SULLA CASSIFICAZIONE
DELLE CURVE DEL TERZO ORDINE
MEMORIA

DEL SOCIO ATTUALE

GIUSTO BELLAVITIS PROFESSORE IN PADOVA

Ricevuta il 1.° Agosto 1851.

Fra i più dilettevoli argomenti della Matematica pura può contarsi lo studio delle curve. È bello il vedere come con semplicissime leggi si generino variatissime curve, come queste talvolta si pieghino sempre in un senso, talaltra s' inflettano in contrarie parti; ora tornino in sè stesse, ora si distendano per rami infiniti: una sola curva può annodarsi passando più volte per lo stesso punto, e può anche spezzarsi in più parti, che quantunque staccate pur formano un solo tutto. Cangiando i valori di alcuni dei parametri contenuti nell' equazione di una curva, questa va successivamente mutando di forma; e, per esempio, due rami di curva si avvicinano fino a tagliarsi e formare un nodo, poscia il nodo si stacca dal resto della curva e forma un' *ovale separata* (*ovale conjugata*), oppure si converte in un *punto di regresso*, od in un *punto isolato* (*punto conjugato*). Per tal maniera una curva espressa da una stessa equazione assume differenti forme, e dalle generali proprietà delle curve dipendenti dalla sua equazione, nonchè dalle sue particolari forme possono trarsi caratteri per separare le curve in generi ed in ispecie; per istabilirne infine una classificazione.

1. Il Newton fu il primo a classificare le curve del terzo ordine nella sua *Enumeratio linearum tertii ordinis*; poco aggiunsero a tale classificazione Cramer ed Eulero solo notandone qualche leggera ommissione, e limitandosi a considerarne le prime divisioni (che il Cramer disse genesi, l' Eulero specie, e che io, per ischivare qualche equivoco, dirò *categorie*). Onde stabilire sopra uniformi principj la classificazione delle curve, e togliere, per quanto sia possibile, l' arbitrarietà che sempre accompagna i metodi di classificazione, ci bisognerà esaminare i caratteri delle curve, e la loro maggiore o minore importanza, specialmente in riguardo alla derivazione da una figura ad un' altra.

LEGGI DI DERIVAZIONE DELLE FIGURE.

2. Diremo che una figura è *derivata* da un' altra quando tra le parti dell' una e le corrispondenti dell' altra esiste una costante relazione, per la quale da una delle parti si possa dedurre la sua corrispondente nell' altra figura.

3. Tra le più semplici leggi di derivazione quella che più utilmente ci può servire a passare da linee di ordine inferiore ad altre di ordine più elevato si è la derivazione d'*inversione*. Ecco qual ne è la legge. Abbiasi un punto fisso I, che diremo *centro d' inversione*, se sulle rette IA IB ec., che misurano le distanze di ciascun punto di una figura dal centro d' inversione, si prendano partendo da questo centro delle lunghezze IA' IB' ec. inversamente proporzionali alle distanze predette, si verrà a costruire una nuova figura A' B'...., che dirassi l' *inversa* della primitiva AB.....

4. Da ogni retta deriva in tal maniera un circolo passante pel centro d' inversione; da un circolo, che non passi pel centro d' inversione, deriva un altro circolo; da un piano deriva una sfera passante pel centro d' inversione, ec. — Per tal guisa le proprietà dei circoli e delle sfere possono derivarsi da quelle delle rette e dei piani; e ciò per via affatto semplice e naturale,

solo che si premetta la facile dimostrazione delle leggi fondamentali dell' inversione. Si possono eziandio trovar delle soluzioni di alcuni problemi relativi ai circoli derivandole dalle più semplici soluzioni relative alle rette. Usciremmo troppo dal nostro cammino se volessimo seguire questo argomento, che ho abbozzato in una Memorietta inserita negli Annali delle scienze del Regno Lombardo-Veneto: Tomo VI; Padova 1836.

5. La derivazione tra le proprietà di una figura e quelle della figura inversa consiste nei seguenti canoni:

1.° Data una relazione tra le distanze dei punti A B C ec. di una figura e del punto I preso per centro d' inversione, si otterrà la relazione spettante ai punti inversi A' B' C' ec. ponendo $IA = i^2 : IA'$, $IB = i^2 : IB'$, ec., $AB = i^2 . A'B' : IA' . IB'$, ec., essendo i^2 costante. Le prime equazioni esprimono la legge di derivazione, l' ultima ne è una facile conseguenza, ove si ponga attenzione alla similitudine dei triangoli IAB IB'A'.

2.° Gli angoli rettilinei col vertice nel centro d' inversione I sono eguali, ed anzi identici nelle due figure; cioè $AIB = A'IB'$. Dal che poi ne viene che le aree dei triangoli IAB IA'B' hanno il rapporto $(IA)^2 : (IB')^2$.

3.° Se due linee AB AC si tagliano nel punto A, sotto lo stesso angolo si taglieranno pure le loro inverse A'B' A'C'. Perchè prendendo i punti B C infinitamente vicini ad A, i due triangoli infinitesimi ABC A'B'C' avendo, pel canone 1.°, i lati proporzionali saranno simili.

4.° Se le due linee AB AC hanno nel punto A un contatto dell' ordine $n.^{esimo}$, lo stesso ha luogo fra le inverse A'B' A'C'.

6. Nei due precedenti canoni si suppone che il punto A sia differente dal centro d' inversione; poichè se A coincidesse con I, A' sarebbe a distanza infinita. In tal caso le due curve MBI NCI danno per inversi due rami infiniti M'B'... N'C'..., i cui assintoti formano un angolo eguale a quello, sotto cui si tagliano le curve MBI NCI. Sicchè se queste si toccano i due assintoti sono paralleli, e se le curve MBI NCI hanno in I un contatto del secondo ordine, le M'B' N'C' hanno

l' assintoto comune; esso è la retta inversa (§. 4.) del circolo osculatore comune alle MBI NCI.

7. Le dimostrazioni di quanto vado asserendo io le aveva da prima esposte col mezzo del mio metodo delle equipollenze, poichè mi sembra che esso presenti anche in ciò qualche vantaggio; ma siccome pei principj fondamentali di tal metodo doveva rimandare ad una mia Memoria inserita nel Tomo VII degli Annali delle scienze (Padova 1837), così correva pericolo che le mie dimostrazioni fossero difficilmente intese. Credetti quindi miglior consiglio di ometterle, giacchè ogni Matematico potrà facilmente altre sostituirvene; ed io andrò più spedito al mio oggetto della classificazione delle curve del terzo ordine. Mi riservo di esporre in altra Memoria il metodo delle equipollenze con tutta la maggior chiarezza ch' io possa, e tra le sue moltiplici applicazioni comprenderò anche le dimostrazioni, che ora credo opportuno di tralasciare.

8. Limitando d' ora in poi il nostro discorso alle figure piane, ed alle inverse ottenute prendendo il centro d' inversione nel piano stesso della figura, ci è facile prevedere qual sia l' ordine di una curva inversa di una conica (sezione conica, ossia linea del secondo ordine); poichè ogni circolo passante pel centro d' inversione ha per inversa una linea retta, e siccome il circolo non può tagliare la conica se non se in quattro punti, così la retta non potrà tagliare l' inversa della conica se non in quattro punti, ed essa sarà perciò una curva del quarto ordine. Che se il centro d' inversione sia sulla periferia della conica, un circolo che passi per esso non potrà tagliarla se non se in altri tre punti, e quindi la inversa della conica sarà del solo terzo ordine. — Trattando più particolarmente di queste curve del terzo ordine vedremo che esse si separano in tre generi essenzialmente differenti secondo che la curva è inversa di una parabola di una iperbola o di una ellisse. — Per esporre i principj della classificazione delle curve ci occorre ricordare da prima altre leggi di derivazione dotate esse pure di grande utilità.

9. Dopo della eguaglianza, la più stretta relazione che possa esistere tra due figure si è la *similitudine*: su questo poco o nulla vi è da dire, poichè dalle proprietà di una figura a quelle di una simile vi è soltanto la derivazione d' identità.

10. Dopo della similitudine viene l' *affinità* considerata pel primo dal Clairaut (Mém. Acad. de Paris, 1731; pag. 486.). Questa derivazione è tale che se in una figura si formi un qualunque sistema di rette parallele, anche in ogni figura ad essa affine corrisponderà un sistema di rette pur parallele. Dal che poi ne viene che le rette parallele conservano lo stesso rapporto in ogni figura affine.

11. Finalmente è più larga legge di derivazione quella di *omografia* o di *collineazione*; per essa qualunque linea retta, possa costruirsi in una figura, ha sempre per omologa nella figura *collineare* una linea pur retta; dal che ne viene eziandio che se tre o più rette di una figura concorrono in un punto, lo stesso avviene delle loro *omologhe* ossia *collineari*. Queste proprietà riconoscibili mediante la sola riga si dicono proprietà *grafiche*. Le figure collineari hanno dunque comuni tutte le proprietà grafiche; e tra queste proprietà è pur da contarsi l' ordine del contatto di due linee.

12. Poche sono le proprietà *metriche*, cioè relative a misura, che si conservano da una figura alla sua collineare; esse, insieme colle proprietà *grafiche*, furono dette *projettive*. Un rapporto di due prodotti di linee rette è *projettivo*, cioè si conserva lo stesso in tutte le figure collineari, quando nell'uno e nell' altro termine del rapporto si trovano gli stessi punti e le stesse direzioni di rette. Così se sui lati BC CA AB di un triangolo sieno presi i punti L M N è un rapporto projettivo il

$$AN.BL.CM : AM.CL.BN.$$

Vi sono eziandio dei rapporti projettivi relativi ad aree od a seni di angoli.

13. Se in una figura si abbiano molti sistemi di rette parallele, in ogni sua figura collineare vi corrisponderanno altrettanti

sistemi di rette concorrenti in punti posti tutti sopra una medesima retta; sicchè i punti di questa retta corrispondono a quelli della figura primitiva, che stanno a distanza infinita. Viene da ciò quella locuzione apparentemente strana, ma utilissima, che tutti i punti di un piano posti a distanza infinita appartengono ad una stessa retta.

14. Le figure *simili*, *affini* o soltanto *collineari* possono supporsi generate dalla projezione concorrente ossia prospettiva, o, in altre parole, dalle ombre. E propriamente una figura piana è *simile* alla sua prospettiva fatta in piano parallelo: la figura obbiettiva e la prospettiva sono *affini*, se il punto di vista è a distanza infinita: ed in ogni altro caso la obbiettiva e la prospettiva sono collineari. — Si noti che due figure affini non sempre potranno essere prospettive parallele l' una dell' altra.

15. Nella collineazione, di cui l' affinità e la similitudine sono casi particolari, da ogni punto deriva un punto, da ogni retta deriva una retta. È perciò ben differente la derivazione secondo la quale ad ogni punto corrisponde una retta, e ad ogni retta un punto. Essa dà origine alla dualità: fecondissimo principio, pel quale da un teorema projettivo altro se ne deduce di esposizione molto diversa, perchè ai punti deggiono sostituirsi le rette e reciprocamente.

16. Se fuori del piano di una figura si prenda un punto, che noi diremo *centro di derivazione*; e s' immagini che da esso sieno tirati dei raggi a tutti i punti della figura, sicchè ogni retta della figura dia origine ad un piano; poscia si supponga che questo *fascio* di raggi e di piani venga tagliato da un piano qualunque; la sezione sarà, come dicemmo (§. 14.), una figura collineare della primitiva. Che se pel centro di derivazione si conducano dei piani perpendicolari a quei raggi, e dei raggi perpendicolari a quei piani, si otterrà un nuovo fascio di piani e di raggi, il quale, con denominazione usata anche nella Trigonometria sferica, diremo *polare* del primo. E se questo secondo fascio sia tagliato da un piano, otterremo

una figura *derivata-polare* della primitiva; le rette e i punti di essa corrisponderanno ai punti ed alle rette della primitiva.

17. Potremo supporre in particolare che il piano tagliante il secondo fascio sia il piano stesso della figura primitiva; allora, le due figure, primitiva e derivata-polare, saranno in una più stretta relazione, che noi diremo *reciprocità*. Se sul piano comune alle due figure reciproche si abbassa dal centro di derivazione una perpendicolare, il suo piede lo diremo il *centro di reciprocità*; e facilmente riconosceremo che la retta che unisce questo centro con un punto è perpendicolare alla retta *reciproca* di esso punto, e che le distanze dal centro di reciprocità del punto e della retta hanno un prodotto costante. — Sicchè la reciprocità ha una qualche rassomiglianza coll'inversione; però colla essenzialissima differenza che una retta ha per reciproco un punto e per inverso un circolo (§. 4.).

