SULLA DIVISIONE
DEGLI ARCHI DI UNA CURVA DEL QUART' ORDINE
RAPPRESENTATA DALL' EQUAZIONE
$$(x^2+y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2.$$

MEMORIA (*)

DEL SOCIO ATTUALE

PROF. AB. BARNABA TORTOLINI

Ricevuta il 22 *Settembre* 1857.

1.° La curva conosciuta sotto il nome di *Lemniscata* di *Bernoulli* è il luogo geometrico della projezione ortogonale del centro dell' iperbola equilatera sulle sue tangenti; se si consideri un' iperbola di semiassi a, b, e si projetti il centro sulle tangenti, si ottiene per il luogo geometrico, come è noto, una curva del quarto ordine di equazione

$$(1) \qquad (x^2+y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2.$$

Quando $a=b$, si ottiene la Lemniscata di Bernoulli, della quale la sua definizione geometrica è che il prodotto delle distanze di un suo punto qualunque da due punti fissi sia eguale ad un quadrato dato. Sono da lungo tempo noti i lavori del *Conte di Fagnano* e di altri Geometri per dividere in più parti gli archi della lemniscata: questione che ha interessato l' avanzamento della teorica dei trascendenti ellittici. Non sarà adunque del tutto inutile di far conoscere qui

---

(*) I risultati trovati in questa Memoria furono da me dati senza dimostrazione in una Nota pubblicata nella *Raccolta scientifica di Roma* nel 1845. Potendo questa Memoria servire di complemento ad altre pubblicate sopra ricerche somiglianti si è creduto di pubblicarla ora, quale fu scritta a quell' epoca salvo qualche leggiero cangiamento nella redazione.

l'equazioni dalle quali dipende la divisione della nuova curva, e che si ridurranno naturalmente a quelle di già note per la supposizione di $a=b$. Gli archi della lemniscata sono espressi dalle sole funzioni ellittiche di prima specie, ma quelli della curva in proposito sono dati da funzioni ellittiche di prima e di terza specie a parametro circolare negativo, come dimostrai in una Memoria pubblicata nel Giornale arcadico di Roma pel mese di Settembre 1844; quindi è che per maggior chiarezza sarà bene a richiamar brevemente la rettificazione di questa curva.

2.° Quando si faccia

$$x^2+y^2=r^2$$

l' equazione (1) si ridurrà ad

$$r^4=a^2x^2-b^2y^2,$$

la quale si potrà verificare per mezzo di un angolo ausiliare ω, da essere

$$x=\frac{r^2}{a}\operatorname{cosec.}\omega, \qquad y=\frac{r^2}{b}\cot\omega;$$

d' onde si trae

$$x^2+y^2=r^4\left(\frac{1}{a^2\operatorname{sen}^2\omega}+\frac{\cos^2\omega}{b^2\operatorname{sen}^2\omega}\right)=r^2,$$

dalla quale

$$r^2=\frac{a^2b^2\operatorname{sen}^2\omega}{b^2+a^2\cos^2\omega}.$$

Facendo inoltre

$$k^2=\frac{b^2}{a^2+b^2}, \qquad k'^2=\frac{a^2}{a^2+b^2}$$

verrà

$$r^2=\frac{a^2k^2\operatorname{sen}^2\omega}{1-k'^2\operatorname{sen}^2\omega}.$$

Di qui i valori di x, y divengono

$$x=\frac{ak^2\operatorname{sen}\omega}{1-k'^2\operatorname{sen}^2\omega}, \qquad y=\frac{bk'^2\operatorname{sen}\omega\cos\omega}{1-k'^2\operatorname{sen}^2\omega}.$$

Le frazioni k, k', porgono costantemente $k^2+k'^2=1$.

