MEMORIE

DELLA

SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA

Tomo XXV. Parte I.ª

SU LE OPERAZIONI INVERSE DELL' ARITMETICA

MEMORIA

DEL SOCIO ATTUALE

PROF. GASPARE MAINARDI.

Ricevuta il 17 Maggio 1849.

La regola colla quale si eseguisce la divisione dei numeri richiede dei tentativi che riescono molte volte assai penosi; e siccome la grandezza delle cifre maggiori di un quoziente non dipende da quella di molte cifre minori sia del dividendo come del divisore, non poche delle operazioni che si fanno per determinare le cifre di ordine più elevato sono inutili all'oggetto immediato, e lo sono assolutamente nei calcoli approssimati. Anche la estrazione delle radici incorre nei medesimi difetti, che riescono ancora più molesti. Meditando queste imperfezioni gravissime dell'Aritmetica venni condotto a trovare dei metodi, che mi parvero assai più semplici di quelli in uso, sia perchè non richiedono che pochi e facili tentativi, sia perchè esigono le sole operazioni successivamente essenziali, epperò ne sopprimono molte inutili nei calcoli di approssimazione. Risolvo poi incidentemente alcune questioni ancora non ben dichiarate, esamino una regola dovuta al celebre Fourier, ed accenno un metodo aritmetico per risolvere le equazioni algebraiche numeriche. Nella presente Memoria considero unicamente le operazioni inverse dell'Aritmetica: altrove esporrò alcune cose su le operazioni dirette, le quali mi sembrano utili a rettificare e completare questa scienza fondamentale.

Indicherò le cifre di un numero con lettere, ponendovi al piede degli indici numerici, e distinguerò il loro ordine moltiplicandole per una debita potenza del numero 10. In conseguenza la scrittura $A_1 + A_2 . 10 + A_3 10^2 \ldots$

$$+ \frac{B_1}{10} + \frac{B_2}{10^2} + \frac{B_3}{10^3} \ldots$$

esprimerà un numero composto di una parte intera della quale A_1 sono le unità, A_2 le decine, A_3 le centinaja...., e di una parte fratta di cui B_1 sono i decimi, B_2 i centesimi ec. Qualche volta ancora rappresenterò un numero scrivendo delle lettere di seguito le une alle altre.... $A_4 A_3 A_2 A_1$, quasi fossero le vere sue cifre.

Della Divisione.

Rappresento coi tre polinomj

$$A_1 + A_2 . 10 + A_3 . 10^2 + \ldots,\ a_1 + a_2 . 10 + a_3 . 10^2 + \ldots,\ x_1 + x_2 . 10 + x_3 . 10^2 \ldots$$

il dividendo, il divisore ed il quoziente, il quale suppongo esatto. Se il numero a_1 è pari o il 5, per cui il dividendo ed il divisore sarebbero entrambi divisibili per quel numero, lo sopprimo anzichè intraprenderne la divisione. Esamino il prodotto

$$a_1 x_1 + (a_2 x_1 + a_1 x_2) 10 + (a_3 x_1 + a_2 x_2 + a_1 x_3) 10^2 +$$
$$(a_4 x_1 + a_3 x_2 + a_2 x_3 + a_1 x_4) 10^3 + \ldots\ldots$$

e siccome $a_1 x_1$ avrà generalmente due cifre, suppongo $a_1 x_1 = a_1 + b_1 . 10$: sarà $a_1 = A_1$ che è la cifra delle unità nel dividendo, e b_1 il porto da unire ad $a_2 x_1 + a_1 x_2$. Anche la somma $b_1 + a_2 x_1 + a_1 x_2$ sarà composta delle unità A_2 e di decine b_2, epperò suppongo

$$a_1 x_1 = A_1 + b_1 . 10\ ; \qquad b_1 + a_2 x_1 + a_1 x_2 = A_2 + b_2 . 10\ ;$$
$$b_2 + a_3 x_1 + a_2 x_2 + a_1 x_3 = A_3 + b_3 . 10\ ;\ \text{ec. ec.}$$

Da queste equazioni raccolgo che x_1 moltiplicato per a_1, ultima cifra del divisore, deve dare un prodotto del quale

conosco le unità A_1. Siccome a_1 non è nè il 5 nè un pari, osservando la tavola di Pitagora, la quale serve alla moltiplicazione dei numeri semplici, vedo che x_1 viene ad essere determinato assolutamente. Conoscendo x_1, quindi b_1, siccome $a_1 x_2 = A_2 + b_2 . 10 - a_2 x_1 - b_1$, vengo pure a sapere quale sia la cifra delle unità del prodotto $a_1 x_2$, dunque ne determino x_2 epperò anche b_2: poi colla terza equazione trovo x_3 e b_3, quindi x_4 e b_4, ec. ec.

Dividiamo 9638784 per 2789.

Siccome $a_1 x_1 = 9.x_1 = 4 + b_1 . 10$, il prodotto $9.x_1$ deve avere per cifra semplice il 4, e colla tavola di Pitagora trovo $x_1 = 6$, epperò $b_1 = 5$;

quindi $b_1 + a_2 x_1 + a_1 x_2 = 5 + 6.8 + 9.x_2 = A_2 + b_2 . 10$, ossia $53 + 9 x_2 = 8 + b_2 . 10$, $9 x_2 = 8 - 3 + (b_2 - 5) 10 = 5 + (b_2 - 5) 10$ e siccome il prodotto $9 x_2$ deve avere per ultima cifra il 5 ne deduco essere $x_2 = 5$, $b_2 - 5 = 4$, $b_2 = 9$.

