varphi'(a+(n-1)\omega) \right\}$$

$$+ \frac{\omega^3}{\Pi(3)} \left\{ \varphi''(a) + \cdots + \varphi''(a+(n-1)\omega) \right\} + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{\omega^{2r+1}}{\Pi(2r+1)} \{ \varphi^{(2r)}(a) + \cdots + \varphi^{(2r)}(a+(n-1)\omega \} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\omega \{ \varphi(b) - \varphi(a) \}$$

$$- \frac{B_1}{\Pi(2)} \omega^2 \left\{ \varphi'(b) - \varphi'(a) \right\} + \frac{B_2}{\Pi(4)} \omega^4 \left\{ \varphi'''(b) - \varphi'''(a) \right\} - \cdots$$

$$+ (-1)^r \frac{B_{2r-1}}{\Pi(2r)} \omega^{2r} \left\{ \varphi^{(2r-1)}(b) - \varphi^{(2r-1)}(a) \right\}$$

$$- \omega^{2r+2} \int_0^1 dz \left\{ \frac{1}{2\Pi(2r)} z^{2r} - \frac{B_1}{\Pi(2)\Pi(2r-1)} z^{2r-1} + \cdots + (-1)^r \frac{B_{2r-1}}{\Pi(2r)} z \right\} \times$$

$$\times \{ \varphi^{(2r+1)}(a+\omega-\omega z) + \cdots\cdots + \varphi^{(2r+1)}(a+n\omega-\omega z) \},$$

e quindi sostituendo nella (3),

---

(3) Euler. Calc. Differ. Pars. posterior. Cap. V.

$$(4)\qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx =$$

$$\omega\left\{\tfrac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+\omega)+\varphi(a+2\omega)+\ldots+\varphi(a+(n-1)\omega)+\tfrac{1}{2}\varphi(b)\right\}$$

$$-\frac{B_1}{\Pi(2)}\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}+\frac{B_3}{\Pi(4)}\omega^4\left\{\varphi'''(b(-\varphi'''(a)\right\}-\ldots$$

$$+(-1)^r\frac{B_{2r-1}}{\Pi(2r)}\omega^{2r}\left\{\varphi^{(2r-1)}(b)-\varphi^{(2r-1)}(a)\right\}+\frac{\omega^{2r+2}}{\Pi(2r)}\int_0^1 dz\times$$

$$\left\{\frac{z^{2r+1}}{2r+1}-\tfrac{1}{2}z^{2r}+\tfrac{1}{2}(2r)_1B_1z^{2r-1}-\tfrac{1}{4}(2r)_3B_3z^{2r-3}+\ldots+(-1)^r\frac{1}{2r}(2r)_{2r-1}B_{2r-1}z\right\}$$

$$\times\left\{\varphi^{(2r+1)}(a+\omega-\omega z)+\ldots+\varphi^{(2r+1)}(a+n\omega-\omega z)\right\}.$$

Poniamo per brevità

$$(5)\qquad \varphi^{(2r+1)}(a+\omega-\omega z)+\varphi^{(2r+1)}(a+2\omega-\omega z)+\ldots+\varphi^{(2r+1)}(a+n\omega-\omega z)=\Psi(z)$$

e

$$(6)\qquad \frac{z^{2r+1}}{2r+1}-\tfrac{1}{2}z^{2r}+\tfrac{1}{2}(2r)_1B_1z^{2r-1}-\tfrac{1}{4}(2r)_3B_3z^{2r-3}+\ldots$$

$$+(-1)^r\frac{1}{2r}(2r)_{2r-1}B_{2r-1}z=\mathbf{B}_2(z)$$

ed avremo

$$(7)\qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx=\omega\left\{\tfrac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+\omega)+\varphi(a+2\omega)+\ldots\right.$$

$$\left.+\varphi(a+(n-1)\omega)+\tfrac{1}{2}\varphi(b)\right\}$$

$$-\frac{B_1}{\Pi(2)}\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}+\frac{B_3}{\Pi(4)}\omega^4\left\{\varphi'''(b)-\varphi'''(a)\right\}-\ldots$$

$$+(-1)^r\frac{B_{2r-1}}{\Pi(2r)}\omega^{2r}\left\{\varphi^{(2r-1)}(b)-\varphi^{(2r-1)}(a)\right\}+R,$$

ove

$$(8)\qquad R=\frac{\omega^{2r+2}}{\Pi(2r)}\int_0^1 \mathbf{B}_2(z)\,\Psi(z)\,dz,$$

che è la formola di Maclaurin completata da un integrale definito.

Se avessimo preso $m = 2r + 2$, e posto

$$(9)\qquad \frac{z^{2r+2}}{2r+2} - \tfrac{1}{2} z^{2r+1} + \tfrac{1}{2}(2r+1)_1 B_1 z^{2r} - \tfrac{1}{4}(2r+1)_3 B_3 z^{2r-2} + \ldots$$
$$+ (-1)^r \frac{1}{2r}(2r+1)_{2r-1} B_{2r-1} z^2 = \mathbf{B}_1(z)$$

avremmo ottenuto per l' espressione del resto

$$(10)\qquad R = \frac{\omega^{2r+2}}{\Pi(2r+1)} \int_0^1 \mathbf{B}_1(z)\, \Psi^1(z)\, dz.$$

La funzione

$$(11)\qquad \mathbf{B}(z) = \frac{z^{m+1}}{m+1} - \tfrac{1}{2} z^m + \tfrac{1}{2} B_1(m)_1 z^{m-1} - \tfrac{1}{4} B_2(m)_3 z^{m-2} + \ldots\ldots,$$

che per z numero intero positivo rappresenta la somma delle potenze $(m)^{me}$ de' numeri naturali

$$1^m + 2^m + 3^m + \ldots\ldots + (z-1)^m$$

è stata detta da Raabe (4) *funzione Bernoulliana*.

Essa diviene $\mathbf{B}_2(z)$ se m è pari $= 2r$, e $\mathbf{B}_1(z)$ se m è impari $= 2r+1$. Tra le varie proprietà importanti di cui gode questa funzione, e per le quali rimandiamo al lavoro già citato di Raabe e a quelli di Malmstén (5) e di Schlömilch (6) è fondamentale quella contenuta nell' equazione

$$(12)\qquad \mathbf{B}(1-z) = (-1)^{m-1}\, \mathbf{B}(z),$$

per cui

$$\mathbf{B}_2(1-z) = -\mathbf{B}_2(z),$$
$$\mathbf{B}_1(1-z) = \mathbf{B}_1(z),$$

onde sostituendo $1 - z$ invece di z, e facendo

$$(13)\qquad \varphi^{(2r+1)}(a+\omega z) + \varphi^{(2r+1)}(a+\omega+\omega z) + \ldots + \varphi^{(2r+1)}(a+(n-1)\omega+\omega z) = \Phi(z),$$

si consegue dalla (8)

---

(4) Die Jacob Bernoullische Function. Zürich 1848.
(5) Crelle. Journal für die Mathem. T. 35, p. 55.
(6) Zeitschrift für Mathem. und Phys. T. 1, p. 195.

(14) $$R = -\frac{\omega^{2r+2}}{\Pi(2r)} \int_0^1 \mathrm{B}_2(z)\,\Phi(z)\,dz,$$

e dalla (10)

(15) $$R = \frac{\omega^{2r+2}}{\Pi(2r+1)} \int_0^1 \mathrm{B}_1(z)\,\Psi(z)\,dz.$$

Quest' ultima espressione avrebbe anco potuto dedursi dalla precedente (14), come la (10) dalla (8), integrando per parti ed osservando che per le (6), (9) e (12)

$$\mathrm{B}_2(z) = \frac{1}{2r+1}\mathrm{B}'_1(z),$$

$$\mathrm{B}_1(0) = 0, \quad \mathrm{B}_1(1) = 0.$$

Per dare al termine complementare la forma assegnata da Poisson osserviamo che partendo dall' equazione notissima (7)

$$\tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}\sin 2z + \tfrac{1}{3}\sin 3z + \ldots\ldots,$$

ossia

$$z = \pi - 2\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin kz}{k},$$

la quale sussiste per tutti i valori di z compresi tra 0 e 2π, ma esclusi questi limiti, si à per replicate integrazioni

$$\frac{z^{2r+1}}{\Pi(2r+1)} = \pi\frac{z^{2r}}{\Pi(2r)} - 2S_2\frac{z^{2r-1}}{\Pi(2r-1)} + 2S_4\frac{z^{2r-3}}{\Pi(2r-3)} - \ldots$$

$$+ 2(-1)^r S_{2r}\, z + 2(-1)^{r+1}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\sin kz}{k^{2r+1}}$$

per tutti i valori di z da $z=0$ a $z=2\pi$, ove

$$S_{2p} = 1 + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \ldots\ldots,$$

e perciò (8)

$$S_{2p} = \frac{(2\pi)^{2p}}{2\Pi(2p)} B_{2p-1};$$

(7) Euler Calc. Differ. P. post. Cap. IV. §. 92.
(8) Ib. Cap. VI.