Differenziando i valori di x, y e sostituiti nella formola per la rettificazione

$$ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$$

verrà

$$ds = \frac{bk\,(1-k^2\,\mathrm{sen}^2\omega)\,d\omega}{(1-k'^2\,\mathrm{sen}^2\omega)\sqrt{(1-k^2\,\mathrm{sen}^2\omega)}},$$

la quale si decomporrà in

$$ds = bk\left(\frac{k'}{k'^2}\cdot\frac{d\omega}{\sqrt{(1-k^2\,\mathrm{sen}^2\omega)}} + \frac{k'^2-k^2}{k'^2}\cdot\frac{d\omega}{(1-k'^2\,\mathrm{sen}^2\omega)\sqrt{(1-k^2\,\mathrm{sen}^2\omega)}}\right).$$

Da quest' ultima si vede che gli archi della scelta curva dipendono da funzioni ellittiche di prima e di terza specie del medesimo modulo k, e di parametro negativo $-k'^2$. Adottiamo le notazioni di Legendre col scrivere per quelle di prima specie

$$\Delta(\omega) = \sqrt{(1-k^2\,\mathrm{sen}^2\omega)}$$

$$\mathrm{F}(\omega) = \int\frac{d\omega}{\Delta(\omega)}, \qquad \mathrm{F}' = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\omega}{\Delta(\omega)},$$

come per quelle di terza specie

$$\Pi(\omega) = \int\frac{d\omega}{(1+n\,\mathrm{sen}^2\omega)\,\Delta(\omega)}$$

$$\Pi' = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\omega}{(1+n\,\mathrm{sen}^2\omega)\,\Delta(\omega)}.$$

Ciò posto un arco indefinito della nostra curva si esprimerà per

$$s = bk\left(\frac{k^2}{k'^2}\,\mathrm{F}(\omega) + \frac{k'^2-k^2}{k'^2}\,\Pi(\omega)\right).$$

Fra le quantità k, k', a, b sussistono le relazioni

$$\frac{k^2}{k'^2} = \frac{b^2}{a^2}, \quad \frac{k'^2-k^2}{k'^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2},$$

per cui si avrà ancora

$$s = bk\left(\frac{b^2}{a^2}\,\mathrm{F}(\omega) + \frac{a^2-b^2}{a^2}\,\Pi(\omega)\right).$$

La costante arbitraria non ha luogo mentre l' arco s svanisce per $\omega=0$. Che se pongasi $\omega=\frac{\pi}{2}$ risulterà per il quadrante S della curva

$$S = bk\left(\frac{b^2}{a^2}\,\mathrm{F}' + \frac{a^2-b^2}{a^2}\,\Pi'\right).$$

Da queste due ultime equazioni è che dovremo trar partito per dividere gli archi s, S in un certo numero di parti eguali.

3.° Si rende primieramente indispensabile di richiamare alcune formole date da *Legendre* nel suo Trattato delle funzioni ellittiche Tom. I, pag. 75. Se fra tre funzioni ellittiche di terza specie di modulo k, e di parametro n, e di ampiezza φ, ψ, μ sussiste la relazione trascendente

$$\Pi(\varphi)+\Pi(\psi)-\Pi(\mu)=\frac{1}{\sqrt{a}}\,\text{arc tang}\left(\frac{n\sqrt{a}\,\text{sen}\,\mu\,\text{sen}\,\psi\,\text{sen}\,\varphi}{1+n-n\cos\mu\cos\varphi\cos\psi}\right),$$

ove di più

$$a=(1+n)\left(1+\frac{k^2}{n}\right);$$

in allora anche per le funzioni ellittiche di prima specie avrà luogo l' equazione

$$F(\varphi)+F(\psi)=F(\mu).$$

Fra le ampiezze poi, φ, ψ, μ abbiamo l' equazion trigonometrica

$$\text{sen}\,\mu=\frac{\text{sen}\,\varphi\cos\psi\,\Delta(\psi)+\cos\varphi\,\text{sen}\,\psi\,\Delta(\varphi)}{1-k^2\,\text{sen}^2\varphi\,\text{sen}^2\psi}.$$

