CALCOLO DEI QUATERNIONI
DI W. R. HAMILTON
E SUA RELAZIONE COL METODO DELLE EQUIPOLLENZE.
MEMORIA

DEL SOCIO ATTUALE

PROFESSORE GIUSTO BELLAVITIS

Ricevuta il 3 Agosto 1858.

Il celebre Hamilton raccogliendo ed ampliando le Memorie già da lui inserite nel *Philosophical Magazine* (1844 ec.) pubblicò a Dublino nel 1853 le *Lectures on Quaternions*: credo utile esporre brevemente i principali argomenti (1) trattati in questa importante Opera di quasi 900 pagine; e ciò lo faccio più volentieri per la rassomiglianza che il calcolo dei quaternioni ha col metodo delle equipollenze, che io immaginai nel 1832 ed esposi in alcune Memorie pubblicate negli Annali del Regno Lombardo-Veneto pel 1835 e 1837, nel Vol I. (1843) delle Memorie dell' I. R. Istituto Veneto, e nel Vol. XXV. delle Memorie della Società Italiana. — Il metodo delle equipollenze e quello dei quaternioni sono due algoritmi, che avendo molta rassomiglianza coll' algoritmo algebrico hanno un significato essenzialmente geometrico. Per in quanto alle figure piane il metodo delle equipollenze esprime tutto intero il soggetto geometrico, ed è la maniera più semplice e diretta di rappresentare le relazioni di grandezza e di posizione; ma il metodo perde gran parte del suo pregio quando si dee applicare alle figure a tre dimensioni, ed io cercai molte volte di estendere allo spazio ciò che avevo trovato pel piano; al mio desiderio corrisponde il calcolo dei quaternioni, ma soltanto in parte, perchè un' equipollenza a quaternioni è ben lungi dal servire a determinare la retta incognita, così bene come la risoluzione delle equipollenze da me considerate rispetto alle figure piane.

---

(1) Veggasi l' Indice alfabetico alla fine della Memoria.

I. ALGORITMO DELLE EQUIPOLLENZE E DEI QUATERNIONI.

§. 1. *Convenzioni relative alle* somme *delle rette.* È un canone fondamentale del mio metodo delle equipollenze, il quale fu poscia esposto anche dall' Hamilton, dal Saint-Venant e da altri Geometri, che se ad una retta AB ne sussegua con qualsiasi direzione un'altra BC, la AC, che dalla prima estremità della prima retta va alla seconda estremità della seconda, ne sia la composta-equipollente, detta anche somma geometrica o semplicemente somma. Questa maniera di composizione delle rette pienamente conforme alla composizione dei movimenti ed a quella delle forze è indicata col segno + a motivo della sua grande analogia colla vera *somma*; a togliere poi ogni pericolo di equivoco io sostituii il segno $\eqcirc$ a quello proprio delle equazioni, colle quali le equipollenze hanno l' algoritmo pienamente comune, ma il significato ben diverso; così io scrivo

$$(1) \qquad AB + BC \eqcirc AC;$$

l' Hamilton però adopera il segno $=$ in luogo di $\eqcirc$.

2. Bisogna ben avvertire che ogni retta s' intende presa dalla prima lettera verso la seconda; sicchè per es. la CB è bensì eguale in grandezza ma opposta in direzione alla BC, cioè

$$(2) \qquad CB \eqcirc -BC.$$

Quindi alla (1) possono darsi le forme

$$(3) \qquad AB - CB \eqcirc AC, \quad AB \eqcirc CB + AC, \quad AB - AC \eqcirc CB$$

$$(4) \qquad AB + BC + CA \eqcirc 0, \text{ ec.}$$

3. Due rette sono equipollenti quando sono eguali parallele e dirette per lo stesso verso, cioè se ABCD sia un parallelogrammo è

$$(5) \qquad AB \eqcirc DC, \qquad BC \eqcirc AD,$$

a questa equipollenza possono darsi indifferentemente le forme

$$AB - DC \eqcirc 0, \qquad AD + CB \eqcirc 0, \text{ ec.}$$

Ad ogni retta può sempre sostituirsi una sua equipollente. Così, per dare un esempio, se nella (1) noi sostituiamo la prima delle (5) ab-

biamo $DC + BC \eqcirc AC$; se alla BC noi sostituiamo la CE equipollente alla BC, cioè sia CE la prolungazione della BC ed uguale alla BC stessa, il primo membro della predetta equazione diventerà $DC + CE$, che pel canone fondamentale (§. 1) è $\eqcirc DE$, sicchè sarà $DE \eqcirc AC$; ed infatti se il Lettore si costruisca la figura, vedrà tosto che la DE risulta parallela eguale e rivolta per la stessa parte della AC.

4. L' equipollenza

(6) $$m.AB \eqcirc n.FG$$

significa che le rette AB, FG sono parallele, e le loro lunghezze hanno lo stesso rapporto dei numeri n, m; inoltre se uno di questi coefficienti sia positivo e l' altro negativo le rette AB, FG saranno dirette in versi opposti, ed invece saranno dirette per lo stesso verso se i coefficienti sono ambedue positivi o ambedue negativi.

5. I precedenti cenni contengono tutto quanto riguarda la *somma* e la *sottrazione* delle rette (nonchè la loro moltiplicazione per numeri interi o frazionarj positivi o negativi), nel significato speciale, che nel metodo delle equipollenze e dei quaternioni è attribuito ai due segni + — (la moltiplicazione per numeri non ha significato differente dall' ordinario): prima di passare a trattare della *moltiplicazione* o *divisione* delle rette esporremo di nuovo i predetti principj dandovi una forma alcun poco diversa usata anche dall' Hamilton, giacchè ci riuscirà poi facilissimo scorgere l' analogia e le particolari diversità tra le regole relative alle *somme* e quelle relative alle moltiplicazioni.

6. *Leggi relative ai punti ed alle rette.* La distanza da un punto A ad un punto B dicesi retta e segnasi con $B - A$, adoperando il segno di sottrazione per indicare la differenza di posizione da un punto ad un altro; (più ordinariamente si scrive AB, che non deve confondersi con BA, che ha opposta direzione perchè equivale ad $A - B$).

7. Dicesi SOMMA (o *composta-equipollente*) di due rette successive $B-A$, $C-B$ la retta $C-A$, che con esse compie un triangolo, e ciò si esprime col segno + scrivendo

(1) $$(C-B) + (B-A) \eqcirc C-A,$$

oppure $$BC + AB \eqcirc AC.$$

8. Due rette poste comunque, purchè sieno eguali parallele e dirette per lo stesso verso, si dicono *equipollenti*, il che si segna con $\eqsim$. Così se ABNM è un parallelogrammo si ha

(2) $$B-A \eqsim N-M, \quad \text{ossia} \quad AB \eqsim MN.$$

9. Se due rette sono eguali e parallele ma dirette in verso opposto, l' una si considera come *negativa* rispetto all' altra, il che si indica col segno —. Così la precedente (2) dà

(3) $$B-A \eqsim -(M-N), \quad \text{ossia} \quad AB \eqsim -NM.$$

10. Per *sommare* due rette quali si vogliano B—A, E—D si prendano due rette ad esse rispettivamente equipollenti, che si succedano immediatamente, sicchè la loro somma sia data come al §. 7. Così se N—M sarà equipollente alla B—A si faccia $P-N \eqsim E-D$ e sarà

(4) $$(E-D)+(B-A) \eqsim (P-N)+(N-M) \eqsim P-M,$$

ossia $$DE+AB \eqsim NP+MN \eqsim MP.$$

11. Come Corollario diremo che la *somma* di due porzioni d'una stessa retta è uguale alla loro somma od alla loro differenza, secondochè esse sono dirette per lo stesso verso o in versi opposti.

12. Un altro Corollario si è che la *somma* di tutti i lati di un poligono chiuso è sempre nulla. Così per esempio

(5) $$DA+CD+BC+AB \eqsim 0.$$

Ne viene pure che $AB+BA \eqsim 0$.

13. La *somma* delle rette dà la composizione dei movimenti progressivi da loro espressi.

14. La *somma* di due rette è la stessa in qualunque ordine esse si prendano. Infatti se nelle direzioni stesse MN, PN si prendano $NM' \eqsim MN$, $NP' \eqsim PN$ sarà

$$(B-A)+(E-D) \eqsim (M'-N)+(N-P') \eqsim M'-P'$$

ed evidentemente le rette MP, P'M' sono equipollenti, cioè $P-M \eqsim M'-P'$.

15. *Convenzioni relative ai prodotti od ai quozienti dei biradiali o dei radii.* Prima di esporre le regole del calcolo dei quaternioni consideriamo gli oggetti geometrici, che essi hanno per iscopo di

rappresentare. Ad ogni retta posta comunque nello spazio, e che per ora supporremo aver principio nel punto O, daremo il nome di RADIO, che cangeremo in RAGGIO quando la retta abbia la lunghezza eguale all' unità; sicchè allora la sua seconda estremità si troverà sopra la sfera col centro O ed il raggio 1. Due *radii* differiscono tra di loro pel rapporto delle loro lunghezze, e per l' angolo che essi formano; a questa relazione di grandezza e di posizione l' Hamilton dà il nome di BIRADIALE. Ad una retta che non passi per O può sempre sostituirsi una ad essa equipollente condotta per O. — Si confronteranno parola per parola i seguenti §§. coi §§. 6..., 14; se i *radii* sieno *raggi* il confronto è ancora più compiuto tra i circoli massimi descritti sulla sfera e le rette considerate nei predetti §§. 6... 14; si noterà però sempre che le somme ed i residui si sono cangiati in prodotti ed in quozienti.

16. *Leggi relative ai radii ed ai biradiali.* La diversità sia in grandezza che in direzione tra un *radio* OA ed un altro OB dicesi *biradiale* e segnasi indifferentemente con OB: OA o con $\frac{OB}{OA}$, adoperando il segno di divisione ad indicare il *rapporto* di grandezza e di posizione dei due radii; oppure segnasi con AOB, avvertendo che con ciò intendesi non solamente l'angolo, ma anche il rapporto del secondo lato OB diviso pel primo; così AOB è identico con OB: OA e BOA con OA: OB. — Diremo biradiale RETTANGOLO quello formato da due radii tra loro perpendicolari, e biradiale UNITARIO quello i cui radii sono eguali in grandezza.

17. Dicesi PRODOTTO di due biradiali successivi OB: OA, OC: OB (ossia AOB, BOC) (cioè tali che il secondo raggio di uno coincide col primo di un altro) il biradiale OC: OA (ossia AOC), che con essi compie un angoloide triedro, e che è costituito dal rapporto in grandezza e in direzione dei radii estremi OA, OC. Ciò si esprime col segno di moltiplica scrivendo

(1) $$(OC:OB).(OB:OA) = OC:OA,$$

oppure $$\frac{OC}{OB}\cdot\frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OA},$$

oppure $$BOC.AOB = AOC.$$

(Si noti che la relazione di grandezza è soddisfatta perchè $\frac{OC}{OA}$ è infatti il prodotto di $\frac{OB}{OA}$ per $\frac{OC}{OB}$).

18. *Due biradiali posti in un medesimo piano*, che presentino lo stesso rapporto tra le grandezze dei radii e lo stesso angolo preso nello stesso verso si dicono EQUIPOLLENTI, e l' uno può sempre sostituirsi all'altro. Così se le grandezze dei quattro radii OA, OB, OM, ON formino una proporzione, e se l' angolo AOB sia eguale posto nello stesso piano e diretto per lo stesso verso dell' angolo MON sarà

(2) $$OB:OA \eqsim ON:OM, \quad \text{oppure} \quad AOB \eqsim MON.$$

Sono equipollenti anche due biradiali A_0B_0, $M_0O_0N_0$ posti in piani paralleli, e che hanno le predette relazioni.

19. Se due biradiali posti nello stesso piano o in piani paralleli hanno egual angolo ed ugual grandezza (vale a dire sieno eguali i rapporti dei loro radii), ma gli angoli sieno diretti in versi opposti, i due biradiali si considerano come tra loro CONJUGATI, il che si indica col segno cj. Così se il radio OM^0 abbia la stessa grandezza di ON e la stessa direzione di OM, e ON^0 abbia la grandezza di OM e la direzione di ON, la (2) darà anche

(3) $$\frac{OB}{OA} \eqsim \text{cj}\,\frac{OM^0}{ON^0}, \quad \text{ossia} \quad AOB \eqsim \text{cj}\,(N^0OM^0).$$

Se i biradiali sieno unitarii, cioè se i radii sieno tra loro eguali, come per esempio se sono raggi, si ha $ON:OM \eqsim \text{cj}\,(OM:ON)$, $MON \eqsim \text{cj}\,(NOM)$.

20. Per formare il *prodotto di due biradiali* quali si vogliano AOB, DOE, si prendano due biradiali ad essi rispettivamente equipollenti, che si succedano immediatamente, cioè che abbiano un radio comune ON (il quale è necessariamente l' intersezione dei piani AOB, DOE), poi se ne avrà il prodotto come al §. 17. Così se $MON \eqsim AOB$, e $NOP \eqsim DOE$ sarà

(4) $$DOE.AOB \eqsim NOP.MON \eqsim MOP.$$

21. Come Corollario diremo che l' angolo del prodotto di due biradiali posti in uno stesso piano è uguale alla somma o alla differenza dei loro angoli, secondo che essi sono diretti per lo stesso verso o in versi opposti.

22. Un altro Corollario si è che il prodotto di tutti i biradiali facce di un angoloide presi nell'ordine, in cui si *succedono* è sempre equipollente ad uno; così per esempio

(5) $$\frac{OA}{OD}\cdot\frac{OD}{OC}\cdot\frac{OC}{OB}\cdot\frac{OB}{OA} \eqsim 1.$$

Ne viene pure (§. 19) che il prodotto di un biradiale pel suo *conjugato* eguaglia il quadrato della GRANDEZZA del biradiale, cioè del valor numerico del rapporto dei suoi radii, il che noi scriveremo così

(6) $$AOB.cjAOB = gr^2AOB = (grOB : grOA)^2$$

indicando colla caratteristica gr la grandezza di un radio o di un biradiale, e con gr^2 il quadrato della grandezza.

23. Mediante i *prodotti* dei biradiali si può esprimere la composizione dei moti rotatorii; ciò darà un' importante applicazione del calcolo dei quaternioni.

24. Il *prodotto* di due biradiali è differente secondo l'ordine con cui questi si prendono. Infatti se sui piani stessi MON, NOP si prendano $OM' : ON \mathrel{\triangleq} ON : OM$, $OP' : ON \mathrel{\triangleq} ON : OP$ colle formole del §. 20 sarà anche

$$AOB.DOE \mathrel{\triangleq} NOM'.P'ON \mathrel{\triangleq} P'OM',$$

ed evidentemente i due biradiali MOP, P'OM' sono bensì eguali in grandezza (perchè le grandezze dei radii formano la proporzione $grOP : grOM = grOM' : grOP'$) ed in angolo, ma non in posizione; ed abbiamo già notato che onde due biradiali sieno equipollenti bisogna che sieno posti in piani paralleli. Il Lettore è pregato di costruire le figure; supposto che i radii sieno raggi, egli potrà segnare sulla superficie di una sfera due archi MNM', PNP' che si taglino nel punto N, e prenderà su di essi i due archi eguali MN, NM', ed i due pur tra loro eguali PN, NP'; i due archi MP, P'M' risulteranno eguali, ma non appartenenti allo stesso circolo massimo.

25. *Teorema fondamentale. Il prodotto di tre o più biradiali non cangia quando conservando ad essi lo stesso ordine si procede diversamente nel combinarli a due a due.* Così per costruire

(1) $$DOE.BOC.AOB$$

tanto si può adoperare le due equipollenze

(2) $BOC.AOB \mathrel{\triangleq} AOC$, (3) $DOE.AOC \mathrel{\triangleq} LOE$

quanto le due

(4) $DOE.BOC \mathrel{\triangleq} MOP$, (5) $MOP.AOB \mathrel{\triangleq} QOS$,

e ne risulterà lo stesso prodotto

(6) $$LOE \mathrel{\triangleq} QOS.$$

È facile vedere che quando il teorema vale per tre soli biradiali a, b, c, valerà anche per un maggior numero; giacchè si avrà per esempio

$$d[c(b.a)] \mathrel{\triangleq} d[(c.b)a] \mathrel{\triangleq} (d.c)(b.a) \mathrel{\triangleq} [d(c.b)]a.$$

Ecco una delle dimostrazioni della (6) date dall' Hamilton. Possiamo supporre che tutti i radii sieno raggi, giacchè riguardo alle grandezze la verità del teorema è evidente. Sostituendo ai tre biradiali dati altri ad essi equipollenti, si può fare in guisa che il primo AOB abbia il secondo raggio OB coincidente col primo del secondo biradiale BOC, e che il terzo DOE abbia il raggio OD posto nel piano del biradiale AOC prodotto dei due primi. Sulla superficie sferica di centro O, i cui archi di circolo massimo rappresentano i biradiali si avrà un triangolo sperico ABC, ed un arco DE, il cui estremo D appartiene all' arco AC. Per costruire la (3) bisogna prendere sullo stesso circolo massimo AC l' arco LD eguale ad AC, dopo di che sarà $DOE.LOD \mathrel{\triangleq} LOE$. Costruiremo la (4) prendendo $MON \mathrel{\triangleq} BOC$, $NOP \mathrel{\triangleq} DOE$, in guisa che N sia l' intersezione degli archi BC, DE; finalmente se R sia l' intersezione di AB con MP prenderemo $QOR \mathrel{\triangleq} AOB$ ed $ROS \mathrel{\triangleq} MOP$, così sarà costruita anche la (5); e per dimostrare la (6) resterà da far vedere che LE, QS sono due archi eguali di uno stesso circolo.

26. Dimostreremo da prima che se i raggi OB, OE, ON, OQ sono tagliati da un piano parallelo al circolo ACDL nei punti B', E', N', Q', e da un piano parallelo al circolo MPRS nei punti B'', E'', N'', Q'', questi otto punti appartengono ad una medesima sfera. — Nel piano OBN la OC è parallela alla B'N' e la OM lo è alla B''N'', ed essendo eguali gli angoli BOC, MON, lo saranno anche i due B''B'N', B''N''N', e perciò i quattro punti apparterranno ad un medesimo circolo, e sarà quindi $OB'.OB'' = ON'.ON''$. Precisamente nello stesso modo da $DOE \mathrel{\triangleq} NOP$ si deduce $OE'.OE'' = ON'.ON''$, e da $AOB \mathrel{\triangleq} QOR$ si deduce $OB'.OB'' = OQ'.OQ''$. Dunque le due figure B'N'E'Q', B''N''E''Q'' sono *inverse* l' una dell' altra rispetto al centro d' inversione O; e siccome una di queste figure è piana l' altra appartiene ad una sfera, che ha nel punto O il tangenziale parallelo al piano dell' altra figura, perciò ognuna di esse è un circolo; questi due circoli appartengono alla sfera, che oltre comprendere il circolo B'N'E'Q' passa per B'', e quindi anche per N'' giacchè B'B''N'N'' è un circolo, e quindi anche per E'' perchè anche N'N''E'E'' è un circolo.

27. Il piano OAC essendo parallelo al circolo Q'D'N'E' i raggi OA, OC, OD sono rispettivamente paralleli alle corde Q'B', B'N', N'E', e siccome AOC ≏ LOD, così è facile riconoscere che anche OL è parallela alla quarta corda E'Q', e quindi il punto L cade nel piano OE'Q'. In egual modo si dimostra che nello stesso piano OE''Q'' cade anche il punto S. Finalmente il piano OLS taglia la sfera menzionata al §. 26 nel circolo E'Q'Q''E'', i cui lati E'Q', E''Q'' sono paralleli ai raggi OL, OS, dal che risulta LOE ≏ QOS, che è appunto quello che si voleva dimostrare. — Il cono OBENQ ha rispetto ai suoi due piani *ciclici* OAC, OMP (cioè paralleli alle sue sezioni circolari) una proprietà analoga a quella dell'iperbola rispetto ai suoi assintoti; cioè sulla superficie della sfera ogni circolo massimo LQES ha due archi eguali LQ, ES compresi tra il cono ed i piani ciclici.