moltiplicando poi per $\frac{\Pi(2r)}{(2\pi)^{2r+1}}$ si ottiene

$$\frac{2(-1)^r \Pi(2r)}{(2\pi)^{2r+1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin kz}{k^{2r+1}} = \frac{1}{2r+1}\left(\frac{z}{2\pi}\right)^{2r+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2\pi}\right)^{2r}$$

$$+ \frac{1}{2}(2r)_1 B_1 \left(\frac{z}{2\pi}\right)^{2r-1} - \frac{1}{3}(2r)_2 B_2 \left(\frac{z}{2\pi}\right)^{2r-2} + \dots$$

$$+ (-1)^r \frac{1}{2r}(2r)_{2r-1} B_{2r-1} \frac{z}{2\pi} = \mathbf{B}_2\left(\frac{z}{2\pi}\right),$$

e scrivendo $2\pi z$ invece di z

$$\mathbf{B}_2(z) = \frac{2(-1)^{r+1}\Pi(2r)}{(2\pi)^{2r+1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin 2k\pi z}{k^{2r+1}}, \quad (9) \tag{16}$$

con che la (8) diviene

$$R = \frac{2(-1)^{r+1}\omega^{2r+2}}{(2\pi)^{2r+1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{2r+1}} \int_0^1 \Psi(z) \sin 2k\pi z.\, dz. \tag{17}$$

Ora rimesso per $\Psi(z)$ il suo valore (5) si à

$$\int_0^1 \Psi(z) \sin 2k\pi z.\, dz. = \int_0^1 \varphi^{(2r+1)}(a+\omega-\omega z) \sin 2k\pi z.\, dz$$

$$+ \int_0^1 \varphi^{(2r+1)}(a+2\omega-\omega z) \sin 2k\pi z.\, dz + \dots$$

$$+ \int_0^1 \varphi^{(2r+1)}(a+n\omega-\omega z) \sin 2k\pi z.\, dz;$$

nel 1.° integrale del secondo membro si ponga $a+\omega-\omega z = x$, nel 2.° $a+2\omega-\omega z = x$, ... nell' ultimo $a+n\omega-\omega z = x$, ed essendo per q intero qualunque

$$\sin \frac{2k\pi(a+q\omega-x)}{\omega} = -\sin \frac{2k\pi(x-a)}{\omega},$$

(9) Raabe. Crelle Journal. T. 42, p. 350.

si otterrà

$$\int_0^1 \Psi(z)\sin 2k\pi z.\,dz =$$

$$-\frac{1}{\omega}\left\{\int_a^{a+\omega}\varphi^{(2r+1)}(x)\sin\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}dx+\int_{a+\omega}^{a+2\omega}\varphi^{(2r+1)}(x)\sin\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}dx+\ldots\right.$$

$$\left.+\int_{a+(n-1)\omega}^{a+n\omega}\varphi^{(2r+1)}(x)\sin\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}dx\right\}=-\frac{1}{\omega}\int_a^b\varphi^{(2r+1)}(x)\sin\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}dx.$$

Integrando per parti si à

$$\int\varphi^{(2r+1)}(x)\sin\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}dx=\varphi^{(2r)}(x)\sin\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}$$

$$-\frac{2x\pi}{\omega}\int\varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}dx,$$

e perciò

$$\int_a^b\varphi^{(2r+1)}(x)\sin\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}dx=-\frac{2k\pi}{\omega}\int_a^b\varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}dx,$$

per cui risulterà dalla (17)

$$(18)\qquad R=(-1)^{r+1}\frac{2\omega^{2r}}{(2\pi)^{2r}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^{2r}}\int_a^b\varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}dx,$$

siccome à trovato Poisson.

Dalla (7), mettendo per i numeri Bernoulliani B_1, B_2, B_3, ... i loro valori (10), avremo dunque

---

(10) $B_1=\frac{1}{6}$, $B_2=\frac{1}{30}$, $B_3=\frac{1}{42}$, $B_4=\frac{1}{30}$, $B_5=\frac{5}{66}$, ...

$$(19) \qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

$$= \omega \left\{ \tfrac{1}{2}\varphi(a) + \varphi(a+\omega) + \varphi(a+2\omega) + \dots + \varphi(a+(n-1)\omega) + \tfrac{1}{2}\varphi(b) \right\}$$

$$- \frac{1}{12}\omega^2 \left\{ \varphi'(b) - \varphi'(a) \right\} + \frac{1}{720}\omega^4 \left\{ \varphi'''(b) - \varphi'''(a) \right\}$$

$$- \frac{1}{30240}\omega^6 \left\{ \varphi^{v}(b) - \varphi^{v}(a) \right\} + \frac{1}{1209600}\omega^8 \left\{ \varphi^{vii}(b) - \varphi^{vii}(a) \right\}$$

$$- \dots + (-1)^r \frac{B_{2r-1}}{\Pi(2r)}\omega^{2r} \left\{ \varphi^{(2r-1)}(b) - \varphi^{(2r-1)}(a) \right\}$$

$$- (-1)^r \frac{2\omega^{2r}}{(2\pi)^{2r}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{2r}} \int_a^b \varphi^{(2r)}(x) \cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}\,dx$$

e per $r = 0$

$$(20) \qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx = \omega \left\{ \tfrac{1}{2}\varphi(a) + \varphi(a+\omega) + \dots + \varphi(a+(n-1)\omega) + \tfrac{1}{2}\varphi(b) \right\}$$

$$- 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \int_a^b \varphi(x) \cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}\,dx$$

Rimane così assegnata l'espressione analitica della correzione da farsi quando il valore approssimato dell'integrale si calcola con la formola

$$\omega \left\{ \tfrac{1}{2}\varphi(a) + \varphi(a+\omega) + \dots + \varphi(a+(n-1)\omega) + \tfrac{1}{2}\varphi(b) \right\},$$

Siano ora $h_1, h_2, \dots h_p$ de' divisori del numero n, e sia

$$n = h_1 q_1,\ n = h_2 q_2,\ \dots\ n = h_p q_p;$$

egli è evidente che invece di dividere l'intervallo $b - a$ in n parti uguali ad ω possiamo intenderlo diviso in q_1 parti uguali ad $h_1\omega$, in q_2 parti uguali ad $h_2\omega$, ... in q_p parti uguali ad $h_p\omega$.

La formola (19) ci darà pertanto p equazioni, il cui tipo generale

sarà

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

$$= h_s\omega\left\{\tfrac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+h_s\omega)+\varphi(a+2h_s\omega)+\ldots+\varphi(a+(q_s-1)h_s\omega)+\tfrac{1}{2}\varphi(b)\right\}$$

$$-\frac{B_1}{\Pi(2)}h_s^2\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}+\frac{B_3}{\Pi(4)}h_s^4\omega^4\left\{\varphi'''(b)-\varphi'''(a)\right\}-\ldots$$

$$+(-1)^r\frac{B_{2r-1}}{\Pi(2r)}h_s^{2r}\omega^{2r}\left\{\varphi^{(2r-1)}(b)-\varphi^{(2r-1)}(a)\right\}$$

$$-(-1)^r\frac{2h_s^{2r}\omega^{2r}}{(2\pi)^{2r}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^{2r}}\int_a^b\varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{2k\pi(x-a)}{h_s\omega}\,dx.$$

Si moltiplichino queste ordinatamente per $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_p$ e si sommino con la (19), indi si determinino i fattori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_p$ in modo che nel 2.° membro spariscano i coefficienti di $\omega^2, \omega^4, \ldots\ldots \omega^{2p}$, cioè in modo da verificare le equazioni

$$1+\lambda_1 h_1^2+\lambda_2 h_2^2+\ldots\ldots+\lambda_p h_p^2=0,$$
$$1+\lambda_1 h_1^4+\lambda_2 h_2^4+\ldots\ldots+\lambda_p h_p^4=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$1+\lambda_1 h_1^{2p}+\lambda_2 h_2^{2p}+\ldots\ldots+\lambda_p h_p^{2p}=0,$$

e conseguiremo così una nuova espressione per la valutazione numerica approssimata dell' integrale $\int_a^b \varphi(x)\,dx$, e la serie che ci dà la correzione non che il resto di essa.