La riferita equazione fra le tre funzioni ellittiche di terza specie sussiste per valori positivi di a, ma nel caso di a negativo si trasformerà il secondo membro in quantità logaritmiche reali. Nei secondi membri rappresentanti i valori degli archi s, S il parametro n è negativo, e si esprime per $-k'^2$, ove k', è il complemento del modulo k, e si potrà sempre scegliere un angolo θ tale da essere

$$n=-k'^2=-1+k'^2\,\text{sen}^2\theta,$$

d' onde

$$\text{sen}^2\theta=\frac{1-k'^2}{k'^2}=\frac{k^2}{k'^2},$$

ossia

$$\text{sen}\,\theta=\frac{k}{k'}=\frac{b}{a},\quad \cos\theta=\frac{\sqrt{(k'^2-k^2)}}{k'}=\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a},$$

le quali hanno veramente luogo per $a>b$. Di qui si trae

$$a=(1-k'^2)\left(1-\frac{k^2}{k'^2}\right)=\frac{k^2}{k'^2}(k'^2-k^2);$$

d' altronde

$$k = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{(1+\operatorname{sen}^2\theta)}}, \qquad k' = \frac{1}{\sqrt{(1+\operatorname{sen}^2\theta)}}$$

e perciò

$$a = \frac{\operatorname{sen}^2\theta\,(1-\operatorname{sen}^2\theta)}{1+\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta}{1+\operatorname{sen}^2\theta}$$

e

$$\sqrt{a} = \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\sqrt{(1+\operatorname{sen}^2\theta)}} = k\cos\theta.$$

Ciò posto sia $\varphi=\psi$, $\mu=\varphi_2$ si avrà dalle precedenti formole

$$\operatorname{sen}\varphi_2 = \frac{2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\,\Delta(\varphi)}{1-k^2\operatorname{sen}^4\varphi}$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{1-2\operatorname{sen}^2\varphi+k^2\operatorname{sen}^4\varphi}{1-k^2\operatorname{sen}^4\varphi},$$

per cui

$$2\,\mathrm{F}(\varphi) = \mathrm{F}(\varphi_2).$$

Questa formola serve alla bisezione, od anche alla duplicazione di una funzione ellittica di prima specie, quando sia dato φ_2 per φ, o viceversa per mezzo delle ultime stabilite formole. La medesima supposizione di $\psi=\varphi$, e di $\mu=\varphi_2$ si faccia nell' equazione fra le tre funzioni ellittiche di terza specie, si avrà

$$2\,\Pi(\varphi) - \Pi(\varphi_2) = \frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{n\sqrt{a}\,.\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}\varphi_2}{1+n-n\cos^2\varphi\cos\varphi_2}\right).$$

Questa pure serve per la bisezione e duplicazione. Equazioni più semplici si ottengono per la bisezione delle funzioni ellittiche complete; così supponendo $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$, si ricaverà

$$1 = \frac{2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\,\Delta(\varphi)}{1-k^2\operatorname{sen}^4\varphi}, \qquad 2\,\mathrm{F}(\varphi) = \mathrm{F}'$$

ed insieme

$$2\,\Pi(\varphi) - \Pi' = \frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{n\sqrt{a}\operatorname{sen}^2\varphi}{1+n}\right).$$

L' angolo φ porgerà facilmente

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{\sqrt{(1+k')}}, \qquad \cos\varphi = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{(1+k')}}, \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{\sqrt{k'}},$$

d' onde la precedente ultima formola per la bisezione delle funzioni complete, darà

$$2\Pi(\varphi) - \Pi' = \frac{1}{\sqrt{a}} \text{ arc tang} \left(\frac{n\sqrt{a}}{(1+n)(1+k')} \right),$$

della quale noi ne mostreremo l' uso nella divisione della nostra curva.

4.° Sia proposto adunque di bisecare il quadrante S della curva, di già espresso per

$$S = bk \left(\frac{b^2}{a^2} F' + \frac{a^2 - b^2}{a^2} \Pi' \right).$$

Introducendovi l' angolo θ, come dal precedente parag., e fatto di più $S = 2S_1$, avremo

$$S_1 = bk \left(\text{sen}^2\theta . \frac{F'}{2} + \cos^2\theta . \frac{\Pi'}{2} \right).$$

Sostituiamo di più i valori di n, a nell' ultima formola del precedente parag., avremo simultaneamente

$$\frac{F'}{2} = F(\varphi)$$

$$\frac{\Pi'}{2} = \Pi(\varphi) + \frac{\sqrt{(1+\text{sen}^2\theta)}}{2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta} . \text{arc tang} \left[\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta\,[1+\sqrt{(1+\text{sen}^2\theta)}]} \right].$$