28. *Regole pel calcolo dei biradiali.* Un numero qualsivoglia di raggi OA, OB, OC, OD presi in un determinato ordine formano altrettanti biradiali unitarii AOB, BOC, COD, DOA, che sono espressi anche dai lati di un poligono sferico, e che per brevità segneremo colle lettere a, b, c, d. I medesimi biradiali presi nel verso opposto sono (§. 19) i conjugati dei precedenti, cioè

$$\mathrm{BOA} \triangleq \mathrm{cj}\,a, \quad \mathrm{COB} \triangleq \mathrm{cj}\,b, \quad \mathrm{DOC} \triangleq \mathrm{cj}\,c, \quad \mathrm{AOD} \triangleq \mathrm{cj}\,d.$$

Pertanto la relazione (§. 17) COD.BOC.AOB ≏ AOD può scriversi (1) $cba \triangleq \mathrm{cj}\,d$; pel §. 22 abbiamo anche (2) $dcba \triangleq 1$; inoltre l'equipollenza BOC.AOB ≏ AOC ≏ DOC.AOD è (3) $ba \triangleq \mathrm{cj}\,c.\mathrm{cj}\,d$, così pure (4) $a = \mathrm{cj}\,b.\mathrm{cj}\,c.\mathrm{cj}\,d$, (5) $1 \triangleq \mathrm{cj}\,a.\mathrm{cj}\,b.\mathrm{cj}\,c.\mathrm{cj}\,d$; ed è ugualmente facile vedere che (6) $cb \triangleq \mathrm{cj}\,d.\mathrm{cj}\,a$, ossia COD.BOC ≏ BOD ≏ AOD.BOA; così pure (7) $b \triangleq \mathrm{cj}\,c.\mathrm{cj}\,d.\mathrm{cj}\,a$, (8) $1 \triangleq \mathrm{cj}\,b.\mathrm{cj}\,c.\mathrm{cj}\,d.\mathrm{cj}\,a$, (9) $dcb \triangleq \mathrm{cj}\,a$, (10) $dc \triangleq \mathrm{cj}\,a.\mathrm{cj}\,b$, (11) $c \triangleq \mathrm{cj}\,d.\mathrm{cj}\,a.\mathrm{cj}\,b$; ec. Paragonando le (2) (1) (3) (4) (5) si vede che *ogni biradiale unitario che sia il fattore più a sinistra di un membro dell' equipollenza può trasportarsi a fattore a sinistra dell' altro membro, purchè si muti nel suo conjugato*; dal confronto delle (1) (6) e delle (2) (9) (10), ec. si scorge che *simile trasporto può farsi pel fattore a destra da un membro all' altro.* Con questa regola, cui bisogna dar attenzione (poichè il calcolo dei quaternioni è ben differente dall' algebrico), si può

determinare un fattore qualunque; così per esempio il fattore b della (1) viene isolato nella (7). — Risulta pure come Corollario che il *conjugato di un prodotto è il prodotto dei conjugati dei fattori presi in ordine opposto.* Si confrontino per esempio le (4) (9).

29. Quando il biradiale non è unitario è palese che esso non può trasportarsi da un membro all' altro nel modo stabilito colla regola precedente. In ogni biradiale dee considerarsi il valore numerico, che è il rapporto di due radii, che diciamo (§. 22) la *grandezza* del biradiale, e segniamo colla caratteristica gr, ed il prodotto del biradiale pel suo conjugato è il quadrato della grandezza, cioè gr^2. Ciò posto sarà palese che dalle (1) $cba \mathrel{\dot{=}} \mathrm{cj}\, d$ del §. 28 se ne dedurrà anzichè la (2) la $dcba \mathrel{\dot{=}} \mathrm{gr}^2 d$, e la $ba \mathrel{\dot{=}} \mathrm{cj}\, c . \mathrm{cj}\, d : \mathrm{gr}^2 c$, oppure la $ba . \mathrm{gr}^2 c \mathrel{\dot{=}} \mathrm{cj}\, c . \mathrm{cj}\, d$, o la $b . \mathrm{gr}^2 a . \mathrm{gr}^2 c \mathrel{\dot{=}} \mathrm{cj}\, c . \mathrm{cj}\, d . \mathrm{cj}\, a$, ec. Le grandezze sono quantità, le quali possono prendersi come fattori in qualunque ordine si voglia.

30. La *divisione* dei biradiali prende il suo significato dalla moltiplica; così stabiliremo per definizione che l' equipollenza

$$a : b \mathrel{\dot{=}} r \quad \text{equivalga alla} \quad a \mathrel{\dot{=}} rb,$$

cioè il divisore b si trasporta a destra del quoziente r. Ne viene che se il biradiale b sia unitario si ha $a : b \mathrel{\dot{=}} a . \mathrm{cj}\, b$, perchè $a . \mathrm{cj}\, b . b \mathrel{\dot{=}} a$, e se b non sia unitario è $a : b \mathrel{\dot{=}} a . \mathrm{cj}\, b : \mathrm{gr}^2 b$.

31. *Potenze e radici dei biradiali.* Dalla definizione del prodotto risulta spontanea quella delle *potenze.* Così, per esempio, se i radii OA, OB abbiano le lunghezze $\mathrm{gr\,OA} = 5$, $\mathrm{gr\,OB} = 15$, e formino tra loro un angolo di 40° il biradiale espresso da $(\mathrm{OB} : \mathrm{OA})^2$, ossia da $(\mathrm{AOB})^2$ sarà quello formato da due radii posti nel piano OAB (od in uno ad esso parallelo) che abbiano le lunghezze nel rapporto 1 : 9 (seconda potenza di 5 : 15) e formino un angolo di 80° (doppio di 40°). — Viceversa la radice seconda di quest' ultimo biradiale sarà il biradiale formato da due radii col rapporto 1 : 3 comprendenti tra loro un angolo di 40° oppure di 220° (presi, già ben s' intende, nel verso stesso in cui è preso l' angolo di 80°), infatti anche il doppio di 220° dà un angolo di 80°, a ciò equivalendo quello di 440°. — È facile intendere come si estendano questi principj a definire ogni radice di un biradiale; sicchè la radice $n.^{esima}$ sarà espressa da uno qualunque di n biradiali, i cui angoli differiscono tra loro di $\frac{1}{n}$ 360°, giacchè l' angolo del biradiale può supporsi accresciuto di

qualsivoglia multiplo di 360° — Si avverta che le *grandezze*, nonchè le loro radici si considerano sempre come quantità positive.

32. *Espressione dei biradiali col mezzo dei loro assi.* Un biradiale rettangolo $\beta : \alpha$ (segniamo con α β due rette, che possono esser poste dovunque nello spazio, e che sono equipollenti ai radii OA, OB tra loro perpendicolari) può rappresentarsi con un terzo radio γ perpendicolare ad un piano parallelo ai due α, β, purchè coll' assunta unità di lunghezza sia $\mathrm{gr}\gamma = \mathrm{gr}\beta : \mathrm{gr}\alpha$, e la direzione di γ sia tale che supposto che vada dai piedi alla testa di un uomo, questi vegga farsi la rotazione di 90° da α a β da destra verso sinistra, cioè nel verso in cui si muove la Terra rispetto al raggio che va al polo artico. Possiamo supporre che la α sia orizzontale verso l' Est, la β orizzontale verso il Nord, e la γ verso il Zenit. Il radio γ si dirà l' ASSE del biradiale. Ciò posto noi scriveremo (1) $\beta : \alpha \mathrel{\dot{=}} \gamma$, ammettendo che le lunghezze dei tre radii ortogonali sieno, come dicemmo, tali da soddisfare alla equazione che si ottiene dalla (1) mutando $\mathrel{\dot{=}}$ in $=$. — Per mostrare come si possano introdurre nei calcoli anche i radii considerati come biradiali rettangoli, supponiamo che α, β non sieno tra loro ortogonali, sicchè (I) $\beta : \alpha \mathrel{\dot{=}} c$ sia (§. 16) un biradiale non rettangolo, e cerchiamo il significato del prodotto $c.\alpha$ considerando α come un biradiale rettangolo. Siccome il piano di c è quello dei due radii α, β, ed α rappresenta un biradiale rettangolo perpendicolare alla direzione di α, così ricordando la definizione data al § 20 ci sarà facile riconoscere che il prodotto $c\alpha$ è un biradiale rettangolo espresso dal radio β, sicchè la (I) darà

$$(\mathrm{II}) \qquad \beta \mathrel{\dot{=}} c\alpha .$$

(È palese a colpo d' occhio che la relazione delle grandezze è soddisfatta.) Nel caso particolare che α, β sieno perpendicolari la (1) dà

$$(2) \qquad \beta \mathrel{\dot{=}} \gamma\alpha .$$

33. Il *conjugato* di un radio considerato come rappresentante un biradiale rettangolare si ottiene (§. 19) rovesciando la sua direzione, poichè in tal modo si viene a rovesciare la direzione dell' angolo; e siccome (§. 2) ad una retta si cangia la direzione apponendovi il segno —, così porremo $\mathrm{cj}\alpha \mathrel{\dot{=}} -\alpha$, il che semplifica le formole del §. 28 quando parte dei biradiali in esse contenuti sono rettangoli. Così, per esempio, supposto per brevità che i biradiali sieno

unitarj, e gli $\alpha, \beta, \ldots$ sieno raggi, adoperando la regola del §. 28 dalla $c\alpha \mathrel{\dot{=}} \beta$ dedurremo $c \mathrel{\dot{=}} -\beta\alpha$, $\alpha \mathrel{\dot{=}} \mathrm{cj}\, c.\beta$; da queste risulteranno le $\beta c \mathrel{\dot{=}} \alpha$, $-\alpha\beta \mathrel{\dot{=}} \mathrm{cj}\, c$, e poi anche $\beta \mathrel{\dot{=}} \alpha\, \mathrm{cj}\, c$. A queste equipollenze possono anche darsi per convenzione le forme $c \mathrel{\dot{=}} \beta : \alpha$, $-\beta \mathrel{\dot{=}} c : \alpha$, $\mathrm{cj}\, c \mathrel{\dot{=}} \alpha : \beta$, $\beta \mathrel{\dot{=}} \alpha : c$, $-\alpha \mathrel{\dot{=}} \mathrm{cj}\, c : \beta$, $\alpha \mathrel{\dot{=}} \beta : \mathrm{cj}\, c$; delle quali la prima e la terza hanno inoltre il significato stabilito al §. 16.

34. Cogli stessi principj si riconosce che *capovolgendo l'ordine di alquanti radii il loro prodotto si cangia nel suo conjugato col segno + o —, secondo che il numero dei fattori è pari o dispori.* Così le formole del §. precedente danno

(1) $$\alpha\beta \mathrel{\dot{=}} \mathrm{cj}(\beta\alpha).$$

Posto $\gamma\beta\alpha \mathrel{\dot{=}} d$ si ottiene successivamente (§. 28, 33)

$$\gamma\beta \mathrel{\dot{=}} -d\alpha, \quad \gamma \mathrel{\dot{=}} d\alpha\beta, \quad \mathrm{cj}\, d.\gamma \mathrel{\dot{=}} \alpha\beta, \quad \mathrm{cj}\, d \mathrel{\dot{=}} -\alpha\beta\gamma;$$

dunque (2) $$\alpha\beta\gamma \mathrel{\dot{=}} -\mathrm{cj}(\gamma\beta\alpha).$$

Similmente (3) $$\alpha\beta\gamma\delta \mathrel{\dot{=}} \mathrm{cj}(\delta\gamma\beta\alpha);$$ ec.

35. Pel §. 31 ogni biradiale può considerarsi come potenza di un biradiale rettangolo, ossia (§. 32) di un radio, e potremo anche dire di un raggio, aggiungendo poi un coefficiente numerico eguale alla grandezza del biradiale. Così se k sia un raggio perpendicolare ai due α, β sarà

(1) $$\beta : \alpha \mathrel{\dot{=}} k^{\omega},$$

essendo ω la grandezza dell' angolo compreso tra α e β espresso in parti di angolo retto. Se $\omega = 2$ i raggi α, β sono direttamente opposti, cioè $\beta \mathrel{\dot{=}} -\alpha$, quindi

(2) $$k^2 \mathrel{\dot{=}} -1;$$

vale a dire *la seconda potenza di un raggio qualunque equivale all' unità presa col segno meno.* Quando l' angolo da α a β è negativo si potrebbe suppor negativo l' esponente del raggio, ma preferiremo di sostituire $-k$ a k, poichè mutando la direzione del raggio si viene a mutare (§. 32) anche la direzione del biradiale, che esso rappresenta; cioè $k^{-\omega} \mathrel{\dot{=}} (-k)^{\omega}$, il che è anche una conseguenza della (2). — Alla (1) si può anche dare la forma

(3) $$\beta \mathrel{\dot{=}} k^{\omega}\alpha,$$

il cui secondo membro può interpretarsi tanto come il prodotto del biradiale rettangolo α pel biradiale k^{ω}, quanto come il raggio α, a cui la caratteristica k^{ω} imprime una rotazione di ω retti intorno all' asse k.

36. *Riassunto, e somme dei biradiali.* Noi abbiamo insegnato a *sommare* le rette (§§. 1, 7); il *rapporto* delle rette sotto il nome di radii ci ha dato i biradiali, che mostrammo come si *moltiplichino* (§. 17) tra loro, ed anche come si *dividano* (§. 30); finalmente abbiamo veduto in qual modo i radii considerati come biradiali rettangoli si *moltiplichino* tra di loro o coi biradiali (§. 32). Diciamo una parola della SOMMA dei biradiali: dati per esempio i due AOB, DOE bisognerà sostituirvi i biradiali ad essi equipollenti NOL, NOP, il cui primo raggio ON sia l'intersezione dei loro piani; ciò esige che sia

$$OB : OA \mathrel{\underline{\frown}} OL : ON, \qquad OE : OD \mathrel{\underline{\frown}} OP : ON$$

dopo di che sarà

$$AOB + DOE \mathrel{\underline{\frown}} OL : ON + OP : ON \mathrel{\underline{\frown}} OR : ON \mathrel{\underline{\frown}} NOR$$

essendo $$OL + OP \mathrel{\underline{\frown}} OR,$$

secondo il significato stabilito al §. 1. Se ai due predetti biradiali AOB, DOE si debba sommarne un terzo FOG, bisognerà ridurre i NOR, FOG a due altri a loro equipollenti, che abbiano per primo radio l' intersezione dei loro piani, poscia operare come sopra.

37. Giova notare che mentre il *prodotto di due biradiali conjugati è una quantità*, cioè la seconda potenza della loro grandezza (§. 22), la *somma di due biradiali conjugati eguaglia la grandezza moltiplicata pel doppio del coseno dell' angolo del biradiale; e la differenza è espressa da un biradiale rettangolo, la cui grandezza è quella del biradiale proposto moltiplicata pel doppio del seno.* Infatti i due biradiali AOB, AOC sono conjugati (§. 19) quando sono posti in uno stesso piano ed i radii uguali OB, OC formano angoli eguali coll' OA dalle sue parti opposte. Ora la somma $OB + OC \mathrel{\underline{\frown}} OS$ ha evidentemente la direzione stessa della OA e si ha

(1) $$AOB + \mathrm{cj}\, AOB = OS : OA = 2\,\mathrm{gr}\, AOB \,.\, \cos AOB,$$

essendo $\mathrm{gr}\, AOB = OB : OA$. In quanto alla $OB - OC \mathrel{\underline{\frown}} OD \mathrel{\underline{\frown}} CB$, essa è una retta perpendicolare alla OA, e la cui lunghezza è $= 2 . OB . \mathrm{sen}\, AOB$; quindi

(2) $$\mathrm{gr}\,(AOB - \mathrm{cj}\, AOB) = CB : OA = 2\,\mathrm{gr}\,(AOB)\, \mathrm{sen}\, AOB,$$

e l' angolo di questo biradiale $AOD \mathrel{\dot{=}} CB:OA$ è $+90^0$. — Per formare il prodotto $AOC.AOB$ bisogna sostituire ad AOC il suo eguale BOP essendo $OP:OB \mathrel{\dot{=}} OC:OA$, perciò OP cade nella stessa direzione di OA e si ha

(3) $$\text{cj}\,AOB.AOB = \text{gr}^2\,AOB.$$

Se finalmente cerchiamo il quoziente $AOB:\text{cj}\,AOB \mathrel{\dot{=}} x$ sarà (§. 30) $AOB \mathrel{\dot{=}} x.\text{cj}\,AOB \mathrel{\dot{=}} x.AOC$, che è soddisfatta da $x \mathrel{\dot{=}} COB$, si ha perciò

(4) $$\text{gr}\left(\frac{AOB}{\text{cj}\,AOB}\right) = \text{gr}\,COB = 1, \qquad \text{e l' angolo } COB = 2.AOB.$$

Il triangolo isoscele OBC ci dà occasione di notare il Teorema: *I lati d' ogni triangolo isoscele formano i due biradiali conjugati*

(5) $$OBC \mathrel{\dot{=}} \text{cj}\,OCB,$$

ossia $BC:BO \mathrel{\dot{=}} \text{cj}\,(CB:CO)$, a cui può anche darsi la forma

(6) $$BC.BO \mathrel{\dot{=}} CO.CB.$$

38. *Algoritmo per esprimere le rette e i biradiali.* Assumendo tre raggi tra loro perpendicolari i, j, k, che, per seguire l' uso più generalmente adottato, supponiamo i orizzontale e diretto verso l' Est, j orizzontale e diretto verso il Nord, e k verticale diretto verso lo Zenit, ogni retta o radio potrà (§§. 1, 7) esprimersi colla formola

(1) $$OM \mathrel{\dot{=}} ix + jy + kz,$$

essendo x, y, z i valori numerici positivi o negativi delle projezioni della retta OM sulle tre direzioni i, j, k; alla predetta espressione daremo il nome di TRINIONE (anche se uno o due dei suoi termini si annullasse). La *grandezza del trinione* è quella stessa della retta o radio, e viene espressa come è ben noto da

(2) $$\text{gr}\,OM = +\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Diremo trinione UNITARIO quello che rappresenta un raggio, cioè che ha la grandezza $= 1$; tale è per esempio

(3) $$i.\cos l.\cos m + j.\cos l.\text{sen}\,m + k.\text{sen}\,l,$$

essendo m l' *azzimutto* contato dall' Est verso il Nord, ed l la *elevazione*.

39. Pel calcolo dei tre raggi i, j, k vale quel che abbiamo detto ai §§. 32, 35, sicchè

(1) $$i^2 \triangleq -1, \quad j^2 \triangleq -1, \quad k^2 \triangleq -1$$

(2) $$ij \triangleq k, \quad jk \triangleq i, \quad ki \triangleq j, \quad ji \triangleq -k, \quad kj \triangleq -i, \quad ik \triangleq -j.$$

Per convincersi della verità di queste formole segniamo sopra una sfera i tre punti estremi dei raggi i, j, k ed i tre diametralmente opposti $-i, -j, -k$; il prodotto ij si costruisce (§§. 32, 17) tracciando il quadrante espresso da j, che è quello che dal punto $-i$ va al punto k, a cui immediatamente succede il quadrante da k a $-j$, che è espresso da i, così il loro prodotto è l'arco da $-i$ a $-j$, il quale è appunto espresso da k, e perciò si ha $ij \triangleq k$. Nello stesso modo si giustificano le altre formole. La seconda e la terza delle (2) derivano dalla prima mutando le lettere secondo il ciclo $ijki.....$, e le tre ultime risultano dalle altre mediante i §§. 28, 34.

40. Tutti i calcoli si faranno secondo le precedenti regole (1) e (2), sicchè bisogna ben distinguere l'ordine, con cui sono presi i fattori. Se poi i fattori sono più di due è indifferente il modo, con cui si procede (§. 25) nel combinarli a due a due, cioè

$$c.ba \triangleq cb.a;$$

infatti in ciascun termine si avrà il prodotto di alquanti raggi i, j, k, e secondo le precedenti regole si ha

$$i.jk \triangleq i.i \triangleq -1, \qquad ij.k \triangleq k.k \triangleq -1;$$
$$i.ji \triangleq -ik \triangleq j, \qquad ij.i \triangleq ki \triangleq j;$$
$$i.jj \triangleq i(-1) \triangleq -i, \qquad ij.j \triangleq k.j \triangleq -i; \text{ ecc.}$$

41. *Relazioni di posizione di due radii.* Se $OM \triangleq ix+jy+kz$ è un trinione unitario, esso rappresenta una retta $OM=1$, la quale compie un quadrilatero gobbo coi lati x, y, z rispettivamente paralleli ai raggi i, j, k, e che si succedono l'uno all'altro; immaginiamo che tutto questo quadrilatero si projetti sull'altro raggio $OM' \triangleq ix' + jy' + kz'$; il lato x avrà per projezione la lunghezza xx', giacchè x' è il coseno dell'angolo tra i e OM', così pure i lati y, z daranno le projezioni yy', zz'; perciò il quarto lato OM avrà la projezione $xx' + yy' + zz'$, e questo sarà il coseno dell'angolo MOM'. — Il parallelogrammo equilatero descritto sui due raggi OM, OM' ha l'area $=\text{sen } MOM'$, la quale si projetta sul piano ij in un parallelogrammo che ha l'area $= xy' - x'y$, dunque se sopra una retta perpendicolare al piano MOM', e che abbia (§. 32) la direzione dell'*asse* del biradiale MOM', si prenda una lunghezza

$=$ sen MOM′, la sua projezione sul raggio k (perpendicolare al piano ij) sarà $=xy' - x'y$; dicasi lo stesso degli altri due piani coordinati, e si vedrà che *se il raggio* ρ *sia perpendicolare ai due radii* OM, OM′ *e diretto dalla parte positiva del biradiale* MOM′ (cioè dalla parte dell' asse rispetto a cui (§. 32) l' angolo MOM′, minore di 180°, è positivo), *qualunque sieno le lunghezze* OM, OM′ *si ha*

$$\mathrm{gr\,OM}.\mathrm{gr\,OM'}.\mathrm{sen\,MOM'}.\rho \mathrel{\triangleq} i(yz' - y'z) + j(zx' - z'x) + k(xy' - x'y).$$

Questa è anche l' espressione del *giratore* prodotto intorno al punto M′ dalla forza espressa nel solito modo dalla retta OM.