La medesima operazione eseguita sull' equazione (20), dopo aver trovato $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_p$, ci somministra per integrali definiti la correzione da applicarsi nel nuovo caso.

È chiaro poi che possiamo combinare anco diversamente quelle equazioni, ed ottenere altre formole di quadratura coi rispettivi termini complementari.

Cominciamo dal supporre il numero delle parti in cui si divide la dif-

ferenza $b-a$, delle ascisse estreme pari cioè,

$$n=2q,$$

avremmo oltre la (19) e la (20)

$$(21)\qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

$$=2\omega\left\{\tfrac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+2\omega)+\varphi(a+4\omega)+\ldots+\varphi(a+(2q-2)\omega)+\tfrac{1}{2}\varphi(b)\right\}$$

$$-\frac{1}{12}(2\omega)^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}+\frac{1}{720}(2\omega)^4\left\{\varphi'''(b)-\varphi'''(a)\right\}$$

$$-\frac{1}{30240}(2\omega)^6\left\{\varphi^{v}(b)-\varphi^{v}(a)\right\}+\ldots\ldots$$

$$+(-1)^r\frac{B_{2r-1}}{\Pi(2r)}(2\omega)^{2r}\left\{\varphi^{(2r-1)}(b)-\varphi^{(2r-1)}(a)\right\}$$

$$-(-1)^r\frac{2\omega^{2r}}{\pi^{2r}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^{2r}}\int_a^b\varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{\omega}\,dx,$$

e

$$(22)\qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

$$=2\omega\left\{\tfrac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+2\omega)+\varphi(a+4\omega)+\ldots+\varphi(a+(2q-2)\omega)+\tfrac{1}{2}\varphi(b)\right\}$$

$$-2\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_a^b\varphi(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{\omega}\,dx.$$

Moltiplicando la (20) per 2 e sottraendo la (22) viene

$$(23)\qquad \int_a^b\varphi(x)\,dx=2\omega\left\{\varphi(a+\omega)+\varphi(a+3\omega)+\ldots+\varphi(a+(2q-1)\omega)\right\}$$

$$-2\left\{2\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_a^b\varphi(x)\cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}\,dx-\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_a^b\varphi(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{\omega}\,dx\right\}.$$

Operando alla stessa guisa sulla (19) e la (21) si ottiene

$$(24)\quad \int_a^b \varphi(x)\,dx = 2\omega\left\{\varphi(a+\omega)+\varphi(a+3\omega)+\dots+\varphi(a+(2q-1)\omega)\right\}$$

$$-\frac{1}{12}(2-2^2)\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}+\frac{1}{720}(2-2^4)\omega^4\left\{\varphi'''(b)-\varphi'''(a)\right\}-\dots$$

$$+(-1)^r\frac{2-2^{2r}}{\Pi(2r)}B_{2r-1}\,\omega^{2r}\left\{\varphi^{(2r-1)}(b)-\varphi^{(2r-1)}(a)\right\}$$

$$-(-1)^r\frac{2\omega^{2r}}{\pi^{2r}}\left\{2\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{(2k)^{2r}}\int_a^b\varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}dx-\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^{2r}}\int_a^b\varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{k(\pi x-a)}{\omega}dx\right\}.$$

Ora è evidente che si à in generale

$$(25)\quad 2\sum_{k=1}^{k=\infty}F(2k)-\sum_{k=1}^{k=\infty}F(k)=\sum_{k=1}^{k=\infty}\cos k\pi\,F(k),$$

e perciò la (23) si cangia nella seguente:

$$(26)\quad \int_a^b\varphi(x)\,dx=2\omega\left\{\varphi(a+\omega)+\varphi(a+3\omega)+\dots+\varphi(a+(2q-1)\omega)\right\}$$

$$-2\sum_{k=1}^{k=\infty}\cos k\pi\int_a^b\varphi(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{\omega}dx,$$

che è la formola di approssimazione di Legendre completata da un integrale definito.

Si scorge facilmente che il metodo di Legendre consiste nel dividere la differenza $b-a$ delle ascisse in un numero pari di parti uguali, di tirare le tangenti alla curva, alle estremità delle ordinate di posto pari e di sostituire all' area che si vuol valutare la somma delle aree de' trapezi com-

presi tra l' asse delle ascisse, due ordinate consecutive di posto impari e le tangenti accennate.

La (24) poi diviene

$$(27)\qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx = 2\omega\left\{\varphi(a+\omega)+\varphi(a+3\omega)+\ldots+\varphi(a+(2q-1)\omega)\right\}$$

$$+\frac{1}{6}\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}-\frac{7}{360}\omega^4\left\{\varphi'''(b)-\varphi'''(a)\right\}+\frac{31}{15120}\omega^6\left\{\varphi^{v}(b)-\varphi^{v}(a)\right\}-\ldots$$

$$-(-1)^r\frac{2\omega^{2r}}{\pi^{2r}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\cos k\pi}{k^{2r}}\int_a^b \varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{\omega}\,dx.$$

Queste equazioni, ponendo $\frac{\omega}{2}$ in luogo di ω coincidono con quelle date dal Gen. Menabrea.

Il Poncelet, osservando che ciascuno elemento dell' area di una curva è racchiuso tra il trapezio formato sull' asse con le due ordinate estreme e la corda, e il trapezio formato con quelle due ordinate, prolungate se occorre, e la tangente condotta all' estremità dell' ordinata equidistante dalle estreme, à pensato di prendere la media aritmetica tra il risultato fornito dal primo processo de' trapezi inscritti e quello dato dal metodo di Legendre; se non che per non avere a calcolare tutte le ordinate di posto impari à ingegnosamente construito i trapezi incsritti congiungendo le estremità delle due prime ordinate e delle due ultime, e poi unendo tutti i punti di contatto.

Per ottenere la sua formola decomponiamo l' integrale proposto in tre, cioè facciamo

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^{a+\omega}\varphi(x)\,dx+\int_{a+\omega}^{b-\omega}\varphi(x)\,dx+\int_{b-\omega}^{b}\varphi(x)\,dx,$$

applichiamo al primo e al terzo la (20) e al secondo la (22), ed avremo

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = 2\omega\left\{\tfrac{1}{4}\varphi(a)+\tfrac{3}{4}\varphi(a+\omega)+\varphi(a+3\omega)+\cdots\right.$$

$$\left.+\varphi(a+(2q-3)\omega)+\tfrac{3}{4}\varphi(a+(2q-1)\omega)+\tfrac{1}{4}\varphi(b)\right\}$$

$$-2\sum_{k=1}^{k=\infty}\left\{\int_a^{a+\omega}\varphi(x)\cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}\,dx\right.$$

$$\left.+\int_{a+\omega}^{b-\omega}\varphi(x)\cos\frac{k\pi(x-a-\omega)}{\omega}\,dx+\int_{b-\omega}^{b}\varphi(x)\cos\frac{2k\pi(x-b+\omega)}{\omega}\,dx\right\}.$$

Ora

$$\cos\frac{k\pi(x-a-\omega)}{\omega}=\cos k\pi\cos\frac{k\pi(x-a)}{\omega}$$

$$\cos\frac{2k\pi(x-b+\omega)}{\omega}=\cos\frac{2k\pi(x-a-(2q-1)\omega)}{\omega}=\cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega},$$

ed inoltre è evidente che

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}F(k)=\sum_{k=1}^{k=\infty}F(2k)+\sum_{k=1}^{k=\infty}F(2k-1), \tag{28}$$

e perciò otterremo

$$\int_a^b\varphi(x)\,dx=2\omega\left\{\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{4}-\frac{\varphi(a+\omega)+\varphi(a+(2q-1)\omega)}{4}\right. \tag{29}$$

$$\left.+\varphi(a+\omega)+\varphi(a+3\omega)+\cdots+\varphi(a+(2q-1)\omega)\right\}$$

$$-2\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_a^b\varphi(x)\cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}\,dx+2\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_{a+\omega}^{b-\omega}\varphi(x)\cos\frac{(2k-1)\pi(x-a)}{\omega}\,dx.$$

Dalla semisomma di questa con la (26), avuto pure riguardo alla (28), risulta

$$(30)\qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx = 2\omega\left\{\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{8} - \frac{\varphi(a+\omega)+\varphi(a+(2q-1)\omega)}{8}\right.$$

$$\left. +\varphi(a+\omega)+\varphi(a+3\omega)+\ldots+\varphi(a+(2q-1)\omega)\right\}$$

$$-2\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_a^b \varphi(x)\cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}\,dx + \sum_{k=1}^{k=\infty}\int_a^b \varphi(x)\cos\frac{(2k-1)\pi(x-a)}{\omega}\,dx$$

$$+\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_{a+\omega}^{b-\omega} \varphi(x)\cos\frac{(2k-1)\pi(x-a)}{\omega}\,dx,$$

che è la formola di Poncelet completata con integrali definiti.