18. Le proprietà grafiche sono comuni a tutte le figure derivate-polari; quando però si cangino in questo senso, che se in una figura vi sono alquanti punti in linea retta, nella derivata-polare si avranno alquante rette concorrenti in uno stesso punto; e viceversa. — Per derivata-polare o reciproca di una curva si considera un'altra curva, che è nello stesso tempo l'inviluppo di tutte le rette reciproche dei punti della curva primitiva, ed il luogo geometrico dei punti reciproci delle tangenti di questa curva. Il punto d'intersezione di due curve ha per reciproca la tangente comune a due curve reciproche delle prime. Che se le curve hanno nel punto d'intersezione anche la tangente comune, lo stesso sarà delle loro reciproche. — Si riconosce pure, mediante il calcolo, che qualunque sia l'ordine del contatto di due curve esso si mantiene lo stesso nelle figure reciproche. Dee considerarsi separatamente il caso che la tangente comune alle due curve comprenda il centro di reciprocità, perchè allora il punto reciproco passa a distanza infinita. — Quanto ora dicemmo di due figure reciproche si estende a due figure derivate-polari; poichè una figura collineare ad una delle reciproche ed una collineare all'altra sono

tra loro derivate-polari. — Le figure reciproche hanno, come vedemmo (§. 17.), alcune relazioni a loro speciali.

19. Prima di applicare questi principj alla teoria delle curve gioverà, a renderci più abituali le tre leggi di derivazione *collineazione reciprocità* ed *inversione*, il fare su di esse alcune considerazioni generali. Intanto, quantunque sia opportuno il nome di derivazione geometrica, pure vi è essenzialissima differenza tra essa e la derivazione analitica; giacchè colla stessa identica operazione si passa da una figura alla sua derivata, e da questa alla primitiva; il che è ben lungi dall' esser vero fra un' equazione primitiva, e la sua derivata differenziale. — Due figure ambedue collineari di una stessa primitiva sono collineari tra di loro; e quindi il ripetere più volte la derivazione di collineazione non è di alcun vantaggio. — Due figure reciproche (con differenti centri di reciprocità) di una primitiva sono tra loro collineari; e con quante si vogliano derivazioni di collineazione o di reciprocità non si otterrà mai che una figura collineare od una derivata-polare, secondo che il numero delle reciprocità sarà stato pari o dispari.

20. Mi sembra un importante teorema (Memoria citata al §. 4.) che coll' inversione ripetuta più volte non si ottenga se non quanto può aversi da una sola inversione. — Per dimostrarlo indichiamo con A B C D E..... Z i punti di una figura, con A' B'...., A'' B''...., A''' B'''.... quelli che ne derivano mediante una, due o tre inversioni; sia A il centro della prima inversione, e sia Y Z la retta a distanza infinita della figura primitiva: — nella prima figura inversa il punto A' sarà a distanza infinita; Y' Z' si riuniranno nel punto A; dalle rette CD CE deriveranno i circoli Z' C' D' Z' C' E', che si taglieranno in Z' ed in C' sotto un angolo eguale (§. 5. 3.°) all'angolo DCE della figura primitiva: — sia B' il centro della seconda inversione; nella seconda inversa B'' passerà a distanza infinita, A'' cadrà in B', ed i circoli Z'' C'' D'' Z'' C'' E'' si taglieranno sotto lo stesso angolo DCE: — ora se prendiamo Z'' per terzo centro d' inversione otterremo una figura, nella quale

Z''' sarà a distanza infinita, B''' cadrà in Z'', e dai predetti circoli deriveranno le rette C'''D''' C'''E''' formanti l'angolo D'''C'''E''' = DCE. — Pertanto, giacchè tutte le rette della figura primitiva sono rette anche nella terza figura inversa, le figure sono (§. 11.) collineari; — giacchè dai punti Y Z posti nella primitiva a distanza infinita derivarono i punti Y''' Z''' essi pure a distanza infinita, le due figure sono affini; — e giacchè ogni angolo DCE è uguale al suo derivato, le due figure sono simili: perciò la seconda figura inversa può ottenersi mediante una sola inversione da una figura simile (od eguale) alla primitiva.

21. Dopo questa digressione, che stimai necessaria a porre sott' occhio teorie importantissime e non abbastanza generalmente conosciute, torneremo al nostro argomento osservando che non sarebbe di alcun vantaggio adoperare successivamente più inversioni delle coniche (§. 20.), poichè si otterrebbero quelle stesse curve, che si possono avere mediante una sola inversione. Ciò è analogo a quanto vedemmo (§. 4.) accadere per la linea retta, la quale coll' inversione dà il circolo; da cui poscia non si può dedurre mediante l' inversione alcun' altra curva; bisogna ricorrere all' affinità per dedurne l' ellisse, ed alla collineazione per le altre due specie di coniche.

Principj per la classificazione delle curve.

22. Per quanto io mi sappia tutti considerarono come principale carattere di classificazione delle curve l' esistenza e la natura dei loro rami infiniti; io credo che questo sia invece da riguardarsi come carattere secondario, e che il carattere per la formazione dei generi sia la collineazione, quello per la formazione delle specie sia l' affinità. — Vale a dire tutte le curve tra loro collineari costituiscono, secondo la mia maniera di vedere, un genere; e la specie è un' unione di curve tra loro affini. — Con questi principj le coniche formano un solo genere diviso in tre specie, secondo che colla derivazione di

collineazione si fa andare all' infinito, od una retta, che non taglia la curva (ellisse), o una sua secante in due punti (iperbola), od una tangente (parabola).

23. Un genere può avere estensione differente da un altro; cioè può esser differente il grado di generalità dell' equazione, che rappresenta tutte le curve comprese in un genere: tale generalità dipende dal numero di costanti arbitrarie, che determinano la forma della curva; facendo astrazione da quelle che ne determinano la posizione, le quali sono sempre tre, eccettuati i casi del circolo e della retta. Quelle prime costanti le diremo i *parametri* della curva. — Simil cosa vale per le specie. Così la specie della ellisse ha due parametri, quella della parabola uno solo. — Una specie può ammettere tutto al più tre parametri, ed un genere tutto al più cinque; e tali sono i numeri dei parametri che a loro generalmente parlando appartengono.

24. Debbo però affrettarmi di riconoscere che questa naturale divisione in generi ed in ispecie non è sufficiente alla classificazione delle curve; poichè si potranno incontrare infinite specie in un solo genere, ed anche infiniti generi in un solo ordine. Bisognerà dunque riunire mediante altri principj le specie in *famiglie* ed i generi in *tribù*.

25. È notissimo che le curve algebraiche furono divise in *ordini* a seconda del numero dei punti, in cui la curva può essere tagliata da una retta, o piuttosto a seconda del grado dell' equazione, che serve a rappresentare la curva. — La *classe* delle curve non è già una divisione più larga dell' ordine, ma ne è invece una divisione affatto analoga; giacchè la classe di una curva è l' ordine della sua *reciproca* o *derivata-polare*: quindi il numero della classe esprime il massimo numero di tangenti della curva, che possono incontrarsi in un solo punto. — Un tempo fu creduto che l' ordine e la classe potessero essere una stessa cosa, ma è certo (ed io pure lo feci vedere nel Giorn. dell' Ital. Letterat. Padova, 1828. II. pag. 72) che una curva del terzo ordine può essere della sesta classe, ed una curva del sesto ordine può essere della terza classe.

26. Vi è un altra, a mio credere, interessantissima separazione delle curve algebraiche, cioè le cui coordinate parallele sono legate da un' equazione algebraica, secondo che queste coordinate possono o non possono esprimersi con funzioni razionali di una sola variabile. — E giacchè il Möbius considerò tali espressioni delle coordinate nel suo calcolo *baricentrico*, potremo dire che tali curve sono dell' $n.^{esimo}$ *ordine baricentrico*. Questo ordine abbraccia soltanto una parte delle curve appartenenti all' $n.^{esimo}$ *ordine algebraico*: n è il massimo grado tanto delle due funzioni razionali che esprimono le due coordinate, quanto dell' equazione che ha luogo tra queste.

27. Si dimostra che tanto la curva inversa quanto la reciproca di una curva di ordine baricentrico è essa pure d' ordine baricentrico; quindi se è *baricentrico* l' ordine è *baricentrica* anche la classe. Una curva dell' ordine baricentrico $n.^{esimo}$ è tutto al più della $[2(n-1)]^{esima}$ classe; mentre la classe di una curva dell'ordine $n.^{esimo}$ algebraico può elevarsi fino a $n(n-1)$.

28. È facile riconoscere che una curva composta di due o più *pezzi* affatto staccati non può mai essere di ordine baricentrico: si avverta però che non deggiono considerarsi come *pezzi* staccati quelli che rimangono separati da qualche punto situato a distanza infinita, ed il quale colla collineazione si potrebbe sempre ridurre a distanza finita, rendendosi così palese la continuità della curva.

Punti singolari delle curve, ed altri caratteri generici o specifici.

29. Un carattere, che deve principalmente servire a distinguere le curve le une dalle altre, si è la singolarità di curvatura che esse presentano in qualche punto speciale. — Per riconoscere tutte le curve appartenenti ad uno stesso genere ci bisogna adunque imparare a scorgere i punti *singolari* anche quando mediante la collineazione essi sono passati a distanza infinita; il che darà origine a particolari specie.

30. Contrassegneremo col numero positivo intero o frazionario s ogni punto, nel quale la curva riferita alla sua tangente presa come asse delle x abbia l' equazione della forma $y = x^{1+s}$, essendo x y infinitesime, ed ommettendosi per brevità il fattore finito. Se questo punto passa a distanza infinita, e la sua tangente rimanendo a distanza finita ne sia quindi l' assintoto, la curva riferita all' assintoto avrà l' equazione della forma $y = x^{-s}$, essendo x infinita ed y infinitesima. Che se vada all' infinito la tangente della curva nel punto di cui si tratta, la curva vi sarà espressa dall' equazione $y = x^{\frac{s}{1+s}}$, essendo x ed y infiniti.

31. Così in particolare il punto contrassegnato dal numero 1 è un punto ordinario. Se esso passa a distanza infinita si ha un pajo di rami iperbolici, che divergono avvicinandosi da parti opposte all' assintoto. E se esso passa a distanza infinita insieme colla sua tangente dà due rami parabolici, che si avvicinano sempre più al parallelismo, come quelli della parabola conica.

32. Il punto contrassegnato dal numero 2 è un *flesso* (punto di flesso contrario), che passando a distanza infinita dà due rami infiniti divergenti da una stessa parte dell' assintoto, come quelli dell' iperbola $y = x^{-2}$. Quando passa a distanza infinita la tangente del flesso si hanno i rami parabolici, che divergono volgendosi le convessità l' uno contra l' altro come quelli della parabola Neiliana $y = x^{\frac{3}{2}}$.

33. Il punto contrassegnato dal numero $\frac{1}{2}$ è un *regresso*, che se passa a distanza infinita dà origine a due rami infiniti convergenti dalle due parti dell' assintoto come quelli dell' iperbola $y = x^{-\frac{1}{2}}$. Quando è a distanza infinita la tangente del regresso si hanno due rami parabolici divergenti, di cui ciascuno volge la convessità alla concavità dell' altro, come avviene nella parabola cubica $y = x^{\frac{1}{3}}$.

34. Questi sono i soli punti singolari delle curve algebraiche del terzo ordine, nonche di quelle della terza classe. La figura 1.ª

presenta un punto ordinario M nelle sue tre posizioni, cioè a distanza finita, a distanza infinita con assintoto, ed a distanza infinita insieme colla tangente. Nelle fig. 2.ª e 3.ª si veggono un *flesso f* ed un *regresso R* egualmente nelle tre posizioni.

35. La collineazione non cangia la natura di un punto, nè il numero col quale proponiamo di contrassegnarlo; soltanto essa può mutare un punto a distanza finita in due rami iperbolici o in due rami parabolici. Perciò le curve comprese in un genere, od anche in una tribù di generi, dovranno avere gli stessi punti singolari: quelle comprese in una specie, od in una famiglia di specie, avranno inoltre rami infiniti in egual numero e qualità.

36. Serviranno pure a distinguere le curve i *punti doppj*; i quali, se sono ordinarj, passando a distanza infinita danno origine a quattro rami infiniti iperbolici cogli assintoti paralleli; due di questi rami possono divenir parabolici tendendo al parallelismo verso l' assintoto degli altri due; ciò avviene quando passa a distanza infinita la tangente di uno dei tratti di curva che si tagliano nel punto doppio. Questi tre casi si scorgono nella fig. 4.ª

37. Un altro carattere generico è il numero dei *pezzi*, di cui si compone una curva; notando però che non si deve badare alla apparente separazione dei *tratti* di una curva, ma bisogna considerare che questi si riuniscono mediante i loro rami infiniti, i quali quantunque il più delle volte affatto divergenti, pure deggiono riguardarsi come diretti ad uno stesso punto, il che diviene palese mediante la prospettiva o la collineazione. Così l' iperbola conica quantunque costituita da due *tratti* separati pure dee considerarsi come di un solo *pezzo*.