42. *Prodotto e rapporto di due trinioni. Quaternioni.* Il prodotto fra due trinioni calcolato secondo le forme del §. 39 è

$$(1) \qquad \mathrm{OM'}.\mathrm{OM} \mathrel{\triangleq} (ix' + jy' + kz')(ix + jy + kz) \mathrel{\triangleq}$$
$$\mathrel{\triangleq} -xx' - yy' - zz' + i(y'z - yz') + j(z'x - zx') + k(x'y - xy'),$$

e quindi pel §. 41 esso è equipollente a

$$(1) \qquad \mathrm{OM'}.\mathrm{OM} \mathrel{\triangleq} \mathrm{gr\,OM}.\mathrm{gr\,OM'}.(-\cos \mathrm{MOM'} - \rho.\mathrm{sen\,MOM'}).$$

Che se si mutasse l' ordine dei due trinioni il prodotto differirebbe dal precedente soltanto pel segno dei coefficienti di i, j, k, cioè sarebbe

$$\mathrm{OM}.\mathrm{OM'} \mathrel{\triangleq} \mathrm{gr\,OM}.\mathrm{gr\,OM'}\,(-\cos \mathrm{MOM'} + \rho.\mathrm{sen\,MOM'}).$$

Mediante le stesse regole del §. 39 si trova che il quadrato di un trinione è

$$(2) \qquad (ix + jy + kz)^2 \mathrel{\triangleq} -x^2 - y^2 - z^2 = -\mathrm{gr}^2\mathrm{OM} = -\mathrm{gr}^2(ix + jy + kz).$$

Moltiplicando la (1) per $\mathrm{OM} \mathrel{\triangleq} ix + jx + kz$ si otterrà

$$(3) \qquad \mathrm{OM'}.\mathrm{OM}.\mathrm{OM} \mathrel{\triangleq} (ix' + jy' + kz')(ix + jy + kz)^2 \mathrel{\triangleq} -\mathrm{OM'}.\mathrm{gr}^2\mathrm{OM},$$

giacchè pel detto al §. 39 si può formare il quadrato $(ix + jy + kz)^2$, che è già dato dalla (2).

43. Trasportando un fattore del primo membro della precedente (3) a divisore dell' ultimo membro si ottiene col mezzo della (1)

$$(4) \qquad \mathrm{OM'}:\mathrm{OM} \mathrel{\triangleq} [xx' + yy' + zz' + i(yz' - y'z) + j(zx' - z'x) +$$
$$+ k(xy' - x'y)] : \mathrm{gr}^2\mathrm{OM} \mathrel{\triangleq}$$
$$\mathrel{\triangleq} \frac{\mathrm{gr\,OM'}}{\mathrm{gr\,OM}}(\cos \mathrm{MOM'} + \rho.\mathrm{sen\,MOM'}).$$

Questa espressione di OM′:OM ossia del biradiale MOM′, ed in generale ogni espressione della forma

$$w + ix_0 + jy_0 + kz_0,$$

che è una quantità w più un trinione, dicesi un QUATERNIONE. L' ultimo membro della (4) presenta il quaternione sotto la forma di una quantità $\mathrm{gr\,OM'} : \mathrm{gr\,OM}$, che si dirà la GRANDEZZA del quaternione, moltiplicata pel coseno dell' ANGOLO del quaternione, più il seno del medesimo angolo moltiplicato per un trinione unitario, che è l' ASSE del quaternione. Questa grandezza, questo angolo e questo asse del quaternione sono (§§. 22, 32) appunto quelli del biradiale M O M', ed il quaternione si considera come l'espressione del biradiale. Ogni biradiale *rettangolo* è espresso da un trinione $\frac{\mathrm{gr\,OM'}}{\mathrm{gr\,OM}} . \rho$, di cui $\frac{\mathrm{gr\,OM'}}{\mathrm{gr\,OM}}$ è la grandezza, e ρ è il trinione unitario. Il quaternione

$$\cos \mathrm{MOM'} + \rho . \operatorname{sen} \mathrm{MOM'},$$

che esprime un biradiale unitario lo diremo un quaternione UNITARIO. — Un quaternione, a cui manchi uno o due dei termini moltiplicati per i, j, k conserva il nome di quaternione.

44. Il confronto tra le precedenti (1) (4) mostra che *il rapporto* $(ix' + jy' + kz') : (ix + jy + kz)$ *di due trinioni si ottiene facendone il prodotto* $(ix' + \text{ec.})(ix' + \text{ec.}) \mathrel{\widehat{=}} -xx' - \text{ec.}$ e dividendolo per $-\mathrm{gr}^2(ix + jy + kz) = -x^2 - y^2 - z^2$. Ciò è pienamente conforme a quanto vedemmo aver luogo rispetto ai radii.

45. Abbiamo veduto al §. 42 che se

$$\mathrm{OM'} . \mathrm{OM} \mathrel{\widehat{=}} w + ix_0 + jy_0 + kz_0$$

si ha

$$\mathrm{OM} . \mathrm{OM'} \mathrel{\widehat{=}} w - ix_0 - jy_0 - kz_0;$$

questi due quaternioni che differiscono pel segno dei termini moltiplicati per i, j, k li diremo quaternioni CONJUGATI, così, conforme a quanto ha luogo (§. 34) pei radici, *i due prodotti che si formano mutando l' ordine di due trinioni sono tra loro conjugati.*

46. Dimostriamo rispetto ai quaternioni la regola che al §. 28 vedemmo valere pei biradiali. Indichiamo con a_q un quaternione unitario, con a_t il trinione unitario in esso contenuto cioè il suo asse, e con a il suo angolo, perciò (§. 43)

(1) $$a_q \mathrel{\widehat{=}} \cos a + a_t . \operatorname{sen} a,$$

similmente $$b_q \mathrel{\widehat{=}} \cos b + b_t . \operatorname{sen} b;$$

il loro prodotto sarà

(2) $$b_q a_q \mathrel{\widehat{=}} \cos a . \cos b + a_t . \operatorname{sen} a . \cos b + b_t . \cos a . \operatorname{sen} b + \\ + b_t a_t . \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} b \mathrel{\widehat{=}} c_q .$$

Aggiungendo a destra del secondo membro il fattore

$$\mathrm{cj}\, a_q \mathrel{\dot{=}} \cos a - a_t \operatorname{sen} a,$$

e formando il prodotto si ottiene a motivo di $a_t^2 \mathrel{\dot{=}} -1$

$$(3) \qquad c_q . \mathrm{cj}\, a_q \mathrel{\dot{=}} \cos^2 a . \cos b + \operatorname{sen}^2 a . \cos b + b_t \cos^2 a . \operatorname{sen} b - \\ - b_t a_t a_t \operatorname{sen}^2 a . \operatorname{sen} b,$$

che è identico con b_q, dunque la

$$(4) \qquad b_q a_q \mathrel{\dot{=}} c_q \qquad \text{dà} \qquad (5) \quad b_q \mathrel{\dot{=}} c_q . \mathrm{cj}\, a_q,$$

similmente si dimostra che la (4) dà anche

$$(6) \qquad a_q \mathrel{\dot{=}} \mathrm{cj}\, b_q . c_q.$$

In ciò consistono appunto le due regole del §. 28.

47. Siccome il trinione unitario a_t si calcola precisamente come il $\sqrt{-1}$ degli Analisti, così la $a_q \mathrel{\dot{=}} \cos a + a_t . \operatorname{sen} a$ ci darà

$$(1) \qquad (a_q)^n \mathrel{\dot{=}} \cos na + a_t . \operatorname{sen} na;$$

ciò si accorda colle potenze dei biradiali definite al §. 31. Inoltre ogni quaternione che comprende il trinione a_t può esprimersi colla potenza a di questo a_t supposto che a sia l' angolo del quaternione in parti di angolo retto, cioè

$$(2) \quad a_q \mathrel{\dot{=}} (a_t)^a,\ \mathrm{cj}\, a_q \mathrel{\dot{=}} (-a_t)^a,\ -a_q \mathrel{\dot{=}} (-a_t)^{2-a},\ -\mathrm{cj}\, a_q \mathrel{\dot{=}} (a_t)^{2-a}.$$

Appunto come dicemmo al §. 35 sul modo di esprimere ogni biradiale con una potenza del radio perpendicolare al suo piano. Parlammo sempre di trinioni e di quaternioni unitarj, poichè l' aggiungere ad essi un moltiplicatore numerico non porta alcuna difficoltà.

48. *Prodotto e rapporto dei quaternioni.* Se con α, β, γ indichiamo i trinioni che esprimono i radii OA, OB, OC per la (1) del §. 17 il prodotto di due quaternioni $\gamma:\beta$, $\beta:\alpha$ dev' essere

$$(1) \qquad (\gamma:\beta)(\beta:\alpha) \mathrel{\dot{=}} \gamma:\alpha$$

per in quanto alle grandezze la verità di questa equipollenza è palese, basterà adunque supporre che α, β, γ sieno trinioni unitarj, ed allora pel §. 44 la (1) diventerà

$$(2) \qquad (-\gamma\beta)(-\beta\alpha) \mathrel{\dot{=}} \gamma\beta\beta\alpha \mathrel{\dot{=}} -\gamma\alpha,$$

che è identica, giacchè nel formare il prodotto $\gamma\beta\beta\alpha$ si può (§. 40) cominciare da $\beta\beta \mathrel{\dot{=}} -1$. Il prodotto di due quaternioni conjugati (§. 45) è

$$(3) \qquad a_q . \mathrm{cj}\, a_q \mathrel{\dot{=}} (\cos a + a_t \operatorname{sen} a)(\cos a - a_t \operatorname{sen} a) \mathrel{\dot{=}} 1,$$

il che si accorda colla (6) del §. 22. Ne viene che il rapporto di due quaternioni si calcolerà col mezzo della

(4) $$b_q : a_q \eqq b_q \,.\, \mathrm{cj}\, a_q ,$$

che dà (§. 30) $$b_q \eqq b_q \,.\, \mathrm{cj}\, a_q \,.\, a_q \eqq b_q .$$

49. Illustriamo tutto ciò con un esempio. Dati due trinioni

$$\beta \eqq 2i + j + 2k, \qquad \gamma \eqq 2i + 4j - k$$

per averne il rapporto $\gamma : \beta$ ne calcoleremo (§. 44) il prodotto

(1) $$\gamma\beta \eqq (2i + 4j - k)(2i + j + 2k) \eqq -6 + 9i - 6j - 6k$$

(dove per evitare troppo facili errori giova calcolare i quadrati delle grandezze dei trinioni e del quaternione

$$2^2 + 4^2 + 1^2 = 21, \quad 4 + 1 + 4 = 9, \quad 36 + 81 + 36 + 36 = 189$$

e verificare che $21 \,.\, 9 = 189$: si può eziandio notare che la somma $9 - 6 - 6 = -3$ dei coefficienti di i, j, k nel prodotto dev' essere (§. 42) uguale al determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x' & y' & z' \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y' - x', & z' - x' \\ y - x, & z - x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2, & -3 \\ -1, & 0 \end{vmatrix} = -3).$$

Poscia la (1) divisa per $\beta^2 = -\mathrm{gr}^2\beta = -2^2 - 1^2 - 2^2$ darà

(2) $$\gamma : \beta \eqq \tfrac{1}{9}(6 - 9i + 6j + 6k).$$

Supponiamo ora che sia dato un quaternione

$$c = 2 + i - k$$

il cui trinione $i - k$ è perpendicolare al trinione β, il che si riconosce osservando (§. 41) che

$$2 \,.\, 1 + 1 \,.\, 0 + 2(-1) = 0,$$

e si voglia esprimerlo col rapporto $\beta : \alpha$, l' equipollenza $c \eqq \beta : \alpha$ equivale alla $c\alpha \eqq \beta$, da cui per la regola dei §§. 28, 46 si deduce $\alpha \eqq \mathrm{cj}\, c \,.\, \beta : \mathrm{gr}^2 c$ dove $\mathrm{gr}^2 c = 2^2 + 1^2 + 1^2 = 6$ è il quadrato della grandezza di c, sicchè

(3) $$\alpha \eqq \tfrac{1}{6}(2 - i + k)(2i + j + 2k) \eqq \tfrac{1}{2}(i + 2j + k);$$

l' ultimo membro è un trinione, come doveva essere.

Il prodotto dei due quaternioni

$\gamma : \beta \eqq \frac{1}{3}(2 - 3i + 2j + 2k)$, $\beta : \alpha \eqq 2 + i - k$ sarà

(4) $$\tfrac{1}{3}(2 - 3i + 2j + 2k)(2 + i - k) \eqq 3 - 2i + j,$$

che dev' essere identico a

$$(\gamma:\beta)(\beta:\alpha) \eqq \gamma:\alpha \eqq (2i+4j-k):\tfrac{1}{2}(i+2j+k),$$

ed infatti è facile verificare che

$$2i+4j-k \eqq \tfrac{1}{2}(3-2i+j)(i+2j+k).$$

Oppure si calcola

$$\gamma:\alpha \eqq -\gamma\alpha:\mathrm{gr}^2\alpha \eqq \tfrac{-1}{3}(2i+4j-k)(i+2j+k) \eqq 3-2j+j,$$

che è l' ultimo membro della (4).

Se si voglia dividere il quaternione della (4) per l' altro $2+i-k$, la formola (4) del §. 48 osservando che $\mathrm{gr}^2(2+i-k)=6$ ci darà

$$(3-2i+j):(2+i-k) \eqq \tfrac{1}{6}(3-2i+j)(2-i+k) \eqq \\ \eqq \tfrac{1}{6}(4-6i+4j+4k),$$

che è appunto il quaternione $\gamma:\beta$. Invece la divisione

$$(3-2i+j):\tfrac{1}{3}(2-3i+2j+2k) \eqq \\ \eqq \tfrac{1}{7}(3-2i+j)(2-3i+2j+2k) \eqq \tfrac{1}{7}(-2-11i+12j+5k)$$

dà un quaternione differente dai precedenti.

50. *Confronto tra i biradiali e i quaternioni.* Dal confronto di quanto abbiamo detto prima dei radii e dei biradiali, poscia dei trinioni e dei quaternioni, apparisce che gli uni e gli altri sono soggetti alle stesse leggi, e che i secondi servono a rappresentare i primi. — Ai §§. 7, 10 abbiamo mostrato come si sommino le rette o radii, ed è facilissimo riconoscere che se le rette si riferiscono a tre assi coordinati ortogonali, e perciò si esprimono con trinioni (§. 38), le somme dei trinioni corrispondono pienamente colle somme delle rette. — Al §. 16 abbiamo definiti i biradiali pel *rapporto* di due radii, ed al §. 43 vedemmo risultare i quaternioni dal rapporto di due trinioni facendo i calcoli secondo le leggi del §. 39. — Al §. 20 abbiamo definito il *prodotto* di due biradiali, ed al §. 48 vedemmo che il prodotto di due quaternioni corrisponde col rapporto dei due trinioni, coi quali si possono esprimere i biradiali predetti. — Al §. 25 dimostrammo geometricamente sul prodotto di tre o più quaternioni un teorema fondamentale, che mediante il calcolo si rende (§. 40) evidente. — Al §. 32 esprimemmo ogni biradiale rettangolo col mezzo di un radio, e infatti il quaternione diventa un trinione (§. 43) quando il coseno del suo angolo è nullo. — Al §. 19 definimmo i biradiali conjugati, ed al §. 33 vedemmo che il conjugato di un

radio è lo stesso preso in direzione opposta; similmente al §. 45 definimmo il quaternione conjugato, che consiste a mutare il segno al trinione in esso contenuto. — Nei §§. 35 e 47 esprimemmo ogni biradiale o quaternione col mezzo di una potenza di un radio o di un trinione. — E nei §§. 28 e 46 demmo la regola per la risoluzione delle equipollenze binomie.

51. Per compiere il paragone anche coi §§. 36, 37 vediamo che la somma dei due quaternioni dati dai rapporti $m\beta:\alpha$, $n\gamma:\alpha$ sarà $(m\beta+n\gamma):\alpha$, giacchè se α è un trinione unitario i due primi quaternioni sono (§. 44) $-m\beta\alpha$, $-n\gamma\alpha$, e pel modo stesso in cui si eseguiscono le moltipliche è evidente che

$$(1) \qquad m\beta:\alpha+n\gamma:\alpha \mathrel{\dot{=}} -(m\beta+n\gamma)\alpha \mathrel{\dot{=}} (m\beta+n\gamma):\alpha.$$

I due quaternioni conjugati

$$na_q \mathrel{\dot{=}} n\cos a+na_t.\operatorname{sen} a, \qquad n\,\mathrm{cj}\,a_q \mathrel{\dot{=}} n\cos a-na_t.\operatorname{sen} a$$

hanno il prodotto

$$(2) \qquad n^2a_q.\,\mathrm{cj}\,a_q \mathrel{\dot{=}} n^2(\cos^2 a-a_t^2\operatorname{sen}^2 a) \mathrel{\dot{=}} n^2,$$

la somma

$$(3) \qquad n(a_q+\mathrm{cj}\,a_q) \mathrel{\dot{=}} 2n\cos a,$$

e la differenza

$$(4) \qquad n(a_q-\mathrm{cj}\,a_q) \mathrel{\dot{=}} 2na_t.\operatorname{sen} a.$$

52. *Proprietà dei due prodotti di due quaternioni.* Al §. 24 dicemmo che i due prodotti di due biradiali o quaternioni

$$(1) \qquad b_qa_q \mathrel{\dot{=}} d_q, \qquad a_qb_q \mathrel{\dot{=}} e_q$$

sono bensì eguali, ma non equipollenti; cerchiamo qualche altra relazione tra i loro assi dati dai trinioni d_t e_t in essi contenuti. I due angoloidi triedri formati dai biradiali a_q b_q d_q e dai b_q a_q e_q sono eguali; nella figura descritta al §. 24 essi sono rappresentati dai due triangoli sferici MNP, M′NP′; perciò *il diedro* NMP *compreso tra i piani* a_q d_q *sarà eguale al diedro* NM′P′ *compreso tra i piani* a_q e_q; e quindi sarà anche eguale l'angolo tra gli assi a_t d_t dei primi, e quello tra gli assi a_t e_t dei secondi. Inoltre *il raggio d'intersezione* ON $\mathrel{\dot{=}} \gamma_t$ *dei piani* a_q b_q, *il quale è perpendicolare ad ambedue gli assi* a_t b_t, *sarà intermedio e formerà angoli equipollenti cogli assi dei* d_q cj e_q, *cioè coi raggi* d_t, $-e_t$. Questi teoremi si possono dimostrare col calcolo: il prodotto b_ta_t di due trinioni è $\cos\gamma+\gamma_t\operatorname{sen}\gamma$, essendo γ_t perpendicolare ad ambedue gli a_t, b_t, ed è pure (§. 34 (1))

$$a_tb_t \mathrel{\dot{=}} \cos\gamma-\gamma_t.\operatorname{sen}\gamma;$$

la (2) del §. 46 mostra che gli angoli d, e appartenenti ai quaternioni d_q, e_q sono eguali, e che i trinioni unitarii in essi contenuti sono dati da

$$(2)\quad \begin{aligned} d_t.\operatorname{sen} d &\simeq a_t.\operatorname{sen} a\cos b + b_t.\cos a\operatorname{sen} b + \gamma_t.\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b\operatorname{sen}\gamma \\ e_t.\operatorname{sen} d &\simeq a_t.\operatorname{sen} a\cos b + b_t.\cos a\operatorname{sen} b - \gamma_t.\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b\operatorname{sen}\gamma, \end{aligned}$$

dividendo ambedue queste equipollenze per a_t le parti numeriche (cioè senza alcun radio) saranno ambedue $\operatorname{sen} a.\cos b$ più la parte numerica di $\cos a.\operatorname{sen} b.b_t:a_t$, giacchè in quanto a $\gamma_t:a_t$ esso è un trinione, essendochè a_t e γ_t sono tra loro perpendicolari; viene da ciò che i coseni degli angoli dei biradiali $d_t:a_t$, $e_t:a_t$ sono eguali. — Similmente dividendo le (2) per γ_t si scorge che i due quaternioni $d_t:\gamma_t$, $-e_t:\gamma_t$ contengono la stessa parte numerica

$$\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b.\operatorname{sen}\gamma:\operatorname{sen} d$$

e differiscono soltanto nel segno del loro trinione, sicchè

$$-e_t:\gamma_t \simeq \operatorname{cj}(d_t:\gamma_t), \qquad \text{ed anche } (\S.\ 19)$$
$$-e_t:\gamma_t \simeq \gamma_t:d_t.$$

Se uno dei quaternioni $a_q\ b_q$ sia un trinione avremo il corollario. *Gli assi dei biradiali*

$$(3)\quad b_q a_t \simeq d_q, \qquad \operatorname{cj} b_q.a_t \simeq -\operatorname{cj} e_q$$

formano con a_t due angoli equipollenti. Mediante il solito modo di trasformazione (§§. 28, 46) la seconda delle (3) dà $a_t b_q \simeq e_q$, sicchè abbiamo le stesse equipollenze (1) purchè si supponga $a_q \simeq a_t$ cioè $\cos a = 0$, $\operatorname{sen} a = 1$; perciò le (2) daranno

$$d_t\operatorname{sen} d:a_t \simeq \cos b + \gamma_t\operatorname{sen} b\operatorname{sen}\gamma:a_t$$
$$e_t\operatorname{sen} d:a_t \simeq \cos b - \gamma_t\operatorname{sen} b\operatorname{sen}\gamma:a_t$$

questi quaternioni sono conjugati, perchè differiscono soltanto nel segno del trinione $\gamma_t:a_t$, quindi

$$(4)\quad d_t:a_t \simeq a_t:e_t$$

e il trinione e_t è quello stesso contenuto in $-\operatorname{cj} e_q$.