Se invece avessimo posto per $\int_a^{a+\omega}\varphi(x)dx$ e $\int_{b-\omega}^{b}\varphi(x)dx$ i valori dati dalla (19) e per $\int_{a+\omega}^{b-\omega}\varphi(x)dx$ quello fornito dalla (21) saremmo pervenuti all' equazione

$$(31)\quad \int_a^b \varphi(x)\,dx = 2\omega\left\{\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{4} - \frac{\varphi(a+\omega)+\varphi(a+(2q-1)\omega)}{4}\right.$$

$$\left.+\varphi(a+\omega)+\varphi(a+3\omega)+\ldots+\varphi(a+(2q-1)\omega)\right\}$$

$$-\frac{1}{12}\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)+3[\varphi'(b-\omega)-\varphi'(a+\omega)]\right\}$$

$$+\frac{1}{720}\omega^4\left\{\varphi'''(b)-\varphi'''(a)+15[\varphi'''(b-\omega)-\varphi'''(a+\omega)]\right\}$$

$$-\frac{1}{30240}\omega^6\left\{\varphi^{v}(b)-\varphi^{v}(a)+63[\varphi^{v}(b-\omega)-\varphi^{v}(a+\omega)]\right\}+\ldots\ldots$$

$$-(-1)^r\frac{2\omega^{2r}}{\pi^{2r}}\left\{\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{(2k)^{2r}}\int_a^b \varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}\,dx\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{(2k-1)^{2r}}\int_{a+\omega}^{b-\omega}\varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{(2k-1)\pi(x-a)}{\omega}\,dx\right\}$$

e dalla semisomma di questa con la (27) avremmo avuto

$$(32)\qquad \int_a^b \varphi(x)dx$$

$$=2\omega\left\{\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{8}-\frac{\varphi(a+\omega)+\varphi(a+(2q-1)\omega)}{8}+\varphi(a+\omega)+\varphi(a+3\omega)+\ldots+\varphi(a+(2q-1)\omega)\right\}$$

$$+\frac{1}{24}\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)-3\left[\varphi'(b-\omega)-\varphi'(a+\omega)\right]\right\}$$

$$-\frac{1}{1440}\omega^4\left\{13\left[\varphi'''(b)-\varphi'''(a)\right]-15\left[\varphi'''(b-\omega)-\varphi'''(a+\omega)\right]\right\}$$

$$+\frac{1}{60480}\omega^6\left\{61\left[\varphi^{v}(b)-\varphi^{v}(a)\right]-63\left[\varphi^{v}(b-\omega)-\varphi^{v}(a+\omega)\right]\right\}-\ldots\ldots$$

$$-(-1)^r\frac{\omega^{2r}}{\pi^{2r}}\left\{2\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{(2k)^{2r}}\int_a^b\varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}\,dx\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{(2k-1)^{2r}}\left(\int_a^b\varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{(2k-1)\pi(x-a)}{\omega}dx+\int_{a+\omega}^{b-\omega}\varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{(2k-1)\pi(x-a)}{\omega}dx\right)\right\}$$

Se invece di combinare nel modo che abbiamo tenuto la (19) e la (21), o la (20) e la (22) avessimo seguito il processo da prima indicato, cioè moltiplicato la (22) per un fattore λ determinato dall' equazione

$$1+2^2\lambda=0\,,$$

che dà $\lambda=-\frac{1}{4}$, e quindi sommato con la (20), avremmo conseguito

$$\frac{3}{4}\int_a^b \varphi(x)\,dx = \omega\left\{\frac{1}{4}\varphi(a)+\varphi(a+\omega)+\frac{1}{2}\varphi(a+2\omega)+\varphi(a+3\omega)+\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\varphi(a+(2q-2)\omega)+\varphi(a+(2q-1)\omega)+\frac{1}{4}\varphi(b)\right\}$$

$$-2\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_a^b \varphi(x)\cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}\,dx+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_a^b \varphi(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{\omega}\,dx,$$

da cui, mercè la (25),

$$(33)\qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx = \frac{\omega}{3}\left\{\varphi(a)+4\varphi(a+\omega)+2\varphi(a+2\omega)+4\varphi(a+3\omega)+\ldots\right.$$

$$\left.+2\varphi(a+(2q-2)\omega)+4\varphi(a+(2q-1)\omega)+\varphi(b)\right\}$$

$$-\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{k=\infty}(2\cos k\pi+1)\int_a^b \varphi(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{\omega}\,dx.$$

Analogamente dalle (19) e (21) sarebbe venuto

$$(34)\qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

$$=\frac{\omega}{3}\left\{\varphi(a)+4\varphi(a+\omega)+2\varphi(a+2\omega)+\ldots+2\varphi(a+(2q-2)\omega)+4\varphi(a+(2q-1)\omega)+\varphi(b)\right\}$$

$$-\frac{1}{3.60}\omega^4\left\{\varphi'''(b)-\varphi'''(a)\right\}+\frac{1}{3.504}\omega^6\left\{\varphi^{\mathrm{v}}(b)-\varphi^{\mathrm{v}}(a)\right\}-\frac{1}{3.4800}\omega^8\left\{\varphi^{\mathrm{vii}}(b)-\varphi^{\mathrm{vii}}(a)\right\}+\ldots.$$

$$-(-1)^r\frac{2}{3}\cdot\frac{\omega^{2r}}{\pi^{2r}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2\cos k\pi+1}{k^{2r}}\int_a^b \varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{\omega}\,dx.$$

Resta così a un tratto assegnata per integrale definito, o per serie col suo termine complementare, la correzione da farsi alla formola di Tommaso Simpson.

Le equazioni (33) e (34) si accordano con le (39) e (40) della Memoria più volte citata del Sig. Menabrea.

È noto che nel processo di Simpson si divide la differenza dei limiti $b-a$ in un numero pari di parti uguali, e quindi all'arco della curva che passa per le estremità di tre ordinate successive si sostituisce un arco di parabola conica che passi per gli stessi tre punti, e il cui asse sia parallelo a quello delle ordinate.