Di qui per la sostituzione nel secondo membro di S_1, abbiamo

$$S_1 = bk \left[\text{sen}^2\theta\, F(\varphi) + \cos^2\theta\, \Pi(\varphi) + \right.$$
$$\left. + \frac{\cos\theta\sqrt{(1+\text{sen}^2\theta)}}{2\,\text{sen}\,\theta} \text{ arc tang} \left(\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta\,[1+\sqrt{(1+\text{sen}^2\theta)}]} \right) \right].$$

Quest' espressione somministrerà la metà del quadrante corrispondente all' ampiezza φ determinata dall' equazioni

$$\text{sen}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{(1+k')}}, \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{(1+k')}}, \quad \text{tang}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{k'}}.$$

Richiamando poi dal precedente parag. il valor di k' verrà anche

$$\text{tang}\,\varphi = \sqrt[4]{(1+\text{sen}^2\theta)}.$$

È facile infine di determinare le coordinate del punto della curva corrispondenti all'ampiezza φ, per le quali coordinate non si divide in due parti eguali il quadrante: ripresi infatti i valori di x, y del parag. 2° col sostituire φ invece di ω, si avrà

$$x = \frac{ak^2 \operatorname{sen}\varphi}{1-k'^2 \operatorname{sen}^2\varphi}, \qquad y = \frac{bk'^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{1-k'^2 \operatorname{sen}^2\varphi},$$

le quali in forza dei valori di $\operatorname{sen}\varphi$, $\cos\varphi$, daranno

$$x = \frac{ak^2\sqrt{(1+K)}}{k^2+K}, \qquad y = \frac{bk'^2\sqrt{K}}{k^2+K}.$$

Nella lemniscata $a=b$, e $k=K=\frac{1}{\sqrt{2}}$, e perciò

$$x = \frac{a}{\sqrt[4]{2}.\sqrt{(1+\sqrt{2})}}, \qquad y = \frac{a}{\sqrt[4]{2}(1+\sqrt{2})},$$

le quali per $a=\sqrt{2}$ coincidono con quanto trova Legendre nel Tom. 1, pag. 36, *Fonctions elliptiques*; Paris, 1826.

Da tutto ciò ne segue, che la metà del quadrante della nuova curva dipende da funzioni ellittiche incomplete di prima e di terza specie, e da un arco circolare di una data tangente trigonometrica: ove in tutti i tre termini l'angolo φ ha per limiti

$$\varphi = 0, \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\right).$$

5.° Equazioni più complicate s'incontrano, quando si tratti della bisezione di un arco qualunque minore del quadrante. Un arco s indefinito come dal parag. 2° si esprime per

$$s = bk\left[\operatorname{sen}^2\theta\, F(\omega) + \cos^2\theta\, \Pi(\omega)\right].$$

Si sostituisca φ_2 invece di ω, e pongasi $s=2s_1$, avremo

$$s_1 = bk\left(\operatorname{sen}^2\theta.\frac{F(\varphi_2)}{2} + \cos^2\theta.\frac{\Pi(\varphi_2)}{2}\right).$$

Riprendiamo come dal parag. 3° le formole per la bisezione delle funzioni ellittiche, e poniamo di più

$$M = \frac{-n\sqrt{a}\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\varphi_2}{1+n-n\cos^2\varphi\cos\varphi_2}.$$

avremo sempre

$$F(\varphi_2) = 2F(\varphi)$$

$$\frac{\Pi(\varphi_2)}{2} = \Pi(\varphi) + \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \text{arc tang}\,(M).$$

Sostituiamo adesso nel secondo membro di M

$$\sqrt{a} = \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\sqrt{(1+\operatorname{sen}^2\theta)}}, \qquad n = -\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2\theta},$$

non che i valori di $\operatorname{sen}\varphi_2$, $\cos\varphi_2$ come dal parag. 3°, si troverà

$$M = \frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi\,\Delta(\varphi)}{\sqrt{(1+\operatorname{sen}^2\theta)}\left[\operatorname{sen}^2\theta(1-k^2\operatorname{sen}^4\varphi)-\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi(2-k^2\operatorname{sen}^2\varphi)\right]}.$$

e quindi

$$\frac{\Pi(\varphi_2)}{2} = \Pi(\varphi) + \frac{\sqrt{(1+\operatorname{sen}^2\theta)}}{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}\,\text{arc tang}\,(M).$$