II. APPLICAZIONI DEL CALCOLO DEI QUATERNIONI.

53. *Formole relative al triangolo sferico.* I quaternioni essendo formole soggette a determinate leggi di calcolo (§. 39) presentano un grandissimo vantaggio dando modo di determinare quanto riguarda lo spazio senza bisogno di alcuna ulteriore considerazione geometrica; facciamone una prima applicazione al triangolo sferico $\alpha\beta\gamma$, i cui lati si segnino al solito con $a\,b\,c$, e sieno tutti presi nel verso *positivo*, e propriamente il lato a sia preso da β verso γ, il lato b da γ ad α, ed il lato c da α a β; questi lati, cioè i corrispondenti biradiali, sieno rappresentati dai quaternioni unitarj $a_q\,b_q\,c_q$. Per la definizione del prodotto di due biradiali successivi avremo (§§. 28, 19)

$$c_q = \mathrm{cj}\,a_q \,.\, \mathrm{cj}\,b_q \,. \tag{1}$$

Facendo in questa formola il solito cangiamento *ciclico* tra le lettere $a\,b\,c$, essa dà le due

$$a_q = \mathrm{cj}\,b_q \,.\, \mathrm{cj}\,c_q \,, \qquad b_q = \mathrm{cj}\,c_q \,.\, \mathrm{cj}\,a_q \,.$$

Sieno $\alpha_t\,\beta_t\,\gamma_t$ i trinioni unitarj, che rappresentano i raggi, che metton capo ai tre vertici del triangolo sferico, sarà $c_q = \beta_t : \alpha_t$, a questa equipollenza mediante le solite regole (§§. 28, 32) possono darsi le forme

$$\beta_t = c_q\,\alpha_t \,, \tag{2}$$

$$c_q = -\,\beta_t\,\alpha_t \,, \tag{3}$$

$$\alpha_t = \beta_t\,c_q \,, \tag{4}$$

alle quali si potrà far subire il cangiamento ciclico delle lettere $a\,b\,c$, ed insieme delle $\alpha\beta\gamma$. Conoscendo $\alpha_t\beta_t$ la (3) ci darà c_q, e dopo avremo

$$c_q = \cos c + c_t \,.\, \mathrm{sen}\,c \,, \tag{5}$$

da cui si deduce il valore c dell' arco sferico $\alpha\beta$, nonchè il raggio rappresentato dal trinione c_t, il cui punto estremo è il polo *positivo* dell' arco $\alpha\beta$ (cioè il punto rispetto al quale la rotazione da α a β lungo il lato del triangolo sferico è *positiva.*) In simil modo b_t ed a_t, che sono i trinioni compresi nei due quaternioni b_q ed a_q, ci daranno gli altri due vertici del triangolo sferico polare del $\alpha\beta\gamma$; il lato di questo triangolo polare espresso dal biradiale $c_t : b_t$ ha per polo positivo il punto α, il suo angolo eguaglia l' angolo esterno in α del triangolo sferico $\alpha\beta\gamma$, angolo che noi indicheremo con α;

sicchè potremo porre $c_t : b_t \eqq a_q$, e il trinione a_t contenuto in a_q sarà quello stesso che rappresenta il raggio che va al punto a; così avremo le equazioni

(6) $\quad c_t \eqq a_q b_t$, $\quad$ (7) $\quad a_q \eqq - c_t b_t$, $\quad$ (8) $\quad b_t \eqq c_t a_q$;

e formole analoghe si avranno mutando nel solito modo le lettere; inoltre sarà

(9) $$a_q \eqq \cos a + a_t . \operatorname{sen} a .$$

Il triangolo sferico polare $\dot a \dot b \dot c$ ha i lati eguali a γ, α, β, e gli angoli esterni eguali ad a, b, c, sicchè analogamente alla (1) avremo la

(10) $$\gamma_q \eqq \operatorname{cj} \alpha_q . \operatorname{cj} \beta_q .$$

Nel fare il calcolo delle precedenti formole giova notare come mezzo di verificazione che a_t deve riuscir perpendicolare ad ambedue i β_t γ_t, ecc.

54. Qualche esempio mostrerà meglio come si debbano adoperare le precedenti formole, che continueremo ad indicare cogli stessi numeri. Supponiamo che due lati del triangolo sferico sieno dati di posizione e di grandezza dai quaternioni unitarj

$$a_q \eqq \frac{3+2i-j}{\sqrt{14}}, \qquad b_q \eqq \frac{2+i-k}{\sqrt{6}}$$

il che per la (5) mostra che

$$\cos a = \frac{3}{\sqrt{14}}, \quad \operatorname{sen} a = \sqrt{\left(\frac{2^2+1}{14}\right)},$$

$$\cos b = \frac{2}{\sqrt{6}}, \quad \operatorname{sen} b = \sqrt{\left(\frac{1+1}{6}\right)},$$

e che quei lati sono rispettivamente perpendicolari ai radii espressi da

$$2i-j, \qquad i-k.$$

Mediante le solite leggi di calcolo (§. 39) avremo

(7) $$\gamma_q \eqq - b_t a_t \eqq \frac{-i+k}{\sqrt{2}} . \frac{2i-j}{\sqrt{5}} \eqq \frac{2+i+2j+k}{\sqrt{10}},$$

perciò (9) $$\cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{10}}, \qquad \operatorname{sen} \gamma = \sqrt{\left(\frac{1+4+1}{10}\right)}$$

e questo γ è l'angolo esterno del triangolo sferico compreso tra il

lato b e la prolungazione del lato a. Si noti che a_t si è dedotto dalla parte $\frac{2i-j}{\sqrt{14}}$ di a_q, ma se ne mutò il denominatore $\sqrt{14}$ in $\sqrt{5}$ acciocchè a_t risultasse un trinione unitario; dicasi lo stesso di b_t. Si ha una verificazione nel riconoscere che γ_t ossia $i+2j+k$ è perpendicolare (§. 41) ad ambedue i $a_t\, b_t$, cioè ai $2i-j$, $i-k$. Inoltre abbiamo

$$(1)\quad c_q \mathrel{\dot{=}} \mathrm{cj}\, a_q . \mathrm{cj}\, b_q \mathrel{\dot{=}} \frac{3-2i+j}{\sqrt{14}} \cdot \frac{2-i+k}{\sqrt{6}} \mathrel{\dot{=}} \frac{2-3i+2j+2k}{\sqrt{21}}$$

$$(7)\quad a_q \mathrel{\dot{=}} -\, c_t b_t \mathrel{\dot{=}} \frac{3i-2j-2k}{\sqrt{17}} \cdot \frac{i-k}{\sqrt{2}} \mathrel{\dot{=}} \frac{-5+2i+j+2k}{\sqrt{34}}$$

$$(7)\quad \beta_q \mathrel{\dot{=}} -\, a_t c_t \mathrel{\dot{=}} \frac{-2i+j}{\sqrt{5}} \cdot \frac{-3i+2j+2k}{\sqrt{17}} \mathrel{\dot{=}} \frac{-8+2i+4j-k}{\sqrt{85}},$$

dunque

$$(5)\quad \cos c = \frac{2}{\sqrt{21}}, \qquad (9)\quad \cos\alpha = \frac{-5}{\sqrt{34}}, \qquad \cos\beta = \frac{-8}{\sqrt{85}}.$$

55. Esempio 2.° Di un triangolo sferico sieno dati i tre lati

$$a = 113^0 \qquad b = 156^0 \qquad c = 105^0;$$

essendo in nostro arbitrio la posizione del triangolo supponiamo che il vertice β sia nel punto estremo del raggio i, e che il lato sferico o biradiale a abbia l'asse k (perpendicolare come lo deve essere a β), cioè sia

$$\beta_t = i, \qquad a_t = k$$

avremo

$$(5)\quad a_q \mathrel{\dot{=}} \cos a + k\,.\,\mathrm{sen}\, a \mathrel{\dot{=}} -\,0{,}391 + k\,.\,0{,}920$$

$$b_q \mathrel{\dot{=}} -\,0{,}588 + b_t\,.\,0{,}809, \qquad c_q \mathrel{\dot{=}} -\,0{,}259 + c_t\,.\,0{,}966.$$

Poscia

$$(8)\quad c_t \mathrel{\dot{=}} a_t \beta_q \mathrel{\dot{=}} k(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta) \mathrel{\dot{=}} k\,.\cos\beta + j\,.\,\mathrm{sen}\,\beta$$

$$(2)\quad \gamma_t \mathrel{\dot{=}} a_q \beta_t \mathrel{\dot{=}} -\,i\,.\,0{,}391 + j\,.\,0{,}920$$

$$(6)\quad b_t \mathrel{\dot{=}} \gamma_q a_t \mathrel{\dot{=}} (\cos\gamma + \gamma_t\,.\,\mathrm{sen}\,\gamma)\,k \mathrel{\dot{=}} k\cos\gamma + j\,.\,0{,}391\,.\,\mathrm{sen}\,\gamma + i\,.\,0{,}920\,.\,\mathrm{sen}\,\gamma;$$

quindi il terzo vertice del triangolo sarà dato nello stesso tempo dalle due equazioni

$$(4)\quad a_t \mathrel{\dot{=}} \beta_t c_q \mathrel{\dot{=}} i(-0,259 + k.0,966.\cos\beta + j.0,966.\operatorname{sen}\beta) \mathrel{\dot{=}} \\ \mathrel{\dot{=}} -i.0,259 - j.0,966.\cos\beta + k.0,966.\operatorname{sen}\beta$$

$$(2)\quad a_t \mathrel{\dot{=}} b_q \gamma_t \mathrel{\dot{=}} (-0,388 + k.0,809.\cos\gamma + j.0,316\operatorname{sen}\gamma + \\ + i.0,744.\operatorname{sen}\gamma).(-i.0,391 + j.0,920) \mathrel{\dot{=}} \\ \mathrel{\dot{=}} i.0,230 - j.0,316.\cos\gamma + k.0,124.\operatorname{sen}\gamma + 0,291.\operatorname{sen}\gamma - \\ - i.0,744.\cos\gamma - j.0,541 + k.0,684.\operatorname{sen}\gamma - 0,291.\operatorname{sen}\gamma;$$

dal confronto di questi due valori di a_t risulta

$$\cos\gamma = \frac{489}{744} = 0,657, \qquad \cos\beta = \frac{316\cos\gamma + 541}{966} = \frac{749}{966} = 0,755,$$

che danno

$$\operatorname{sen}\gamma = 0,754, \qquad \operatorname{sen}\beta = 0,632$$

soddisfacenti alla $\operatorname{sen} c.\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen} b.\operatorname{sen}\gamma$.

Perciò i due angoli esterni del triangolo sferico sono $\gamma = 49^0$, $\beta = 39^0.12'$ (coll' approssimazione, che può sperarsi da calcoli fatti con tre soli decimali; adoperando i logaritmi additivi possono facilmente eseguirsi a cinque decimali.) Il terzo angolo esterno sarà pur dato da

$$(7)\quad a_q \mathrel{\dot{=}} -c_t b_t \mathrel{\dot{=}} (-k.0,775 - j.0,632)(k.0,657 + j.0,295 + \\ + i.0,694)$$

la cui parte reale dà

$$0,775.0,657 + 0,632.0,295 = 0,509 + 0,186 = 0,695 = \cos\alpha,$$

quindi $\alpha = 46^0$.

56. *Teorema sul triangolo sferico.* Per brevità indicheremo colla lettera, che segna un punto della sfera, anche il trinione unitario che esprime il raggio corrispondente (e che finora segnammo coll'indice t) ed indicheremo i quaternioni col prodotto o rapporto dei trinioni, oppure mediante la segnatura dei biradiali; così il quaternione unitario, che esprime l'arco dal punto α al punto β, s'indicherà con $\alpha O \beta$ o con $\beta : \alpha \mathrel{\dot{=}} -\beta\alpha$. Dato un triangolo sferico $\alpha\beta\gamma$ (si ammetta che la rotazione nel verso $\alpha\beta\gamma$ sia positiva rispetto alla parte esterna della sfera) è facilissimo determinare i punti di mezzo $\lambda\ \mu\ \nu$ dei suoi lati, che supponiamo sempre minori di 180°; infatti il trinione $\alpha + \beta$ esprime (§. 7) un radio, che ha la stessa direzione del raggio ν, che va al punto di mezzo dell'arco $\alpha\beta$; basterà quindi

dividere $\alpha+\beta$ per la propria grandezza, e si avrà il trinione unitario ν: così pure

$$(\beta+\gamma):\mathrm{gr}(\beta+\gamma)\mathrel{\dot{=}}\lambda, \qquad (\lambda+\alpha):\mathrm{gr}(\lambda+\alpha)\mathrel{\dot{=}}\mu.$$

Viceversa conoscendo λ, μ, ν troveremo α, β, γ nel seguente modo. I due prodotti del trinione ν pel quaternione $\mu:\lambda$ sono due quaternioni che hanno (§. 24) angoli eguali e pel Corollario del §. 52 i loro assi formano con ν due angoli equipollenti; perciò supposto

$$(\mu:\lambda).\nu\mathrel{\dot{=}}-\mu\lambda\nu\mathrel{\dot{=}}\cos s+\alpha.\mathrm{sen}\,s\mathrel{\dot{=}}\alpha^s$$

$$\nu.(\mu:\lambda)\mathrel{\dot{=}}-\nu\mu\lambda\mathrel{\dot{=}}\beta^s$$

sarà $$\beta:\nu\mathrel{\dot{=}}\nu:\alpha;$$

similmente se pongasi $$-\lambda\nu\mu\mathrel{\dot{=}}\gamma^s,$$

questo $-\lambda\nu\mu$ sarà l'altro prodotto dei due fattori $\lambda\nu$, μ già moltiplicati in $-\mu\lambda\nu\mathrel{\dot{=}}\alpha^s$, ed inoltre esso sarà l'altro prodotto dei due fattori $\lambda, \nu\mu$ già moltiplicati in $-\nu\mu\lambda\mathrel{\dot{=}}\beta^s$; quindi avremo come sopra

$$\lambda:\mu\mathrel{\dot{=}}\mu:\alpha, \qquad \gamma:\lambda\mathrel{\dot{=}}\lambda:\beta.$$

Dunque i punti λ, μ, ν cadono in mezzo degli archi $\alpha\beta$, $\gamma\alpha$, $\beta\gamma$; sicchè i punti α, β, γ saranno quelli stessi, che prima segnammo con tali lettere, o saranno i punti a loro diametralmente opposti; ed è facile riconoscere che sarà $\alpha\beta\gamma$ precisamente il triangolo, nel quale la rotazione ha luogo nel verso assunto.

57. Per costruire la

$$\alpha^s\mathrel{\dot{=}}\tfrac{\mu}{\lambda}.\nu$$

sia ρ il punto della sfera, in cui l'arco $\lambda\mu$ prolungato nel verso $\lambda\mu$ incontra il circolo massimo che ha il polo ν, su quest'ultimo si prenda il quadrante (positivo rispetto a ν) $c\rho$, e sia $\rho\mathrm{O}\sigma\mathrel{\dot{=}}\lambda\mathrm{O}\mu$, sarà $$\alpha^s\mathrel{\dot{=}}\lambda\mathrm{O}\mu.c\mathrm{O}\rho\mathrel{\dot{=}}c\mathrm{O}\sigma.$$

Il punto c essendo distante di un quadrante tanto da ν quanto da ρ, e quanto anche da α (perchè α è il polo dell'arco $c\sigma$) sarà il polo dell'arco $\rho\alpha\nu\beta$. L'arco $c\sigma$, ossia l'angolo $c\alpha\sigma$ formato nella sfera col polo α, dà il valore dell'esponente s; ora, se c, n sieno i poli *positivi* degli archi $\alpha\nu\beta$, $\lambda\mu\rho\sigma$, saranno angoli retti $c\alpha\rho$, $\sigma\alpha n$ (giacchè essendo α, n i poli di $c\sigma$, $\lambda\mu\rho\sigma$, σ è il polo di $n\alpha$); dunque aggiungendo all'angolo $c\alpha\sigma$ l'identità $\sigma\alpha n-c\alpha\rho=o$, avremo

$$s=c\alpha\sigma+\sigma\alpha n-c\alpha\rho=c\alpha n-c\alpha\rho=\rho\alpha n=180^0-n\alpha\beta.$$

L'Hamilton osserva che gli archi $\beta\gamma$ $\gamma\alpha$ essendo dimezzati dall'arco $\lambda\mu$ col polo n, i punti α, β, γ saranno equidistanti dal circolo massimo $\lambda\mu$, perciò se γ_1 sia il punto diametralmente opposto a γ, i punti α, β, γ_1 saranno su di un circolo minore parallelo a $\lambda\mu$ ed avente il polo n, quindi saranno isosceli i tre triangoli

$$n\beta\alpha,\ n\alpha\gamma_1,\ n\gamma_1\beta;$$

gli angoli alla base del primo sono, come abbiamo di sopra trovato, supplementi di s, non è difficile dedurne che sarà $2s$ la somma degli angoli interni del triangolo $\gamma\alpha\beta$ (di cui l'angolo in γ è uguale a quello in γ_1 del triangolo $\gamma_1\alpha\beta$, e gli altri due angoli di $\gamma\alpha\beta$ sono supplementi dei due di $\gamma_1\alpha\beta$). Perciò: *La somma degli angoli interni di un triangolo sferico $\alpha\beta\gamma$ eguaglia il doppio dell' angolo del quaternione $-\mu\lambda\nu$, che è il prodotto dei tre raggi che dimezzano i lati del triangolo.*

38. Moltiplicando l'equipollenza precedente

$$-\mu\lambda\nu \eqq \alpha^s \quad \text{per } \tfrac{1}{\alpha} \text{ si ha}$$

$$\alpha\mu\lambda\nu \eqq \alpha^{s-1}$$

(ciò risulta da $\frac{1}{\alpha} \eqq -\alpha$, e può anche osservarsi che

$$-\mu\lambda\nu \eqq \cos s + \alpha.\operatorname{sen} s \quad \text{dà}$$

$$-\alpha\mu\lambda\nu \eqq \alpha\cos s - \operatorname{sen} s \eqq -\cos(s-1) - \alpha\operatorname{sen}(s-1)).$$

È noto che $s-1$ esprime la metà dell'area del triangolo sferico $\alpha\beta\gamma$ presa per unità quella del triangolo trirettangolo; si ha poi

$$\alpha\mu\lambda\nu \eqq \frac{\alpha}{\mu}.\frac{\lambda}{\nu} \eqq \frac{\alpha}{\mu}.\frac{\lambda}{\beta}.\frac{\beta}{\nu} \eqq \sqrt{\gamma O\alpha}.\sqrt{\beta O\gamma}.\sqrt{\alpha O\beta};$$

giacchè estraendo la radice di un quaternione $\alpha:\gamma$ se ne viene (§. 31) a dimezzare l'angolo, ed a ridursi perciò a $\alpha:\mu$; dunque: *La metà dell' area di un triangolo sferico è data dal quaternione, che si ottiene moltiplicando le radici dei tre lati presi nel verso in cui si succedono.* Ambedue i precedenti teoremi possono estendersi ad ogni poligono sferico.

39. Il teorema del §. 37 può tornar utile per determinare l'area di un triangolo sferico, del quale si conoscono i tre vertici. Nell'esempio del §. 35

$$\alpha \eqq -i.0{,}259 - j.0{,}749 + k.0{,}611,$$

$$\beta \eqq i, \qquad \gamma \eqq -i.0{,}391 + j.0{,}920;$$

quindi

$$\beta+\gamma \simeq i.0{,}609+j.0{,}920,\quad \gamma+\alpha \simeq -i.0{,}650+j.0{,}171+k.0{,}611,$$
$$\alpha+\beta \simeq i.0{,}741-j.0{,}749+k.0{,}611;$$

per dedurne i valori di λ, μ, ν bisognerebbe dividere per le rispettive grandezze, ma anche senza di ciò calcoleremo l'angolo s (§. 56) del quaternione $-\nu\mu\lambda \simeq \beta'$ nel modo seguente

$$(i.741-j.749+k.611)(i.650-j.171-k.611)(i.609+j.920) \simeq$$
$$\simeq(-237+i.562+j.850+k.360)(i.609+j.920) \simeq -1124-i.475,$$

essendo $\beta \simeq i$, si vede che sono negativi tanto il coseno quanto il seno, perciò l'angolo s sarà maggiore di 180° ed avrà la tangente $=\frac{475}{1124}$; sarà perciò $s=202°.55'$ la semisomma degli angoli interni del triangolo sferico $\alpha\beta\gamma$.