Il Sig. Parmentier (*) dall'esame de' primi termini della differenza tra il valore esatto dell'integrale e il valore approssimato fornito dal metodo detto de' trapezi inscritti e da quello di Legendre è stato indotto a proporre una nuova formola di quadratura. In luogo della semisomma della (29) e della (26), come fa Poncelet, egli prende il terzo della somma della (29) col doppio della (26). Si ottiene così

$$(35)\qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

$$=2\omega\left\{\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{12}-\frac{\varphi(a+\omega)+\varphi(a+(2q-1)\omega)}{12}+\varphi(a+\omega)+\varphi(a+3\omega)+\ldots+\varphi(a+(2q-1)\omega)\right\}$$

$$-2\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_a^b \varphi(x)\cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}\,dx+\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_{a+\omega}^{b-\omega}\varphi(x)\cos\frac{(2k-1)\pi(x-a)}{\omega}\,dx$$

$$+\frac{4}{3}\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_a^b \varphi(x)\cos\frac{(2k-1)\pi(x-a)}{\omega}\,dx.$$

Allo stesso modo dalla (31) e dalla (27) si ricava

(*) Terquem. Nouvelles Annales de Mathém. T. 14.

$$(36)\quad \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

$$=2\omega\left\{\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{12}-\frac{\varphi(a+\omega)+\varphi(a+(2q-1)\omega)}{12}+\varphi(a+\omega)+\varphi(a+3\omega)+\ldots+\varphi(a+(2q-1)\omega)\right\}$$

$$+\frac{1}{12}\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)-[\varphi'(b-\omega)-\varphi'(a+\omega)]\right\}$$

$$-\frac{1}{720}\omega^4\left\{9[\varphi'''(b)-\varphi'''(a)]-15[\varphi'''(b-\omega)-\varphi'''(a+\omega)]\right\}+\ldots$$

$$-(-1)^r\frac{2\omega^{2r}}{\pi^{2r}}\left\{\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{(2k)^{2r}}\int_a^b \varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}\,dx\right.$$

$$-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{(2k-1)^{2r}}\int_{a+\omega}^{b-\omega}\varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{(2k-1)\pi(x-a)}{\pi}\,dx$$

$$\left.-\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{(2k-1)^{2r}}\int_a^b \varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{(2k-1)\pi(x-a)}{\omega}\,dx\right\}.$$

Se vogliamo che la distanza costante tra le ordinate da calcolarsi sia la medesima per ciascuno de' processi indicati dobbiamo porre $\frac{\omega}{2}$ in luogo di ω nella formola (19) e $\frac{\omega}{4}$ nelle (27), (32) e (36), ed allora il primo termine della differenza tra il valore approssimato dell' integrale e il suo valore esatto, sviluppata per le potenze della suddetta distanza ω, sarà:

pel metodo de' trapezi inscritti $-\frac{1}{48}\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}$, e si calcolano $2q+1$ ordinate

.....	di Legendre	$+\frac{1}{96}\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}$,	..... $2q$	.....
.....	di Poncelet	$-\frac{1}{192}\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}$,	..... $2q+2$	.....
.....	di Parmentier	$+\frac{1}{768}\omega^4\left\{\varphi''(b)+\varphi''(a)\right\}$,	..... $2q+2$	.....
.....	di Simpson	$-\frac{1}{180}\omega^4\left\{\varphi'''(b)-\varphi'''(a)\right\}$,	..... $2q+1$	.....

La correzione dipendendo dal valore di ω e della forma della funzione φ non si può dire in generale, come taluni àn fatto, non tenendo conto che del solo primo termine, che il metodo di Legendre sia sempre preferibile a quello de' trapezi inscritti, che il metodo di Poncelet dia un valore più approssimato di quello di Legendre, e che la formola di Parmentier, siccome sembra pretendere il suo autore, sia da anteporsi alle altre. L' unica cosa evidente si è che per ω sufficientemente piccola, in modo che la correzione possa limitarsi al solo primo termine, l' approssimazione cresce ne' diversi metodi nell' ordine in cui sono sopra disposti, e che perciò tra essi il valore fornito da quello di Simpson finisce con essere il più vicino al vero valore dell' integrale. Ma ciò non toglie che con un numero assai limitato di ordinate non si possa avere in alcuni casi una maggiore approssimazione con la formola di Legendre e di Poncelet che con quella di Simpson.

Mi pare che l' errore del Sig. Parmentier nel volere giustificare la sua proposizione (*) consista nel ritenere che la curva $y = \varphi(x)$, di cui si tratta di valutar l' area, non abbia punti di flesso nell' intervallo da $x = a$ ad $x = b$.

(*) Nouv. Annales de Mathém. T. 16.

Se supponiamo $n = 4q$ avremo oltre le (20) e (22), in cui bisogna mettere $2q$ invece di q, la seguente:

$$(37)\qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx = 4\omega\left\{\frac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+4\omega)+\ldots+\varphi(a+(4q-4)\omega)+\frac{1}{2}\varphi(b)\right\}$$

$$-2\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_a^b \varphi(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{2\omega}\,dx,$$

ed oltre le (19) e (21), nelle quali pure va posto $2q$ in luogo di q,

$$(38)\qquad \int_a^b \varphi(x)dx = 4\omega\left\{\frac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+4\omega)+\ldots+\varphi(a+(4q-4)\omega)+\frac{1}{2}\varphi(b)\right\}$$

$$-\frac{1}{12}4^2\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}+\frac{1}{720}4^4\omega^4\left\{\varphi'''(b)-\varphi'''(a)\right\}-\frac{1}{30240}4^6\omega^6\left\{\varphi^{v}(b)-\varphi^{v}(a)\right\}+\ldots$$

$$-(-1)^r\frac{2(2\omega)^{2r}}{\pi^{2r}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^{2r}}\int_a^b \varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{k\pi\,(x-a)}{2\omega}\,dx.$$

Stabiliamo le equazioni

$$1+2^2\lambda_1+4^2\lambda_2=0,$$

$$1+2^4\lambda_1+4^4\lambda_2=0,$$

da cui

$$\lambda_1=-\frac{20}{64},\qquad \lambda_2=\frac{1}{64},$$

moltiplichiamo rispettivamente le (20), (22) e (37) per 64, -20 e 1, e sommiamo; otterremo

$$45\int_a^b \varphi(x)dx=\omega\Big\{14\varphi(a)+64\Big(\varphi(a+\omega)+\varphi(a+3\omega)+\ldots+\varphi(a+(4q-1)\omega)\Big)$$

$$+24\Big(\varphi(a+2\omega)+\varphi(a+6\omega)+\ldots+\varphi(a+(4q-2)\omega)\Big)$$

$$+28\Big(\varphi(a+4\omega)+\varphi(a+8\omega)+\ldots+\varphi(a+(4q-4)\omega)\Big)+14\varphi(b)\Big\}$$

$$-128\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_a^b \varphi(x)\cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}dx+40\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_a^b \varphi(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{\omega}dx$$

$$-2\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_a^b \varphi(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{2\omega}dx$$

ossia

$$(39)\qquad \int_a^b \varphi(x)dx=\frac{\omega}{45}\Big\{14\varphi(a)+64\Big(\varphi(a+\omega)+\ldots+\varphi(a+(4q-1)\omega)\Big)$$

$$+24\Big(\varphi(a+2\omega)+\ldots+\varphi(a+(4q-2)\omega)\Big)+28\Big(\varphi(a+4\omega)+\ldots+\varphi(a+(4q-4)\omega)\Big)+14\varphi(b)\Big\}$$

$$-\frac{64}{45}\sum_{k=1}^{k=\infty}\cos k\pi\int_a^b \varphi(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{\omega}dx-\frac{2}{45}\sum_{k=1}^{k=\infty}(6\cos k\pi+7)\int_a^b \varphi(x)\cos\frac{h\pi(x-a)}{2\omega}dx.$$

Facendo la medesima operazione sopra le (19), (21) e (38) risulta

$$(40)\qquad \int_a^b \varphi(x)dx=\frac{\omega}{45}\Big\{14\varphi(a)+64\Big(\varphi(a+\omega)+\ldots+\varphi(a+(4q-1)\omega)\Big)$$

$$+24\Big(\varphi(a+2\omega)+\ldots+\varphi(a+(4q-2)\omega)\Big)+28\Big(\varphi(a+4\omega)+\ldots+\varphi(a+4q-4)\omega)\Big)+14\varphi(b)\Big\}$$

$$-\frac{2}{3^3.5.7.}\omega^6\Big\{\varphi^{\text{V}}(b)-\varphi^{\text{V}}(a)\Big\}+\frac{1}{2^2.3^2.5^2}\omega^8\Big\{\varphi^{\text{VII}}(b)-\varphi^{\text{VII}}(a)\Big\}$$

$$-\frac{1609}{2^5.3^6.5^2.7.11}\omega^{10}\Big\{\varphi^{\text{IX}}(b)-\varphi^{\text{IX}}(a)\Big\}+\ldots$$

$$-\frac{(-1)^r}{45}\cdot\frac{2\omega^{2r}}{\pi^{2r}}\Big\{32\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\cos k\pi}{k^{2r}}\int_a^b \varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{\omega}\,dx$$

$$+2^{2r}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{6\cos k\pi+7}{k^{2r}}\int_a^b \varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{2\omega}\,dx\Big\}.$$