38. Per tal maniera ogni *pezzo* di curva è rientrante in sè stesso. Un pezzo di curva, che non ha nè punti singolari nè punti doppj lo si dice un' *ovale*: e tale lo chiameremo quantunque, per esserne passato a distanza infinita uno o due punti, essa non si presenti più all' occhio come una ovale, ma sia *aperta* o come una parabola o come un' iperbola conica. —

Similmente diremo *nodo* una parte di curva senza punti singolari, che si chiude in un punto doppio: anche il nodo potrà essere *aperto* in uno o in due punti.

39. Dicemmo già che le curve di ordine baricentrico sono sempre di un solo pezzo. Fra quelle del terzo ordine algebraico vi è una tribù di generi, di cui tutte le curve sono di due pezzi, uno dei quali è un' ovale, l' altro ha tre flessi.

40. Un carattere generico meno facile a scorgere si è la presenza di punti *isolati* (detti anche *conjugati*). Uno dei generi del terzo ordine algebraico ha un punto isolato; ma l' espressione baricentrica (giacchè quel genere è anche del terzo ordine baricentrico) non comprende tal punto isolato.

41. Sono caratteri specifici quelli che si desumono dai punti posti a distanza infinita. Ogni punto se passa solo a distanza infinita dà origine a due rami iperbolici, ed a due rami parabolici se va all' infinito insieme colla sua tangente: la natura dei rami infiniti fa conoscere come vedemmo (§. 30.) la qualità del punto, cioè il numero che serve a contrassegnarlo. — Le parti separate, da cui è costituita una curva, quando non si considera la loro unione mediante i punti a distanza infinita, le diciamo *tratti*: così l' Ellisse è di un solo *tratto* chiuso; l' Iperbola di due tratti con rami iperbolici ordinarj; la prima Parabola cubica è di un solo tratto con rami parabolici *verso un regresso*, cioè diretti verso un punto di regresso, che sta a distanza infinita; la Cissoide di Diocle di un tratto con un regresso e con rami iperbolici *verso un flesso*; la Concoide di Nicomede è di due tratti a rami iperbolici diretti verso un punto doppio, nel quale i due tratti si toccano.

42. Noteremo pure come carattere specifico la distribuzione dei punti singolari sopra tratti differenti, o la loro riunione sopra uno stesso tratto. Quando un tratto di curva non ha a distanza finita alcun punto singolare lo diremo *puro*. — Le curve del terzo ordine baricentrico sono tutto al più di tre tratti, e quelle del terzo ordine algebraico possono essere di quattro tratti, l' uno di essi essendo un' ovale chiusa. —

Serviranno pure a distinguere le specie, la disposizione dei tratti gli uni rispetto agli altri ed ai loro assintoti, - l' incontrarsi di tre assintoti in un solo punto, - l' esistenza di diametri o di centro di *simmetria*; - ec.

43. Chiamo *diametro di simmetria* quella retta che taglia per metà tutto un sistema di corde parallele. Nelle curve di ordine dispari è necessario che tali corde sieno dirette verso un punto situato a distanza infinita: pel terzo ordine tal punto, che deve andare a distanza infinita, è un flesso; ed ogni qual volta un flesso va a distanza infinita la curva ha un diametro di simmetria. Siccome le curve del terzo ordine (eccettuate quelle che noi riferiremo ai generi I. e II.) hanno tre flessi posti in una stessa linea retta; così facendo andare all'infinito tal retta si hanno tre differenti diametri di simmetria di una stessa curva.

44. Se si fa andare all' infinito un diametro di simmetria, quel punto, che prima era a distanza infinita, ed a cui si volgevano tutte le corde dimezzate dal diametro, diventa un *centro di simmetria*, che taglia per metà tutte le corde che passano per esso. Nelle curve del terzo ordine il centro di simmetria è (§. 43.) sempre un flesso.

45. Dicemmo che i punti ordinarj o singolari non cangiano colla collineazione; poichè anche quando passano a distanza infinita noi continuiamo a contrassegnarli collo stesso numero, ed a chiamarli *flessi* o *regressi*, quantunque non sia più apparente nè la flessione contraria nè il regresso. — È naturale la dimanda qual relazione abbia luogo tra due parti *corrispondenti* di due curve reciproche oppure derivate-polari. Si rammenti che tutti i punti di una curva hanno per reciproche le rette, che sono tangenti della curva reciproca, e i punti di contatto di queste tangenti sono reciproci delle tangenti della curva primitiva; sicchè diciamo punti corrispondenti quelli che sono reciproci delle rispettive tangenti. Con facile calcolo si trova che ad un punto contrassegnato dal numero s corrisponde nella figura reciproca o derivata-polare un punto contrassegnato dal

numero $\frac{1}{s}$. Perciò ad un punto ordinario corrisponde un punto ordinario, e ad un flesso ($s=2$) corrisponde un regresso ($s=\frac{1}{2}$).

46. Se una curva ha un punto doppio, la sua reciproca ha una *tangente doppia*, cioè una tangente che tocca la curva in due punti differenti: e se questa tangente passa a distanza infinita si hanno quattro rami parabolici.

47. Non è altrettanto semplice la corrispondenza dei punti singolari nelle curve inverse. — Se una delle due curve in un punto contrassegnato dal numero s abbia la tangente, che non passi pel centro d' inversione I, il punto inverso sarà contrassegnato dallo stesso numero s nel caso che sia $s<1$. Che se sia $s>1$ il punto inverso sarà contrassegnato dal numero 1, cioè sarà un punto ordinario. Se finalmente sia $s=1$, cioè il punto della prima curva sia ordinario, bisogna distinguere due casi secondo che il circolo osculatore in quel punto non passa o passa pel centro d' inversione: nel primo caso anche il punto inverso sarà ordinario; invece nel secondo caso (siccome il circolo osculatore ha per inversa una retta) bisognerà determinare l' ordine $S.^{esimo}$ del contatto della prima curva col suo circolo osculatore, e lo stesso contatto avrà luogo tra la curva inversa e la sua tangente; perciò il punto inverso sarà contrassegnato dal numero S. — Ne viene che, generalmente parlando, un punto, il cui circolo osculatore passa pel centro d' inversione, ha per inverso un flesso contrassegnato dal numero 2.

48. Quando la tangente nel punto primitivo passa pel centro d' inversione, il punto inverso è contrassegnato dallo stesso numero del primitivo.

49. Ci resta da considerare il caso che nelle due curve inverse uno dei punti sia nel centro d' inversione, e l' altro, per conseguenza, sia a distanza infinita. — Per il primo sia contrassegnato dal numero $s<1$, il suo inverso avrà la tangente a distanza infinita (cioè esisteranno due rami parabolici) e sarà contrassegnato dal numero $\frac{1}{s}-1$. — Se invece il primo punto sia contrassegnato dal numero $s>1$, il suo punto inverso

sarà contrassegnato dal numero $s-1$, ed il suo assintoto passerà pel centro d'inversione. — Se finalmente nel centro d'inversione vi sia un punto ordinario, nel quale la curva abbia col proprio circolo osculatore un contatto dell'ordine $(S+1)^{esimo}$, il punto inverso avrà l'assintoto, che non passerà pel centro d'inversione, e sarà contrassegnato dal numero S. — Nel centro d'inversione vengono a riunirsi i punti inversi di tutti quelli, che sono a distanza infinita.

50. Per giustamente interpretare che cosa debba intendersi per l'ordine del contatto di due linee (anche quando questo ordine è frazionario) noteremo che se all'ascissa infinitesima x presa sulla loro comune tangente corrisponde la differenza $ax^{\alpha}+bx^{\beta}+$ ec. delle loro ordinate, sarà $\alpha-1$ l'ordine del contatto (essendo α il più piccolo degli esponenti). — Così, per esempio, essendo

$$\frac{x^2}{2r}+\frac{x^4}{8r^3}+\text{ec.}$$

l'ordinata del circolo osculatore, se quella della curva sia

$$\frac{x^2}{2r}+cx^{\frac{3}{2}}+\text{ec.},$$

il contatto tra il circolo e la curva sarà dell'ordine $(\frac{3}{2})^{esimo}$, anzichè del secondo ordine come è di solito. — Per quanto superiormente abbiamo detto se mediante l'inversione si faccia andare all'infinito quel punto si otterrà un regresso contrassegnato dal numero $\frac{1}{2}$. Che se invece il centro d'inversione non coincidesse col precedente punto, che ha un contatto dell'ordine $(\frac{3}{2})^{esimo}$ col proprio osculatore, ma bensì fosse un punto di questo circolo, il punto inverso sarebbe contrassegnato dal numero $\frac{3}{2}$, e perciò sarebbe una specie di regresso a curvatura nulla.

51. Quantunque la singolarità dei punti, nei quali la curva ha col proprio circolo osculatore un contatto differente dal secondo ordine, non si renda manifesta all'occhio; pure essi meritano essere avvertiti per l'effetto che producono nella inversione. Tali sono per esempio i vertici delle coniche, ai quali spetta un contatto del terzo ordine.

CURVE INVERSE DELLE CONICHE.

52. Le coniche hanno tutti i loro punti ordinarj; perciò le curve inverse dell' ellisse non avranno altri punti singolari oltre quelli che nascono dai punti dell' ellisse, i cui circoli osculatori passano pel centro d' inversione. Uno di questi punti sarà (§. 47.) contrassegnato dal numero 2 (cioè sarà punto di flesso) se il circolo osculatore spetta ad un punto ordinario dell' ellisse; e sarà contrassegnato dal numero 3 (cioè sarà un punto di curvatura nulla) se il circolo spetta ad uno dei vertici. — Nelle inverse della parabola vi sarà inoltre (§. 49.) nel centro d' inversione un regresso contrassegnato dal numero $\frac{1}{2}$. — Invece nelle inverse dell' iperbola il centro d' inversione sarà (§. 49.) un punto doppio, e i due tratti di curva avranno colà un punto ordinario od un flesso, secondo che quel centro d' inversione sarà preso fuori di un assintoto, o sopra di esso.

53. Le inverse delle coniche sono generalmente parlando del quarto ordine baricentrico, e non hanno alcun punto a distanza infinita: l' ordine però si abbassa al terzo quando il centro d' inversione è sulla conica stessa; in tal caso la curva inversa ha un punto a distanza infinita.

54. Prendendo il centro d' inversione nel vertice di una conica, la curva inversa della parabola avrà (§. 49.), oltre il regresso, un flesso a distanza infinita. — Un simile flesso avrà l' inversa dell' iperbola, oltre il punto doppio. — L' inversa dell' ellisse avrà un flesso a distanza infinita, ed inoltre due flessi dipendenti da quei due suoi circoli osculatori, che la tagliano in quel vertice che fu preso per centro d' inversione. L' assintoto del primo flesso è inverso del circolo osculatore nel vertice, ed è quindi perpendicolare all' asse dell' ellisse; ed è palese che questo sarà eziandio un asse di simmetria della curva inversa, la quale avrà quindi gli altri due flessi sopra una corda perpendicolare all' asse, e perciò diretta verso il terzo flesso che è a distanza infinita; cioè i tre flessi della curva sono in linea retta.

55. Tutte le curve del terzo ordine baricentrico sono collineari coll' una o coll' altra delle tre predette curve inverse della parabola, dell' iperbola, dell' ellisse. D' altronde ogni altra curva inversa di una conica (il centro d' inversione essendo un punto della conica stessa differente dal vertice) è del terzo ordine baricentrico. — Secondo che tal curva avrà un regresso, od un punto doppio, oppure nessun regresso e nessun punto doppio, essa apparterrà al genere delle inverse della parabola o dell' iperbola o dell' ellisse. — Ora le curve dei due primi generi hanno sempre anche un flesso (giacchè la collineazione non può distruggere il flesso, che nell' ipotesi del §. precedente sta a distanza infinita); perciò immaginando che un punto qualunque di una parabola o di una iperbola sia scelto per centro d' inversione noi vediamo (§. 47.) che: *Per ogni punto di una parabola o di una iperbola, che non sia un vertice, passa sempre uno, ed uno solo, dei circoli osculatori della curva in altro punto.* — Similmente siccome le curve del terzo genere hanno tre flessi in linea retta, così: *Per ogni punto di un' ellisse, che non sia uno dei suoi vertici, passano sempre tre circoli osculatori della curva in altri tre punti, i quali appartengono ad un circolo che passa per quel punto.* Teorema già dato dallo Steiner.

Classificazione delle curve.

56. Premessi questi principj, veniamo alla classificazione delle curve del terzo ordine algebraico, e cominciamo da quella sua parte che costituisce il

Terzo ordine baricentrico.

Carattere. *Curve di un solo pezzo con un flesso e un punto doppio, oppure tre flessi in linea retta; il punto doppio o due flessi possono convertirsi in un regresso.*

Genere I.

CURVE DEL TERZO ORDINE E DELLA TERZA CLASSE, DI UN SOLO PEZZO CON UN REGRESSO ED UN FLESSO.