60. *Composizione dei moti rotatorii.* Se l'asse α del quaternione α^{2a} sia perpendicolare al radio ρ il prodotto $r\alpha^{2a}\rho$ esprime la posizione che prende ρ dopo essersi accresciuto nel rapporto di 1 ad r ed aver girato dell'angolo $2a$ intorno ad α; ma la cosa non è più così se ρ non sia perpendicolare ad α; allora bisognerebbe decomporre ρ in una parte perpendicolare ad α, che dee moltiplicarsi per $r\alpha^{2a}$, ed in una parallela ad α la quale dee moltiplicarsi soltanto per r. — L'Hamilton ebbe la felice idea di osservare che $\alpha^a\rho\alpha^{-a}$ equivale ad α^{2a} quando ρ è perpendicolare ad α, ed equivale a ρ quando ρ è parallelo ad α; sicchè ponendo

$$(1) \qquad \sigma \simeq \alpha^a\rho\alpha^{-a}$$

il radio σ sarà il radio ρ dopo che abbia girato dell'angolo $2a$ intorno ad α, e ciò qualunque sia la direzione di ρ. Infatti per la parte parallela ad α si ha (rammentando che $\alpha^2 \simeq -1$)

$$\alpha^a\alpha\alpha^{-a} \simeq (\cos a+\alpha.\operatorname{sen} a)\alpha(\cos a-\alpha.\operatorname{sen} a) \simeq$$
$$\simeq \alpha(\cos^2 a+\operatorname{sen}^2 a) \simeq \alpha;$$

e per la parte di ρ, che è perpendicolare ad α, e che indicheremo con μ, si ha

$$\alpha^a\mu\alpha^{-a} \simeq \mu.\cos^2 a-\alpha\mu\alpha.\operatorname{sen}^2 a+(\alpha\mu-\mu\alpha).\operatorname{sen} a.\cos a$$
$$\simeq \mu(\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a)+2\alpha\mu.\operatorname{sen} a.\cos a$$
$$\simeq \mu.\cos 2a+\alpha\mu.\operatorname{sen} 2a \simeq \alpha^{2a}\mu,$$

giacchè essendo α, μ perpendicolari il prodotto $\alpha\mu$ è un trinione, e la $\mu\alpha \mathrel{\dot{=}} \mathrm{cj}(\alpha\mu)$ del §. 34 diventa $\mu\alpha \mathrel{\dot{=}} -\alpha\mu$, da cui risulta (§. 28) $\alpha\mu\alpha \mathrel{\dot{=}} \mu$. L'operazione indicata da $\alpha^a \ldots \alpha^{-a}$, che esprime la rotazione intorno all'asse per un angolo $= 2a$, può eseguirsi non solamente sopra un radio o trinione ρ, ma anche sopra un biradiale o quaternione $\rho^u \mathrel{\dot{=}} \cos u + \rho . \operatorname{sen} u$, e si ha

(I) $$\sigma^u \mathrel{\dot{=}} \alpha^a \rho^u \alpha^{-a};$$

l'angolo del primo membro è esso pure u, perchè $(\rho^u \alpha^{-a})\alpha^a \mathrel{\dot{=}} \rho^u$, e pei §§. 24, 52 questo e l'altro prodotto $\alpha^u(\rho^u \alpha^{-a}) \mathrel{\dot{=}} \sigma^u$ dei due medesimi fattori α^a, $(\rho^u \alpha^{-a})$ hanno un medesimo angolo, ed i loro assi ρ, σ fanno angoli eguali con α; sicchè la retta σ è la ρ dopo la sua rotazione intorno ad α, ed anche il biradiale ρ^u viene ad eseguire una simile rotazione mutandosi in σ^u. Se vogliasi che la figura cresca eziandio nel rapporto da 1 ad r basterà moltiplicare per r. Paragonando la (1) colla (I) ne viene il teorema

(A) $$\alpha^a \rho^u \alpha^{-a} \mathrel{\dot{=}} (\alpha^a \rho \alpha^{-a})^u.$$

61. Se alla rotazione espressa da α^{2a} succede una seconda rotazione espressa da β^{2b}, il lor effetto sul radio ρ (che potrebbe essere anche un biradiale ρ^u) viene espresso da

(2) $$\beta^b \sigma \beta^{-b} \mathrel{\dot{=}} \beta^b \alpha^a \rho \alpha^{-a} \beta^{-b} \mathrel{\dot{=}} \beta^b \alpha^a \rho \ \mathrm{cj}\,(\beta^b \alpha^a)$$

giacchè pel Corollario del §. 28 e pel §. 19 è

$$\mathrm{cj}\,(\beta^b \alpha^a) \mathrel{\dot{=}} \mathrm{cj}\,\alpha^a . \mathrm{cj}\,\beta^b \mathrel{\dot{=}} \alpha^{-a} \beta^{-b};$$

dunque: *La composizione delle rotazioni successive si eseguisce moltiplicando tra loro due quaternioni, i cui assi α, β sono quelli delle rotazioni, e gli angoli a, b sono le metà di quelli delle rotazioni.* — Nel caso che le due rotazioni sieno infinitesime, si ha

$$\alpha^a \mathrel{\dot{=}} 1 + \alpha . \tfrac{\pi}{2} a \qquad \text{e} \qquad \beta^b \alpha^a \mathrel{\dot{=}} 1 + (\alpha a + \beta b)\tfrac{\pi}{2};$$

sicchè componendo le due lunghezze αa, βb, che sono nelle direzioni degli assi α, β, si ottiene una retta che è l'asse della rotazione composta, e che colla sua lunghezza esprime l'angolo della rotazione composta.

62. Prendiamo a considerare, per esempio, il caso che le due rotazioni $2a$, $2b$ si eseguiscano intorno a due assi perpendicolari, che potremo denominare i e j, avremo

$$j^b i^a \mathrel{\dot{=}} (\cos b + j . \operatorname{sen} b)(\cos a + i . \operatorname{sen} a) \mathrel{\dot{=}}$$
$$\mathrel{\dot{=}} \cos a . \cos b + i . \operatorname{sen} a . \cos b + j . \cos a . \operatorname{sen} b - k . \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} b.$$

Se le rotazioni fossero tutte due di un quadrante si avrebbe $a=b=45^0$, e perciò

$$j^{\frac{1}{2}} i^{\frac{1}{2}} \simeq \tfrac{1}{2}(1+i+j-k);$$

e siccome $\frac{1}{2} = \cos 60^0$, così l'effetto delle due rotazioni è lo stesso di quello di una rotazione di 120^0 intorno all'asse $i+j-k$ egualmente inclinato ai tre $i, j, -k$. Se alle due predette rotazioni se ne fa succedere una terza, essa pure di un quadrante intorno a k, si calcolerà

$$k^{\frac{1}{2}} j^{\frac{1}{2}} i^{\frac{1}{2}} \simeq \frac{1+k}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1+i+j-k}{2} \simeq \frac{1+j}{\sqrt{2}} \simeq j^{\frac{1}{2}}$$

e si vedrà che l'effetto delle tre rotazioni successive è quello stesso della rotazione intermedia di un quadrante intorno a j. — Nel caso più generale si ha per calcolare l'effetto di tre rotazioni successive intorno a tre assi ortogonali

$$k^c j^b i^a \simeq \cos a \cos b \cos c + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c +$$
$$+ i(\operatorname{sen} a \cos b \cos c - \cos a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c) +$$
$$+ j(\cos a \operatorname{sen} b \cos c + \operatorname{sen} a \cos b \operatorname{sen} c) +$$
$$+ k(\cos a \cos b \operatorname{sen} c - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos c).$$

Se le due rotazioni $2a$, $2c$ sono ciascuna di un quadrante positivo, e la $2b$ sia di un quadrante negativo, la precedente equipollenza dà

$$k^{\frac{1}{2}} j^{-\frac{1}{2}} i^{\frac{1}{2}} \simeq \frac{1+k}{\sqrt{2}}$$

e perciò le tre rotazioni di un quadrante per ciascuna equivalgono questa volta alla rotazione di 180^0 intorno all'asse, la cui direzione è espressa da $i+k$.

63. Viceversa. *Ogni rotazione può decomporsi in due rotazioni di* 180^0. Giacchè il biradiale α^a è sempre esprimibile (§. 37) col rapporto di due radii $\gamma:\beta$, che formano tra loro l'angolo $\beta O\gamma = \alpha$, sicchè

$$(1) \qquad \alpha^a \rho \alpha^{-a} \simeq \gamma \beta^{-1} \rho \beta \gamma^{-1}$$

e l'unica rotazione è decomposta in due di 180^0 prima intorno a β poscia intorno a γ. — Giova por mente alla formola $\alpha\rho\alpha^{a-1}$, oppure $\alpha^{-1}\rho\alpha$, la quale esprime che il radio ρ ha mutato di 180^0 intorno ad α.

64. *Rotazioni intorno ad assi mobili.* Se alla rotazione β^{2b} succede la rotazione α_1^{2a}, intorno all'asse α_1, che è la posizione presa

dall' asse α per effetto della prima rotazione, è palese che l' effetto sarà lo stesso come se il corpo compia prima la rotazione α^{2a} e poscia la β^{2b}; ciò si esprime colla formola

$$\beta^b \alpha^a \eqq \alpha_1^a \beta^b \eqq (\beta^b \alpha \beta^{-b})^a \beta^b,$$

che tosto si dimostra mediante la (A) del §. 60. — Ci può servire di esempio il caso che alla rotazione j^{2b} succeda la rotazione i_1^{2a}, intorno all' asse i_1, che è la posizione presa da i dopo aver subita la rotazione j^{2b}, la qual posizione, essendo l' asse j perpendicolare ad i, può determinarsi, piuttostochè colla $i_1 \eqq j^b i j^{-b}$ colla più comoda

$$i_1 \eqq j^{2b} i \eqq (\cos 2b + j \,.\, \operatorname{sen} 2b)\, i \eqq i \,.\, \cos 2b - k \,.\, \operatorname{sen} 2b.$$

Così avremo

$$i_1^a j^b \eqq (\cos a + i \,.\, \cos 2b \operatorname{sen} a - k \,.\, \operatorname{sen} 2b \operatorname{sen} a)(\cos b + j \,.\, \operatorname{sen} b) \eqq$$
$$\eqq \cos a \cos b + i\,(\operatorname{sen} a \cos b \cos 2b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} 2b) + j \,.\, \cos a \operatorname{sen} b +$$
$$+ k \,.\, \operatorname{sen} a\,(\operatorname{sen} b \cos 2b - \cos b \operatorname{sen} 2b) \eqq \cos a \cos b + i \,.\, \operatorname{sen} a \cos b +$$
$$+ j \,.\, \cos a \operatorname{sen} b - k \,.\, \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b,$$

cioè il valore di $j^b i^a$ già trovato al §. 62.

65. La (10) del §. 53 ci dà (§. 28)

$$\gamma_q \beta_q \alpha_q \eqq 1$$

e questi quaternioni del primo membro esprimono gli angoli esterni del triangolo sferico determinato dai tre raggi α, β, γ; ponendo mente a quanto dicemmo al §. 61 ed osservando che gli angoli esterni sono supplementi degli interni, e che una rotazione 2α equivale alla rotazione $360^0 - 2\alpha$ in senso negativo si vede che: *Per un qualunque triedro cogli spigoli α, β, γ se un corpo gira successivamente intorno agli spigoli $\alpha\,\beta\,\gamma$ di angoli doppj dei diedri compresi tra le facce del triedro, e ciò nel verso da γ a β, da α a γ, e da β ad α, il corpo riprende la primitiva posizione.* — Questo teorema facile da ricordarsi può servire a comporre due rotazioni in una sola. — Può egualmente servire la

(1) $$c_q b_q a_q \eqq 0 \quad \text{del §. 53,}$$

la quale facilmente si dimostra prendendo sulle prolungazioni dei lati del triangolo sferico $\alpha\beta\gamma$ gli archi

$$\beta_1 \alpha \eqq \beta \alpha_2 \eqq \alpha\beta, \qquad \gamma_2 \beta \eqq \gamma \beta_3 \eqq \beta\gamma, \qquad \alpha_3 \gamma \eqq \alpha \gamma_1 \eqq \gamma\alpha,$$

ed è poi palese che mediante una rotazione espressa dal doppio dell' arco $\alpha\beta$ il triangolo $\beta_1 \alpha \gamma_1$ prende la posizione $\beta \alpha_2 \gamma_2$, con una

seconda rotazione eguale al doppio dell' arco $\beta\gamma$ viene in $\beta_3\alpha_3\gamma$, e con una terza rotazione doppia dell' arco $\gamma\alpha$ ritorna nella posizione primitiva $\beta_1\alpha\gamma_1$. Similmente se al di fuori del triangolo sferico $\alpha\beta\gamma$ si costruiscono i triangoli $\alpha\beta'\gamma$, $\alpha\beta\gamma'$, $\alpha'\beta\gamma$ eguali per simmetria al triangolo $\alpha\beta\gamma$, si vedrà che con rotazioni doppie degli angoli interni del triangolo sferico $\alpha\beta\gamma$ il triangolo $\alpha\beta'\gamma$ viene in $\alpha\beta\gamma'$, poscia in $\alpha\beta\gamma$, e poi ritorna in $\alpha\beta'\gamma$.

66. Teorema: *Se alla rotazione intorno al raggio* $OA \eqcirc \alpha$ *succeda una rotazione intorno ad un asse parallelo al raggio* $OB \eqcirc \beta$, *il movimento risultante sarà composto dalla rotazione determinata come ai* §§. 61, 65 *e da un moto di traslazione.*

Sia OP la perpendicolare abbassata dal punto d' intersezione O dei raggi α, β sul secondo asse parallelo a β; per brevità di calcolo poniamo $OP \eqcirc ip$, e sia k il raggio segnato con β e che è perpendicolare ad OP. Se il punto M determinato con tutta la generalità da

$$(1) \qquad OM \eqcirc ix + jy + kz$$

eseguisce la rotazione ω intorno ad $OB \eqcirc k$ esso prende la posizione M' data da

$$(2) \qquad OM' \eqcirc i(x\cos\omega - y\operatorname{sen}\omega) + j(y\cos\omega + x\operatorname{sen}\omega) + kz,$$

(la quale si trova (§. 60) eseguendo il prodotto

$$(\cos\omega + k\operatorname{sen}\omega)(ix + jy)$$

di k^ω per la parte di OM, che è perpendicolare a k, e ritenendo la parte kz, che gli è parallela.) Se invece lo stesso punto M determinato da

$$PM \eqcirc OM - OP \eqcirc i(x-p) + jy + kz$$

eseguisce la rotazione k^ω intorno a P esso prende la posizione M'' che come sopra si trova

$$(3) \qquad PM'' \eqcirc i(x\cos\omega - p\cos\omega - y\operatorname{sen}\omega) + j(y\cos\omega + x\operatorname{sen}\omega - p\operatorname{sen}\omega) + kz.$$

La distanza dei punti M', M'' è data in grandezza e direzione da

$$M'M'' \eqcirc OP + PM'' - OM' \eqcirc ip(1-\cos\omega) - jp\operatorname{sen}\omega,$$

perciò è indipendente dalla posizione di M, e quindi la rotazione k^ω intorno a P differisce dalla rotazione k^ω intorno ad O soltanto per la *traslazione*, ossia moto progressivo, espressa da

$$(4) \qquad M'M'' \eqcirc QP \eqcirc OP - OQ,$$

essendo $\quad OQ \mathrel{\underline{\frown}} ip\cos\omega + jp\,\mathrm{sen}\,\omega \mathrel{\underline{\frown}} k^{\omega}.OP,$

cioè essendo Q la posizione presa dal punto P ruotando intorno all' asse $OB \mathrel{\underline{\frown}} k$. Dunque le due rotazioni intorno ad O ed intorno a P differiscono soltanto per un moto progressivo, il che dimostra il teorema che serve a comporre i moti rotatorii quando gli assi non sono nello stesso piano.

67. *Moti rotatorii e progressivi.* Ogni movimento di un corpo intorno al suo punto O si riduce ad una rotazione, che noi esprimiamo con k^{ω}, perciò il passaggio di un corpo da una posizione OM ad una qualsivoglia altra posizione O′M′ può supporsi risultante dalla traslazione OO′ combinata colla rotazione k^{ω} intorno all' asse k, che nella prima posizione passa per O e nella seconda per O′. È facile intendere che scegliendo opportunamente il punto S si potrà fare in guisa che la rotazione k^{ω} si eseguisca intorno al punto S, e che la traslazione SS′ sia parallela all' asse di rotazione k. Infatti sia

$$OO' \mathrel{\underline{\frown}} ia + jb + kc \tag{5}$$

e riteniamo le (1), (2) del §. precedente mutando nella (2) OM′ in O′M′; se le x y sieno determinate in guisa da rendere

$$a + x\cos\omega - y\,\mathrm{sen}\,\omega - x = 0, \quad b + y\cos\omega + x\,\mathrm{sen}\,\omega - y = 0 \tag{6}$$

il movimento del punto M si ridurrà a

$$MM' \mathrel{\underline{\frown}} OO' + O'M' - OM \mathrel{\underline{\frown}} kc,$$

cioè sarà parallelo all' asse k; dunque ogni punto dell' asse di rotazione SM è dato da

$$OM \mathrel{\underline{\frown}} OS + kz$$

essendo, a motivo delle (6),

$$OS \mathrel{\underline{\frown}} i\,\frac{a - a\cos\omega - b\,\mathrm{sen}\,\omega}{4\,\mathrm{sen}^2\frac{\omega}{2}} + j\,\frac{b - b\cos\omega + a\,\mathrm{sen}\,\omega}{4\,\mathrm{sen}^2\frac{\omega}{2}}. \tag{7}$$

Si osservi che se alla retta $\quad O'O \mathrel{\underline{\frown}} -ia - jb - kc \quad$ si fa eseguire intorno ad O′ la rotazione $k^{-\omega}$ il punto O passa in O^0, essendo

$$O'O^0 \mathrel{\underline{\frown}} i(-a\cos\omega - b\,\mathrm{sen}\,\omega) + j(-b\cos\omega + a\,\mathrm{sen}\,\omega) - kc,$$

quindi

$$OO^0 \mathrel{\underline{\frown}} i(a - a\cos\omega - b\,\mathrm{sen}\,\omega) + j(b - b\cos\omega + a\,\mathrm{sen}\,\omega),$$

da cui si deduce che OS è terza proporzionale dopo OO^0 e la projezione di OO' sul piano delle i, j perpendicolare all'asse k. È facile dimostrare anche geometricamente che: *Una rotazione intorno ad un asse condotto per* O *combinata colla traslazione da* O *ad* O' *equivale ad egual rotazione intorno ad* S *combinata colla traslazione* $SS' \backsimeq kc$ *(che è la projezione di* OO' *sull' asse di rotazione); purchè, determinato il punto* O^0 *che per effetto della rotazione intorno ad* O' *passi in* O, *siasi presa sulla retta* OO^0 *la* OS *terza proporzionale alla* OO^0 *ed alla projezione della* OO' *sul piano perpendicolare all'asse di rotazione*; giacchè

$$OS \backsimeq OO^0 : 4 \operatorname{sen}^2 \tfrac{\omega}{2}, \quad \text{e} \quad 2 \operatorname{sen} \tfrac{\omega}{2} = \operatorname{gr} OO^0 : \operatorname{gr} (ia + jb).$$

68. Se il corpo dopo aver eseguita la rotazione k^ω intorno ad O ed il moto di traslazione da O in O' riceve intorno ad O' un ingrandimento come 1 ad r rimanendo omotetico a sè stesso, il punto M prenderà la nuova posizione determinata da

$$(8) \qquad O'M' \backsimeq r k^{\frac{\omega}{2}} . OM . k^{-\frac{\omega}{2}} \backsimeq$$

$$\backsimeq ir(x\cos\omega - y\operatorname{sen}\omega) + jr(y\cos\omega + x\operatorname{sen}\omega) + krz,$$

e perchè M' coincida colla sua posizione primitiva M dovrà essere

$$O'M' \backsimeq OM - OO' \backsimeq i(x-a) + j(y-b) + k(z-c)$$

paragonando si hanno tre equazioni, le quali danno

$$x = \frac{a - ar\cos\omega - br\operatorname{sen}\omega}{1 + r^2 - 2r\cos\omega}, \quad y = \frac{b - br\cos\omega + ar\operatorname{sen}\omega}{1 + r^2 - 2r\cos\omega}, \quad z = \frac{c}{1-r}$$

e determinano l' unico punto S che coincide col suo corrispondente S'. Se il punto O eseguendo intorno ad O' il moto espresso da $rk^{-\omega}$ venisse a prendere la posizione O^0 sarebbe

$$O'O^0 \backsimeq i(-ar\cos\omega - br\operatorname{sen}\omega) + j(-br\cos\omega + ar\operatorname{sen}\omega) - kcr;$$

la projezione della retta OO^0 sul piano perpendicolare all'asse k sarà la

$$Oo^0 \backsimeq i(a - ar\cos\omega - br\operatorname{sen}\omega) + j(b - br\cos\omega + ar\operatorname{sen}\omega),$$

e se Os sia la simile projezione della OS sarà

$$Os \backsimeq \frac{Oo^0}{1 + r^2 - 2r\cos\omega}, \qquad sS \backsimeq \frac{o^0 O^0}{(1-r)^2}.$$

69. Nel caso che il numero r sia negativo i due corpi OM..., O'M'... non differiscono soltanto in grandezza, ma inoltre l'uno è *simmetrico*, o, come io soglio dire, *rovescio* dell'altro; cioè quando si riducono eguali ognuno può combaciare coll'immagine dell'altro veduta in uno specchio piano. Supponiamo per esempio $r=-1$ ed il punto S, che coincide col suo corrispondente, sarà dato da

$$OS \backsimeq ix + jy + kz,$$

$$O'S \backsimeq i(-x\cos\omega + y\operatorname{sen}\omega) + j(-y\cos\omega - x\operatorname{sen}\omega) - kz$$

essendo $OS \backsimeq OO' + O'S$, cioè

$$a-x-x\cos\omega+y\operatorname{sen}\omega=0,\quad b-y-y\cos\omega-x\operatorname{sen}\omega=0,\quad c-2z=0$$

$$x=\frac{a+a\cos\omega+b\operatorname{sen}\omega}{2(1+\cos\omega)},\quad y=\frac{b+b\cos\omega-a\operatorname{sen}\omega}{2(1+\cos\omega)},\quad z=\frac{c}{2}.$$

E se ad O si fa eseguire intorno all'asse k condotto per O' la rotazione espressa da $k^{2-\varrho}$, si ha

$$O'o^0 \backsimeq (-\cos\omega + k\operatorname{sen}\omega)(-ia - jb) \backsimeq$$

$$\backsimeq i(a\cos\omega + b\operatorname{sen}\omega) + j(b\cos\omega - a\operatorname{sen}\omega)$$

$$Oo^0 \backsimeq ia + jb + O'o^0 \backsimeq i(a + a\cos\omega + b\operatorname{sen}\omega) + j(b + b\cos\omega - a\operatorname{sen}\omega),$$

ed avremo

$$Os \backsimeq \frac{Oo^0}{2+2\cos\omega},\qquad sS \backsimeq \frac{c}{2}.$$

Si noti che le sezioni fatte da un piano perpendicolare all'asse quando si riguardano da una stessa banda sono uguali-dritte non già uguali-rovescie.