Parimente se n fosse multiplo di 6, $n=6q$, stabilendo le equazioni

$$1+2^2\lambda_1+3^2\lambda_2+6^2\lambda_3=0,$$

$$1+2^4\lambda_1+3^4\lambda_2+6^4\lambda_3=0,$$

$$1+2^6\lambda_1+3^6\lambda_2+6^6\lambda_3=0,$$

si otterebbe

$$(41)\qquad \int_a^b \varphi(x)dx = \frac{\omega}{140}\Big\{41[\varphi(a)+\varphi(b)]$$

$$+216[\varphi(a+\omega)+\varphi(a+5\omega)+\varphi(a+11\omega)+\ldots+\varphi(a+(6q-5)\omega)-\varphi(a+(6q-1)\omega)]$$

$$+\ 27[\varphi(a+2\omega)+\varphi(a+4\omega)+\varphi(a+8\omega)+\ldots+\varphi(a-(6q-4)\omega)+\varphi(a+(6q-2)\omega)]$$

$$+272[\varphi(a+3\omega)+\varphi(a+9\omega)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\varphi(a+(6q-3)\omega)]$$

$$+\ 82[\varphi(a+6\omega)+\varphi(a+12\omega)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\varphi(a+(6q-6)\omega)]\Big\}$$

$$-\sum_{k=1}^{k=\infty}(\cos k\pi-1133)\int_a^b \varphi(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{\omega}\,dx-$$

$$-\sum_{k=1}^{k=\infty}(367\cos k\pi+365)\int_a^b \varphi(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{3\omega}\,dx,$$

ed anche

$$(42)\quad \int_a^b \varphi(x)dx = \frac{\omega}{140}\Big\{41[\varphi(a)+\varphi(b)]+216[\varphi(a+\omega)+\ldots]+27[\varphi(a+2\omega)+\ldots]$$

$$+272[\varphi(a+3\omega)+\ldots]+82[\varphi(a+6\omega)+\ldots]\Big\}$$

$$-\frac{3^2}{2^3.5^2.7}\omega^8\Big\{\varphi^{\text{VII}}(b)-\varphi^{\text{VII}}(a)\Big\}+\frac{5}{2^3.7.11}\omega^{10}\Big\{\varphi^{\text{IX}}(b)-\varphi^{\text{IX}}(a)\Big\}-\ldots$$

$$-(-1)^r\frac{\omega^{2r}}{\pi^{2r}}\Big\{\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\cos k\pi-1133}{k^{2r}}\int_a^b \varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{\omega}dx$$

$$+3^{2r}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{367\cos k\pi+365}{k^{2r}}\int_a^b \varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{3\omega}dx\Big\}.$$

Al 2.° membro di quest' ultima equazione si aggiunga e si sottragga

$$\frac{1}{140}\Big\{\Delta^6\varphi(a)+\Delta^6\varphi(a+6\omega)+\ldots+\Delta^6\varphi(a+(6q-6)\omega)\Big\},$$

e si osservi che si à in generale da una parte

$$\Delta^6\varphi(x)=\varphi(x)+\varphi(x+6\omega)-6[\varphi(x+\omega)+\varphi(x+5\omega)]$$

$$+15[\varphi(x+2\omega)+\varphi(x+4\omega)]-20\varphi(x+3\omega),$$

e dall' altra

$$\Delta^6\varphi(x)=\left(e^{\omega\frac{d}{dx}}-1\right)^6\varphi(x)$$

$$=\omega^6\varphi^{\text{VI}}(x)+3\omega^7\varphi^{\text{VII}}(x)+\frac{19}{4}\omega^8\varphi^{\text{VIII}}(x)+\ldots\ldots$$

ed avremo

$$(43)\quad \int_a^b \varphi(x)dx$$

$$=\frac{3}{10}\omega\Big\{\varphi(a)+\varphi(b)+5[\varphi(a+\omega)+\varphi(a+5\omega)+\ldots+\varphi(a+(6q-5)\omega)+\varphi(a+(6q-1)\omega)]$$

$$+[\varphi(a+2\omega)+\varphi(a+4\omega)+\ldots+\varphi(a+(6q-4)\omega)+\varphi(a+(6q-2)\omega)]$$

$$+6[\varphi(a+3\omega)+\varphi(a+9\omega)+\ldots+\varphi(a+(6q-3)\omega)]$$

$$+2[\varphi(a+6\omega)+\varphi(a+12\omega)+\ldots+\varphi(a+(6q-6)\omega)]\Big\}$$

$$-\omega^6\Big\{\varphi^{\text{VI}}(a)+\varphi^{\text{VI}}(a+6\omega)+\ldots+\varphi^{\text{VI}}(a+(6q-6)\omega)\Big\}$$

$$-3\omega^7\Big\{\varphi^{\text{VII}}(a)+\varphi^{\text{VII}}(a+6\omega)+\ldots+\varphi^{\text{VII}}(a+(6q-6)\omega)\Big\}$$

$$-\omega^8\Big\{\frac{19}{4}[\varphi^{\text{VIII}}(a)+\ldots+\varphi^{\text{VIII}}(a+(6q-6)\omega)]+\frac{3^2}{2^1.5^2.7}[\varphi^{\text{VII}}(b)-\varphi^{\text{VII}}(a)]\Big\}-\ldots$$

Questa è la formola che si deduce dal metodo assai semplice poposto da Weddle (*) con i primi termini della serie che ne rappresenta la correzione.

(*) The Cambridge and Dublin Mathem. Journal V. 9, p. 71.

Le formole di quadratura contenute nelle equazioni (20), (33), (39), (41) rientrano in quelle calcolate da Cotes nella sua opera *Harmonia Mensurarum,* giovandosi delle indicazioni lasciate da Newton. Se si divide l'intervallo totale delle ascisse estreme in parti uguali l'area racchiusa fra due ordinate consecutive, l'arco della curva e l'asse delle x si può valutare approssimatamente mediante 2, 3,.... in generale n ordinate, comprendendo fra esse le due estreme. Si ànno allora le formole di Cotes, le quali danno il valore esatto dell'integrale quante volte la funzione da integrarsi è nel caso generale intera razionale di grado non superiore ad $n-1$.

Il celebre Gauss (*) à avuto l'idea felice di sostituire alle ordinate equidistanti del Cotes ordinate prese ad intervalli diversi, e di determinare quest'intervalli in maniera che per mezzo delle n ordinate corrispondenti si abbia il valore dell'integrale più approssimato che sia possibile, e il grado dell'approssimazione si fa generalmente il doppio di prima, e se ne ottiene il valore esatto quando il grado della funzione non supera $2n-1$.

Nel caso che si voglia prendere una sola ordinata il metodo di Gauss riproduce quello di Legendre.

Il ch. Prof. Turazza (**) à voluto introdurre nel calcolo approssimato dell'integrale i valori estremi delle ordinate, ed à annunziato in fine alla sua Memoria che un'analisi uguale a quella da lui esposta si potrebbe applicare al caso più generale, in cui fossero fissati alcuni valori della funzione, e si volesse intercalare tra essi un certo numero di altri valori in modo che l'approssimazione riuscisse la massima possibile.

Questo problema è stato in seguito maestrevolmente trattato dal Sig. Christoffel. (***)

La soluzione che qui brevemente soggiungiamo ci sembra abbastanza semplice per non riuscire del tutto inutile.

(*) Methodus nova integral. valores per approxim. inveniendi. Comment. Soc. R. Scient. Gotting. recentiores. V. 3.

(**) Intorno all' uso de' compartimenti diseguali nella ricercha del val. numerico di un dato integr. Mem. dell' Istit. Veneto T. 3.

(***) Über die Gaussische Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben. Crelle Journ. T. 55.

Le equazioni (33) e (34) si accordano con le (39) e (40) della Memoria più volte citata del Sig. Menabrea.

È noto che nel processo di Simpson si divide la differenza dei limiti $b-a$ in un numero pari di parti uguali, e quindi all'arco della curva che passa per le estremità di tre ordinate successive si sostituisce un arco di parabola conica che passi per gli stessi tre punti, e il cui asse sia parallelo a quello delle ordinate.