Trovo $b_2 + a_3 x_1 + a_2 x_1 + a_1 x_3 = 9 + 7.6 + 8.5 + 9 x_3 = 91 + 9 x_3 = A_3 + b_3 . 10 = 7 + b_3 . 10$,

e siccome il prodotto $9 x_3$ deve avere per cifra semplice $7 - 1 = 6$, $x_3 = 4$, $b_3 = 12$

Formo $b_3 + a_4 x_1 + a_3 x_2 + a_2 x_3 + a_1 x_4 =$
$12 + 4.8 + 5.7 + 2.6 + 9 x_4 = 91 + 9x_4 = A_4 + b_4 . 10 = 8 + b_4 . 10$,
e perchè $9 x_4$ abbia $8 - 1 = 7$ per cifra semplice, $x_4 = 3$, $b_4 = 11$, il quoziente cercato sarà 3456; il quale abbiamo determinato senza tentativi, impiegando le quattro cifre minori del dividendo e del divisore, ed eseguendo nove moltiplicazioni di numeri semplici, e $2 + 3 + 4 = 9$ somme. Le altre equazioni

$$b_4 + a_4 x_2 + a_3 x_3 + a_2 x_4 = A_5 + b_5 . 10,$$
$$b_5 + a_4 x_3 + a_3 x_4 = A_6 + b_6 . 10, \quad b_6 + a_4 x_4 = A_7$$

offrono un mezzo diretto di verificazione: e con esse troviamo

$$\begin{array}{lll} 7 + 3.8 + 4.7 + 5.2 = 73 = A_5 + b_5 10, & A_5 = 3, & b_5 = 7 \\ 7 + 7.3 + 2.4 \quad = 36 = A_6 + b_6 10, & A_6 = 6, & b_6 = 3 \\ 3 + 2.3 \quad = 9 = A_7 \quad , & A_7 = 9. & \end{array}$$

Eseguiamo una seconda divisione disponendo la operazione coll' ordine che sembra il più comodo

Dividendo 709264029 $\frac{\text{divisore } a_4 a_3 a_2 a_1 = 1483}{\text{quoziente } x_6 x_5 x_4 x_3 x_2 x_1 = 478263}$.

Siccome $a_1 x_1 = 3 x_1$ deve avere per cifra semplice $A_1 = 9$, $x_1 = 3$, $b_1 = 0$.

Formo $a_2 x_1 = 24$, levo le 4 unità da $A_2 = 2$, e non potendo levo 4 da 12, resta 8. Il prodotto $a_1 x_2 = 3 x_2$ avendo per ultima cifra 8, $x_2 = 6$: $a_2 x_1 + 9_1 x_2 = 24 + 18 = 42$, $b_2 = 4$.

Formo moltiplicando in croce, $a_3 x_1 + a_2 x_2 = 4.3 + 8.6 = 60$, vi unisco il porto $b_2 = 4$, ho 64: levo 4 da $A_3 = 0$, ossia 4 da 10 ho 6, e siccome $a_1 x_3 = 3 x_3$ ha per ultima cifra il 6, $x_3 = 2$; aggiungo $a_1 x_3 = 6$ ad $a_3 x_1 + a_2 x_2 + b_2 = 64$, ho 70, quindi il porto $b_3 = 7$.

Formo $a_4 x_1 + a_3 x_2 + a_2 x_3 = 1.3 + 6.4 + 2.8 = 43$, cui unito il porto 7, ho 50: levo 0 da $A_4 = 4$ e perchè l' avanzo 4 è l' ultima cifra di $3 x_4$ sarà $x_4 = 8$. Aggiungo $3 x_4 = 24$ a 50 ed ho il porto $b_4 = 7$.

Formo $a_4 x_2 + a_3 x_3 + a_2 x_4 = 1.6 + 4.2 + 8.8 = 78$, vi unisco $b_4 = 7$, ed ho 85: levo 5 da $A_5 = 6$ resta 1, per cui $3 x_5$ ha per ultima cifra l' unità, $x_5 = 7$. Aggiungo $3 x_5 = 21$ a 85 ed ottengo il porto $b_5 = 10$.

Formo $a_4 x_3 + a_3 x_4 + a_2 x_5 = 1.2 + 4.8 + 8.7 = 90$, vi unisco il porto 10, ho 100: levo 0 da $A_6 = 2$, onde da $3 x_6$ desumo $x_6 = 4$. Aggiungo $3 x_6 = 12$ a 100 ed ho il porto $b_6 = 11$.

Trovato il quoziente, a riprova, formo $a_4 x_4 + a_3 x_5 + a_2 x_6 = 1.8 + 4.7 + 4.8 = 68$, cui sommato 11, ho 79, onde $A_7 = 9$, ad $a_4 x_5 + a_3 x_6 = 23$ unisco il porto $b_7 = 7$, ottengo 30 per cui $A_8 = 0$.

Ad $a_4 x_6 = 4$ aggiungo il porto $b_8 = 3$ ed ho $A_9 = 7$.

Il quoziente di sei cifre si è trovato senza tentativi, impiegando sei cifre del dividendo e tutto il divisore: abbisognarono

18 moltiplicazioni di numeri semplici, e 11 somme. Col metodo comune avremmo eseguite $4.6=24$ moltipliche, $3.6=18$ somme ed altrettante sottrazioni. Se però alla nostra regola aggiungiamo la prova, si fanno altre 6 moltiplicazioni ed altre 6 somme.

Se la divisione non si può effettuare, col nostro metodo veniamo a trovare quel moltiplicatore del divisore che dà il prodotto più piccolo, le ultime cifre del quale formano il dividendo. Adduciamone una prova di fatto.

Dividendo 763732 $\quad \begin{array}{ll} \text{divisore} & a_3\, a_2\, a_1 = 329 \\ \text{quoto} & x_6\, x_5\, x_4\, x_3\, x_2\, x_1 = 585908 \end{array}$.

Siccome $A_1=2$, considerando il prodotto $a_1 x_1 = 8 x_1$ che deve avere 2 per cifra semplice, ne deduco $x_1=9$, $b_1=7$.

Formo $b_1 + a_2 x_1 = 7+16=23$: levo 3 da $A_2=3$, ho zero: dunque $a_1 x_2 = 0$, $x_2=0$, $b_2=2$.

Formo $b_2 + a_3 x_1 + a_2 x_2 = 3.8+2=26$: tolgo 6 da $A_3=7$, ho 1: onde dal prodotto $a_1 x_3 = 9 x_3$ desumo $x_3=9$; $b_2 + a_3 x_1 + a_2 x_2 + a_1 x_3 = 26+81=107$, $b_3=10$.