57. Prenderemo per tipo di questo genere la curva inversa della parabola quando il centro d' inversione è nel vertice. Essa è la Cissoide di Diocle, che ha la forma espressa dalla figura 5.ª col regresso J, e coll' assintoto 11 spettante al flesso che sta a distanza infinita.

58. Per derivare da questa curva mediante la collineazione tutte quelle, che sono del suo stesso genere, bisognerà far andare all' infinito una qualunque retta posta nel piano della curva. — Ora questa retta può essere o l' assintoto 11; o la tangente 22 del punto di regresso; o la retta 55, che comprende il regresso ed il flesso; o la 88 diretta al flesso; o la 99, che comprende il flesso e due altri punti della curva; o la 1010, che passa pel regresso; o la 1212, che tocca la curva in un punto e la taglia in un altro; o la 1313, che la taglia in un solo punto; o la 1414, che la taglia in tre punti. — Ciò dà origine alla divisione del genere in nove parti, di cui sette sono specie, e due sono famiglie di specie.

59. Indico tali divisioni dei generi coi numeri dall' 1 al 14, perchè (come meglio si renderà palese nel prospetto riassuntivo della classificazione) le curve del terzo ordine oltrechè in generi si dividono mediante un carattere specifico in quattordici *categorie*, che giova distinguere sempre con un medesimo numero. Peraltro ciascun genere non può comprendere tutte le quattordici categorie: così nel I. mancano le categorie 3, 4, 6, 7, 11. Ogni specie o famiglia di specie sarà distinta col numero del genere e con quello della categoria.

60. Specie I. 1. Carattere. *Un tratto col regresso e coi rami parabolici verso il flesso.* Appartiene a questa specie la parabola Neiliana. Prese le ascisse x sulla tangente del regresso

e le ordinate y in una determinata direzione, esse sono espresse mediante una variabile reale t dalle equazioni

$$x = a t^2, \qquad y = b t^3.$$

Per ottenere tutte le curve tra loro affini, cioè tutte quelle che appartengono alla presente specie ci resta da cangiare i parametri a b, nonchè l' angolo delle coordinate; ma atteso l' arbitrarietà del valore di t è palese che cangiando ambedue le a b non si ottiene niente di più che col cangiarne una sola. Perciò questa specie è veramente a due soli parametri, che sono l' angolo delle coordinate, e la p compresa nell' equazione $x^3 = p y^2$. Del resto noi scriveremo

$$x = t^2, \quad y = t^3, \quad x^3 = y^2,$$

ed intenderemo sempre che rimangano arbitrarj l' angolo delle coordinate, e le due unità di lunghezza, alle quali si riferiscono i numeri x y; le quali due unità possono essere tra loro disuguali.

61. La curva avendo un flesso a distanza infinita ha (§. 43.) un *diametro di simmetria*, che è quello su cui si sono prese le ascisse x. — In tutte le specie di questo genere faremo che a $t = 0$ corrisponda il regresso ed a $t = \infty$ il flesso.

62. Specie I. 2. *Un tratto col flesso e rami parabolici verso il regresso.* Appartiene a questa specie la prima parabola cubica. Anche questa specie è a due soli parametri; prese le x sulla tangente del flesso si ha

$$x = \frac{1}{t}, \qquad y = \frac{1}{t^3}, \qquad y = x^3.$$

Essendo passato a distanza infinita il diametro di simmetria della specie precedente, questa specie I. 2. ha (§. 44.) *centro di simmetria*, che è il flesso origine delle coordinate.

63. Specie I. 5. *Due tratti puri, ciascuno coi rami iperbolici l' uno verso il regresso e l' altro verso il flesso.* Prendendo le x sull' assintoto del regresso, che è anche *diametro di simmetria*, e le y sull' assintoto del flesso si ha

$$x = \frac{1}{t^2}, \quad y = t, \quad xy^2 = 1.$$

Vi sono due parametri, cioè l' angolo formato dagli assintoti, ed una unità di lunghezza.

64. Specie I. 8. *Un tratto col regresso e rami iperbolici verso il flesso.* Prendendo le x nella tangente del regresso, che è anche *diametro di simmetria*, e le y parallele all' assintoto del flesso, si ha

$$x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{t^3}{1+t^2}, \quad x(x^2+y^2) = y^2.$$

Questa e le specie seguenti sono, come è di solito, a tre parametri. Appartiene a questa specie la Cissoide, da cui siamo partiti; essa ha luogo quando le coordinate sono ortogonali, cioè il diametro è perpendicolare alle sue ordinate ed all' assintoto; inoltre le due coordinate sono riferite alla stessa unità, perciò l' ordinata eguale all' ascissa è quella equidistante tra il regresso e l' assintoto.

65. Specie I. 9. *Tre tratti: uno col regresso e rami iperbolici ordinarj; ciascuno degli altri due coi rami iperbolici uno ordinario ed uno verso il flesso.* Analogamente alla I. 8. si ha

$$x = \frac{t^2}{1-t^2}, \quad y = \frac{t^3}{1-t^2}, \quad x^3 = (x+1)y^2.$$

66. Specie I. 10. *Due tratti, l'uno col flesso l'altro puro; ciascuno coi rami iperbolici uno ordinario ed uno verso il regresso.* Prendendo le coordinate sugli assintoti del regresso e del punto ordinario si ha

$$x = \left(1 - \frac{1}{t}\right)\left(2 + \frac{1}{t}\right), \quad y = \frac{t}{t-1}, \quad xy^2 = 3y - 1.$$

67. Specie I. 12. *Due tratti, l'uno col regresso l'altro col flesso; ambedue coi rami iperbolico e parabolico ordinarj.*

68. Famiglia I. 13. *Un solo tratto con regresso, flesso, e rami iperbolici ordinarj.* Appartengono a questa famiglia le curve inverse della parabola quando il centro d' inversione è un punto della parabola diverso dal vertice. Queste inverse della

parabola si possono descrivere alla stessa maniera della Cissoide mediante un circolo ed una sua tangente.

69. Famiglia I. 14. *Tre tratti coi rami iperbolici ordinarj: uno col regresso, uno col flesso ed uno puro.* Prendendo le x sulla tangente del regresso e le y sulla retta, che unisce il regresso col flesso, tutte le specie I. 12. 13. 14. sono espresse da

$$x = \frac{t^2}{(t-1)(t^2+at+a)}, \quad y = \frac{t^3}{(t-1)(t^2+at+a)}$$

ed hanno l' equazione

$$(y-x)(y^2+axy+ax^2) = y^3;$$

a è un parametro, che distingue una specie dall' altra. Se $a=4$, cioè se la $t^2+at+a=0$ ha due radici uguali, si ha la particolare specie definita in I. 12.; ogni altro valore di a dà una specie differente. Tutte queste infinite specie si separano naturalmente in due famiglie secondo che $t^2+at+a=0$ ha due radici reali o ne è priva, il che porta l' esistenza di tre o di un solo punto a distanza infinita. — Quantunque non si abbia altro carattere apparente per distinguere l' una dall' altra le infinite specie contenute in ciascuna famiglia, pure esse sono specie differenti; cioè colla derivazione di affinità non si potrebbe passare dall' una all' altra. — Nella famiglia I. 14., posto

$$t^2+at+a = (t-c)\left(t+\frac{c}{c+1}\right),$$

si possono dare a c tutti i valori da 0 ad 1 senza mai ricadere nella stessa specie.

Genere II.

Curve del terzo ordine e della quarta classe di un solo pezzo con un flesso ed un punto doppio.

70. Il tipo di questo genere è l' inversa della iperbola, il centro d' inversione essendo uno dei due vertici; la forma di tal curva è simile al *Folium* del Cartesio, il quale è propria-

mente inverso dell' iperbola equilatera. Come facemmo pel genere I. noi potremmo dedurre tutte le specie dal suddetto tipo facendone andare all' infinito l' una o l' altra retta: otterremo eguali risultamenti operando in simil modo sulla seguente specie II. 1., a cui si perviene facendo andare all' infinito l' assintoto della predetta inversa della parabola.

71. Specie II. 1. *Un tratto puro annodato coi rami parabolici verso il flesso.* Prendendo le ascisse x sul diametro di simmetria (cioè in quella retta, che dal punto doppio J va al punto V, la cui tangente è diretta verso il flesso, che sta a distanza infinita) e le ordinate y essendo dirette verso il flesso, la curva è espressa da

$$x = t^2 - 1, \qquad y = t(t^2 - 1), \qquad x^3 = y^2 - x^2.$$

72. In tutto questo genere a $t = 0$ corrisponde il predetto punto V, che diremo il *vertice* della curva, a $t = \pm 1$ il punto doppio J, ed a $t = \infty$ il flesso S. — La specie è a tre parametri, che sono l' angolo delle coordinate, e le due unità di lunghezza, colle quali queste si suppongono misurate. — Se immaginiamo che nella figura 6.ª vada all' infinito una delle rette 22 33 66 77 88 99 1111 1212 1313 1414 otteniamo dieci categorie, di cui ora indicheremo i caratteri, quali si deducono considerando attentamente l' effetto di tale derivazione collineare.

73. Specie. II. 2. *Tre tratti coi rami iperbolici ordinarj, uno di essi ha gli assintoti paralleli ed ha un flesso che è il centro di simmetria.* Preso questo centro S per origine delle coordinate, le x sulla tangente nel flesso S, e le y sull' assintoto, che da S volgesi al vertice V passato a distanza infinita, si ha

$$x = \frac{t}{t^2 - 1}, \qquad y = \frac{1}{t(t^2 - 1)}, \qquad x(x - y)^2 = y.$$

74. Specie II. 3. *Due tratti: uno col flesso, l' altro puro, ambedue con un ramo iperbolico ordinario ed uno parabolico ordinario, che tende al parallelismo coll' assintoto del primo.* Questo è il Tridente del Cartesio. Prendendo l' origine delle

coordinate nel punto V, le x sulla tangente VS, e le y parallele all' assintoto (il quale dimezza la VS), si ha

$$x = \frac{t}{t-1}, \quad y = \frac{t^2}{(t-1)^2(t+1)}, \quad x^3 = x^2 + 2xy - y.$$

75. Specie II. 6. *Tre tratti puri; due rami iperbolici verso il flesso, e quattro ordinarj cogli assintoti paralleli.* Prendendo l' origine delle coordinate nel vertice V, e le x sul diametro di simmetria, che è parallelo a due assintoti, si ha

$$y = t, \quad x = \frac{t^2}{t^2-1}, \quad xy^2 = y^2 + x.$$

76. Specie II. 7. *Due tratti puri che si tagliano; ciascuno ha un ramo parabolico ordinario ed uno iperbolico verso il flesso.* Il nodo si è aperto essendo passata a distanza infinita la tangente VS. Preso il punto doppio per origine delle coordinate, le ascisse x sul diametro di simmetria, e le ordinate y parallele all' assintoto del flesso, si ha

$$x = \frac{t^2-1}{t^2}, \quad y = \frac{t^2-1}{t}, \quad xy^2 = y^2 - x^2.$$

77. Famiglia II. 8. *Un tratto puro annodato coi rami iperbolici verso il flesso.* Scelto il punto doppio J per origine delle coordinate, le ascisse essendo prese sul diametro di simmetria JV, e le ordinate essendo parallele all' assintoto, si ha

$$x = \frac{t^2-1}{t^3+c^2}, \quad y = xt, \quad xy^2 + c^2x^3 = y^2 - x^2;$$

perciò, oltre i tre soliti parametri di ciascuna specie, si ha un parametro c^2, che distingue l' una dall' altra le infinite specie di questa famiglia. In ciascuna specie quando le ascisse e le ordinate sono tra loro ortogonali ed il rapporto delle unità a cui si riferiscono è c, la curva è quel *Folium* inverso di un' iperbola, di cui parlammo al principio di questo genere; c è il rapporto dell' asse secondario dell' iperbola al suo primario.

78. La categoria 9. ci dà in questo genere due famiglie secondo che il nodo resta *chiuso* od è aperto.

Famiglia II. 9. *A. Tre tratti puri: uno annodato coi rami iperbolici ordinarj; ciascuno degli altri due coi rami iperbolici uno ordinario ed uno verso il flesso.*

Famiglia II. 9. *B. Tre tratti puri: uno coi rami iperbolici ordinarj; gli altri due si tagliano, e ciascuno ha un ramo iperbolico ordinario ed uno verso il flesso.*

Le equazioni di queste due famiglie non differiscono da quella della II. 8. se non se pel cangiamento di c^2 in $-c^2$. Alla famiglia *A* corrisponde c^2 superiore all' unità, invece se c^2 è inferiore all' unità si ha la famiglia *B*. — In questa famiglia potrebbe distinguersi la specie corrispondente a $c^2 = \frac{1}{3}$, nella quale i tre assintoti s' incontrano in un solo punto. Essa è la specie 30.ª del Newton; del rimanente di questa famiglia egli fece due specie 18.ª 19.ª, secondo che il triangolo formato dai tre assintoti volge al punto doppio un suo vertice od una sua base. È evidente che queste tre specie del Newton sono di diversa estensione, e che la sola 30.ª è, secondo i principj da noi stabiliti, una vera specie, di cui tutte le curve sono tra loro affini: le altre due specie del Newton sono due sottofamiglie.