Il Sig. Parmentier (*) dall'esame de' primi termini della differenza tra il valore esatto dell'integrale e il valore approssimato fornito dal metodo detto de' trapezi inscritti e da quello di Legendre è stato indotto a proporre una nuova formola di quadratura. In luogo della semisomma della (29) e della (26), come fa Poncelet, egli prende il terzo della somma della (29) col doppio della (26). Si ottiene così

$$(35)\qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

$$=2\omega\left\{\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{12}-\frac{\varphi(a+\omega)+\varphi(a+(2q-1)\omega)}{12}+\varphi(a+\omega)+\varphi(a+3\omega)+\ldots+\varphi(a+(2q-1)\omega)\right\}$$

$$-2\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_a^b \varphi(x)\cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}\,dx+\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_{a+\omega}^{b-\omega}\varphi(x)\cos\frac{(2k-1)\pi(x-a)}{\omega}\,dx$$

$$+\frac{4}{3}\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_a^b \varphi(x)\cos\frac{(2k-1)\pi(x-a)}{\omega}\,dx.$$

Allo stesso modo dalla (31) e dalla (27) si ricava

(*) Terquem. Nouvelles Annales de Mathém. T. 14.

e sommiamole con la prima, otterremo

$$(44)\quad \int_a^b \varphi(x)dx = k\Big\{\lambda_1\varphi(a+\alpha_1 k)+\lambda_2\varphi(a+\alpha_2 k)+\ldots+\lambda_{p+n}\varphi(a+\alpha_{p+n}k)\Big\}$$

$$+\sum_{r=1}^{r=p+2n}\frac{k^r}{\Pi(r-1)}\Big\{\frac{1}{r}-\alpha_1^{r-1}\lambda_1-\alpha_2^{r-1}\lambda_2-\ldots-\alpha_{p+n}^{r-1}\lambda_{p+n}\Big\}\varphi^{(r-1)}(a)$$

$$+\frac{k^{p+2n+1}}{\Pi(p+2n-1)}\Big\{\frac{1}{p+2n}\int_0^1 dz.z^{p+2n}\varphi^{(p+2n)}(a+k-kz)$$

$$-\alpha_1^{p+2n}\lambda_1\int_0^1 dz.z^{p+2n-1}\varphi^{(p+2n)}(a+\alpha_1 k-\alpha_1 kz)-\ldots$$

$$-\alpha_{p+n}^{p+2n}\lambda_{p+n}\int_0^1 dz.z^{p+2n-1}\varphi^{(p+2n)}(a+\alpha_{p+n}k-\alpha_{p+n}kz)\Big\}.$$

Ora supposto che la funzione $\varphi(x)$ si sviluppi in serie convergente, la prima linea esprimerà con tanto maggiore approssimazione il valore dell'integrale quanto più grande sarà il numero dei coefficienti delle successive potenze di k a partire dalla prima che si uguaglieranno a zero.

Se tutte le α e λ sono indeterminate potremo fare sparire $2p+2n$ di tali coeficienti, e perciò l'espressione

$$k\Big\{\lambda_1\varphi(a+\alpha_1 k)+\lambda_2\varphi(a+\alpha_2 k)+\ldots+\lambda_{p+n}\varphi(a+\alpha_{p+n}k)\Big\}$$

darà evidentemente il valore esatto dell'integrale se il grado di $\varphi(x)$ non supera $2p+2n-1$; ma se p di quelle quantità sono assegnate, allora non si potranno annullare che $p+2n$ coefficienti, e quindi la suddetta espressione non darà il valore esatto che quando il grado di $\varphi(x)$ non sia maggiore di $p+2n-1$.

Siano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ p valori dati e determiniamo le $p+2n$ quantità

$$\alpha_{p+1},\ \alpha_{p+2},\ \ldots\ \alpha_{p+n},\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ \lambda_{p+n}$$

in guisa da verificare le $p+2n$ equazioni

$$(45)\qquad \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{p+n}=1, \\ \alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2+\ldots+\alpha_{p+n}\lambda_{p+n}=\dfrac{1}{2}, \\ \alpha_1^2\lambda_1+\alpha_2^2\lambda_2+\ldots+\alpha_{p+n}^2\lambda_{p+n}=\dfrac{1}{3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1^{p+2n-1}\lambda_1+\alpha_2^{p+2n-1}\lambda_2+\ldots+\alpha_{p+n}^{p+2n-1}\lambda_{p+n}=\dfrac{1}{p+2n}. \end{cases}$$

A questo fine poniamo

$$(46)\qquad \theta(x)=A_0x^{p+n}+A_1x^{p+n-1}+\ldots+A_{p+n-1}x+A_{p+n},$$

e moltiplichiamo per $A_{p+n}, A_{p+n-1}, \ldots A_1, A_0$ rispettivamente

la 1.ª 2.ª 3.ª .... $(p+n+1)^{ma}$ delle (45),

e poi la 2.ª 3.ª 4.ª .... $(p+n+2)^{ma}$,

. . . . . .

e finalmente la $(n)^{ma}$, $(n+1)^{ma}$, ... $(p+2n)^{ma}$,

quindi sommando avremo

$$\theta(\alpha_1)\lambda_1+\theta(\alpha_2)\lambda_2+\ldots+\theta(\alpha_{p+n})\lambda_{p+n}=\int_0^1\theta(x)dx,$$

$$\alpha_1\theta(\alpha_1)\lambda_1+\alpha_2\theta(\alpha_2)\lambda_2+\ldots+\alpha_{p+n}\theta(\alpha_{p+n})\lambda_{p+n}=\int_0^1 x\theta(x)dx,$$

. . . . . .

$$\alpha_1^{n-1}\theta(\alpha_1)\lambda_1+\alpha_2^{n-1}\theta(\alpha_2)\lambda_2+\ldots+\alpha_{p+n}^{n-1}\theta(\alpha_{p+n})\lambda_{p+n}=\int_0^1 x^{n-1}\theta(x)dx.$$

Evidentemente queste equazioni saranno soddisfatte se ammettiamo che la (46) abbia per radici le quantità date $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$, e le quantità cercate $\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \ldots \alpha_{p+n}$, e di più che gl' integrali ne' secondi membri siano tutti nulli.

Per avere adunque i valori $\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \ldots \alpha_{p+n}$ tutta la quistione è ridotta a trovare un polinomio $\theta(x)$ di grado $p+n$ tale che gl'integrali

$$\int_0^1\theta(x)dx,\quad \int_0^1 x\theta(x)dx,\quad \ldots\quad \int_0^1 x^{n-1}\theta(x)dx$$

siano uguali a zero, e di più esso si annulli per $x=\alpha_1, =\alpha_2, \ldots =\alpha_p$.

È nota, e può facilmente trovarsi, la formola

$$\int x^m\theta(x)dx=x^m\int\theta(x)dx-x^{m-1}\int^{(2)}\theta(x)dx^2+m(m-1)x^{m-2}\int^{(3)}\theta(x)dx^3-\ldots$$

$$+(-1)^m m(m-1)\ldots 2.1.\int^{(m+1)}\theta(x)dx^{m+1},$$

dalla quale si scorge che gl' integrali superiori saranno nulli se tali

saranno

$$\int \theta(x)dx, \int^{(2)} \theta(x)dx^2, \ldots \int^{(n)} \theta(x)dx^n,$$

presi fra i limiti 0 e 1, e viceversa.

Si faccia

$$\int^{(n)} \theta(x)dx^n = \psi(x),$$

e la funzione $\Psi(x)$ dovrà insieme alle sue derivate successive sino alla $(n-1)^{ma}$ annullarsi per $x=0$ ed $x=1$.

A ciò si soddisfa prendendo

$$\Psi(x) = x^n (x-1)^n \varpi(x),$$

per cui

$$\theta(x) = D.^n x^n (x-1)^n \varpi(x),$$

e $\varpi(x)$ evidentemente deve essere di grado p, ed inoltre così fatta che $D.^n x^n (x-1)^n \varpi(x)$ si riduca a zero per $x=\alpha_1, =\alpha_2, \ldots = \alpha_p$.