Formo $b_3 + a_3 x_2 + a_2 x_3 = 10+18=28$: levo 8 da $A_4=3$, ossia 8 da 13, ho 5: onde da $9 x_4$ desumo $x_4=5$, e siccome $28+9x_4=73$, $b_4=7$.

Formo $b_4 + a_3 x_3 + a_2 x_4 = 7+2.5+3.9=44$: levo 4 da $A_5=6$, resta 2, per cui da $9x_5$ deduco $x_5=8$, e siccome $44+9x_5=116$, $b_5=11$.

Formo $b_5 + a_3 x_4 + a_2 x_5 = 11+2.8+3.5=42$: levo 2 da $A_6=7$, resta 5, onde $x_6=5$.

Avendo impiegate tutte le cifre del dividendo, l' operazione si arresta: ed avrò le altre cifre maggiori del vero prodotto mediante le solite equazioni.

Dal numero $42+a_1 x_6=87$ ottengo $b_6=8$.

Da $8+a_3 x_5 + a_2 x_6 = 42$ ricavo $A_7=2$, $b_7=4$

$4+a_3 x_6 \quad = 19 \qquad A_8=9$, $A_9=1$

e finalmente ho il numero $192763732 = 329 \times 585908$.

Generalmente il dividendo non contiene esattamente il divisore, e si vuole conoscere il maggior numero di volte che questo è contenuto in quello, non che l' eccesso del dividendo sul vero prodotto. Siccome le ultime cifre del dividendo dipendono in parte dalle cifre del vero prodotto, in parte da quelle della differenza incognita, la quale può essere qualunque intero più piccolo del divisore, non è possibile desumere dalle cifre minori del dividendo le minori del quoto, epperò bisogna invertere l' ordine della operazione, come insegna il metodo comune, al quale crediamo di poter surrogarne altro che prendo a dimostrare.

Devo prepararmi alcune premesse la prova delle quali si semplifica impiegando i segni dell' algebra.

Indico con A un numero maggiore di un altro B, non divisibile per questo; chiamo Q il quoto, B_1 il resto della divisione per cui $A = BQ + B_1 = B(Q+1) - (B - B_1)$.

Dimostrerò che uno almeno dei prodotti BQ, $B(Q+1)$ ha tante cifre a sinistra identiche con altrettante di A, quante sono quelle di Q meno una, ovvero due di meno.

Suppongo $BQ = a_m\, a_{m-1} \ldots\ldots a_{n+1}\, a_n \ldots\ldots a_2\, a_1$

$B_1 = \qquad\qquad\qquad\qquad b_n \ldots\ldots b_2\, b_1$.

Sommando questi numeri, se $a_{n+1} < 9$, le cifre $a_{n+2}, a_{n+3} \ldots a_m$ in numero $m - n - 1$ saranno le stesse nei due numeri BQ, $BQ + B_1 = A$. Ma se B ha n cifre, Q ne ha r, BQ ne avrà $n + r$ ovvero $n + r - 1$, quindi essendo $m = n + r$, $r = m - n$; se $m = n + r - 1$, $r = m - n + 1$. Dunque il prodotto A avrà tante cifre a sinistra identiche con altrettante cifre di BQ, quante sono quelle del quoto Q meno una ovvero meno due secondo che $m = n + r$, o $m = n + r - 1$. Ma la cifra a_{n+1} del prodotto BQ, e molte altre che la precedono a sinistra ponno essere tutte eguali al numero 9, dippiù $a_n + b_n$ col porto dovuto alle somme antecedenti $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2 \ldots\ldots$ essere non minore di 10.

Supponiamo $BQ = a_{m+r_1+n_1}\, a_{m+r_1+n_1-1} \ldots\ldots a_{r_1+n_1+1}\, 9_{r_1+n_1} \ldots\ldots$

(1) $\qquad 9_{n_1+1}\, a_{n_1}\, a_{n_1-1} \ldots\ldots a_2\, a_1$

$\qquad B_1 = \qquad b_{n_1}\, b_{n_1-1} \ldots\ldots b_2\, b_1$

ove ho messe delle lettere al piede della cifra 9 per indicarne il numero ed il posto. Sommando BQ con B_1, siccome $a_{n_1}+b_{n_1}$ non <10, avremo il porto 1, che aggiunto a 9_{n_1+1} dà 10, quindi nuovamente il porto 1, e così più volte, per cui

(2) $\quad A = BQ + B_1 = a_{m+r_1+n_1} \ldots\ldots (a_{n_1+r+1}+1)\, o_{n_1+r_1}\, o_{n_1+r_1-1} \ldots$

$\qquad o_{n_1+1}\,(a_{n_1}+b_{n_1}-10) \ldots\ldots (a_1+b_1)$

Se $\qquad B = c_{n_1+s_1} \ldots\ldots c_{n_1+1}\, c_{n_1}\, c_{n_1-1} \ldots\ldots c_2\, c_1 .$

Sommando $\qquad BQ = a_{m+r_1+n_1} \ldots\ldots a_{n_1+r_1+1}\, 9_{n_1+r_1} \ldots\ldots$

(3) $\qquad 9_{n_1+s_1} \ldots\ldots 9_{n_1+1}\, a_{n_1}\, a_{m-1} \ldots\ldots a_2\, a_1$

$\qquad B = \qquad c_{n_1+s_1} \ldots\ldots c_{n_1+1}\, c_{n_1}\, c_{n_1-1} \ldots\ldots c_2\, c_1 .$

Siccome è almeno $c_{n_1+s_1} = 1$, $9_{n_1+s_1} + c_{n_1+s_1}$ non <10, da $9_{n_1+s_1+1}$ fino a $9_{n_1+r_1}$ almeno, tutte queste cifre eguali a 9 daranno tanti zeri nella somma: sarà

(4) $\quad B\,(Q+1) = a_{m+r_1+n_1} \ldots\ldots (a_{n_1+r_1+1}+1)\, o_{n_1+r_1} \ldots\ldots$

$\qquad o_{n_1+s_1+1}\, a_{n_1+s_1}\, a_{n_1+s_1-1} \ldots\ldots a_2\, a_1 ,$

epperò ascendendo dalla cifra $o_{n_1+s_1+1}$ fino ad $a_{m+r_1+n_1}$ il prodotto $B(Q+1)$ avrà $m+r_1+n_1-(n_1+s_1) = m+r_1-s_1$ cifre eguali ad altrettante del numero A. Ma per supposto A è dotato di $m+r_1+n_1$ cifre, B di n_1+s_1, Q ne avrà $m+r_1-s_1$, ovvero $m_1+r_1-s_1-1$: dunque A e $B(Q+1)$ avranno a sinistra o tante cifre identiche quante sono quelle del quoto, ovvero una di meno.