79. Famiglia II. 11. *A. Tre tratti coi rami iperbolici ordinarj; un flesso; due assintoti paralleli: il tratto col vertice* V *ha i due rami cogli assintoti paralleli.* Prendendo le x sulla tangente VS, e le y dirette verso il punto doppio, che sta a distanza infinita, cioè parallele ai due assintoti, si ha

$$x = \frac{t}{t-c}, \quad y = \frac{t^2}{(t^2-1)(t-c)}$$

$$(c^2-1)\,x^2y - cx^3 + 2xy + cx^2 + y = 0;$$

essendo $c^2 > 1$, poichè se fosse $c^2 < 1$ si avrebbe invece la

Famiglia II. 11. *B. Tre tratti coi rami iperbolici ordinarj; quello col flesso ha i rami cogli assintoti paralleli.*

80. Famiglia II. 12. *A. Due tratti: uno puro annodato, ed uno col flesso; ciascuno coi rami ordinarj uno iperbolico ed uno parabolico.*

Famiglia II. 12. *B. Due tratti che si tagliano; uno puro, ed uno col flesso; ciascuno coi rami ordinarj uno iperbolico ed uno parabolico.*

81. Famiglia II. 13. *Un solo tratto annodato col flesso e coi rami iperbolici ordinarj.* Appartengono a questa famiglia tutte le inverse dell' iperbola, quando il centro d' inversione è un punto dell' iperbola differente dal vertice.

82. Famiglia II. 14. *A. Tre tratti con un flesso e i sei rami iperbolici ordinarj; un tratto puro è annodato.*

Famiglia II. 14. *B. Tre tratti coi rami iperbolici ordinarj: un tratto col flesso ed uno puro si tagliano.*

83. Prendendo le x sulla JV, e le y sulla JS, queste cinque famiglie sono espresse da

$$x = \frac{t^2 - 1}{(t^2 - 1)(t + b) + b - a}, \quad y = \frac{t(t^2 - 1)}{t^3 - t + bt^2 - a}$$

$$y^3 + bxy^2 - x^2y - ax^3 = y^2 - x^2,$$

e secondo che l' equazione $t^3 + bt^2 - t - a = 0$ avrà due radici uguali o due immaginarie o tre disuguali la curva apparterrà alla categoria 12. od alla 13. od alla 14. Si esclude il caso di $b = a$, poichè allora si cadrebbe nella categoria 11.

Genere III.

Curve del terzo ordine e della quarta classe di un solo pezzo con tre flessi in linea retta.

84. Stando alla relazione tra le coordinate parallele queste curve ammettono anche un punto isolato, cui però non danno le espressioni delle coordinate in funzioni razionali di una variabile reale t. Ritenendo anche il punto isolato, la curva ascenderebbe alla quinta classe, poichè ogni retta condotta pel punto isolato dovrebbe considerarsi come una tangente. La curva derivata-polare (§. 16.) è il complesso di una curva del quarto ordine e di una retta derivata-polare del punto isolato, dalla qual retta si può far astrazione.

85. Nelle curve di questo genere sono da notarsi oltre i tre flessi S S' S'' (le cui tangenti A'A'', A''A, AA' formano un triangolo AA'A'') anche i tre punti V, V', V'', ai quali noi daremo il nome di *vertici*, e le cui tangenti VS, V'S', V''S'' passano rispettivamente pei flessi. — I lati del triangolo VV'V'' passano (non meno di quelli del triangolo AA'A'') pei tre flessi S'' S S', e siccome questi sono in linea retta, così, pel noto teorema sui triangoli *omologhi*, le tre rette VA, V'A', V''A'' concorrono in un medesimo punto, che è il punto isolato J (fig. 7.ª). — Tra questi punti hanno luogo altre proprietà, che noi indicheremo quì appresso essendo esse comuni a tutte le curve del terzo ordine algebraico.

86. Alcune di queste proprietà possono, mediante l'inversione, trasportarsi all' ellisse, nella quale per ciascuno JV dei suoi due assi vi sono i punti S' S'', i cui circoli osculatori passano per J; la loro ascissa contata da J eguaglia i tre quarti dell' asse JV: l' ascissa comune ai punti V', V'' è il quarto di JV.

87. In tutte le formule relative a questo genere i tre flessi S, S', S'' corrispondono a $t=\infty$ ed a $t=\mp 1$, ed i tre *vertici* V, V', V'' corrispondono a $t=0$ ed a $t=\pm 3$. Il punto isolato corrisponde a $t^2+3=0$.

88. Le inverse dell' ellisse, quando il centro d' inversione è uno dei vertici, sono specie appartenenti alla famiglia III. 8.; facendone andare all' infinito l' assintoto otterremo la seguente specie, che più comodamente ci servirà da tipo dell' intero genere.

89. Specie III. 1. *Un solo tratto con due flessi e coi rami parabolici verso il terzo flesso.* Essendo a distanza infinita un flesso le corde ad esso tirate saranno dimezzate da un diametro di simmetria; noi prenderemo le x su questo diametro, e le y parallelamente a quelle corde, e scelto per origine delle coordinate il punto isolato J sarà

$$x=t^2+3, \qquad y=tx, \qquad x^3=y^2+3x^2.$$

Facendo andare all' infinito l' una o l' altra delle rette indicate nella fig. 7.ª otterremo le seguenti specie.

90. Specie III. 2. *Un solo tratto coi rami iperbolici ordinarj; uno dei tre flessi è il centro di simmetria.* Prendendo per origine delle coordinate il centro S, e per assi la tangente S e l' assintoto SV, si ha

$$x = \frac{t}{t^2+3}, \quad y = \frac{x}{t^2}, \quad x(x+3y)^2 = y.$$

91. Specie III. 4. *Tre tratti puri coi rami iperbolici rivolti ai tre flessi.* Il triangolo AA'A'' è quello formato dai tre assintoti; J ne è il centro di gravità; JAV, JA'V', JA''V'' sono i tre diametri di simmetria, che dimezzano le corde parallele agli assintoti A'A'', AA'', AA'. Si ha JA = 2.AV, ec. Prese le x su uno dei diametri di simmetria partendo da J, si ha

$$x = \frac{t^2+3}{t^2-1}, \quad y = \frac{t^2+3}{t^2-1}\,t, \quad xy^2 - x^3 = y^2 + 3x^2.$$

92. Specie III. 7. *Due tratti ciascuno con un flesso, un ramo parabolico ordinario ed uno iperbolico verso il terzo flesso.* È passato a distanza infinita uno dei vertici V insieme colla propria tangente; le rette V''S', V'S'' sono parallele al diametro JA; la tangente V'S' è parallela alla retta JA''V'', ec. Prese al solito le ascisse sul diametro di simmetria, sarà

$$x = 1 + \frac{3}{t^2}, \quad y = t + \frac{3}{t}, \quad xy^2 = y^2 + 3x^2.$$

93. Famiglia III. 8. *Un tratto con due flessi e coi rami iperbolici verso il terzo flesso.* Si ha

$$x = \frac{t^2+3}{t^2+c^2}, \quad y = xt, \quad xy^2 + c^2x^3 = y^2 + 3x^2.$$

Ponendo attenzione al punto isolato si possono separare le due sottofamiglie:

α) Il tratto della curva è interposto tra l'assintoto e il punto isolato.

β) L' assintoto è interposto tra il punto isolato e il tratto di curva.

Le inverse dell' ellisse appartengono alla sottofamiglia α) od alla β) secondo che il centro d' inversione fu preso sopra uno

dei vertici dell' asse maggiore o dell' asse minore. Nel primo caso $c^2 > 3$, nel secondo $c^2 < 3$.

94. Merita essere distinta la specie intermedia a queste due sottofamiglie ($c^2 = 3$), nella quale è passato a distanza infinita il punto isolato; poichè quantunque la sua figura non presenti un carattere molto apparente, pure l' equazione ne è essenzialmente diversa. Noi la riferiremo alla categoria 6, considerando il punto isolato come se fosse un punto doppio; perciò la indicheremo con

Specie III. 6. *Un tratto con due flessi e coi rami iperbolici verso il terzo flesso. Le distanze tra l' assintoto e la retta che unisce i due flessi, e tra questa e la tangente ad essa parallela hanno il rapporto* 3 : 1. Prendendo l' origine delle coordinate nel vertice V si ha

$$x = \frac{t^2}{t^2+3}, \quad y = \frac{t}{3}, \quad xy^2 = y^2 - \tfrac{1}{3}x.$$

95. Famiglia III. 9. *A. Tre tratti: uno con due flessi e coi rami iperbolici ordinarj; ciascuno degli altri due puro e coi rami iperbolici l' uno ordinario l' altro verso un flesso.* Il punto isolato e il diametro di simmetria essendo l' origine e l' asse delle x, si ha

$$x = \frac{t^2+3}{t^2-c^2}, \quad y = xt, \quad xy^2 - c^2x^3 = y^2 + 3x^2,$$

purchè $c^2 > 1$; se fosse $c^2 < 1$ si avrebbe la seguente

Famiglia III. 9. *B. Tre tratti: uno puro coi rami iperbolici ordinarj; ciascuno degli altri due con un flesso e coi rami iperbolici l' uno ordinario l' altro verso un flesso.*

96. Considerando il punto isolato come un punto doppio distingueremo dalla famiglia a cinque parametri III. 13. la particolare famiglia a quattro parametri III. 11., nella quale il punto isolato passa a distanza infinita insieme con un punto ordinario della curva: e ciò per le stesse ragioni che ci fecero notare la specie III. 6.

Famiglia III. 11. *Un solo tratto coi rami iperbolici ordinarj. Il triangolo* A A' A'' *formato dalle tangenti dei tre flessi, e*

quello VV'V'' *dei tre punti, le cui tangenti passano pei flessi, hanno i vertici corrispondenti in tre rette parallele* VA, V'A', V''A''. Prendendo per origine delle coordinate uno dei flessi S, e per assi la tangente in S e la SV tangente in V, si ha

$$x = \frac{a t^2}{(t^2+3)(a-t)}, \qquad y = \frac{3a}{(t^2+3)(a-t)}$$

$$\left(y - \frac{3x}{a^2}\right)\left(x+y\right)^2 - 2y\left(x+y\right) + y = 0.$$

97. Famiglia III. 12. *Due tratti, ciascuno con rami iperbolico e parabolico ordinarj. I tre flessi sono separati nei due tratti.*

98. Famiglia III. 13. *Un solo tratto con tre flessi e coi rami iperbolici ordinarj.*

99. Famiglia III. 14. *Tre tratti coi rami iperbolici ordinarj; uno ha un flesso, uno ne ha due, e l' altro è puro.* Le tre ultime famiglie, prendendo le x sulla JV e le y sulla JS, sono espresse da

$$x = \frac{t^2+3}{(t^2+3)(t+b)-3b+3a}, \qquad y = \frac{t^3+3t}{t^3+3t+bt^2+3a}$$

$$y^3 + bxy^2 + 3x^2y + 3ax^3 = y^2 + 3x^2$$

e, secondo che l' equazione $t^3 + bt^2 + 3t + 3a = 0$ avrà due radici eguali o due immaginarie o tre disuguali, la curva apparterrà alla famiglia III. 12. od alla III. 13. od alla III. 14. — Non dovrà essere $3a + b = \pm 4$, perchè in tal caso un flesso sarebbe a distanza infinita, e si avrebbe una delle specie o famiglie precedenti.

Curve del terzo ordine algebraico, ma non baricentrico.

100. I tre generi di curve, di cui abbiamo data la classificazione, comprendono tutte le curve del terzo ordine baricentrico, cioè le cui coordinate possono esprimersi in funzioni razionali di una variabile; il terzo ordine algebraico ne comprende molte altre, di cui ci resta dare la classificazione. — Le parabole appartenenti alla categoria 1., da cui deducemmo mediante la collineazione tutte le curve dei tre generi, hanno le equazioni

$$y^2 = x^3, \qquad y^2 = x^3 + x^2, \qquad y^2 = x^3 - 3x^2.$$

Più generalmente possiamo prendere l' equazione

$$ry^2 = x^3 + 2nx^2 + mx + a.$$

Trasportando l' origine delle x, e dividendo le coordinate per opportuni coefficienti (il che possiamo fare senza uscire dalla specie della curva) faremo sparire l' ultimo termine, e ridurremo r ed m all' unità (il caso di $m=0$ essendo già trattato nei generi I., II. e III.), sicchè avremo $y^2 = x^3 + 2nx^2 + x$. I differenti valori di n daranno altrettante curve di diverso genere, cioè tali che una non può cangiarsi nell'altra mediante la più generale derivazione di collineazione.