70. Se nelle equipollenze del §. 68 la OO' sia perpendicolare all'asse di rotazione, cioè sia $z=0$, invece di $rk^{\frac{\varrho}{2}}.OM.k^{-\frac{\varrho}{2}}$, può scriversi (§. 60) $rk^{\varrho}.OM$ ed allora si ha l'equipollenza

$$-O'M' + OM \backsimeq (1-rk^{\varrho})\,OM \backsimeq OO'.$$

Nella mia teoria delle equipollenze relative alle figure poste in un piano feci vedere che tali equipollenze si risolvono alla maniera stessa delle equazioni; sicchè posto

$$-rk^{\varrho}.OO' \backsimeq rk^{\varrho}.O'O \backsimeq O'\Omega$$

sarà $$(OO' + O'\Omega)\,OM \backsimeq O\Omega.OM \backsimeq (OO')^2,$$

e

$$OM \mathrel{\triangleq} (OO')^2 : O\Omega$$

che facilmente si costruisce. Simile vantaggio non si ha nel metodo dei quaternioni, e rimane da vedere se ve lo si possa per alcuna maniera introdurre, nel qual caso non si avrebbe bisogno di decomporre sempre ogni retta nelle sue parti parallele ai tre assi ortogonali i, j, k.

71. *Applicazione alle altezze del tetraedro.* Per mostrare come i trinioni presentino un comodo algoritmo per calcolare ciò che si riferisce alle coordinate ortogonali, proponiamoci di cercare quali relazioni di posizione presentino le quattro altezze di un tetraedro. I vertici del tetraedro OABC possiamo esprimerli senza nulla togliere alla generalità con

$$OA \mathrel{\triangleq} i, \quad OB \mathrel{\triangleq} iu + jv, \quad OC \mathrel{\triangleq} ix + jy + kz;$$

la faccia ABC ha i due lati

$$AB \mathrel{\triangleq} i(u-1) + jv, \quad AC \mathrel{\triangleq} i(x-1) + jy + kz$$

nel cui prodotto è compreso il trinione

$$ivz + j(1-u)z + k(uy - y - vx + v),$$

il quale dà (§. 42) la direzione di ogni retta perpendicolare ad ABC. Similmente la perpendicolare sulla faccia OBC è

$$ivz - juz + k(uy - vx),$$

quella sulla faccia OAC è $jz - ky$, e quella sulla faccia OAB è k. Le rette che passano per O e tagliano le altezze abbassate da C e da B sulle facce opposte OAB, OAC avranno le direzioni

$$ix + jy + kp, \quad iu + j(v - qz) + kqy,$$

acciocchè queste due rette abbiano egual direzione deggiono determinarsi p, q in guisa che

$$\frac{u}{x} = \frac{v - qz}{y} = \frac{qy}{p};$$

ne viene che la retta condotta per O, che taglia quelle due altezze ha la direzione

$$\left(\text{giacchè} \quad p = \frac{vxy}{uz} - \frac{y^2}{z}, \quad q = \frac{v}{z} - \frac{uy}{xz}\right)$$

$$iuxz + juyz + k(vx - uy)y;$$

essa taglia anche la retta condotta per l' estremo di $OA \eqq i$ perpendicolarmente alla faccia OBC, perchè

$$i + \frac{y}{vyz + uxz}(-ivz + juz - kuy + kvx) \eqq$$

$$\eqq \frac{x}{vyz + uxz}(iuxz + juyz + kvxy - kuy^2).$$

Come abbiamo veduto che dal vertice O può condursi una retta che tagli le altre tre altezze, così lo stesso si troverebbe per ciascuno degli altri vertici; dunque le quattro altezze sono tagliate da quattro rette differenti, e basterebbe che fossero soltanto tre per poterne dedurre che *le quattro altezze del tetraedro appartengono ad un medesimo sistema di generatrici di un' iperboloide ad una falda.*

72. *Il prodotto di due raggi è equipollente alla potenza di un raggio perpendicolare a quei due; il prodotto di tre raggi paralleli ad uno stesso piano è equipollente ad un raggio parallello allo stesso piano*, ecc. Ciò risulta evidentemente dalle cose già dette, così se la k sia perpendicolare al piano ABCD, e se

$$\frac{BC}{grBC} \eqq k^\beta \cdot \frac{AB}{grAB}$$

sarà

(1) $$BC.AB \eqq \frac{grBC}{grAB}.k^\beta.AB.AB \eqq -k^\beta.grBC.grAB.$$

Similmente se

$$\frac{CD}{grCD} \eqq k^\gamma \cdot \frac{BC}{grBC}$$

sarà $CD.BC \eqq k^{\alpha+\gamma}.grCD.grBC$, perciò

(2) $$CD.BC.AB \eqq k^{\alpha+\gamma}.AB.grCD.grBC.$$

Dalla (1) e dalla sua analoga $DA.CD \eqq k^{\alpha+\delta}.grCD.grDA$ risulta

(3) $$DA.CD.BC.AB \eqq k^{\beta+\delta}.grAB.grBC.grCD.grDA;$$ ecc.

73. *Il prodotto dei quattro lati di un quadrilatero inscrivibile nel circolo presi ordinatamente è una quantità tutta reale.* Ciò risulta dalla precedente (3) quando la somma $\beta+\delta$ di due angoli esterni opposti è uguale a due rette sicchè $k^{\beta+\delta} \eqq -1$; oppure, se il quadrilatero è *incrociato* anzichè *convesso*, si ha $k^{\beta+\delta} \eqq 1$. Per fare un' applicazione sia

$$AB \eqq i + 2j, \qquad BC \eqq 3i - k,$$

e si vogliano determinare tutti i punti D del circolo ABCD, posto

$$CD \backsimeq ix + jy + kz$$

dovrà essere quantità puramente reale il prodotto

$$AB.BC.CD.DA \backsimeq (i+2j)(3i-k)(ix+jy+kz)(-i.\overline{x+4}-j.\overline{y+2}+k.\overline{1-z})$$

$$\backsimeq (-3-2i+j-6k)(x^2+y^2+z^2+4x+2y-z+i.\overline{y+2z}-j.\overline{x+4z}+k.\overline{y-2x}),$$

acciocchè in questo prodotto si annullino i coefficienti di i, j, k, dovrà essere

$$-2x^2-2y^2-2z^2-16x-3y-28z=0, \qquad x^2+y^2+z^2+3x+4y-z=0$$

$$-6x^2-6y^2-6z^2-16x-25y+12z=0$$

una delle quali è conseguenza delle altre due.

74. Se ABCD è un quadrilatero gobbo inscritto nella sfera, il prodotto CA.BC.AB dei lati del triangolo ABC inscritto in uno dei circoli della sfera è una retta AT, la quale per la (2) del §. 72 si vedrà facilmente esser tangente al circolo. Così pure avremo DA.CD.AC $\backsimeq$ AU essendo AU una retta tangente al circolo ACD. Perciò osservando che AC.CA è una quantità reale gr^2AC sarà

$$(4) \qquad DA.CD.BC.AB \backsimeq AU.AT,$$

cioè equipollente ad una potenza del raggio della sfera, che è perpendicolare ad ambedue le tangenti AT.AU.

75. Così per esempio se in una data sfera debba inscriversi un quadrilatero gobbo, i cui lati AB, BC, CD, DA sieno rispettivamente paralleli a

$$i-j, \qquad i+2k, \qquad i, \qquad i+k$$

calcoleremo

$$(i+k)\,i\,(i+2k)\,(i-j) \backsimeq (-1+j)(-1+2i+2j-k) \backsimeq -1-3i-3j-k,$$

questo quaternione contiene il trinione $+3i+3j+k$; perciò il punto della sfera, in cui dee cadere il vertice A del quadrilatero, è l' estremo del raggio $3i+3j+k$. In simil modo si determinano gli altri tre vertici mediante i prodotti

$$(i-j)(i+k)\,i\,(i+2k) \backsimeq -1+3i+3j+k$$

$$(i+2k)(i-j)(i+k)\,i \backsimeq -1-i-3j+3k$$

$$i\,(i+2k)(i-j)(i+k) \backsimeq -1-i+3j-3k;$$

cioè il vertice B coincide con A, ed il lato AB è tangente alla sfera,

il vertice C è all' estremo del raggio $i+3j-3k$, ed il vertice D all' estremo di $-i+3j-3k$. Questo problema può anche costruirsi graficamente costruendo il prodotto di quattro radii paralleli ai lati del quadrilatero, ossia il prodotto dei due biradiali dati dai rapporti di quei radii.

76. Se E sia un quinto punto della sfera ABCD sarà anche $EA.DE.AD \simeq AV$, essendo AV la tangente al circolo ADE, perciò moltiplicando questa equipollenza per la (4), e ricordando (§. 72) che il prodotto di tre rette AT, AU, AV poste nello stesso piano tangenziale è una retta situata nel medesimo, vedremo che: *Il prodotto*

(5) $$EA.DE.CD.BC.AB$$

dei lati di un pentagono inscritto nella sfera è un trinione esprimente una tangente alla sfera nel punto A.

77. Per mostrare un' applicazione di questo teorema e dei calcoli del §. 75, supponiamo che una sfera abbia nel punto A la tangente $i-j$, e passi per C e per D essendo $AC \simeq i+2k$, $CD \simeq 3i$, e si voglia trovare il punto E della sfera, che giace sulla retta DE parallela a k; porremo $DE \simeq kz$, quindi $EA \simeq -4i-k(z+2)$, e dovremo determinare la z in guisa che si annulli la parte reale di

(5) $$(-4i-k.\overline{z+2})kz.3i(i+2k)(i-j) \simeq z(z+2+4j)(-6-3i+3j+6k) \simeq$$
$$\simeq 3z(-2z-8+i.\overline{6-z}+j.\overline{z-6}+k.\overline{4z+8});$$

perciò, ommessa la radice $z=0$, sarà $z=-4$, $DE \simeq -4k$, $AE \simeq 4i-2k$, ed il radio $10i-10j-8k$ sarà tangente alla sfera in A.

III. USO DELLE CARATTERISTICHE

78. L' Hamilton fa molto uso di alcune *caratteristiche* relative ai quaternioni. Noi abbiamo già adoperata (§. 22) la gr per indicare la grandezza di un quaternione o di un trinione, l' Hamilton la segna con T dicendola *tensor*; abbiamo pure usata la cj (§. 19) per indicare il conjugato, che l' Hamilton segna con K, e che si ottiene mutando il segno a tutti i termini contenenti alcuni dei i, j, k. Abbiamo detti trinioni e quaternioni unitarii quelli che hanno la grandezza eguale all' unità; se un qualunque quaternione si divide per la sua grandezza si ottiene il quaternione unitario in esso contenuto; a questo l' Hamilton dà il nome di *versor*, e segna con U l' operazione per la quale il quaternione (o trinione) si divide per la propria grandezza. — Ogni quaternione è composto di una parte reale (ossia vera quantità) a cui l' Hamilton dà il nome di *scalar*, e segna con S l' operazione, con cui si ritiene la sola parte reale di un quaternione; la parte rimanente è un trinione detto *vector* ed indicato con V. — Il significato di queste caratteristiche s' intenderà meglio ponendo attenzione alle seguenti formole, nelle quali si suppone

$$q \doteq w + ix + jy + kz \doteq r\cos s + \rho . r \operatorname{sen} s \doteq r\rho^s,$$

essendo ρ un trinione unitario, che può esprimersi (§. 38) con

$$\rho \doteq i . \cos l \cos m + j . \cos l \operatorname{sen} m + k . \operatorname{sen} l$$

$$\operatorname{cj} q \doteq w - ix - jy - kz \doteq r(-\rho)^s, \qquad \operatorname{cj}\rho \doteq -\rho$$

$$\operatorname{gr} q \doteq \sqrt{(w^2 + x^2 + y^2)} \doteq r$$

$$Sq = w = r\cos s, \qquad Vq \doteq ix + jy + kz \doteq \rho . r \operatorname{sen} s$$

$$q \doteq Sq + Vq, \qquad S\rho = 0, \qquad V\rho \doteq \rho, \qquad Vw \doteq 0,$$

$$q^2 \doteq w^2 - x^2 - y^2 - z^2 + 2w(ix + jy + kz) \doteq S^2 q + V^2 q + 2Sq . Vq$$

$$S(q^2) = S^2 q + V^2 q, \qquad V(q^2) \doteq 2Sq . Vq$$

$$\operatorname{gr}(q^2) = \operatorname{gr}^2 q = S^2 q - V^2 q = S^2 q + \operatorname{gr}^2 Vq$$

$$\operatorname{gr} Sq = Sq = w, \qquad \operatorname{gr} Vq = r \operatorname{sen} s.$$

L' angolo s del quaternione q è dato da

$$s = \mathrm{A}\cos(sq : \mathrm{gr}\,q) = \mathrm{A}\,\mathrm{sen}(\mathrm{gr}\,vq : \mathrm{gr}\,q)$$

e l' asse ρ del quaternione è il trinione unitario

$$vvq \mathrel{\dot{=}} \rho .$$

79. Ammetteremo coll' Hamilton che gli angoli si conservino positivi, sicchè nel quaternione conjugato debba prendersi l' asse in opposta direzione, quindi

$$s\,\mathrm{cj}\,q = sq = w, \qquad v\,\mathrm{cj}\,q \mathrel{\dot{=}} (-\rho)\,r\,\mathrm{sen}\,s, \qquad vv\,\mathrm{cj}\,q \mathrel{\dot{=}} -\rho ;$$

e lo stesso avvenga nel dividere l' unità pel quaternione, cioè il quaternione

$$\frac{1}{q} \mathrel{\dot{=}} \frac{1}{r}(-\rho)^{r}$$

avrà l' angolo s e l' asse $-\rho$, onde $vv\frac{1}{q} \mathrel{\dot{=}} -\rho$.

Ammetteremo pure che mutando il segno ad un quaternione si venga a mutare il segno del suo asse, mentre l' angolo diviene il proprio supplemento, cioè

$$-q \mathrel{\dot{=}} r\cos(2-s) + (-\rho)\,r\,\mathrm{sen}\,(2-s), \qquad vv(-q) \mathrel{\dot{=}} -\rho .$$

La parte reale di un quaternione è positiva o negativa secondo che l' angolo del quaternione è acuto od ottuso.

80. *Significato di alcune funzioni.* Segnando con α, β, γ.... alcune rette o radii per le cose già dette ai §§. 24, 78 si vede che $s(\beta\alpha)$ è il prodotto delle due rette pel coseno della loro inclinazione; perciò l' equazione

(1) $$s(\beta\alpha) = 0$$

indica che le due rette o sono perpendicolari od hanno l' inclinazione di 90°. L' altra parte $v(\beta\alpha)$ del quaternione $\beta\alpha$ ha la sua grandezza $\mathrm{gr}\,v(\beta\alpha)$ eguale al prodotto delle lunghezze α, β pel seno della mutua inclinazione delle α, β; perciò l' equazione

(2) $$\mathrm{gr}\,v(\beta\alpha) = 0, \qquad \text{ossia} \quad v(\beta\alpha) \mathrel{\dot{=}} 0$$

è la condizione del parallelismo delle rette α, β. Al valore di $\mathrm{gr}\,v(\beta\alpha)$ potremo dare, imitando l' Hamilton, il nome di funzione *aparallelica*, perchè in qualche modo misura l' allontanamento dal parallelismo, essa eguaglia il doppio dell' area di un triangolo che ha due lati equipollenti ad α, β. Il valore unitario $vv(\beta\alpha)$ esprime il radio perpendicolare ad ambedue le α, β.

81. La

$$s(\gamma\beta\alpha) = 0 \tag{3}$$

esprime la condizione che le tre rette α, β, γ sieno parallele ad uno stesso piano, cioè che sieno in uno stesso piano le $OA \eqsim \alpha$, $OB \eqsim \beta$, $OC \eqsim \gamma$. In ogni altro caso la funzione $s(\gamma\beta\alpha)$ può dirsi la funzione *apianica*, perchè in qualche modo misura l'allontanamento dal piano; essa è il rapporto del tetraedro OABC a quello che ha gli spigoli i, j, k. — La funzione *apianica* è anche esprimibile con $s[\gamma v(\beta\alpha)]$, infatti $\beta\alpha \eqsim s(\beta\alpha) + v(\beta\alpha)$ e la parte reale $s(\beta\alpha)$ moltiplicata per γ dà un trinione, sicchè $s[\gamma s(\beta\alpha)] = 0$; $v(\beta\alpha)$ esprime una retta ρ perpendicolare al piano $\alpha\beta$, ed $s(\gamma\rho)$ esprime il prodotto delle γ, ρ pel coseno tra loro compreso.

82. Se i sei raggi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \xi$ sono condotti per O, i trinioni $v(\beta\alpha)$, $v(\varepsilon\delta)$ esprimono rette perpendicolari ai piani $\alpha\beta$, $\delta\varepsilon$, perciò la

$$v[v(\beta\alpha).v(\varepsilon\delta)] \eqsim \varphi$$

indica la retta d'intersezione dei due piani $\alpha\beta$, $\delta\varepsilon$. Pongasi similmente

$$v[v(\gamma\beta).v(\xi\varepsilon)] \eqsim \chi, \qquad v[v(\delta\gamma).v(\alpha\xi)] \eqsim \psi,$$

e pel teorema del Pascal la condizione

$$s(\psi\chi\varphi) = 0, \tag{4}$$

che φ, χ, ψ sieno in un piano è anche la condizione che i sei raggi $\alpha, \beta, \ldots\ldots \xi$ appartengono ad uno stesso cono del secondo ordine; perciò alla $s(\psi\chi\varphi)$ riferita ai sei raggi l'Hamilton dà il nome di funzione *aconica*; il suo valore dipende dalla posizione dei sei punti A, B, C, D, E, F estremi dei raggi $OA \eqsim \alpha, \ldots\ldots OF \eqsim \xi$. Col suo mezzo l'Autore esprime la funzione che egli dice *adeuterica*, e che noi potremo dire *aditomica*, tra dieci punti A..... K, la quale si annulla quando per questi dieci punti può passare una stessa superficie del secondo ordine (che noi diciamo *ditoma*, accennando alla proprietà di non poter esser tagliata da una retta che in due punti). Secondo l'Hamilton la funzione *aditomica* di dieci punti risulta dalla somma di tutti i prodotti di ciascuna funzione *aconica* relativa a sei punti moltiplicata per la funzione *apianica* relativa ai quattro punti rimanenti.

83. *Equazioni delle superficie piane.* Quando il radio vettore $\rho \mathrel{\dot{=}} OM$ è legato con altri radii o rette $\alpha \mathrel{\dot{=}} OA$, $\beta \mathrel{\dot{=}} OB$, ec. e con quantità costanti a, b, c, ec. col mezzo di un' equazione relativa a quantità, il luogo geometrico del punto variabile M è una superficie. — Così l' equazione

(1) $\qquad s\frac{\rho}{\alpha} = c, \qquad$ ossia (§. 16) $\qquad s(AOM) = c$

esprime il piano perpendicolare alla retta OA, e distante dall' origine O della lunghezza $c.OA$. Infatti il quaternione, che esprime il biradiale OM:OA, è formato dal rapporto numerico $r = OM:OA$ moltiplicato pel coseno dell' angolo AOM, più lo stesso r moltiplicato pel sen AOM e pel raggio perpendicolare ad AOM; e la prima parte di tal quaternione, che è la parte reale disegnata colla caratteristica s, è appunto il rapporto numerico c della projezione OP della OM sulla OA alla stessa OA. — Si noti che all' equazione può darsi la forma

(2) $$s.\rho\alpha = c\,\mathrm{gr}^2\alpha = e,$$

essendo e un' altra quantità costante; infatti il biradiale $\rho\alpha$ non differisce da $\rho:\alpha$ che pel moltiplicatore reale $-\mathrm{gr}^2\alpha$. Siccome (§. 34) $\alpha\rho \mathrel{\dot{=}} \mathrm{cj}.\rho\alpha$, così si ha anche $s.\alpha\rho = e$. Se poniamo

$$\rho \mathrel{\dot{=}} ix + jy + kz, \qquad \alpha \mathrel{\dot{=}} i\alpha' + j\alpha'' + k\alpha'''$$

la (2) si riduce alla

(3) $$\alpha' x + \alpha'' y + \alpha''' z + e = 0,$$

che è l' ordinaria equazione di un piano riferito alle coordinate ortogonali. — Se B è un punto del piano si ha anche $s\frac{\beta}{\alpha} = c$, e sottraendo dalla (1) risulta $s\frac{\rho-\beta}{\alpha} = 0$, ossia

(4) $$s(BM:OA) = 0,$$

che è l' equazione del piano condotto per B perpendicolarmente alla retta OA.