Passiamo ad una seconda preposizione. Indico con

$$a_{n+1}\,10^n + a_n\,10^{n-1} \ldots\ldots + a_{n-s+1}\,10^{n-s} + a_{n-s}\,10^{n-s-1} + \ldots\ldots$$
$$+ a_2\,10 + a_1$$

$$x_r\,10^{r-1} + x_{r-1}\,10^{r-2} \ldots\ldots + x_{r-s+2}\,10^{r-s+1} + x_{r-s+1}\,10^{r-s} + \ldots\ldots$$
$$+ x_2\,10 + x_1$$

$$(a_{n+r} + b_{n+r}\,10)\,10^{n+r-1} + a_{n+r-1}\,10^{n+r-2} + a_{n+r-2}\,10^{n+r-3} + \ldots\ldots$$
$$+ a_{n+1}\,10^n + a_n\,10^{n-1} \ldots\ldots + a_2\,10 + a_1$$

il divisore, il quoto ed il vero prodotto.

Siccome $a_{n+1}\,x_r$ col porto b_{n+r-1} dei prodotti antecedenti deve eguagliare $a_{n+r} + b_{n+r}\,.\,10$: il prodotto $a_n\,x_r + a_{n+1}\,x_{r-1}$ col porto b_{n+r-2} dei prodotti inferiori deve dare un numero $a_{n+r-1} + b_{n+r-1}\,.\,10$, ecc. Poniamo le equazioni

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{array}{l}
a_{n+1}\,x_r + b_{n+r-1} = a_{n+r} + b_{n+r}\,.\,10\\
a_{n+1}\,x_{r-1} + a_n\,x_r + b_{n+r-2} = a_{n+r-1} + b_{n+r-1}\,.\,10\\
a_{n+1}\,x_{r-2} + a_n\,x_{r-1} + a_{n-1}\,x_r + b_{n+r-3} = a_{n+r-2} + b_{n+r-2}\,.\,10\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{n+1}\,x_{r-s+1} \ldots + a_{n-s+2}\,x_r + b_{n+r-s} = a_{n+r-s+1} + b_{n+r-s+1}\,.\,10\\
a_{n+1}\,x_{r-s} + a_n\,x_{r-s+1} \ldots + a_{n-s+1}\,x_r + b_{n+r-s-1} =\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{n+r-s} + b_{n+r-s}\,.\,10\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

e sarà

$$(\beta)\quad \left\{\begin{array}{l}
a_{n+1}\,x_r\,10^{n+r-1} + (a_{n+1}\,x_{r-1} + a_n\,x_r)\,10^{n+r-2} +\\
(a_{n+1}\,x_{r-3} + \ldots + a_{n-s}\,x_r)\,10^{n+r-s} + \ldots\\
+ (a_{n+1}\,x_{r-s} \ldots + a_{n-s+1}\,x_r)\,10^{n+r-s-1} +\\
(a_{n+1}\,x_{r-s-1} \ldots + a_{n-s}\,x_r)\,10^{n+r-s-2} +\\
(a_{n+1}\,x_{r-s-2} \ldots + a_{n-s-1}\,x_r)\,10^{n+r-s-3} + \ldots\\
+ (a_3\,x_1 + a_2\,x_2 + a_1\,x_3)\,10^2 + (a_2\,x_1 + a_1\,x_2)\,10 + a_1\,x_1 =\\
= (a_{n+r} + b_{n+r}\,.\,10)\,10^{n+r-1} + a_{n+r-1}\,10^{n+r-2} + a_{n+r-2}\,10^{n+r-3} + \ldots\\
+ (a_{n+r-s+2} + b_{n+r-s+2}\,.\,10 - b_{n+r-s+1})\,10^{n+r-s+1} +\\
(a_{n+r-s+1} + b_{n+r-s+1}\,.\,10 - b_{n+r-s})\,10^{n+r-s} +\\
(a_{n+r-s} + b_{n+r-s}\,.\,10 - b_{n+r-s-1})\,10^{n+r-s-1} +\\
+ (a_{n+1}\,x_{r-s-1} + a_n\,x_{r-s} + \ldots + a_{n-s}\,x_r)\,10^{n+r-s-2} +\\
(a_{n+r-s-2} + b_{n+r-s-2}\,.\,10)\,10^{n+r-s-3} \ldots + a_3\,10^2 + a_2\,10 + a_1\,,
\end{array}\right.$$

e siccome $10 > x_{r-s-1}$, $a_{n+1}\,.\,10\,.\,10^{n+r-s-2} > a_{n+1}\,x_{r-s-1}\,.\,10^{n+r-s-2}$

$$a_n\,.\,10^{n+r-s-2} > a_{n+r-s-2}\,.\,10^{n+r-s-3} + \ldots + a_2\,.\,10 + a_1\,,$$

quindi $(a_{n+1}.10+a_n)\,10^{n+r-s-2}+$

$$b_{n+r-s-2}.10^{n+r-s-2}>a_{n+1}\,x_{r-s-1}.10^{n+r-s-2}+$$

$$(a_{n+r-s-2}+b_{n+r-s-2}.10)\,10^{n+r-s-3}\ldots\ldots+a_2.10+a_1.$$

Se $a_{n+r-s-1}$ è una delle cifre comuni al dividendo ed al vero prodotto, sarà $n+r-s-1>n+2$, ossia $r>s+3$, $n+r-s-3>n$, la parte $a_{n+r-s-2}.10^{n+r-s-3}+\ldots\ldots+A_2\,10+A_1$ del dividendo sarà più grande del divisore $a_{n+1}\,10^n+\ldots\ldots+a_2\,10+a_1$: e siccome il prodotto vero supera il dividendo diminuito del divisore sarà molto più maggiore del numero

$$(\gamma)\qquad (a_{n+r}+b_{n+r}.10)\,10^{n+r-1}+a_{n+r-2}.10^{n+r-2}\ldots\ldots+$$
$$a_{n+r-s}.10^{n+r-s-1}+a_{n+r-s-1}.10^{n+r-s-2}.$$