101. Quando $n = -1$ si ricade nel genere II. e quando $n = 1$ nel genere III., noi intenderemo esclusi questi due valori, e che inoltre sia $n > -1$. — Se cerchiamo l'ascissa $x = g$ corrispondente ai due flessi S', S'' troviamo che essa è legata all' altra costante n mediante l' equazione

$$3g^4 + 8ng^3 + 6g^2 = 1.$$

L' ordinata corrispondente al flesso S'' è $\frac{1-g^2}{2\sqrt{g}}$, ed al flesso S' è $-\frac{1-g^2}{2\sqrt{g}}$. — Ci potrà servire da parametro per distinguere un genere dall' altro tanto n quanto g, di cui consideriamo il solo più piccolo valore positivo. Nel II. genere è $g = 1$, e nel III. è $g = \frac{1}{3}$.

102. L' origine delle coordinate è il vertice V (fig. 8.ª), la cui tangente è diretta verso il flesso S, che sta a distanza infinita. Le tangenti negli altri due flessi S', S'' si tagliano nel punto A determinato dall' ascissa $VA = \frac{-2g^3}{1-3g^2}$; e le due tangenti AS''A', AS'A'' sono considerate formare un triangolo colla A'A'' tangente in S, e la quale sta tutta a distanza infinita.

103. Sulla prolungazione della VS'' vi è il punto V' della curva, la cui tangente passa pel flesso S'; esso ha l' ascissa $\frac{1}{g}$

e l'ordinata $\frac{1-g^2}{2g^2\sqrt{g}}$. Similmente V'' ha egual ascissa e l'ordinata $-\frac{1-g^2}{2g^2\sqrt{g}}$. I due triangoli VV'V'', AA'A'' hanno i lati che si incontrano nei tre punti della retta SS'S''; perciò le rette che ne uniscono i vertici corrispondenti s'incontreranno in un punto J, il quale nel nostro caso della parabola divergente sarà l'intersezione dell'asse delle x colla V'J parallela alla S''A. Si trova $JV = \frac{2g}{1-3g^2}$.

104. Parecchie delle proprietà ora accennate si conservano passando da una curva ad ogni sua collineare, sicchè in tutte le curve del terzo ordine (eccettuate quelle dei generi I. e II.) un pezzo di curva ha tre flessi S, S', S'' in linea retta, ed inoltre tre punti V, V', V'', le cui tangenti passano rispettivamente per quei flessi, cioè sono le rette VS, V'S', V''S''. I lati del triangolo VV'V'' passano pei flessi, e, condotte pei detti flessi anche le loro tangenti A'A'', AA'', AA', le rette VA, V'A', V''A'' s'incontreranno necessariamente in un punto individuato J. — Inoltre questa retta JVA taglia la retta SS'S'' nel punto P in guisa che S, S', P, S'' sono quattro punti armonici; e perciò se uno di essi passa a distanza infinita, gli altri tre comprendono due intervalli eguali. Dicasi lo stesso delle rette JV', A'P', JV'', A''P''. Dal che poi risulta che se uno S dei flessi è a distanza infinita la corrispondente JA è un diametro di simmetria, e che se invece sia a distanza infinita la JA, sarà S il centro di simmetria.

105. Quando si conoscano i tre flessi colle loro tangenti SA'A'', S'AA'', S''AA' sarà facile condurre ciascuna AJ, giacchè questa passa pel punto P tale che SP è media armonica tra le due SS', SS''; essa JA può anche determinarsi mediante il punto B in cui si tagliano le rette S'A', S''A''. Così pure B' è l'intersezione delle SA, S''A'', e B'' delle SA, S'A'. — Viceversa se fosse dato il triangolo AA'A'' ed il punto J, tagliati i lati di quello colle rette A''JD'', A'JD', AJD, il flesso S sarebbe l'intersezione del lato A'A'' colla retta D'D'', S'

l' intersezione di AA'', DD'', ed S'' di AA', DD'. (Nella fig. 8.ª i punti S, A', A'', D sono a distanza infinita). — Il triangolo DD'D'' è inscritto nel triangolo AA'A'', e questo lo è nel triangolo BB'B''. Si ha pure un triangolo QQ'Q' inscritto nel triangolo VV'V''. I cinque triangoli hanno i lati corrispondenti, che si tagliano nei flessi S, S', S'', ed hanno i vertici corrispondenti sulle rette JQABVD, JQ'A'B'V'D', JQ''A''B''V''D''.

106. Le parti della retta JAVD danno il rapporto AV.JD:JV.AD, che si dice projettivo (§. 12.), perchè esso si mantiene invariato in tutte le projezioni, cioè in tutte le figure tra loro collineari. Col mezzo della parabola divergente, che ci serve di tipo (§. 100.) si verifica che
$AV.JD:JV.AD = A'V'.JD':JV'.A'D' = A''V''.JD'':JV''.A''D'' = g^2$;
quindi permutando un flesso coll' altro non si cangia il parametro generico g, il quale determinato per ciascuna curva particolare sarà un carattere distintivo di tutte le curve ad essa collineari, cioè che formano un solo genere. — Conoscendo g e conoscendo i tre flessi e le loro tangenti, i precedenti rapporti daranno il modo di determinare i tre vertici V, V', V''.

107. Il Newton, e dopo di lui il Clairaut ed il Nicole (Hist. de l'Acad. des Sciences pour 1731) ammisero che tutte le curve del terzo ordine possano originarsi coll' ombra delle cinque parabole divergenti della categoria 1. Noi infatti vedemmo che dalle tre parabole I. 1, II. 1, III. 1 derivano per collineazione tutte le curve del terzo ordine baricentrico; ma ci rimangono poscia le parabole espresse dall' equazione
$y^2 = x^3 + 2nx^2 + x$, e queste non sono già due sole, bensì infinite distinte per differente valore di n, e tali che una non può mai convertirsi per collineazione nell' altra. Sicchè non sarebbe giusto il dire che, come dato un circolo se ne possono dedurre coll' ombra tutte le sezioni coniche, così pure descritte cinque parabole se ne possono dedurre tutte le curve del terzo ordine. — Che se si dicesse che veramente le due ultime parabole non sono due sole, ma si riducono a due gruppi, ognuno espresso da quella unica equazione secondo che $n^2 < 1$ oppure $n > 1$; a ciò si risponderebbe che la differenza di forma più

o meno apparente non è una distinzione assoluta, e che se bastasse che le curve sieno espresse da una sola equazione si potrebbe anche dire che tutte le curve del terzo ordine possono originarsi coll' ombra di una sola curva.

108. Secondo la nostra maniera di vedere sono adunque infiniti i generi, di cui ci resta da parlare. Noi li riuniremo in due gruppi che diremo *tribù*, e segneremo coi numeri IV. V.; il che è conforme a quanto facemmo per le specie, che quando (dalla categoria 8. in poi) sono in numero infinito noi riuniamo in famiglie, le quali hanno un comune carattere apparente, e che nulladimeno comprendono infinite specie secondo i valori di uno o due parametri. — In ciascheduna specie avremo i tre soliti parametri, che nascono dall' affinità, ed inoltre il parametro generico, il quale noi supponiamo che abbia preso quel valore particolare che compete al genere, in cui supponiamo compresa la specie.

Tribù IV.

Curve del terzo ordine e della sesta classe. Un solo pezzo con tre flessi in linea retta.

109. Specie IV. 1. *Un solo tratto con due flessi e coi rami parabolici verso il terzo flesso.* La differenza tra questa specie degli infiniti generi appartenenti alla presente tribù e la specie III. 1. non apparisce se non se dall' equazione e dalle relazioni di cui abbiamo di sopra fatto cenno (§. 106.). L' equazione della curva riferita al diametro di simmetria VP (fig. 8.ª) ed alla tangente nel vertice V è

$$y^2 = x\,(x^2 + 2nx + 1),$$

purchè $n^2 < 1$.

110. Possiamo considerare come carattere generico la più piccola radice positiva dell' equazione

$$3g^4 + 8ng^3 + 6g^2 = 1.$$

Quando $n = -1$, g ha tre valori $= 1$, allora la curva ha un nodo, ed è la specie II. 1. — Se $n = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ abbiamo $g = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

in questo caso le tangenti nei due flessi S', S'' sono ambedue parallele al diametro di simmetria, cioè il punto A passa a distanza infinita: questo genere meriterebbe d' essere particolarmente distinto da tutti gli altri; il suo carattere è che le tangenti nei tre flessi s' incontrano in un medesimo punto. — Per $n=0$ si ha $g=0,39333$. — Continuando ad aumentare n, i punti A ed J vanno sempre più avvicinandosi a V. Finalmente se $n=1$, quindi $g=\frac{1}{3}$ si ha $AV=\frac{1}{g}$, $JV=1$, ed il punto J è un punto isolato appartenente alla curva; così si ha il genere III., che è genere intermedio tra quelli della tribù IV. e quelli della tribù V.

111. Le varie specie o famiglie di ciascun genere della tribù IV. si otterranno facendo andare all' infinito l' una o l' altra delle rette della fig. 8.ª

112. Specie IV. 2. *Un solo tratto coi rami iperbolici ordinarj, uno dei tre flessi è il centro di simmetria.* La curva riferita al centro di simmetria, alla sua tangente ed all' assintoto ha l' equazione

$$x^3+2nx^2+xy^2=y.$$

113. Specie IV. 4. *Tre tratti puri coi rami iperbolici rivolti ai tre flessi.* Si hanno pure le altre proprietà accennate alla specie III. 4., eccettochè in luogo d' essere $JA=2.AV$ è in generale $g^2.JV=AV$. — Il Newton separò queste curve nelle tre specie 22.ª, 23.ª e 32.ª; l' ultima delle quali è distinta dall' avere i tre assintoti, che s' incontrano in un solo punto; essa perciò appartiene a quel genere di cui diedi superiormente il carattere $\left(g=\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ di avere le tre tangenti dei flessi, che s' incontrano in un medesimo punto. — Mediante le ombre non si potrebbe mai passare dalla specie 32.ª del Newton alla 22.ª, che corrisponde a $g<\frac{1}{\sqrt{3}}$, od alla 23.ª, che si riferisce agli infiniti generi qualificati da $g>\frac{1}{\sqrt{3}}$. — I primi ed i secondi generi potrebbero riunirsi in due sottotribù separate da quel genere particolare che corrisponde a $g=\frac{1}{\sqrt{3}}$. —

L' equazione delle presenti curve riferite ad uno dei diametri di simmetria, e posta l' origine delle coordinate nel punto D in cui quel diametro incontra l' assintoto A' A'', è

$$xy^2 = (gx + 1)\left(\frac{1 - 2g^2 + g^4}{4g^2}x^2 + \frac{1 - 6g^2 + 5g^4}{4g^3}x + 1\right).$$

114. Specie IV. 7. *Due tratti ciascuno con un flesso, un ramo parabolico ordinario ed un ramo iperbolico verso il terzo flesso.* Anche questo carattere è pienamente uguale a quello della specie III. 7., la quale si distingue da tutte le specie di infiniti generi diversi, che noi comprendiamo sotto il numero IV. 7. solamente perchè quella ha un punto isolato. Queste curve hanno l' equazione

$$xy^2 = x^3 + 2nx + 1.$$

115. Famiglia IV. 8. *Un tratto con due flessi e coi rami iperbolici verso il terzo flesso.* L' equazione è

$$xy^2 = (1 - cx)\left[(1 - 2nc + c^2)x^2 + 2(n - c)x + 1\right].$$

Questa è una famiglia a quattro parametri, perchè n è un parametro generico, che non può mai cangiare mediante la collineazione, la quale invece dà al parametro specifico c un valore quale si voglia.

116. Famiglie IV. 9. A. e B. Gli stessi caratteri come nel genere III. Per tutti quei generi nei quali $g > \frac{1}{\sqrt{3}}$ si può distinguere in ciascheduna di queste due famiglie quella specie, nella quale gli assintoti concorrono in un solo punto.

117. Famiglie IV. 12. 13. 14. Anche queste famiglie hanno gli stessi caratteri, che abbiamo già dati pel genere III.

Tribù V.

Curve del terzo ordine e della sesta classe. Due pezzi; uno con tre flessi, l' altro puro.

118. I generi di questa tribù differiscono da tutti gli altri del terzo ordine per essere le curve costituite da due *pezzi*

essenzialmente staccati; quello che non ha alcun punto singolare lo diremo un' *ovale*, anche quando invece d'essere chiusa sarà aperta alla maniera di una parabola, oppure divisa in due tratti alla maniera dell' iperbola.