Di qui per l' arco s_1 otteniamo

$$s_1 = bk\left(\operatorname{sen}^2\theta\,F(\varphi) + \cos^2\theta\,\Pi(\varphi) + \frac{\cos\theta\sqrt{(1+\operatorname{sen}^2\theta)}}{2\operatorname{sen}\theta}.\,\text{arc tang}\,(M)\right).$$

L' angolo φ è dato dalle stabilite formole in funzione dell' ampiezza φ_2 corrispondente al punto della curva ove s sarà doppio di s_1. Le coordinate x, y dell' arco s doppio di s_1, sono

$$x = \frac{ak^2\operatorname{sen}\varphi^2}{1-k'^2\operatorname{sen}^2\varphi_2}, \qquad y = \frac{bk'^2\operatorname{sen}\varphi_2\cos\varphi_2}{1-k'^2\operatorname{sen}^2\varphi_2}.$$

Sieno x_1, y_1 le coordinate del punto estremo di un arco s_2 corrispondente all' ampiezza φ, si avrà

$$x_1 = \frac{ak^2\operatorname{sen}\varphi}{1-k'^2\operatorname{sen}^2\varphi}, \qquad y_1 = \frac{bk'^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{1-k'^2\operatorname{sen}^2\varphi}$$

e quindi per quanto si è trovato al parag. 2°,

$$s_2 = bk\left[\operatorname{sen}^2\theta\,F(\varphi) + \cos^2\theta\,\Pi(\varphi)\right]$$

qual valore sostituto in quello di s_1, si ricaverà

$$s_1 = s_2 + \frac{bk\cos\theta\sqrt{(1+\operatorname{sen}^2\theta)}}{2\operatorname{sen}\theta}.\,\text{arc tang}\,(M);$$

d' onde avvertendo al valore di $k = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{(1+\operatorname{sen}^2\theta)}}$, otterremo

$$s_1 - s_2 = \frac{b\cos\theta}{2} \operatorname{arc\,tang}(\mathrm{M}).$$

Quest' espressione ci dice che la differenza di due archi della nuova curva può dipendere da un arco circolare; il qual risultato è analogo a quello trovato dal *Conte di Fagnano* per la differenza di due archi ellittici.

Quando l' arco s_1 divenga la metà S_1 del quadrante, in allora per i valori di $\operatorname{sen}\varphi$, $\cos\varphi$ come dal parag. 4°, si ottiene

$$\mathrm{M} = \left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta\,[1+\sqrt{(1+\operatorname{sen}^2\theta)}]}\right);$$

d' onde

$$S_1 - s_2 = \frac{b\cos\theta}{2}.\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta\,[1+\sqrt{(1+\operatorname{sen}^2\theta)}]}\right).$$

In questa formola l' arco s_2 che si sottrae da S_1, corrisponde ad un' ampiezza φ data dalla condizione

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{\sqrt{k'}} = \sqrt[4]{(1+\operatorname{sen}^2\theta)}.$$

6.° Le formole preparatorie alla trisezion del quadrante, le abbiamo parimenti al Cap. XVI della citata opera di *Legendre*, ed ove si trova per le funzioni ellittiche complete

$$3\,\mathrm{F}(\varphi) = \mathrm{F}'$$

$$3\,\Pi(\varphi) = \Pi' + \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{n\sqrt{a}\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\varphi_2}{1+n}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{n\sqrt{a}\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}\varphi_2}{1+n-n\cos^2\varphi\cos\varphi_2}\right).$$

L' angolo φ_2 è cognito per mezzo della bisezione; contuttociò dovendo essere

$$\mathrm{F}(\varphi) + \mathrm{F}(\varphi_2) = \mathrm{F}'$$

sarà come alla pag. 79 del 1° vol. *Fonctions ellipt.*

$$\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\varphi_2\,(1+\operatorname{sen}\varphi) = \frac{\cos^3\varphi}{k'}.$$