E perchè $(\theta)=(a_{n+r}+b_{n+r}.10)\,10^{n+r-1}+a_{n+r-2}.10^{n+r-2}\ldots\ldots+$

$$(a_{n+r-s}-b_{n+r-s-1})\,10^{n+r-s-1}$$

$$+(a_{n+1}\,x_{r-s-1}+a_n\,x_{r-s}+a_{n-1}\,x_{r-s+1}\ldots\ldots+a_{n-s}\,x_r)\,10^{n+r-s-2}$$

$$+(a_{n+r-s-2}+b_{n+r-s-2}.10)\,10^{n+r-s-3}+a_{n+r-s-3}.10^{n+r-s-4}\ldots\ldots+$$
$$a_2\,10+a_1$$

$$<(a_{n+r}+b_{n+r}.10)\,10^{n+r-1}+a_{n+r-2}.10^{n+r-2}\ldots\ldots+$$
$$(a_{n+r-s}-b_{n+r-s-1})\,10^{n+r-s-1}$$

$$+(a_n\,x_{r-s}+a_{n-1}\,x_{r-s+1}\ldots\ldots+a_{n-s}\,x_r)\,10^{n+r-s-2}+$$
$$(a_{n+1}\,10+a_n)\,10^{n+r-s-2}+b_{n+r-s-2}.10^{n+r-s-2}$$

dunque quest' ultimo numero è maggiore di (γ), epperò

$$(\delta)\qquad b_{n+r-s-2}+a_n\,(x_{r-s}+1)+a_{n-1}\,x_{r-s+1}\ldots\ldots+$$
$$a_{n-s}\,x_r>a_{n+r-s-1}+(b_{n+r-s-1}-a_{n+1})\,10.$$

Ciò premesso, supponiamo che col mezzo delle equazioni (α) siano determinate le cifre x_r, x_{r-1}, $x_{r-2}\ldots\ldots$ fino ad x_{r-s+1}; la seguente x_{r-s} dovrà rendere soddisfatte le due equazioni

$$(\varepsilon)\quad \begin{cases} b_{n+r-s-1} + a_{n+1}\, x_{r-s} + a_n\, x_{r-s+1} + a_{n-1}\, x_{r-s+2} \ldots + \\ \qquad\qquad a_{n-s+1}\, x_r = a_{n+r-s} + b_{n+r-s} \,.\, 10 \\ b_{n+r-s-2} + a_{n+1}\, x_{r-s-1} + a_n\, x_{r-s} + a_{n-1}\, x_{r-s+1} \ldots + \\ \qquad\qquad a_{n-s}\, x_r = a_{n+r-s-1} + b_{n+r-s-1} \,.\, 10. \end{cases}$$

Siccome nella prima equazione (a) il numero $a_{n+r} + b_{n+r}\, 10$ rappresenta la prima o le prime due cifre del dividendo, conoscendo x_r determineremo b_{n+r-1}; quindi con x_r, x_{r-1} si trova b_{n+r-2}, ecc. per cui pervenuti alla ricerca di x_{r-s} sarà noto b_{n+r-s}.

Supponiamo conosciuto il valore di x_{r-s}: se nella prima equazione (ε) porremo $x_{r-s} + 1$ per x_{r-s}, e $b_{n+r-s-1} - a_{n+1}$ in luogo di $b_{n+r-s-1}$ quella equazione sarà tutt' ora soddisfatta. Ma dalla seconda avremo

$$b_{n+r-s-2} + a_n\,(x_{r-s} + 1) + a_{n-1}\, x_{r-s+1} + \ldots + a_{n-s}\, x_r$$
$$\text{non} > a_{n+r-s-1} + (b_{n+r-s-1} - a_{n+1})\, 10,$$

la quale relazione contraddice alla condizione (δ), epperò il vero valore di x_{r-s} deve essere il più grande compatibile colle due equazioni (ε), ossia

$$b_{n+r-s-1} + a_{n+1}\, x_{r-s} + a_n\, x_{r-s+1} \ldots + a_{n-s+1}\, x_r = a_{n+r-s} + b_{n+r-s} \,.\, 10$$

$$(\iota)\qquad a_n\, x_{r-s} + a_{n-1}\, x_{r-s+1} \ldots + a_{n-s}\, x_r \ \text{non} > a_{n+r-s-1} + b_{n+r-s-1} \,.\, 10,$$

quindi $$(a_{n+1}\, 10 + a_n)\, x_{r-s} + (a_n \,.\, 10 + a_{n-1})\, x_{r-s+1} \ldots + (a_{n-s+1} \,.\, 10 + a_{n-s})\, x_r$$

$$(\xi)\qquad \text{non} > b_{n+r-s} \,.\, 10^2 + a_{n+r-s} \,.\, 10 + a_{n+r-s-1}\,.$$

Da queste relazioni concludiamo che per determinare x_{r-s}, oltre le operazioni eseguite antecedentemente, occorre il numero

$$(\eta)\qquad a_{n-1}\, x_{r-s+1} \ldots + a_{n-s} \,.\, x_r$$

quindi s prodotti ciascuno di due cifre semplici, ed $s - 1$ somme. Impiegando la relazione (ξ) dovremo formare il numero

$b_{n+r-s}\,10^2 + a_{n+r-s}\,10^2 + a_{n+r-s-1}$ e fare anche una sottrazione. Ma siccome è necessaria la cognizione del numero $b_{n+r-s-1}$ gioverà usare a preferenza le relazioni (ι) in luogo di (ξ). Dunque la cifra x_{r-s} del quoto dipende dalle cifre $a_{n+1}, a_n, a_{n-1} \ldots a_{n-s}$ del divisore, e dalle $b_{n+r}, a_{n+r}, a_{n+r-1} \ldots a_{n+r-s-1}$ del dividendo: cioè dalle $s+1$ cifre del maggior ordine del divisore, e da $s+2$ ovvero $s+3$ delle cifre maggiori del dividendo. Quella cifra x_{r-s} deve essere la più grande che moltiplicata per il numero $a_{n+1}.10 + a_n$, rappresentato dalle due cifre maggiori del quoto, dà un prodotto non maggiore di un numero dato, che è

$$b_{n+r-s}.10^2 + a_{n+r-s}.10 + a_{n+r-s-1} - (a_n.10 + a_{n-1})\,x_{r-s+1} - (a_{n-1}.10 + a_{n-2})\,x_{r+s+2} \ldots - (a_{n-s+1}.10 + a_{n-s})\,x_r\,.$$