119. Specie V. 1. *Un' ovale chiusa. Un tratto con due flessi e coi rami parabolici verso il terzo flesso.* Rispetto al diametro VP si ha (fig. 9.ª)

$$y^2 = x(x^2 + 2nx + 1)$$

essendo $n > 1$. I flessi corrispondono all' ascissa $VP = g$ essendo g la radice positiva della $3g^4 + 8ng^3 + 6g^2 = 1$ ed alla ordinata $PS'' = \frac{1-g^2}{2\sqrt{g}}$. L' asse delle x è tagliato dalla curva, oltre che nel punto V, anche nei due punti U, W appartenenti all' ovale; trasportando in uno di essi l' origine delle coordinate l' equazione conserva la stessa forma, si può quindi dedurne le stesse proprietà relative ai *vertici* U U' U'', W W' W'' le cui tangenti passano pei flessi. Quindi si applicano alle curve della tribù V. le proprietà che abbiamo indicate (§§. 85. 104. 105.) pel genere III. e per la tribù IV., ed esse si estendono a tre terni di vertici e di punti analoghi ai Q, Q', Q''. — Tutti questi punti sono sulle tre rette JA, JA', JA'' ognuna delle quali diviene un diametro di simmetria se passa a distanza infinita il corrispondente flesso.

120. Da questa specie V. 1. come tipo si otterranno, al solito, le altre specie, facendone andare all' infinito l' una o l' altra delle rette indicate nella fig. 9.ª

121. Specie V. 2. *Due tratti puri. Un tratto con tre flessi dei quali uno è il centro di simmetria. I sei rami sono iperbolici ordinarj.* I tre assintoti s' incontrano nel centro di simmetria; presolo per origine delle coordinate, e prese le x sulla tangente, e le y sull' assintoto del terzo tratto si ha l' equazione stessa della IV. 2. $x^3 + 2nx^2y + xy^2 = y$, ma in questa tribù V. è $n > 1$.

122. Specie V. 4. *Ovale chiusa. Tre tratti puri coi rami rivolti ai tre flessi.* Vi sono tre diametri di simmetria.

123. Specie V. 7. A. *Ovale chiusa. Due tratti ciascuno con un flesso, un ramo iperbolico ordinario ed uno iperbolico verso il terzo flesso.*

Specie V. 7. B. *Un tratto puro coi rami parabolici ordinarj. Un tratto con due flessi e coi rami iperbolici verso il terzo flesso. Il secondo pezzo sta tra mezzo al proprio assintoto ed al pezzo parabolico.*

Specie V. 7. C. *Un tratto puro coi rami parabolici ordinarj. Un tratto con due flessi e coi rami iperbolici verso il terzo flesso. L' assintoto sta tra mezzo ai due pezzi di curva.*

124. Famiglia V. 8. *Ovale chiusa. Un tratto con due flessi e coi rami iperbolici verso il terzo flesso.* Può dividersi in due sottofamiglie.

α) Il pezzo coi flessi sta tra l' assintoto e l' ovale.

β) L' assintoto sta tra i due pezzi di curva.

125. Famiglia V. 9. A. *Ovale chiusa. Tre tratti, uno con due flessi e coi rami iperbolici ordinarj, ciascuno degli altri due puro e coi rami iperbolici uno ordinario ed uno verso un flesso.*

Famiglia V. 9. B. *Ovale chiusa. Tre tratti, uno puro coi rami iperbolici ordinarj, ciascuno degli altri due con un flesso e coi rami iperbolici uno ordinario ed uno verso il terzo flesso.*

Famiglia V. 9. C. *Due tratti puri coi rami iperbolici ordinarj. Un tratto con due flessi e coi rami iperbolici verso il terzo flesso.*

126. Famiglia V. 12. A. *Ovale chiusa. Due tratti ciascuno con rami iperbolico e parabolico ordinarj. I tre flessi sono separati in questi due tratti.*

Famiglia V. 12. B. *Un tratto puro coi rami parabolici ordinarj. Un tratto con tre flessi e coi rami iperbolici ordinarj.*

127. Famiglia V. 13. *Ovale chiusa. Un tratto con tre flessi e coi rami iperbolici ordinarj.*

128. Famiglia V. 14. A. *Ovale chiusa. Tre tratti coi rami iperbolici ordinarj; uno ha un flesso, uno ne ha due, l' altro è puro.*

Famiglia V. 14. B. *Due tratti puri coi rami iperbolici ordinarj. Un tratto con tre flessi ed i rami iperbolici ordinarj.*

RIASSUNTO DELLA CLASSIFICAZIONE DELLE CURVE DEL TERZO ORDINE E CONFRONTO CON QUELLA DEL NEWTON.

129. Noi vedemmo che ciascuno dei tre *generi* del terzo *ordine baricentrico* o degli infiniti *generi* del terzo *ordine algebraico* viene a dividersi in alcune particolari *specie*, ed in famiglie, le cui equazioni contengono uno o due parametri, i valori dei quali servono a diversificare, le infinite specie di ciascuna famiglia. — L' equazione di una *specie* contiene quasi sempre tre parametri, pei quali potremo prendere l' angolo delle coordinate, il rapporto tra le due unità, a cui si riferiscono tali coordinate, e la grandezza assoluta di una di queste unità. — Quando si possono individuare nella figura di una curva due direzioni distinte (come sarebbe per esempio un diametro di simmetria e le ordinate ad esso spettanti) il differente angolo tra loro compreso distinguerà le *varietà* appartenenti ad una stessa specie. Poscia il rapporto tra le due unità distinguerà le *forme* di una stessa varietà. Finalmente la grandezza assoluta distinguerà gl' *individui* di una stessa forma.

131. Così per esempio nella *specie* II. 1. (fig. 6.ª) abbiamo la *varietà ad ordinate ortogonali* quando l' angolo tra il diametro di simmetria e le sue ordinate è retto: ed in questa varietà abbiamo la *forma*, nella quale la massima ordinata nel nodo è la terza parte della sua distanza dal punto doppio. — Tutti gli *individui* di questa forma hanno alcune singolari proprietà, che notai nel mio primo Saggio (1835) sul metodo delle equipollenze. Se dicasi $2u$ l' angolo che la tangente in un punto di questa curva forma colla ordinata, sarà $3u$ l' angolo che la stessa ordinata formerà col raggio vettore condotto dal punto della curva al punto fisso del diametro di simmetria, le cui distanze dal vertice V e del punto doppio J sono nel rapporto 1 : 8; e saranno proporzionali alle potenze $(\operatorname{sen} u)^{-3}$, $(\operatorname{sen} u)^{-4}$ il predetto raggio vettore, ed il raggio di curvatura.

131. Questa gradazione nelle generalità e nel conseguente numero dei parametri contenuti nelle suddivisioni, che chiamiamo:

Genere di curve collineari (a cinque parametri), *Specie* di curve affini (a tre parametri), *Varietà* (a due parametri), *Forma* di curve simili (con un solo parametro), *Individui*: è talvolta soggetta a qualche restrizione. — Così la specie della parabola Neiliana (I. 1.) ammette bensì infinite varietà secondo che si fa retto o variamente obliquo l' angolo compreso tra la tangente del regresso e le ordinate, a cui i due rami di curva tendono sempre più a farsi paralleli; ma ciascheduna varietà presenta una sola forma, poichè quantunque si cangiassero tutte le ordinate in uno stesso rapporto (restando invariate le ascisse) non per questo la curva cangerebbe forma, ma resterebbe simile a sè stessa. In questa unica forma (per ciascheduna varietà) si hanno infiniti individui: si può prendere per parametro di grandezza l' ascissa che è uguale alla propria ordinata. — Invece la specie ellisse ammette una sola varietà, poichè si può bensì cangiare l' angolo di due diametri conjugati, ma esistono sempre due assi perpendicolari tra loro conjugati. Questa unica varietà comprende infinite forme, tra le quali si distingue il circolo. La parabola Apolloniana è una specie che contiene una sola varietà ed una sola forma.

132. Nella classificazione delle curve i Geometri hanno avuto riguardo alla presenza e natura dei rami infiniti piuttosto che ai caratteri generici, che rimangono invariati nella collineazione e che ci hanno servito per istabilire le prime divisioni. Pertanto se vogliamo trovare la corrispondenza tra la precedente classificazione e quelle del Newton del Cramer e dell' Eulero, dobbiamo principalmente considerare le nostre quattordici categorie, che non molto differiscono dalle quattordici prime divisioni del Newton, e dalle sedici categorie dell' Eulero (che egli chiama Specie). I generi del Cramer si accordano pienamente colle quattordici categorie del Newton. — Do qui di seguito la corrispondenza della mia classificazione colle specie del Newton, indicando poscia i nomi da lui dati alle categorie, ed i numeri con cui furono indicate dal Cramer e dall' Eulero.

Prospetto delle Linee del terzo ordine, e corrispondenz

CATEGORIE DIPENDENTI DAL PASSARE ALL' INFINITO I SEGUENTI OGGETTI		I TRE PRIMI GENERI SONO DEL TERZO ORDIN			
		Classe terza		Class	
		GENERE I. Regresso e Flesso		II. Punto doppio e Flesso.	
Tangente di un flesso . . .	1	Specie a due parametri	1. Specie 70. del Newton.	Specie a tre parametri	1. Sp. 68.
Diametro di simmetria . .	2		2. Sp. 72.		2. Sp. 59.
Tangente nel punto doppio	3				3. Sp. 66.
Tre flessi	4				
Flesso e { Regresso, . . .	5		5. Sp. 65.		
Flesso e { o punto doppio o isolato . . .	6				6. Sp. 60.
Flesso e tangente ordinaria	7				7. Sp. 54.
Flesso solo	8	Specie a tre parametri	8. Sp. 42.	Famiglie a quattro parametri	8. Sp. 41.
Flesso e due punti ordinarj	9		9. Sp. 12.		9. { A. Nodo chiuso. Sp. 11. B. Nodo aperto. Sp. 13. 19. 30.
Regresso	10		10. Sp. 64.		
o punto doppio o isolato .	11				11. { A. Nodo aperto nel solo punto doppio. Sp. 57. B. Nodo aperto in due luoghi. Sp. 58.
Tangente ordinaria . . . . e punto ordinario	12		12. Sp. 48.		12. { A. Nodo chiuso. Sp. 47. B. Nodo aperto. Sp. 55.
Un solo punto ordinario .	13	Famiglie a 4 parametri	13. Sp. 35.	Famiglie a 5 parametri	13. Sp. 34.
Tre punti ordinarj	14		14. Sp. 3.		14. { A. Nodo chiuso. Sp. 2. B. Nodo aperto. Sp. 7. 8. 24.

(*) Le Categorie XIV. 16. si riferiscono soltanto alla Specie I. 2., le altre Specie della m

coll' enumerazione fattane dal Newton.

BARICENTRICO	DUE TRIBÙ DI GENERI		Categorie	
quarta	Classe sesta			
Tre Flessi in linea retta			del Newton	dell' Eulero
III. Punto isolato.	*IV. Un solo pezzo.*	*V. Due pezzi.*		
1. Sp. 69.	1. Sp. 71.	1. Sp. 67.	XIII.	14
2. Sp. 62.	2. Sp. 38.	2. Sp. 27. (*)	XIV.	16
			XII.	15
4. Sp. ommessa.	4. Sp. 22. 23. 32.	4. Sp. ommessa.	III. IV.	5
			XI.	13
6. Sp. 63.			IX. X.	11. 9
7. Sp. ommessa.	7. Sp. 53.	7. A. Ovale chiusa. Sp. om. B. Ovale aperta. Sp. 55. C. Ovale aperta. Sp. 56.	VIII.	7
8. α) Sp. 43. β) Sp. 44.	8. Sp. 45.	8. α) Sp. 39. β) Sp. 40.	VI.	2
9. A. Flessi uniti. Sp. 13. B. Flessi separati. Sp. ommessa.	9. A. Flessi uniti. Sp. 14. 16. 28. B. Flessi separati. Sp. 15. 17. 29.	9. A. Ovale chiusa e flessi uniti. Sp. 10. B. Ovale chiusa e flessi separati. Sp. omm. C. Ovale aperta. Sp. 20. 21. 31.	II. IV.	4
			XI.	12
11. Sp. 61.			IX. X.	10. 8
12. Sp. 49.	12. Sp. 50.	12. A. Ovale chiusa. Sp. 46. B. Ovale aperta. Sp. 52.	VII.	6
13. Sp. 36.	13. Sp. 37.	13. Sp. 33.	V.	1
14. Sp. 4.	14. Sp. 5. 6. 24.	14. A. Ovale chiusa. Sp. 1. B. Ovale aperta. Sp. 9. 26.	I. IV.	3

Categoria 2. sono porzioni delle Categorie IX X. V. IV. del Newton e delle 10. 8. 1. 3. dell' Eulero.

Categoria 1.ª qualificata dall' avere all' infinito la tangente di un flesso, sicchè si ha un diametro di simmetria = Newton XIII. Le cinque *Parabole divergenti con diametro*. Specie 67. 68. 69. 70. 71. = Cramer IV. j. = Eulero 14.

2.ª Tutte le curve di questa categoria hanno un centro di simmetria. Nel genere I. è all' infinito la tangente del regresso = Newton XIV. *La Parabola cubica*. Sp. 72. = Cramer IV. iij. = Eulero 16.

Nel genere II. sono all' infinito il punto doppio ed il vertice = Newton IX. Uno dei quattro *Iperbolismi dell' iperbola*. Sp. 59. = Cramer III. iv. = Eulero 10.