Pongasi per la terza parte del quadrante

$$S = 3\,S_2$$

si avrà

$$S_2 = bk\left(\operatorname{sen}^2\theta\,\frac{F'}{3} + \cos^2\theta\,\frac{\Pi'}{3}\right),$$

nella quale sostituendo i valori di F′ e Π′, si ricaverà

$$S_2 = bk\left[\operatorname{sen}^2\theta\,F(\varphi) + \cos^2\theta\,\Pi(\varphi) - \frac{\cos^2\theta}{3\sqrt{a}}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{n\sqrt{a}\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\varphi_2}{1+n}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{\cos^2\theta}{3\sqrt{a}}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{n\sqrt{a}\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}\varphi_2}{1+n-n\cos^2\varphi\cos\varphi_2}\right)\right].$$

L'angolo φ trovasi in relazione con φ_2 come dalle riportate formole, mentre lo stesso angolo φ in forza della trisezione della funzione completa F′ verificherà l' equazione del quarto ordine (Legendre. F. O. Tom. I, pag. 27.)

$$0 = 1 - 2\operatorname{sen}\varphi + 2k^2\operatorname{sen}^3\varphi - k^2\operatorname{sen}^4\varphi.$$

I valori da sostituirsi sono

$$n = -\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2\theta}, \quad \sqrt{a} = \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\sqrt{(1+\operatorname{sen}^2\theta)}}, \quad k' = \frac{1}{\sqrt{(1+\operatorname{sen}^2\theta)}}$$

ed anche per l' equazione fra φ e φ_2

$$\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\varphi_2 = \frac{\cos^3\varphi}{k'(1+\operatorname{sen}\varphi)}, \qquad \cos\varphi_2 = 1 - \operatorname{sen}\varphi;$$

d' onde ponendo per brevità

$$M = \frac{\cos\theta\cos^3\varphi}{\operatorname{sen}\theta(1+\operatorname{sen}\varphi)}, \quad N = \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\cos^3\varphi}{(1+\operatorname{sen}\varphi)[\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\varphi(1-\operatorname{sen}\varphi)]}$$

otterremo

$$\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{n\sqrt{a}\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\varphi_2}{1+n}\right) = -\operatorname{arc\,tang}(M)$$

$$\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{n\sqrt{a}\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}\varphi_2}{1+n-n\cos^2\varphi\cos\varphi_2}\right) = -\operatorname{arc\,tang}(N);$$

e quindi

$$S_2 = bk\,[\operatorname{sen}^2\theta\, F(\varphi) + \cos^2\theta\, \Pi(\varphi)] +$$
$$+ \frac{b\cos\theta}{3}\,[\operatorname{arc\,tang}(M) + \operatorname{arc\,tang}(N)].$$

Sia s_3 l' arco corrispondente all' ampiezza φ, avremo

$$s_3 = bk\,[\operatorname{sen}^2\theta\, F(\varphi) + \cos^2\theta\, \Pi(\varphi)]$$

e perciò

$$S_2 - s_3 = \frac{b\cos\theta}{3}\,[\operatorname{arc\,tang}(M) + \operatorname{arc\,tang}(N)],$$

e riducendo di più la somma degli archi ad un arco unico, verrà

$$S_2 - s_3 = \frac{b\cos\theta}{3}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{M+N}{1-MN}\right).$$

Qui pure la differenza di due archi della curva dipende da un arco circolare, e ad esso è proporzionale.

La sola radice dell' equazione di quarto grado relativa a $\operatorname{sen}\varphi$, la quale soddisfi alla trisezione della funzione ellittica completa di prima specie è come fa osservare *Legendre* (*)

$$\operatorname{sen}\varphi = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+v)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{[2 - v + 2\sqrt{(1 - v + v^2)}]},$$

ove si è posto

$$v = \sqrt[4]{\frac{4k'^2}{k^4}}.$$

Nella lemniscata di *Bernoulli* $k = k' = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\theta = 90^0$, per cui si ha $M = 0$, $N = 0$, ed $S_2 - s_3 = 0$, dalla quale si ottiene immediatamente la trisezione del quadrante. Dedotti poi i valori di $\operatorname{sen}\varphi$, $\cos\varphi$ sarà facile di formare i valori delle coordinate x_3, y_3 corrispondenti alla terza parte del quadrante.