Si dovranno inoltre formare tutte le somme di prodotti

$$a_{n+1}\,x_r\,;\ a_{n+1}\,x_{r-1} + a_n\,x_r\,;\ a_{n+1}\,x_{r-2} + a_n\,x_{r-1} + a_{n-1}\,x_r\,;\ldots\ldots$$

$$a_{n+1}\,x_{r-s} + a_n\,x_{r-s+1} \ldots\ldots + a_{n-s+1}\,x_r\,;$$

$$a_n\,x_{r-s} + a_{n-1}\,x_{r-s+1} \ldots\ldots + a_{n-s}\,x_r$$

cioè un numero di moltipliche espresso da $1+2+3\ldots\ldots+(s+1)+(s+1) = \frac{(s+1)(s+4)}{2}$ e ciascuna di due cifre semplici: e dippiù $1+2+3\ldots\ldots+s+s = \frac{s(s+3)}{2}$ somme.

Il metodo comune esige tentativi talvolta penosi, sempre assai più complicati ed un maggior numero di operazioni. Ogni cifra deve essere il numero più grande il quale moltiplicato per tutto il divisore dà un prodotto non più grande di altro numero dato, che dicesi residuo. Ognuna si moltiplica per tutto il divisore, onde si fanno $n+1$ prodotti di numeri semplici, quindi n somme, poi altrettante sottrazioni fra cifre semplici, levando il prodotto dal residuo. Per cui trovata la cifra x_{r-s} si sono eseguiti $(s+1)(n+1)$ prodotti, $(s+1)n$ somme ed $(s+1)n$ sottrazioni. Dunque si fanno $(s+1)(n+1) - \frac{(s+1)(s+4)}{2} = \frac{(s+1)(2n-s-2)}{2}$ moltiplicazioni e $\frac{4n+4sn-s^2-3s}{2}$ somme inutili all' oggetto che si

ha di mira direttamente: le quali operazioni riescono assolutamente superflue nel calcolo approssimato. Per determinare le ultime cifre del quoziente x_3, x_2, x_1 seguendo il nostro metodo, dovressimo far uso delle equazioni

$$(h)\begin{cases} a_{n+1}x_3 + a_n x_4 \ldots + a_{n-r+4}x_r + b_{n+2} = a_{n+3} + b_{n+3}.10 \\ a_{n+1}x_2 + a_n x_3 \ldots + a_{n-r+3}x_r + b_{n+1} = a_{n+2} + b_{n+2}.10 \\ a_{n+1}x_1 + a_n x_2 \ldots + a_{n-r+2}x_r + b_n \quad = a_{n+1} + b_{n+1}.10 \\ a_n x_1 \ldots + a_{n-r+1}x_r + b_{n-1} = a_n \quad + b_n.10\,; \end{cases}$$

ma siccome l' ultima cifra del dividendo comune col divisore è a_{n+3}, le seguenti a_{n+2}, a_{n+1}, a_n saranno generalmente ignote. Intanto, ommesso a_{n+2}, troveremo un valore di x_3 che tutt' al più sarà minore del vero di un' unità. Ma per accertarci e per determinare x_2 ed x_1 siamo ricondotti al metodo comune.

Indichiamo il dividendo con

$$(b_{n+r}10 + a_{n+r})10^{n+r-1} + a_{n+r-1}10^{n+r-2} \ldots +$$
$$a_{n+3}10^{n+2} + A_{n+2}.10^{n+1} + A_{n+1}10^n \ldots + A_3 10^2 + A_2 10 + A_1$$

e siccome il prodotto del divisore per il numero

$$x_r.10^{r-1} + x_{r-1}10^{r-2} + \ldots + x_4.10^3 + (x_3+1)10^2,$$

cioè
$$a_{n+1}x_r.10^{n+r-1} + (a_{n+1}x_{r-1} + a_n x_r)10^{n+r-2} \ldots$$
$$+ (a_{n+1}x_4 + a_n x_5 \ldots + a_{n-r+5}x_r)10^{n+3} +$$
$$(a_n x_4 + \ldots + a_{n-r+4}x_r)10^{n+2} + (a_{n-1}x_4 + \ldots + a_{n-r+3}x_r)10^{n+1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (a_2 x_4 + a_1 x_5)10^4 + a_1 x_4.10^3 +$$
$$(x_3+1)(a_{n+1}10^n + a_n 10^{n-1} \ldots + a_2 10 + a_1)10^2 =$$
$$= (a_{n+r} + b_{n+r}.10 - b_{n+r-1})10^{n+r-1} +$$
$$(a_{n+r-1} + b_{n+r-1}.10 - b_{n+r-2})10^{n+r-2} \ldots$$
$$+ (a_{n+5} + b_{n+5}.10 - b_{n+4})10^{n+4} + (a_{n+4} + b_{n+4}.10 - b_{n+3})10^{n+3} +$$
$$(a_n x_4 + a_{n-1}x_5 \ldots + a_{n-r+4}x_r)10^{n+2} \ldots +$$
$$a_1 x_4.10^3 + (x_3+1)(a_{n+1}10^n \ldots + a_1)10^2$$

questo prodotto è maggiore del dividendo e molto più di ciò che resta sopprimendovi a destra le ultime due cifre, avremo quindi

$$(a_{n+1}\,10^n + a_n\,10^{n-1} \ldots + a_1)(x_3+1) > (a_{n+3} + b_{n+3}\,10)\,10^n +$$
$$A_{n+2}.10^{n-1} + A_{n+1}\,10^{n-2} \ldots + A_3$$
$$(k) \qquad -(a_n x_4 + a_{n-1} x_5 \ldots + a_{n-r+4} x_r)\,10^n -$$
$$(a_{n-1} x_4 \ldots + a_{n-r+3} x_r)\,10^{n-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-(a_2 x_4 + a_1 x_5)\,10^2 - a_1 x_4 . 10.$$