Nel genere III. sono all' infinito il punto isolato ed un vertice = Newton X. Uno dei tre *Iperbolismi dell' ellisse*. Sp. 62. = Cramer III. iij. = Eulero 8.

Nella tribù IV. è all' infinito un vertice, e due flessi hanno le tangenti parallele = Newton V. Una delle sei *Iperbole difettive senza diametro*. Sp. 38. = Cramer I. j. = Eulero 1.

Nella tribù V. sono all' infinito tre vertici, e due flessi hanno le tangenti parallele = Newton IV. Una delle nove *Iperbole coi tre assintoti che s' incontrano in un punto*. Sp. 27. = Cramer II. iv. = Eulero 3.

3.ª Ha all' infinito una tangente nel punto doppio = Newton XII. *Il Tridente*. Sp. 66. = Cramer IV. ij. = Eulero 15.

4.ª Ha all' infinito i tre flessi, perciò vi sono tre diametri di simmetria = Newton III. Le due *Iperbole ridondanti con tre diametri*. Sp. 22. 23.; ed inoltre un altra delle nove *Iperbole coi tre assintoti concorrenti in un sol punto*. IV. Sp. 32. = Cramer II. iij. e porzione del II. iv. Stirling avea già notato che nella categoria III. del Newton mancavano due specie, che saranno le mie. III. 4., V. 4. = Anche Eulero riunì queste specie sotto il suo numero 5.

5.ª È all' infinito il flesso ed il regresso, quindi la curva ha un diametro di simmetria = Newton XI. Uno dei due *Iperbolismi della parabola*. Sp. 65. = Cramer III. v. = Anche l' Eulero separò questa specie sotto il suo numero 13.

6.ª Nel genere II. è all' infinito il flesso ed il punto doppio; vi è un diametro di simmetria = Newton IX. Un altro dei quattro *Iperbolismi dell' iperbola*. Sp. 60. = Cramer III. iv. = Eulero 11.

6.ª Nel genere III. è all' infinito il flesso e il punto isolato; vi è perciò un diametro di simmetria = Newton X. Un altro dei tre *Iperbolismi dell' ellisse*. Sp. 63. = Cramer III. iij. = Eulero 9.

7.ª È all' infinito una tangente ordinaria che passa per un flesso, ossia la tangente di un *vertice*. Vi è per conseguenza un diametro di simmetria = Newton VIII. Le quattro *Iperbole paraboliche con diametro*. Sp. 53. 54. 55. 56. = Cramer III. iij. osserva che il Newton ommise due specie, che saranno le mie. III. 7. V. 7. A. = Eulero 7.

8.ª Ha all' infinito soltanto un flesso ed ha quindi un diametro di simmetria = Newton VI. Le sette *Iperbole difettive con diametro*. Sp. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. = Cramer I. ij. = Eulero 2.

9.ª Ha all' infinito un flesso e due punti ordinarj, perciò ha un diametro. Le categorie seguenti, come anche le 2. 3. mancano di diametro = Newton II. Le dodici *Iperbole ridondanti con un diametro*. Sp. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. Ed inoltre IV. quattro delle nove *Iperbole ridondanti cogli assintoti concorrenti in un punto*. Sp. 28. 29. 30. 31. = Cramer II. ij. e porzione del II. iv. Stirling notò che nella categoria II. del Newton mancano due specie che saranno le mie. III. 9. B. V. 9. B. = Eulero 4.

10.ª Ha all' infinito il regresso = Newton XI. L' altro dei due *Iperbolismi della parabola*. Sp. 64. = Cramer III. v. = Eulero 12.

11.ª Nel genere II. è all' infinito il punto doppio = Newton IX. Gli altri due dei quattro *Iperbolismi dell' iperbola*. Sp. 57. 58. = Cramer III. iv. = Eulero 10.

11.ª Nel genere III. è all' infinito il punto isolato = Newton X. L' altro dei tre *Iperbolismi dell' ellisse*. Sp. 61. = Cramer III. iij. = Eulero 8.

12.ª Ha all' infinito una tangente ordinaria = Newton VII. Le sette *Iperbole paraboliche senza diametro.* Sp. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. = Cramer III. j. = Eulero 6.

13.ª Ha all' infinito un solo punto ordinario = Newton V. Cinque delle sei *Iperbole difettive senza diametro.* Sp. 33. 34. 35. 36. 37. = Cramer I. j. = Eulero 1.

14.ª Ha all' infinito tre punti ordinarj = Newton I. Le nove *Iperbole ridondanti senza diametro, cogli assintoti che formano un triangolo.* Sp. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. ed inoltre IV. Tre delle nove *Iperbole ridondanti cogli assintoti concorrenti in un punto.* Sp. 24. 25. 26. = Cramer II. j. e porzione del II. iv. = Eulero 3.

133. Nel mio genere I. io conto 9. specie o famiglie di specie; nel genere II. ne conto 15. (poichè suddivido alcune delle 11. categorie spettanti a questo genere); nel genere III. ne conto 12.; in ciascun genere della tribù IV. 10., ed in ciascun genere della V. 15. Così riunendo insieme queste divisioni (che peraltro sono di estensioni molto differenti) si ha il numero totale 61. Secondo i principj del Newton si hanno 78. specie; egli per ommissione ne enumerò soltanto 72.

134. Sarebbe molto opportuno distinguere (§. 110. 113.) quel particolar genere della tribù IV., in cui le tre tangenti dei flessi s' incontrano in un solo punto; abbiamo in questo genere le specie 1. 2. 4. 7. e le famiglie 8, 9 A, 9 B, 11, 12, 13, 14.: il carattere della famiglia 11. è che i tre flessi hanno le tangenti parallele. Questo genere ha quindi 11. divisioni, ed il predetto numero 61. si eleva a 72.

135. Un altro carattere specifico adoperato dal Newton si è che i tre assintoti anzichè formare un triangolo concorrano in un solo punto (ciò non si avvera mai nei generi I. e III.). Quando gli assintoti sono ordinarj si hanno per tal maniera 3. famiglie a tre parametri comprese nelle famiglie a quattro parametri II. 14. B, IV. 14., V. 14. B (sono le specie 25. 24. 26. del Newton.). Quando un assintoto è di flesso e due ordinarj si hanno le particolari specie comprese nelle famiglie

II. 9. B, V. 9. C, e IV. 9. A oppure IV. 9. B (Specie 30. 31. 28. 29. del Newton). Quando gli assintoti sono tutti tre di flessi si ha la nostra specie IV. 4. di quel particolar genere della tribù IV., che abbiamo già (§. 110.) qualificato colla condizione che le tre tangenti dei flessi s' incontrino in un unico punto (Specie 32. del Newton). — Le medesime famiglie quando i tre assintoti formano un triangolo possono suddividersi in due sottofamiglie secondo la differente disposizione dei tratti di curva rispetto a quel triangolo; ciò servì al Newton a diversificare le sue specie 7. 5. 18. 20. 14. 15. 22. dalle 8. 6. 19. 21. 16. 17. 23. — La diversa disposizione delle parti dà pure occasione di dividere le famiglie III. 8., V. 8. nelle sottofamiglie α) β).

136. Altre specie o famiglie si potrebbero stabilire facendo andare all' infinito uno o due di quei punti, che dicemmo vertici della curva, oppure altri punti osservabili della figura qual sarebbe il punto J. — Parmi che per la via da noi seguita, assunta una curva come tipo di un genere, si venga a trovare facilmente tutte le specie o famiglie di specie, che tra loro differiscono per qualche essenziale carattere, e ciò senza pericolo d' incorrere in quelle ommissioni, che passarono inavvertite allo stesso Newton. I caratteri specifici dipendenti dal numero e natura dei rami infiniti si riconoscono per tal maniera più speditamente di quello sia coll' esame delle equazioni esprimenti le curve. Forse che questa Memoria e il Prospetto riassuntivo della classificazione presentano una sufficiente idea delle variate forme, che prendono le curve del terzo ordine: non sarebbe del resto difficile aggiungere in 72. figure (§. 134.) un saggio di tali forme. — Le figure 7.ª e 9.ª sono alquanto difformate per non farle troppo grandi.

Diametri e polari nelle curve del terzo ordine.

137. Come carattere distintivo delle curve abbiamo adoperati soltanto quei diametri, che a toglimento di equivoco, abbiamo detti *di simmetria*. È noto, dal Newton in poi, che le

curve algebraiche hanno per ogni direzione di ordinate un diametro rettilineo tale che per ciascuna ascissa contata sul diametro la somma algebraica di tutte le ordinate è nulla. Colla omologia o collineazione questo teorema si generalizza; sicchè, parlando delle curve del terzo ordine, se da un dato punto si tiri ad arbitrio una retta, la quale tagli la curva in tre punti, il centro armonico di queste tre intersezioni rispetto al primo punto appartiene ad una retta, che dicesi la *polare* del punto dato. Perlochè un diametro può dirsi *la polare* del punto a distanza infinita, a cui si dirigono le ordinate: in tal caso il centro armonico diventa, come è noto, centro di gravità. — Secondo i principj da me adottati nel metodo delle equipollenze, il precedente teorema sussiste eziandio quando la retta condotta pel punto dato taglia la curva in un solo punto, purchè si considerino anche le altre due loro *intersezioni fittizie*.

138. La polare di un dato punto rispetto ad una curva del terzo ordine è anche la polare del medesimo punto rispetto al sistema di tre tangenti della curva, i cui punti di contatto sieno in linea retta col punto dato. Così in particolare la polare di un punto a distanza infinita è polare del medesimo punto anche rispetto ai tre assintoti della curva: cioè i diametri della curva lo sono eziandio dei tre assintoti.

139. Colla derivazione polare o di reciprocità i precedenti teoremi conducono agli altri. Se per un punto arbitrario di una data retta si tirano le n tangenti ad una curva di $n.^{esima}$ classe, la retta centrale-armonica di queste n tangenti, rispetto a quella retta data, passa per un punto, che dicesi il *polo* della retta data. Esso è il polo della medesima anche rispetto al sistema degli n punti di contatto delle tangenti condotte da un punto di essa data retta. In particolare: il polo della retta, che sta tutta a distanza infinita, è il centro di gravità delle intersezioni di una retta, che passa per esso con n tangenti tra loro parallele, ed è eziandio il centro di gravità dei punti di contatto di tali sistemi di tangenti parallele.

140. Nelle curve del terzo ordine un punto qualunque di una tangente in un flesso, nel regresso, oppure nel punto doppio, ha la sua polare che passa per tale flesso, regresso, o punto doppio. Infatti le tre intersezioni di quella tangente colla curva si riuniscono insieme nel punto di contatto. Viene da ciò che nelle nostre specie I. 1., II. 1., III. 1., IV. 1., V. 1., I. 2., II. 3. le polari dei punti posti a distanza infinita (vale a dire i diametri) sono tutte parallele e dirette verso il punto singolare, che sta a distanza infinita. — Le polari di tutti i punti della tangente nel regresso coincidono insieme nella retta, che unisce il regresso col flesso. Viene da ciò che nella specie I. 2. una sola è la polare di tutti i punti all' infinito.

141. Nelle curve del I. genere tutte le polari dei punti di una retta condotta pel regresso passano per l' intersezione della tangente del regresso colla tangente in quell' altro punto della curva, che si trova in quella prima retta. Infatti queste due tangenti, una delle quali tien luogo di due, costituiscono quel sistema di tre tangenti menzionate al §. 138.; ed è evidente che ogni polare rispetto al sistema di tre rette, che hanno un punto comune, passa essa pure pel medesimo punto. Viene da ciò che nelle specie I. 5., I. 10. le polari dei punti all' infinito (cioè i diametri) passano per l' intersezione dei due assintoti.

142. Nel II. genere spetta la stessa predetta proprietà ad ogni retta condotta pel punto doppio; poichè non difficilmente si dimostra che tutte le polari dei punti di tal retta, sia rispetto alla curva, sia rispetto alle due tangenti del punto doppio ed alla tangente nel terzo punto d' intersezione, passano per un punto fisso. Viene da ciò che nelle specie II. 6., II. 11. le polari dei punti all' infinito passano per quel punto del terzo assintoto, che sta equidistante tra i due assintoti paralleli.

143. Una simile proprietà spetta agli altri due Iperbolismi III. 6., III. 11. ottenuti facendo andare all' infinito il punto isolato.

144. Le polari dei punti all' infinito passano evidentemente per un unico punto anche nelle Iperbole, i cui tre assintoti si tagliano in un solo punto; il che avviene (§. 135.) nella specie IV. 4. del particolar genere qualificato da $g = \frac{1}{\sqrt{3}}$; ed inoltre in alcune specie delle categorie 9, 14. La stessa proprietà delle polari dei punti all' infinito ha pur luogo in alcune specie delle nostre categorie 8, 13; ed invece non può mai verificarsi nelle Iperbole paraboliche delle categorie 7 e 12.