84. *Equazione della sfera.* La sfera col centro nell' origine O ed il raggio r è espressa da

(1) $\qquad \mathrm{gr}\,\rho = r, \qquad$ che può anche scriversi

(2) $$\rho^2 + r^2 \mathrel{\dot{=}} 0,$$

giacchè il quadrato della grandezza di un radio ρ (o di un biradiale)

si ottiene moltiplicandolo pel suo conjugato; e per ogni radio è cj $\rho \mathrel{\dot{=}} -\rho$. Se il centro della sfera sia l' estremo del radio $OC \mathrel{\dot{=}} \gamma$ muteremo ρ in $\rho-\gamma$, e la (2) diventerà

$$(\rho-\gamma)^2 + r^2 \mathrel{\dot{=}} \rho^2 - \gamma\rho - \rho\gamma + \gamma^2 + r^2 \mathrel{\dot{=}} 0$$

ed osservando che $\gamma\rho$, $\rho\gamma$ sono conjugati, sicchè la loro somma è il doppio della parte reale di ciascheduno, potremo anche scrivere

$$\rho^2 - 2s.\gamma\rho + c \mathrel{\dot{=}} 0 \tag{3}$$

avendo posto c in luogo di $r^2 + \gamma^2 \mathrel{\dot{=}} r^2 - \mathrm{gr}^2\gamma$. Riferendo ρ e γ ai tre assi coordinati i, j, k come nel §. precedente, la (3) diventa

$$-x^2 - y^2 - z^2 + 2c'x + 2c''y + 2c'''z + c = 0, \tag{4}$$

che è l' ordinaria espressione della sfera. Se nella (3) sia $c=0$, la sfera passa per l' origine O, ed all' equazione $2s.\gamma\rho \mathrel{\dot{=}} \rho^2$ può anche darsi la forma

$$s\frac{\gamma}{\rho} = \tfrac{1}{2}, \qquad \text{ossia} \qquad s(\mathrm{MOC}) = \tfrac{1}{2}. \tag{5}$$

Ed infatti il primo membro esprime il rapporto della projezione di OC sopra OM, ed è evidente che quando tal rapporto è $\frac{1}{2}$, il luogo di M è la sfera di raggio CO; se $OA \mathrel{\dot{=}} 2.OC$ la (6) $s(MOA)=1$ è l' equazione della sfera col diametro OA. A questa (6) può anche darsi la forma $s\frac{OA}{OM} = 1 = s\frac{OM}{OM}$, ossia

$$s\frac{OA-OM}{OM} = s\frac{MA}{OM} = 0, \tag{7}$$

la quale propriamente esprime (§. 80) che le rette OM, MA sono perpendicolari.

85. *Cilindro rotondo e Superficie anulare.* La (1) del §. 83 e la (6) del §. 84 ci mostrano che quando è costante la parte reale dell' uno o dell' altro dei due biradiali AOM, MOA, il luogo del punto M è un piano od una sfera; vediamo che cosa si ottenga quando è costante la grandezza della loro parte immaginaria. Essendo

$AOM \mathrel{\dot{=}} \frac{\rho}{\alpha} \mathrel{\dot{=}} s\frac{\rho}{\alpha} + v\frac{\rho}{\alpha}$, è $v\frac{\rho}{\alpha}$ un radio perpendicolare al piano AOM ed uguale al rapporto numerico $\rho : \alpha$ moltiplicato pel seno dell' angolo AOM, sicchè la sua grandezza $\mathrm{gr}\,v\frac{\rho}{\alpha}$ eguaglia

la distanza del punto M dalla retta OA divisa per la OA, dunque:

(1) $$\mathrm{gr}\,v\,(\mathrm{AOM}) = c$$

esprime tutti i punti M del cilindro rotondo che ha l'asse OA ed il raggio $= c.\mathrm{OA}$. In quanto a $\mathrm{gr}\,v\,\frac{a}{\rho}$, questo è il valor numerico del rapporto $\frac{a}{\rho}$ moltiplicato pel $\mathrm{sen\,MOA}$, e se la $\mathrm{OB} \eqsim \beta$ sia eguale e perpendicolare alla OA e posta nel piano AOM sarà anche $\mathrm{gr}\,v\,\frac{a}{\rho} = s\,\frac{\beta}{\rho}$; ora se il punto M si mantiene nel piano AOB, la $s\,\frac{\beta}{\rho} = 1$ esprime (§. 84) il circolo che ha il diametro OB; girando la OB intorno alla OA, a cui si mantiene perpendicolare, si vede che girerà anche il circolo; perciò la

(2) $$\mathrm{gr}\,v\,(\mathrm{MOA}) = 1$$

appartiene a tutti i punti M della superficie anulare generata dalla rotazione di un circolo intorno alla sua tangente OA.

86. *Equazione d' ogni superficie rotonda.* La $\mathrm{gr}\,v\,(\mathrm{AOM})$ dà la distanza del punto M dalla retta OA, mentre $s\,(\mathrm{AOM})$ dà la lunghezza della projezione dello stesso radio vettore OM sopra OA; dunque ogni superficie rotonda coll' asse di rivoluzione OA sarà esprimibile da

(1) $$\mathrm{gr}\,v\,(\mathrm{AOM}) = f\,(s.\mathrm{AOM}),$$

dove f indica una qualunque funzione reale.

87. *Equazione dei coni del secondo ordine.* Pei §§. 83, 84 le equazioni $s\,(\mathrm{AOM}) = 1$, $s\,(\mathrm{MOB}) = 1$ appartengono al piano condotto per A perpendicolarmente alla OA ed alla sfera di diametro OB, perciò la loro unione rappresenta il circolo intersezione del piano colla sfera. Supponiamo che OM conservi la stessa direzione, ma cresca di lunghezza nel rapporto di 1 ad r, sarà

$$s\,(\mathrm{AOM}) = s\,(\mathrm{OM}:\mathrm{OA}) = r, \quad s\,(\mathrm{MOB}) = s\,(\mathrm{OB}:\mathrm{OM}) = \tfrac{1}{r};$$

moltiplicando tra loro queste due equazioni abbiamo la

(1) $$s\,(\mathrm{AOM}) \,.\, s\,(\mathrm{MOB}) = 1,$$

che appartiene a tutti i punti M del cono che ha il vertice in O e per direttrice uno qualunque dei circoli espressi dalla simultanea esistenza delle due $s\,(\mathrm{AOM}) = r$, $s\,(\mathrm{MOB}) = \frac{1}{r}$. Tutti i

coni del secondo ordine hanno una sezione circolare, perciò tutti sono espressi dalla equazione (1). — In questa equazione è presupposto che la OB sia abbastanza maggiore della OA in guisa che la sfera tagli il piano, altrimenti il cono sarebbe immaginario; potremo invece supporre che le OA, OB sieno eguali, purchè il secondo membro della (1) si cangi nella quantità c abbastanza inferiore alla unità, per tal maniera il cono è espresso da

(2) $$s(AOM) \cdot s(MOB) = c.$$

(Non è difficile riconoscere che onde il cono sia reale dev' essere c inferiore alla semisomma dell' unità e del coseno di AOB). Dimostreremo ora che al medesimo cono appartiene anche l'altra equazione

(3) $$s(BOM) \cdot s(MOA) = c.$$

Supposto per brevità $OA = OB = 1$, i §§. 42, 34 danno

$$AOM \mathrel{\dot{=}} \frac{\rho}{\alpha} \mathrel{\dot{=}} -\rho\alpha \mathrel{\dot{=}} -\mathrm{cj}(\alpha\rho) \mathrel{\dot{=}} \mathrm{gr}^2\rho \cdot \mathrm{cj}\frac{\alpha}{\rho}$$

$$MOB \mathrel{\dot{=}} \frac{\beta}{\rho} \mathrel{\dot{=}} \frac{-1}{\mathrm{gr}^2\rho}\beta\rho \mathrel{\dot{=}} \frac{-1}{\mathrm{gr}^2\rho}\mathrm{cj}(\rho\beta) \mathrel{\dot{=}} \frac{1}{\mathrm{gr}^2\rho}\mathrm{cj}\frac{\rho}{\beta},$$

ed essendo $s\,\mathrm{cj}\frac{\alpha}{\rho} = s\frac{\alpha}{\rho} = s(MOA)$, $s\,\mathrm{cj}\frac{\rho}{\beta} = s\frac{\rho}{\beta} = s(BOM)$ la (2) si cangerà nella (3). — Le sezioni circolari del cono sono perpendicolari all' una o all' altra delle rette OA, OB.

88. *Equazione dell' ellissoide.* Un circolo può rappresentarsi anche mediante la simultanea esistenza delle equazioni

(1) $$s(H'OM) = u \qquad (2) \quad \mathrm{gr}\,v(H'OM) = v$$

essendo u, v due quantità costanti. Infatti pei §§. 83, 85 le (1), (2) esprimono un piano perpendicolare alla OH' ed un cilindro rotondo coll' asse OH'. Se leghiamo tra loro le u, v col mezzo della $u^2 + v^2 = 1$ tutti i circoli espressi dalla simultanea esistenza delle (1), (2), ossia dalla

(3) $$s^2(H'OM) + \mathrm{gr}^2 v(H'OM) = 1$$

costituiscono una sfera col centro O ed il raggio OH'. [Ed infatti il primo membro della (3) equivale (§. 78) a $\mathrm{gr}^2(H'OM) = \mathrm{gr}^2\frac{OM}{OH'}$]. Ora mutiamo la OH' contenuta nel secondo termine della (3) in un' altra retta OK' della stessa direzione della OH', e sarà facile vedere la che sfera si trasforma in un ellissoide rotondo, il cui semiasse di

rivoluzione è OH', e gli altri semiassi $= OK'$; che se OK' abbia direzione differente da OH' i circoli si cangeranno in ellissi e la sfera in un ellissoide ad essa affine. — Considerando che il quadrato di un radio o vettore $r(K'OM)$ è uguale al quadrato della sua grandezza preso col segno —, si vede che all' equazione dell' ellissoide può anche darsi la forma

$$(4) \qquad s^2(H'OM) - r^2(K'OM) = 1.$$

Notando eziandio che s è una quantità reale e r un radio, vediamo che la loro somma $s + r$ ha per grandezza la radice della somma dei quadrati delle loro grandezze, e perciò la stessa equazione può anche scriversi

$$(5) \qquad gr(s.H'OM + r.K'OM) = 1.$$

89. All' equazione dell' ellissoide possiamo far subire un' altra trasformazione. Nelle direzioni stesse delle OH', OK' prendiamo le

$$OH = \frac{1}{OH'}, \qquad OK = \frac{1}{OK'};$$

avremo il biradiale $H'OM \mathrel{\triangleq} OM : OH' \mathrel{\triangleq} -OM.OH$,

ed il suo conjugato $-OH.OM$, quindi

$$2s(H'OM) \mathrel{\triangleq} -OM.OH - OH.OM;$$

così pure (§. 51)

$$2r(K'OM) \mathrel{\triangleq} -OM.OK + OK.OM,$$

quindi la (5) diventa

$$gr[(OK - OH)OM - OM(OH + OK)] = 2.$$

Sia D il punto di mezzo della retta HK, e sia $HD \mathrel{\triangleq} DK \mathrel{\triangleq} OE$, sicchè ODKE sarà un parallelogrammo; secondo i principj del metodo delle equipollenze si vede tosto che

$$OK - OH \mathrel{\triangleq} HK \mathrel{\triangleq} 2.OE, \qquad OH + OK \mathrel{\triangleq} 2.OD;$$

perciò l' equazione dell' ellissoide è

$$(6) \qquad gr(OE.OM - OM.OD) = 1.$$

Prendendo i conjugati dei due biradiali anche la loro somma si cangia nel proprio conjugato, perlocchè la grandezza rimane la stessa, e si può cangiare anche i segni ad ambedue i termini, giacchè s' intende che ogni grandezza sia positiva; quindi la (6) prende anche la forma

$$(7) \qquad gr(OD.OM - OM.OE) = 1.$$

Le (6), (7) esprimeranno un ellissoide col centro O qualunque sia il valore dei loro secondi membri; se vogliamo che l' ellissoide passi pel punto K determinato da

$$OK \backsimeq OD + OE,$$

il secondo membro di ciascuna delle (6), (7) dovrà essere (supposto che OE sia maggiore di OD)

$$(8) \qquad gr^2 OE - gr^2 OD.$$

Infatti quando M coincide con K, si ha

$$OE.OM - OM.OD \backsimeq OE(OD + OE) - (OD + OE)OD \backsimeq$$
$$\backsimeq (OE)^2 - (OD)^2 = -gr^2 OE + gr^2 OD.$$

90. *Generazione dell' ellissoide mediante una sfera che passa pel suo centro.* Se dal punto K si tiri una retta qualunque KNN', che tagli nei punti N, N' la sfera, che ha il centro D ed il raggio DO, è noto che

$$gr(KN.KN') = gr^2 DK - gr^2 DO \backsimeq gr^2 OE - gr^2 OD,$$

perciò l' equazione dell' ellissoide è

$$(9) \qquad gr(OE.OM - OM.OD) = gr(KN.KN').$$

A motivo del triangolo isoscele DON si ha [§. 37 (6)]

$$ON.OD \backsimeq ND.NO;$$

perciò, se la OM abbia la stessa direzione della ON, sarà anche

$$OM.OD \backsimeq DN.OM,$$

e sostituendo nella (9) avremo

$$gr(OE - DN)OM = gr(DK - DN)OM = gr(NK.OM) = gr(KN.KN'),$$

dunque $gr\,OM = gr\,KN'$, cioè:

Se sulla corda ON *di una sfera si prende la lunghezza* OM *eguale alla retta* KN', *che dal punto fisso* K *passa per* N *ed incontra nuovamente la sfera in* N', *il punto* M *appartiene ad un ellissoide che passa per* K *ed ha il centro* O. (Si genera il medesimo ellissoide adoperando la sfera di centro E e di raggio EO e lo stesso punto fisso K.)

91. La secante Knn' che passa pel centro D della sfera determina sulle direzioni tra loro perpendicolari On, On' il massimo semiasse dell' ellissoide $OA = Kn'$ ed il minimo $OC = Kn$; dunque il diametro nn' della sfera di raggio DO, eguaglia la differenza dei semiassi OA, OC dell' ellissoide (similmente si trova che il raggio

EO dell'altra sfera è eguale alla semidifferenza dei semiassi OA, OC). Il semiasse medio OB è perpendicolare al piano ODKE ed eguale alla parte esterna KN_0 della secante KN_0O; ogni altro semidiametro dell' ellissoide che sia tangente alla sfera di raggio DO sarà eguale alla predetta KN_0; perciò *la sezione centrale dell' ellissoide perpendicolare alla* OD *è circolare. Le altre sezioni circolari sono perpendicolari alla* $OE \mathrel{\frown\!\!=} DK$; infatti è facile vedere che se la ON' sia nel piano perpendicolare alla DK sarà $KN = KN_0$.

92. Supponiamo ora che il punto N appartenga al circolo d' intersezione della sfera che ha il raggio DO con quella che ha il diametro OK; la retta OMN riuscirà perpendicolare alla KNN', e perciò la distanza del punto M dalla retta OK riuscirà $= KN.OM : OK$; ma pel teorema del §. 90 si ha $OM = KN'$, e per la proprietà della sfera è $KN.KN' : OK = ON_0$; dunque le distanze di tutti i predetti punti M dell' ellissoide dalla OK sono eguali al semiasse $OB = ON_0$, cioè sono situati sul cilindro rotondo, che ha l' asse OK ed il raggio OB, e propriamente costituiscono *l' ellisse di contatto di tal cilindro rotondo coll' ellissoide.* — Nell' opera dell' Hamilton si troveranno altre conseguenze del teorema esposto al §. 90, il quale fu trovato col mezzo della teoria dei quaternioni.

93. *Equipollenze delle curve.* Quando il vettore variabile $OM \mathrel{\frown\!\!=} \rho$ dipende da radii fissi e da una quantità t suscettibile di tutti i valori reali, il luogo geometrico del punto M è una curva. Io mostrai quanti vantaggi presentasse per le curve piane questa maniera di rappresentarle mediante un' equipollenza, e come si potessero risolvere molto semplicemente i problemi fondamentali sulle curve mantenendo questa espressione generale, che comprende come casi particolari i metodi delle coordinate parallele e delle coordinate focali. Alcune delle teorie delle equipollenze relative alle curve piane valgono anche per le curve espresse col calcolo dei quaternioni. — Se consideriamo t come il tempo, possiamo supporre che il punto M si muova lungo la curva, allora la *derivata* del vettore OM, che noi segniamo con dOM, o più semplicemente con dM (giacchè il punto O è fisso), indicherà non solo in grandezza ma anche in direzione la *velocità* del punto M; e la derivata seconda d^2M esprimerà la *turbazione del movimento*, darà cioè la misura e la direzione della forza

acceleratrice necessaria perchè abbia luogo tal movimento. Decomponendo d^2M in due parti (veggasi il §. 80) l' una

(1) $$dM \cdot s \frac{d^2M}{dM}$$

parallela, e l' altra

(2) $$v \frac{d^2M}{dM} \cdot dM$$

perpendicolare a dM, la prima esprime l' *acceleramento*, e la seconda la misura e la direzione della *forza centrifuga*. Quando il tempo t è proporzionale alla lunghezza s dell' arco di curva, dM è costante di grandezza, e soltanto variabile nella direzione, l' acceleramento è nullo, e d^2M perpendicolare alla dM esprime la forza centrifuga.

94. *Raggio di curvatura.* Viene da ciò che se la variabile indipendente t, rispetto a cui si prendono le derivate d, sia tale che

(3) $$\text{gr}\, dM = \text{costante}$$

il centro R del circolo osculatore in M sarà dato da

(4) $$MR \eqsim (dM)^2 : d^2M \eqsim -\text{gr}^2\, dM : d^2M \eqsim \frac{\text{gr}^2\, dM}{\text{gr}^2\, d^2M} \cdot d^2M,$$

(giacchè il quadrato di un radio è eguale al quadrato della sua grandezza preso col segno —, e per dividere per un radio d^2M si moltiplica pel suo conjugato $-d^2M$ e si divide pel quadrato della sua grandezza). Sostituendo la (4) nella

(5) $$OR \eqsim OM + MR,$$

questa esprimerà il luogo geometrico dei centri di curvatura R.

95. Prendo per esempio l' *elica* col *raggio* 1 ed il passo $2\pi c$ è facile riconoscere che essa è espressa dall' equipollenza

$$OM \eqsim i\cos t + j \operatorname{sen} t + kct \eqsim k^{\frac{2t}{\pi}} i + kct$$

(l' angolo t essendo espresso in parti di raggio) derivando rispetto alla t, si ha

$$dM \eqsim -i \operatorname{sen} t + j\cos t + kc \eqsim k^{\frac{2t}{\pi}+1} i + kc$$

$$d^2M \eqsim -i\cos t - j \operatorname{sen} t \eqsim k^{\frac{2t}{\pi}+2} i \eqsim -k^{\frac{2t}{\pi}} i,$$

ed avendosi

(3) $\text{gr}^2\, dM = 1 + c^2 = \text{costante}$, e $\text{gr}^2\, d^2M = 1$, sarà

(4) $$MR \eqsim (1+c^2)\, d^2M \eqsim -i\,(1+c^2)\cos t - j\,(1+c^2) \operatorname{sen} t.$$

Quindi la curva dei centri

(5) $$OR \mathrel{\triangleq} -ic^2\cos t - jc^2 \operatorname{sen} t + kct$$

è un'elica di egual passo della proposta e col raggio $= c^2$.