Per formare il secondo membro di questa relazione notiamo che determinando x_3 colla prima equazione (h) ci sarà occorso già di calcolare la differenza

$$(a_{n+3} + b_{n+3}\,10) - (a_n x_4 + a_{n-1} x_5 \ldots + a_{n-r+4} x_r)$$

alla destra della quale scriveremo il numero $A_{n+2}.10^{n-1} + A_{n+1}\,10^{n-2} \ldots + A_3$ che consta delle $n-1$ cifre del dividendo precedenti a sinistra le ultime due A_1, A_2. Così avremo la differenza tra la parte positiva ed il primo termine negativo del secondo membro della relazione (k). L' altra parte che chiamo (A) vale a dire

$$(A) = (a_{n-1}\,10^{n-2} + a_{n-2}\,10^{n-3} \ldots + a_2\,10 + a_1)\,10 . x_4 +$$
$$(a_{n-2}\,10^{n-3} + a_{n-3}\,10^{n-4} \ldots + a_2\,10 + a_1)\,10^2 . x_5 + \ldots$$
$$+ (a_{n-r+3}\,10^{n-r+2} \ldots + a_2\,10 + a_1)\,10^{r-3} . x_r$$

si ottiene moltiplicando

$$(l) \qquad a_{n-1}\,10^{n-2} + a_{n-2}\,10^{n-3} + \ldots + a_3\,10^2 + a_2 . 10 + a_1$$

per (m) $\quad x_r . 10^{r-3} + x_{r-1} . 10^{r-4} \ldots + x_6 . 10^3 + x_5 . 10^2 + x_4 . 10,$

cioè l' ultimo termine $x_4 . 10$ per tutto il numero (l); il penultimo $x_5 . 10^2$ per (l) ommesso il primo termine a sinistra; poi $x_6 . 10^3$ per (l) tralasciati i due primi termini, e così di seguito. Dovremo quindi soddisfare la relazione (k) che scrivo $(x_3+1)B > P$.

Ripetendo riguardo ad x_2 ed x_1 quanto si è detto per x_3 concluderemo dover essere

$$[x_3.10+(x_2+1)]B>P.10+A_2,$$

epperò (p) $$(x_2+1)B>(P-x_3Q)10+A_2=P_1$$

$$[x_2.10+(x_1+1)]B>P_1.10+A_1$$

ed (q) $$(x_1+1)B>(P_1-x_2.Q)10+A_1=P_2$$

ed il residuo finale sarà P_2-Bx_1.

Per trovare x_4 avremo eseguite tante moltiplicazioni quante ne indica la formola $\frac{(s+1)(s+4)}{2}$ ponendovi $s=r-4$, cioè $\frac{r(r-3)}{2}$. Per avere x_3 ne abbisognano altre

$$(n-1)+(n-2)+(n-r+3)=\frac{(2n-r+2)(r-3)}{2}.$$

Per avere x_2 ne faremo altre $n+1$, poi $n+1$ onde trovare x_1, ed $n+1$ ancora onde conoscere l' avanzo. Dunque il numero totale delle moltipliche sarà

$$\frac{r(r-3)}{2}+n(r-3)-\frac{(r-2)(r-3)}{2}+3(n+1)=r(n+1),$$

cioè quante ne esige il metodo comune.

Ma colla nostra regola tutte le cifre del quoto fino esclusivamente alla penultima si trovano generalmente senza riprove: non si impiegano mano mano che le cifre del dividendo e del divisore che sono essenziali: nei calcoli di approssimazione si ha un notevole risparmio di operazioni, ed avremo lo stesso vantaggio tutte le volte si sappia, o attesa la piccolezza dell' avanzo finale o per altra ragione, che anche a_{n+2}, a_{n+1}, a_n eguagliano le cifre corrispondenti del dividendo, e ciò impiegando le equazioni (h) per trovare le ultime cifre del quoziente. Anzi siccome questo caso si incontra frequentemente, e le parti note delle dette equazioni (h) abbisognano essenzialmente per trovare x_2 ed x_1, credo che gioverà spesse volte tentare l'uso dei valori che danno quelle supposizioni.

Dobbiamo ricordare un caso eccezionale che abbiamo già accennato: cioè, essendo $n_{,}+s_{,}$ le cifre del divisore B, se alcune cifre del dividendo A le quali, partendo dall' ultima a destra, occupano i posti $n_{,}+1$; $n_{,}+2$; .....; $n_{,}+r_{,}>n_{,}+s_{,}$ sono eguali a zero, il prodotto $B(Q+1)$ e non BQ potrà essere

quello che ha comuni col dividendo almeno le $m+r_1-s_1$ cifre dell'ordine maggiore. Dunque se le cifre di A sono in numero $m+r_1+n_1=n+r+1$, quelle di B sono $n_1+s_1=n+1$, e Q ne ha $m+r_1-s_1=r$, il numero delle cifre comuni ad A e B(Q+1) sarà almeno $m+r_1-s_1=(m+r_1+n_1)-(s_1+n_1)=r$, quindi $a_{n+2}=A_{n+2}=0$. Se le cifre di A saranno in numero $m+r_1+n_1=n+r$, sarà $m+r_1-s_1=r-1$, epperò nuovamente $a_{n+2}=A_{n+2}=0$. Siccome anche in questo caso si verificano le proprietà su le quali è fondata la nostra analisi troveremo collo stesso mezzo tutte le cifre del quoto Q+1 fino ad x_2 di cui si conoscerà il valore prossimo dell' unità. Ma siccome $B(Q+1)>A>BQ$ alle condizioni (p), (q) dovremo sostituire le seguenti

$$(x_2-1)B<[P-x_3(Q+1)]\,10+A_2=\Pi_1,$$
$$(x_1-1)B<[\Pi_1-x_2(Q+1)]\,10+A_1=\Pi_2$$

e l' ultimo avanzo sarà $Bx_1-\Pi_2$. Ma per toglierci dall' incertezza potremo dividere A+B per B, ed ottenuti il quoto Q ed il residuo R, siccome $A+B=B.Q+R$, ossia $A=B(Q-1)+R$ nel numero Q−1 avremo il quoziente cercato.