7.° Per la trisezione delle funzioni ellittiche incomplete, si avranno le formole (Leg. Vol. I, pag. 78.)

$$3\,F(\varphi) = F(\varphi_3)$$

$$3\,\Pi(\varphi) - \Pi(\varphi_3) = -\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arc\,tang}(P) - \frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arc\,tang}(Q);$$

(*) Fonctions elliptiques. Tom. I, pag. 26.

ove per brevità si pone

$$P = -\frac{n\sqrt{a}\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\varphi_2\,\text{sen}\,\varphi_3}{1+n-n\cos\varphi\cos\varphi_2\cos\varphi_3}$$

$$Q = -\frac{n\sqrt{a}\,\text{sen}^2\varphi\,\text{sen}\,\varphi_2}{1+n-n\cos^2\varphi\cos\varphi_2}.$$

L' angolo φ è dato per l'angolo φ_3 dalle formole della triplicazione, come φ_2 dipenderà da φ per mezzo delle formole della duplicazione. Si prenda adunque un arco s corrispondente ad un' ampiezza φ_3, si avrà primieramente

$$s = bk\,[\text{sen}^2\theta\,F(\varphi_3) + \cos^2\theta\,\Pi(\varphi_3)]$$

e fatto quindi $s = 3s'$, avremo anche

$$s' = bk\left(\text{sen}^2\theta\,\frac{F(\varphi_3)}{3} + \cos^2\theta\,\frac{\Pi(\varphi_3)}{3}\right).$$

Sostituendovi ora i valori di $F(\varphi_3)$, $\Pi(\varphi_3)$, si troverà

$$s' = bk\,[\text{sen}^2\theta\,F(\varphi) + \cos^2\theta\,\Pi(\varphi)] +$$
$$+\frac{b\cos\theta}{3}\,[\text{arc tang}\,(P) + \text{arc tang}\,(Q)].$$

Nei secondi membri di P, Q s' intendono sostituiti i valori di a, n, non che quei di φ_2 e φ dati per mezzo di φ_3. Qui pure sia s'' l' arco di curva corrispondente all' ampiezza φ, otterremo dalla differenza di s' ed s''

$$s' - s'' = \frac{b\cos\theta}{3}\,[\text{arc tang}\,(P) + \text{arc tang}\,(Q)].$$

Questo valore dovrà coincidere con quello di già trovato per la trisezione del quadrante per la supposizione di $\varphi_3 = \frac{1}{2}\pi$, e con introdurvi le relazioni di già sopra riportate fra gli angoli φ, φ_2.

8.° A queste ricerche possiamo aggiungere la risoluzione di un problema somigliante ad altro di già risoluto per l' ellisse da Eulero e Legendre.

Determinare sul quadrante della nuova curva un arco, il quale sia precisamente eguale alla metà del quadrante medesimo.

La risoluzione di questo problema si può far dipendere da due equazioni, che facilmente si stabiliscono. Siano s', s'' due archi corrispondenti all' ampiezze μ e ψ, si avrà

$$s' = bk\,[\operatorname{sen}^2\theta\, F(\mu) + \cos^2\theta\, \Pi(\mu)]$$

$$s'' = bk\,[\operatorname{sen}^2\theta\, F(\psi) + \cos^2\theta\, \Pi(\psi)].$$

Prendendo $s' > s''$ avremo la differenza positiva

$$s' - s'' = bk\,[\operatorname{sen}^2\theta\,(F(\mu) - F(\psi)) + \cos^2\theta\,(\Pi(\mu) - \Pi(\psi))].$$

Se si voglia che la differenza $s' - s''$ sia eguale alla metà del quadrante, allora dovranno sussistere le due equazioni

$$F(\mu) - F(\psi) = \tfrac{1}{2}F', \qquad \Pi(\mu) - \Pi(\psi) = \tfrac{1}{2}\Pi'.$$