Sia

$$\varpi(x) = B_0 x^p + B_1 x^{p-1} + \ldots\ldots + B_p,$$

e poniamo per brevità

(47) $$C_\lambda(x) = D.^n x^{n+p-\lambda} (x-1)^n$$

avremo

(48) $$\theta(x) = B_0 . C_0(x) + B_1 . C_1(x) + \ldots\ldots + B_p . C_p(x)$$

Per determinare i coeficienti $B_0, B_1, \ldots B_p$ serviranno le equazioni:

$$0 = B_0 . C_0(\alpha_1) + B_1 . C_1(\alpha_1) + \ldots\ldots + B_p . C_p(\alpha_1),$$

$$0 = B_0 . C_0(\alpha_2) + B_1 . C_1(\alpha_2) + \ldots\ldots + B_p . C_p(\alpha_2),$$

$$\ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0 = B_0 . C_0(\alpha_p) + B_1 . C_1(\alpha_p) + \ldots\ldots + B_p . C_p(\alpha_p).$$

Eliminando tra queste e la (48) $B_0, B_1, \ldots B_p$, si otterrà, facendo astrazione da un fattore costante.

$$(49) \qquad \theta(x) = \begin{vmatrix} C_0(x) & C_1(x) & \ldots\ldots & C_p(x) \\ C_0(\alpha_1) & C_1(\alpha_1) & \ldots\ldots & C_p(\alpha_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_0(\alpha_p) & C_1(\alpha_p) & \ldots\ldots & C_p(\alpha_p) \end{vmatrix} = 0$$

Trovata così l'equazione che à per radici oltre le $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ le quantità cercate $\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2} \ldots \alpha_{p+n}$, le prime $p+n$ equazioni delle (45) ci daranno i fattori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{p+n}$. Esse risolute col metodo insegnato da Lagrange (*) forniscono per un' incognita qualunque λ_s un valore che si pone facilmente sotto la forma

$$(50) \qquad \lambda_s = \frac{1}{\theta'(\alpha_s)} \int_0^1 \frac{\theta(x)}{x - \alpha_s} dx.$$

Riflettendo all'espressione (47) della funzione $C_\lambda(x)$ si vede subito che posto

$$V = \frac{d^{p^n}}{d\alpha_1^n d\alpha_2^n \ldots d\alpha_p^n} . \left\{ \alpha_1(\alpha_1 - 1)\alpha_2(\alpha_2 - 1) \ldots \alpha_p(\alpha_p - 1) \right\}^n \begin{vmatrix} x^p & x^{p-1} & \ldots\ldots & 1 \\ \alpha_1^p & \alpha_1^{p-1} & \ldots\ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_p^p & \alpha_p^{p-1} & \ldots\ldots & 1 \end{vmatrix}$$

(*) Mém. de l' Acad. de Berlin, An. 1775 et 1792. V. Baltzer Theorie und Anwendung der Determinanten p. 53.

$$(41)\qquad \int_a^b \varphi(x)dx = \frac{\omega}{140}\Big\{41[\varphi(a)+\varphi(b)]$$

$$+216[\varphi(a+\omega)+\varphi(a+5\omega)+\varphi(a+11\omega)+\ldots+\varphi(a+(6q-5)\omega)-\varphi(a+(6q-1)\omega)]$$

$$+\ 27[\varphi(a+2\omega)+\varphi(a+4\omega)+\varphi(a+8\omega)+\ldots+\varphi(a-(6q-4)\omega)+\varphi(a+(6q-2)\omega)]$$

$$+272[\varphi(a+3\omega)+\varphi(a+9\omega)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\varphi(a+(6q-3)\omega)]$$

$$+\ 82[\varphi(a+6\omega)+\varphi(a+12\omega)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\varphi(a+(6q-6)\omega)]\Big\}$$

$$-\sum_{k=1}^{k=\infty}(\cos k\pi-1133)\int_a^b \varphi(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{\omega}\,dx-$$

$$-\sum_{k=1}^{k=\infty}(367\cos k\pi+365)\int_a^b \varphi(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{3\omega}\,dx,$$

ed anche

e per facili riduzioni si à anche

$$(54)\qquad C_\lambda(x)=\Pi(n)\sum_{r=0}^{r=n}(-1)^r(n+p-\lambda)_r(2n+p-\lambda-r)_{n-r}\,x^{n+p-\lambda-r}$$

Applicando invece la formola di Leibnitz per effettuare la derivata $(n)^{ma}$ del prodotto nel 2.° membro della (47) verrà

$$(55)\qquad C_\lambda(x)=\Pi(n)\sum_{r=0}^{r=n}(n)_r(n+p-\lambda)_{n-r}\,x^{p-\lambda+r}(x-1)^{n-r}.$$

Se si fa $p=0$ si ritorna al caso trattato da Gauss; e le radici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ saranno date dall'equazione

$$D^n.x^n(x-1)^n=0.$$

Se poi prendiamo $p=2$, $\alpha_1=0$, $\alpha_2=1$ abbiamo il caso considerato dal Prof. Turazza, e siccome allora

$$C_0(x)=D.^n x^{n+2}(x-1)^n,\quad C_1(x)=D.^n x^{n+1}(x-1)^n,\quad C_2(x)=D.^n x^n(x-1)^n,$$

$$C_0(0)=0,\qquad C_1(0)=0,\qquad C_2(0)=\Pi(n).(-1)^n,$$

$$C_0(1)=\Pi(n),\qquad C_1(1)=\Pi(n),\qquad C_2(1)=\Pi(n),$$

l'equazione (49) che fornirà i valori di, $\alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_{n+2}$ si riduce a

$$(56)\qquad C_0(x)-C_1(x)=0$$

ossia

$$D^n.x^{n+1}(x-1)^{n+1}=0,$$

che evidentemente contiene anche le due radici $x=0, x=1$.

Ponendo nella (56) per $C_0(x)$ e $C_{-1}(x)$ i valori che si deducono dalla (54) per $p=2$, avremo

$$\sum_{r=0}^{r=n}(-1)^r\left\{(n+2)_r(2n-r+2)_{n-r}\,x-(n+1)_r(2n-r+1)_{n-r}\right\}x^{n-r+1}=0,$$

ossia

$$\sum_{r=0}^{r=n}(-1)^r(n+2)_r(2n-r+2)_{n-r+1}x^{n-r+2}=0.$$

Dividendo per $(2n+2)_{n+1}\,x\,(x-1)$ si otterrà

$$x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots\ldots+A_n=0, \tag{57}$$

ove si è posto

$$A_q=\frac{1}{(2n+2)_{n+1}}\sum_{k=0}^{k=q}(-1)^k(n+2)_k(2n-k+2)_{n-k+1},$$

ossia

$$A_q=\sum_{k=0}^{k=q}(-1)^k\frac{(n+1)_k(n+2)_k}{(2n+2)_k} \tag{58}$$

Il valore di questa somma si ottiene facilmente, anche per induzione, e si trova

$$A_q=(-1)^q\frac{(n)_q(n+1)_q}{(2n+2)_q}, \tag{59}$$

il quale risultato si accorda con quello ottenuto dal Prof. Turazza.

Se nell'equazione (56) si pongano invece per $C_0(x)$ e $C_1(x)$ i valori tratti dalla (55), e poscia si tolga il fattore evidente $x(x-1)$ e si sviluppi, si à

$$x_n - \ldots + (-1)^q \frac{1}{(2n+2)_n} \cdot \frac{n-q+2}{q} \sum_{h=0}^{h=n-q} (n)_h (n+1)_{n-h-1} (n-h-1)_{q-1} \cdot x^{n-q} + \ldots = 0,$$

la quale deve conicidere con la (57) e perciò se ne conchiude

$$\frac{1}{(2n+2)_n} \cdot \frac{n-q+2}{q} \sum_{h=0}^{h=n-q} (n)_h (n+1)_{n-h-1} (n-h-1)_{q-1} = \frac{(n)_q (n+1)_q}{(2n+2)_q},$$

ossia dopo alcune semplici riduzioni

$$\sum_{h=0}^{h=n-q} (n)_h (n+1)_{h+2} (n-h-1)_{q-1} = (n+1)_{q-1} (2n-q+2)_{n-q}. \tag{60}$$

Le uguaglianze (59) e (60) non credo siano state da altri avvertite.

	ERRORI	CORREZIONI
Pag. 154 *lin.* 3 *di fondo.*	nella formola (19) e $\frac{\omega}{4}$ nelle	nelle formole
Pag. 155 *lin.* 1.	$-\frac{1}{48}\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}$	$-\frac{1}{12}\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}$
« *lin.* 2.	$+\frac{1}{96}\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}$	$+\frac{1}{24}\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}$
« *lin.* 3.	$-\frac{1}{192}\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}$	$-\frac{1}{48}\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}$
« *lin.* 4.	$+\frac{1}{768}\omega^3\left\{\varphi''(b)+\varphi''(a)\right\}$	$+\frac{1}{96}\omega^3\left\{\varphi''(b)+\varphi''(a)\right\}$