96. Ritenuto che la caratteristica di derivazione D si riferisca alla t contenuta esplicitamente nella funzione OM, e la d si riferisca all'arco s della curva, noi soddisfaremo alla (3) del §. 94

$$\operatorname{gr} dM = \operatorname{gr}(DM.dt) = 1, \qquad \text{prendendo}$$

$$dt = \frac{1}{\operatorname{gr} DM}, \qquad \text{la quale ci darà} \qquad d^2t = D\left(\frac{1}{\operatorname{gr} DM}\right)dt,$$

e perciò

$$\frac{d^2t}{dt^2} = \operatorname{gr} DM.D\left(\frac{1}{\operatorname{gr} DM}\right) = -D\log.\operatorname{gr} DM;$$

inoltre $d^2M \mathrel{\triangleq} D^2M.dt^2 + DM.d^2t$. Sostituendo nella (4) del §. 94 ne viene

(4) $$MR \mathrel{\triangleq} -\operatorname{gr}^2 dM : d^2M \mathrel{\triangleq} -\operatorname{gr}^2 DM : (D^2M - DM.D\log.\operatorname{gr} DM).$$

97. Serva di esempio la parabola

$$OM \mathrel{\triangleq} i(t+3t^2) + j(1+t-t^2) + k(1-t)^2$$

si ha

$$DM \mathrel{\triangleq} i(1+6t) + j(1-2t) + k(-2+2t)$$

$$D^2M \mathrel{\triangleq} 6i - 2j + 2k$$

$$\operatorname{gr}^2 DM = (1+6t)^2 + (1-2t)^2 + 4(1-t)^2 = 6+44t^2$$

$$D\log.\operatorname{gr} DM = \tfrac{1}{2}D\log.\operatorname{gr}^2 DM = \frac{44t}{6+44t^2},$$

da cui (moltiplicando tanto il dividendo quanto il divisore per $6+44t^2$)

(4) $$MR \mathrel{\triangleq} -\frac{(6+44t^2)^3}{(6i-2j+2k)(6+44t^2) - 44t.DM},$$

e sviluppando il calcolo

$$MR \mathrel{\triangleq} \frac{-(3+22t^2)^3}{i(9-11t) + j(-3-11t) + k(3+22t)},$$

il quadrato della grandezza del denominatore è $99+726t^2$, sicchè

$$MR \mathrel{\triangleq} \tfrac{1}{33}(3+22t^2)[i(9-11t) + j(-3-11t) + k(3+22t)],$$

e l'evoluta della parabola è data da

(5) $$OR \mathrel{\triangleq} i\left(\tfrac{9}{11} + 9t^2 - \tfrac{22}{3}t^3\right) + j\left(\tfrac{3}{11} - 3t^2 - \tfrac{22}{3}t^3\right) + k\left(\tfrac{14}{11} + 3t^2 + \tfrac{44}{3}t^3\right).$$

98. *Differenziali rispetto ai quaternioni.* Data una funzione $f(x_q)$ di un quaternione x_q, l' Hamilton stabilisce per definizione che il suo *differenziale* sia il limite per $n=\infty$ di

$$n\left[f\left(x_q+\tfrac{1}{n}\,\mathrm{D}x_q\right)-fx_q\right]$$

essendo $\mathrm{D}x_q$ il differenziale del quaternione. Così per esempio si ha, ommesso per brevità l' indice q,

(1) $$\mathrm{D}(x^2)\doteq x\,\mathrm{D}x+\mathrm{D}x.x$$
$$\mathrm{D}^2(x^2)\doteq x\,\mathrm{D}^2x+\mathrm{D}^2x.x+2(\mathrm{D}x)^2$$

(2) $$\mathrm{D}(x^3)\doteq x^2.\mathrm{D}x+x.\mathrm{D}x.x+\mathrm{D}x.x^2$$

(3) $$\mathrm{D}(ax)\doteq a\,\mathrm{D}x$$

(4) $$\mathrm{D}(xb)\doteq \mathrm{D}x.b$$

(5) $$\mathrm{D}(axbxc)\doteq a\,\mathrm{D}x.bxc+axb\,\mathrm{D}x.c$$

(6) $$\mathrm{D}\left(\tfrac{1}{x}\right)\doteq -\tfrac{1}{x}.\mathrm{D}x.\tfrac{1}{x},$$

che si dimostra osservando che

$$\tfrac{1}{x+\mathrm{D}x}-\tfrac{1}{x}\doteq \tfrac{1}{x+\mathrm{D}x}\,x\tfrac{1}{x}-\tfrac{1}{x+\mathrm{D}x}\,(x+\mathrm{D}x)\tfrac{1}{x}\doteq \tfrac{1}{x+\mathrm{D}x}\,(-\mathrm{D}x)\tfrac{1}{x}$$

(7) $$\mathrm{D}^2\left(\tfrac{1}{x}\right)\doteq \tfrac{2}{x}\mathrm{D}x.\tfrac{1}{x}\mathrm{D}x.\tfrac{1}{x}-\tfrac{1}{x}\,\mathrm{D}^2x.\tfrac{1}{x}.$$

99. *Normali delle superficie.* Data l' equazione

(1) $$f(\mathrm{OM})=\text{costante}$$

di una superficie, il differenziale $\mathrm{D}\mathrm{M}$ del vettore OM, purchè soddisfaccia all' equazione differenziale

(2) $$\mathrm{D}f(\mathrm{OM})=0$$

esprimerà un radio tangente alla superficie; perciò se alla (2) si possa dar la forma

(3) $$s(v\,\mathrm{D}\mathrm{M})=0$$

il radio v sarà (§. 80) perpendicolare al piano tangenziale, cioè sarà normale alla superficie. — Può notarsi che il valore di $s(v.\mathrm{OM})=n$ è uguale al prodotto dei vettori v, OM pel coseno della loro inclinazione, sicchè $\frac{n}{v}$ determinerà in grandezza e direzione la perpendicolare abbassata dall' origine O sul tangenziale in

M. — Nella (3) il radio normale v sarà dato in funzione del vettore OM e di radii costanti, cioè

$$v \mathrel{\dot{=}} F(OM); \tag{4}$$

questa equipollenza è considerata dall' Hamilton come in qualche maniera analoga alle equazioni differenziali-parziali delle superficie, e tale da poter dar origine a ricerche simili a quelle del Monge.

100. Se per esempio sia

$$v \mathrel{\dot{=}} OM - OA \mathrel{\dot{=}} AM,$$

ciò esprime che la normale della superficie passa pel punto A, sostituendo questa espressione di v nella (3) si ottiene

$$s(AM._D M) = 0$$

alla quale si può soddisfare ponendo $(AM)^2 \mathrel{\dot{=}} \text{cost.}$, [giacchè differenziando (§. 98), si ha

$$AM._D M + {}_D M.AM \mathrel{\dot{=}} 0, \qquad \text{ossia (§. 34)}$$

$$2s(AM._D M) = 0.]$$

Così vediamo che l' indicata proprietà spetta alla sfera (§. 84).

101. L' equazione

$$s(OA.v.OM) = 0, \tag{1}$$

indica che la normale v è sempre nello stesso piano colla retta fissa OA e col vettore OM. A questa equazione si soddisfa coll' equazione delle superficie rotonde (§. 86)

$$\text{gr}\, v\,(AOM) = f(s.AOM), \tag{2}$$

contenente la funzione arbitraria f della quantità reale $s(AOM)$. Infatti a quest' equazione possiamo dare la forma

$$v^2(AOM) + f^2 = 0$$

e differenziando, nel che bisogna rammentare che v è un radio, e che perciò (§. 98)

$$d(v^2) \mathrel{\dot{=}} v\,dv + dv.v \mathrel{\dot{=}} 2s(v\,dv)$$

$$s[v(AOM).dv(AOM)] + ff'.ds(AOM) = 0;$$

ora $\quad {}_D(AOM) \mathrel{\dot{=}} {}_D\frac{OM}{OA} \mathrel{\dot{=}} \frac{{}_D M}{OA} \quad$ dà

$$dv(AOM) \mathrel{\dot{=}} v\left(\frac{{}_D M}{OA}\right), \qquad ds(AOM) = s\left(\frac{{}_D M}{OA}\right),$$

perciò

$$s\left(v\,(\mathrm{AOM})\,.\,v\,\frac{\mathrm{D\,M}}{\mathrm{OA}}\right)+ff'\,.\,s\left(\frac{\mathrm{D\,M}}{\mathrm{OA}}\right)=0$$

e l' equazione $s\,(v\,\mathrm{D\,M})=0$ del §. 99 sarà soddisfatta ponendo

$$\mathrm{D\,M}\,.\,v\mathrel{\dot{=}}\frac{\mathrm{D\,M}}{\mathrm{OA}}\,[v\,(\mathrm{AOM})+ff'],$$

(giacchè la parte reale del prodotto di un quaternione $\frac{\mathrm{D\,M}}{\mathrm{OM}}$ per un trinione $v\,(\mathrm{AOM})$ e per una quantità reale ff' è la somma del prodotto del trinione $v\,\frac{\mathrm{D\,M}}{\mathrm{OA}}$ pel trinione $v\,(\mathrm{AOM})$ e della parte reale $s\,\frac{\mathrm{D\,M}}{\mathrm{OA}}$ per la parte reale ff'). L' espressione ora trovata

$$v\mathrel{\dot{=}}\frac{1}{\mathrm{OA}}\,[v\,(\mathrm{AOM})+ff']$$

dà

$$\mathrm{OA}\,.\,v\,.\,\mathrm{OM}\mathrel{\dot{=}}v\,(\mathrm{AOM})\,.\,\mathrm{OM}+ff'\,.\,\mathrm{OM},$$

la cui parte reale è nulla, poichè essendo $v\,(\mathrm{AOM})$ un radio perpendicolare al piano AOM si ha $s\,[v\,(\mathrm{AOM})\,.\,\mathrm{OM}]=0$, per tal maniera si vede che la (1) è soddisfatta dalla (2). — La condizione che v sia nel piano OAM è anche espressa da

$$v\mathrel{\dot{=}}\mathrm{OA}\,.\,x+\mathrm{OM}\,.\,y,$$

dopo di che la $s\,(v\,\mathrm{D\,M})=0$ del §. 99 diviene

$$x\,s\,(\mathrm{OA}\,.\,\mathrm{D\,M})+y\,s\,(\mathrm{OM}\,.\,\mathrm{D\,M})=0,$$

da cui può dedursi

$$(\mathrm{OM})^2=\mathrm{F}\,[s\,(\mathrm{OA}\,.\,\mathrm{OM})],$$

che è un' altra forma dell' equazione delle superficie rotonde.

102. *Linee brevissime sulle superficie.* Le linee brevissime o *geodetiche* hanno la proprietà che i loro piani osculatori sono perpendicolari alla superficie; ora pel §. 93 il piano osculatore è determinato dai due vettori $\mathrm{D\,M}$, $\mathrm{D}^2\mathrm{M}$, essendo OM funzione della variabile t rispetto alla quale sono prese le derivate indicate dalla caratteristica D, e se una superficie sia determinata mediante la normale v espressa in funzione del vettore OM, la condizione che questa normale sia situata in quel piano osculatore sarà espressa dall' equazione

(1) $$s\,(v\,.\,\mathrm{D\,M}\,.\,\mathrm{D}^2\mathrm{M})=0.$$

Che se la variabile t è l'arco della curva brevissima, la seconda derivata $\partial^2 M$ è (§. 94) la direzione del raggio di curvatura, e perciò deve coincidere colla normale v alla superficie, quindi la condizione della linea geodetica è in tal caso espressa da $v\,(v.\partial^2 M) = 0$. Anche se t non sia proporzionale all' arco della curva la derivata di $\frac{\partial M}{\mathrm{gr}\,\partial M}$, cioè di un *raggio* parallelo al radio ∂M, è parallela al raggio di curvatura, sicchè una proprietà della linea brevissima è espressa da

$$(2) \qquad v\left(v\,\partial\,\frac{\partial M}{\mathrm{gr}\,\partial M}\right) = 0, \qquad \text{ossia} \qquad v\,(v\,\partial u\,\partial M) = 0.$$

103. Per esempio nella sfera, nella quale è (§. 100) $v \mathrel{\frown\!\!\!=} OM$ la precedente (2) diventerà

$$(2) \qquad v\left(OM\,\partial\,\frac{\partial M}{\mathrm{gr}\,\partial M}\right) = 0, \qquad \text{ossia} \qquad v\,(OM.\partial u\,\partial M) = 0.$$

L' equazione fondamentale (3) del §. 99 è

$$s\,(OM.\partial M) = 0, \qquad \text{ossia anche} \quad s\left(OM\,\frac{\partial M}{\mathrm{gr}\,\partial M}\right) = 0,$$

perciò $$OM\,\frac{\partial M}{\mathrm{gr}\,\partial M} \mathrel{\frown\!\!\!=} v\left(OM\,\frac{\partial M}{\mathrm{gr}\,\partial M}\right),$$

la derivata del secondo membro è nulla, giacchè una parte sparisce a motivo della (2), e l' altra parte è

$$v\left(\partial M\,\frac{\partial M}{\mathrm{gr}\,\partial M}\right) \mathrel{\frown\!\!\!=} v\,(-\mathrm{gr}\,\partial M) \mathrel{\frown\!\!\!=} 0; \qquad \text{così si ha}$$

$$\partial\left(OM\,\frac{\partial M}{\mathrm{gr}\,\partial M}\right) \mathrel{\frown\!\!\!=} 0.$$

Questa equipollenza integrata dà

$$OM.\frac{\partial M}{\mathrm{gr}\,\partial M} \mathrel{\frown\!\!\!=} OC$$

e mostra che ambedue i radii OM, ∂M sono perpendicolari alla retta OC *costante arbitraria*; dunque *la linea brevissima della sfera è in un piano passante pel centro* O.

104. Nelle superficie cilindriche la normale v è perpendicolare alle generatrici, che sono parallele ad una data OA, sicchè in luogo della (2) del §. 102 avremo

$$s\left(OA\,\partial\,\frac{\partial M}{\mathrm{gr}\,\partial M}\right) = 0,$$

ed integrando

$$s\left(\mathrm{OA}\,\frac{\mathrm{D\,M}}{\mathrm{gr\,D\,M}}\right)=\text{cost.},\qquad \text{ossia}\quad s\,(\mathrm{OA}.v_{\mathrm{D}}\mathrm{M})=\text{cost.},$$

il primo membro è la grandezza di OA moltiplicata pel coseno dell' angolo, che la tangente dell' elica forma colle generatrici, dunque *quest' angolo è costante.*

105. Ogni superficie conica col vertice O dà $s\,(v.\mathrm{OM})=0$, sostituendo a v il radio ad esso parallelo dato dalla (2) del §. 102 si ha

$$s\left(\mathrm{OM}_{\mathrm{D}}\frac{\mathrm{D\,M}}{\mathrm{gr\,D\,M}}\right)=0;\qquad \text{ossia}\quad s\,(\mathrm{OM}_{\mathrm{D}}v_{\mathrm{D}}\mathrm{M})=0,$$

perciò

$$_{\mathrm{D}}s\left(\mathrm{OM}.\frac{\mathrm{D\,M}}{\mathrm{gr\,D\,M}}\right)=s\left(\mathrm{OM}_{\mathrm{D}}\frac{\mathrm{D\,M}}{\mathrm{gr\,D\,M}}\right)+s\left({}_{\mathrm{D}}\mathrm{M}\,\frac{\mathrm{D\,M}}{\mathrm{gr\,D\,M}}\right)=-\,\mathrm{gr}_{\mathrm{D}}\mathrm{M},$$

ed integrando

$$s\left(\mathrm{OM}\,\frac{\mathrm{D\,M}}{\mathrm{gr\,D\,M}}\right)=c+s\,\mathrm{gr}_{\mathrm{D}}\mathrm{M},$$

la quale esprime che *la projezione del vettore* OM *sulla tangente della linea brevissima differisce di una quantità costante della lunghezza* $s\,\mathrm{gr}_{\mathrm{D}}\mathrm{M}$ *dell' arco di curva.*

106. Nelle superficie rotonde di asse OA si ha

$$s\,(\mathrm{OA}.\mathrm{OM}.v)=0,$$

quindi per la linea brevissima è

$$s\left(\mathrm{OA}.\mathrm{OM}._{\mathrm{D}}\frac{\mathrm{D\,M}}{\mathrm{gr\,D\,M}}\right)={}_{\mathrm{D}}s\left(\mathrm{OA}.\mathrm{OM}.\frac{\mathrm{D\,M}}{\mathrm{gr\,D\,M}}\right)=0,$$

integrando si ha

$$s\left(\mathrm{OA}.\mathrm{OM}.\frac{\mathrm{D\,M}}{\mathrm{gr\,D\,M}}\right)=c,\qquad \text{ossia}\quad s\,(\mathrm{OA}.\mathrm{OM}.v_{\mathrm{D}}\mathrm{M})=c.$$

Il primo membro è la funzione *aplanetica* del §. 81, e mostra perciò la costanza di volume del tetraedro, che ha la base OAM, ed il quarto vertice sulla tangente dalla linea brevissima in M ad una distanza da M eguale all' unità di lunghezza; dunque la *distanza di ogni punto* M *della linea brevissima dall' asse di rivoluzione* OA *è inversamente proporzionale al seno dell' inclinazione della tangente in* M *sul piano del meridiano* OAM.

107. Parecchie altre teorie sono trattate dall' Hamilton, e meritano lo studio dei Geometri Italiani: uno degli argomenti che racco-

mando alla loro attenzione si è la *risoluzione delle equipollenze* relative allo spazio. Nel mio metodo delle equipollenze quando vi è un punto ignoto l' equipollenza relativa ad un solo piano si risolve alla maniera stessa delle equazioni algebriche, il che conduce a semplici soluzioni dei problemi geometrici; la cosa è ben differente nel calcolo dei quaternioni: anche dalla semplicissima equipollenza

$$ax + xa \eqq 2c$$

è difficile dedurre l'espressione del quaternione incognito x conoscendo i due quaternioni a, c. Si potrà decomporre l' equipollenza in

$$(sa + va)(sx + vx) + (sx + vx)(sa + va) \eqq 2c,$$

ed osservando che

$va.vx + vx.va \eqq va.vx + \text{cj}(va.vx) \eqq 2s(va.vx)$ sarà anche

$$sa.sx + sa.vx + sx.va + s(va.vx) \eqq c,$$

che si decompone nelle due

$$sa.vx + sx.va \eqq vc, \qquad sa.sx + s(va.vx) = sc$$

la prima dà $vx \eqq \frac{vc}{sa} - \frac{va}{sa} sx$ e sostituendo nella seconda si ha

$$s^2 a.sx + s(va.vc) + sx\,\text{gr}^2 va = sa.sc,$$

ossia $$\text{gr}^2 a.sx = sa.sc - s(va.vc).$$

Può servire di esempio $a \eqq 1 + 2i - k$, $c \eqq 3 + i - 2j - k$,

che dà $x \eqq 1 - i - 2j$.

108. Data l' equipollenza più generale

$$ax + xb \eqq c$$

successivamente vi si preponga il fattore $\text{cj}a$, e vi si posponga il fattore b, con che si avranno le due equipollenze

$$\text{cj}a.ax + \text{cj}a.xb \eqq \text{cj}a.c, \qquad axb + xbb \eqq cb,$$

che sommate danno, a motivo di $\text{cj}a.a \eqq \text{gr}^2 a$, $\text{cj}a + a \eqq 2sa$,

$$\text{gr}^2 a.x + 2sa.xb + xb^2 \eqq \text{cj}a.c + cb,$$

la qual equipollenza può scriversi così

$$x(\text{gr}^2 a + 2sa.b + b^2) \eqq \text{cj}a.c + cb,$$

e colla divisione (§. 30) dà l' espressione dell' incognita x.

109. L' equazione del secondo grado

$$x^2 \eqq 10xi + 40j$$

ammette due radici, che sono

$$x \eqq 8i - 4k, \qquad x \eqq 2i - 4k$$

ed inoltre quattro radici a coefficienti immaginarii

$$x \eqq 5i - 5k \pm \sqrt{(-5)}(1+j), \qquad x \eqq 5i + 5k \pm 3\sqrt{(-5)}(1-j).$$

110. Le equipollenze nel mio metodo sono molto più facili da risolversi di quelle del calcolo dei quaternioni; perchè le prime seguono precisamente lo stesso algoritmo dell' Algebra; così, per esempio, tanto nel mio metodo quanto in quello dell' Hamilton la

(1) $$OB : OA \eqq OD : OC$$

rappresenta l' eguaglianza dei due angoli AOB, COD posti nel medesimo piano; io posso dedurne l' equipollenza

(2) $$OA . OD \eqq OB . OC,$$

la quale, se OA sia una retta incognita ed abbiasi la condizione

(3) $$OD \eqq OA + EF,$$

dove EF sia un' altra retta conosciuta, ci darà una facile costruzione geometrica per determinare il punto incognito A. Simil cosa non può farsi nel metodo dei quaternioni; questo è un importante argomento da studiare.

INDICE

Angolo dei biradiali §. 16; dei quaternioni 43. - Anulare (Superficie) sua equazione 85. - Asse dei biradiali 32; dei quaternioni 43. - Azzimutto 38.

Biradiale §. 15. - Brevissime (Linee) sulle superficie 102; sulla sfera 103; sul cilindro 104; sul cono 105; sulle superficie rotonde 106.

Calcolo (Regole pel) §. 24, 25, 28, 33, 34, 107. - Caratteristiche usate nel calcolo dei quaternioni 22, 19, 78. - Ciclici (Piani) del cono 27, 87. - Cilindro rotondo, sua equazione 85; circoscritto all' ellissoide 92. - Circolo (Quadrilatero inscritto nel) 73. - Composta-equipollente 1, 7, 110. - Cono del secondo ordine, suoi piani ciclici 27, 87; sua equazione 87. - Conjugati (Biradiali) 19; (Radii) 33; (Quaternioni) 44. - Curve loro equipollenze 93; raggio di curvatura 94.

Differenziali rispetto ai quaternioni §. 98. - Differenziali-parziali (Equazioni) delle superficie 99. - Divisione veggasi *Rapporto.*

Elevazione §. 38. - Elica sua equipollenza, luogo dei suoi centri 93. - Ellissoide sua equazione 88; sua generazione mediante una sfera 90; sue sezioni circolari 91; suoi cilindri rotondi circoscritti 92. - Equipollenti (Rette) 3, 8; (Biradiali) 18. - Equipollenze 1; loro risoluzione 107; di secondo grado con sei radici 109; essenziale differenza tra le mie equipollenze e quelle dei quaternioni 110.

Forze loro composizione §. 1. - Funzione aparallelica 80; apianica o aplanetica 81, 106; aconica 82; aditomica o adeuterica 82.

Geodetiche veggasi *Brevissime.* - Giratore §. 41. - Grandezza dei biradiali 22; dei trinioni 38; dei quaternioni 43.

Iperboloide sue generatrici rettilinee §. 71.

Moti (Composizione dei) rotatorj §. 23, 61; e dei progressivi 13, 67. - Moto di un punto, velocità, turbazione, acceleramento, forza centrifuga 93.

Normali delle superficie §. 99.

Parabola sua evoluta §. 97. - Piano sua equazione 83. - Potenze e radici dei biradiali 31. - Prodotto dei biradiali 17, 20, 52; Teorema relativo 25; dei quaternioni 48; di parecchie rette o lati di poligoni 72.

Quaternioni §. 43. - Quozienti veggasi *Rapporto.*

Radici dei biradiali §. 21; delle equipollenze 109. - Radii 15. - Raggi 15. - Rapporto di due rette 16; dei biradiali 30; dei radii 30; di due trinioni 32, 44; di due quaternioni 48. - Regole di calcolo 28, 39, 40, 46, 48. - Rettangolo (Biradiale) 16, 43. - Rotonda (Superficie) sua equazione 86; sue normali 101.

Saint-Venant §. 1. - Sfera (Quadrilatero inscritto nella) 74; (Pentagono inscritto nella) 76; sua equazione 84, 88; sue normali 100. - Somma delle rette 1, 7, 10; dei biradiali 36. - Superficie loro equazioni 83; loro normali 99.

Tetraedro sue quattro altezze §. 38. - Triangoli sferici 53; (Teoremi sui) 56. - Trinioni 38. - Turbazione del moto 93.

Unitarii (Biradiali) §. 16; (Trinioni) 38; (Quaternioni) 43.

Velocità del moto §. 93.