Ciò posto sia φ un' ampiezza determinata dall' equazione

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{\sqrt{k'}}$$

si verificherà per la medesima

$$F(\varphi) = \tfrac{1}{2}F'.$$

Quindi la formola

$$F(\mu) - F(\psi) = F(\varphi)$$

porgerà come è noto dalle formole del parag. 3°

$$(m)\left\{\begin{aligned} \operatorname{sen}\mu &= \frac{[k' \operatorname{sen}\psi + \cos\psi\,\Delta'(\psi)]\sqrt{(1+k')}}{k' + [\Delta(\psi)]^2} \\ \cos\mu &= \frac{\sqrt{k'}\,[\cos\psi - \operatorname{sen}\psi\,\Delta(\psi)]\sqrt{(1+k')}}{k' + [\Delta(\psi)]^2}. \end{aligned}\right.$$

Per trovare un altra equazione, la quale provenga dalle funzioni ellittiche di terza specie, osserveremo, che per le riportate equazioni fra μ, φ e ψ, si ha anche

$$\Pi(\varphi) + \Pi(\psi) - \Pi(\mu) = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{n\sqrt{a}\operatorname{sen}\mu\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi}{1+n-n\cos\mu\cos\psi\cos\varphi}\right).$$

Inoltre l' ampiezza φ soddisfa all' equazione

$$\Pi(\varphi) = \tfrac{1}{2}\Pi' + \frac{1}{2\sqrt{a}} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{n\sqrt{a}}{(1+n)(1+k')}\right)$$

e perciò

$$\Pi(\mu) - \Pi(\psi) = \tfrac{1}{2}\Pi' + \frac{1}{2\sqrt{a}} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{n\sqrt{a}}{(1+n)(1+k')}\right)$$

$$- \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{n\sqrt{a}\operatorname{sen}\mu \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi}{1+n-n\cos\mu\cos\varphi\cos\psi}\right).$$

Se dunque supporremo

$$\Pi(\mu) - \Pi(\psi) = \tfrac{1}{2}\Pi'$$

otterremo la nuova equazione

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{n\sqrt{a}}{(1+n)(1+k')}\right) = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{n\sqrt{a}\operatorname{sen}\mu\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi}{1+n-n\cos\mu\cos\varphi\cos\psi}\right).$$

Nel nostro caso la sostituzione di

$$n = -k'^2, \quad a = \frac{k^2}{k'^2}(k'^2 - k^2), \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{\sqrt{(1+k')}}, \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{(1+k')}}$$

porgerà

$$\operatorname{arctang}\left(\frac{k'}{k}\frac{\sqrt{(k'^2-k')}}{1+k'}\right) = 2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{kk'\operatorname{sen}\mu\operatorname{sen}\psi\sqrt{(k'^2-k^2)}}{k^2\sqrt{(1+k')}+\cos\mu\cos\psi\,k'^2\sqrt{k'}}\right).$$

Per avere l'eguaglianza fra le sole tangenti trigonometriche, sostituiamo la tangente dell' arco doppio, la quale ci vien data dalla formola

$$2\operatorname{arc\,tang}(A) = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{2A}{1-A^2}\right).$$

Quindi ponendo per brevità

$$U = k'\sqrt{(1+k')} + \cos\mu\cos\psi\,k'\sqrt{k'}$$

$$V = k^2\sqrt{(1+k')} + \cos\mu\cos\psi\,k'^2\sqrt{k'}$$

$$W = kk'\sqrt{(k'^2-k^2)}\operatorname{sen}\mu\operatorname{sen}\psi,$$

si ricaverà

$$\frac{1}{k(1+k')} = \frac{2k\,U\operatorname{sen}\mu\operatorname{sen}\psi}{V^2-W^2};$$

dalla quale dovrà infine eliminarsi l' angolo μ per mezzo dei già stabiliti valori di $\operatorname{sen}\psi$, $\cos\mu$, come dalle formole (m): quest' eliminazione, che si presenta sotto un aspetto assai complicato, somministrerebbe in fine delle equazioni dalle quali dipenderebbero i valori delle ampiezze ψ, μ da soddisfare al proposto problema: ma ciò per brevità tralasciamo di fare.