Gli esempj che soggiungo dichiareranno l'uso della regola.

Dividendo 43753 $\begin{array}{ll}\text{divisore} & a_3a_2a_1=314\\ \text{quoto} & x_3x_2x_1=139\end{array}$.

Scriviamo ancora le equazioni, delle quali potremo far senza in appresso,

$$a_1x_1=a_1+b_1.10,\quad b_1+a_1x_2+a_2x_1=a_2+b_2.10,$$
$$b_2+a_1x_3+a_2x_2+a_3x_1=a_3+b_3.10,$$
$$b_3+a_2x_3+a_3x_2=a_4+b_4.10,\quad b_4+a_3x_3=a_5+b_5.10.$$

Sono $b_5=0$, $a_5=4$, ed osservata la grandezza del divisore siamo certi che $a_4=3$.

Dunque devono essere

$$b_4+3x_3=4,\quad a_2x_3=x_3 \text{ non } >3+b_4.10,\quad x_3=1,\ b_4=1.$$

Avremo poi $b_3+a_2x_3+a_3x_2=b_3+1+3x_2=3+10,$

$$b_2+3x_1+x_2+4=a_3+b_3.10,$$

epperò $b_3+3x_2=12$, x_2+4 non $>a_3+b_3.10$. Se faccio $x_2=4$, $b_3=0$, siccome a_3 non >7 la seconda condizione non è soddisfatta, dunque saranno al più $x_2=3$, $b_3=3$. Supposto $a_3=7$ avremo $b_2+3x_1+7=37$, ossia $b_2+3x_1=30$,
$b_1+x_1+4x_2=b_1+x_1+12=a_2+b_2.10$, quindi $x_1=9$, $b_2=3$.

A riprova formo $a_1x_1=36$, onde $A_1=6$; $b_1=3$.
Poi $b_1+x_1a_2+x_2a_1=3+9+12=24$, $A_2=4$, $b_2=2$
$b_2+a_1x_3+a_2x_2+a_3x_1=2+3.9+1.3+4.1=36$, quindi $A_3=a_3=6$, $b_3=3$. Il vero prodotto è 43646, l'avanzo 107, il quoto 139.

Dividendo 9999859806: $\begin{array}{ll}\text{divisore} & a_6a_5a_4a_3a_2a_1=342168\\ \text{quoto} & x_5x_4x_3x_2x_1=29225\end{array}$.

Finchè non siamo esercitati nell' uso della regola bisogna tenerci sott' occhio le equazioni (a).

Devono essere $3x_5+b_1=9$, $3x_4+4x_5+b_3=9+b_1.10$,
per cui $x_5=2$, $b_1=3$

$3x_4+8+b_3=39$, $3x_3+4x_4+2x_5+b_4=9+b_3.10$,
cioè $3x_4+b_3=31$, $3x_3+4x_4+b_4=5+b_3.10$,
quindi $x_4=9$, $b_3=4$.
$3x_3+36+b_4=45$, $3x_2+4x_3+2x_4+1.x_5+b_5=a_4+b_4.10$,
ossia $3x_3+b_4=9$, $3x_2+4x_3+20+b_5=a_4+b_4.10$,
onde $x_3=2$, $b_4=3$ sebbene non si conosca a_4. Se poniamo $a_4=9$
$3x_2+28+b_5=39$, $3x_1+4x_2+2x_3+1.x_4+6x_5+b_6=a_5+b_5.10$,
cioè $3x_2+b_5=11$, $3x_1+4x_2+25+b_6=a_5+b_5.10$,
dunque al più $x_2=2$, $b_5=5$.
$3x_1+33+b_6=a_5+50$, $4x_1+2x_2+1.x_3+6x_4+8x_5+b_7=a_6+b_6.10$,
ossia $3x_1+b_6=a_5+17$, $4x_1+76+b_7=a_6+b_6.10$.
Se $a_5=8$, $x_1=5$, $b_6=10$.

A riprova formo 5.8=40, $A_1=0$ col porto 4

$4+a_1.x_2+a_2x_1=4+2.8+5.6=50$, $A_2=0$ col porto 5

$5+1.5+2.6+2.8=38$, $A_3=8$ col porto 3

$3+2.5+1.2+6.2+9.8=99$, $A_4=9$ 9

$9+4.5+2.2+1.2+6.9+2.8=105$, $A_5=5$ 10

$10+3.5+4.2+2.2+1.9+6.2=58$, $A_6=8$ come abbiamo supposto.

Dunque sarà 9999859800 il prodotto vero coll' avanzo 6.

Dividendo 1498600239: $\begin{array}{l}\text{divisore}\\ \text{quoto}\end{array}\ \dfrac{a_4\,a_3\,a_2\,a_1=4875}{x_r\,x_{r-1}\,x_{r-2}\,x_{r-3}\,x_{r-4}\,x_{r-5}\ldots=307405\ldots}$

$4x_r+b_1=14$, $4x_{r-1}+8x_r+b_2=9+b_1.10$; $x_r=3$, $b_1=2$

$4x_{r-1}+24+b_2=29$, $4x_{r-2}+8x_{r-1}+7x_r+b_3=8+b_2.10$,

ossia $4x_{r-1}+b_2=5$, $4x_{r-2}+8x_{r-1}+21+b_3=8+b_2.10$.

Non ponno essere $x_{r-1}=1$, $b_2=1$, $4x_{r-2}+29+b_3=18$,

dunque $x_{r-1}=0$, $b_2=5$

$4x_{r-2}+21+b_3=58$, $4x_{r-3}+8x_{r-2}+7x_{r-1}+5x_r+b_4=6+b_3.10$,

ossia $4x_{r-2}+b_3=37$, $4x_{r-3}+8x_{r-2}+15+b_4=6+b_3.10$,

onde $x_{r-2}=7$, $b_3=9$

$4x_{r-3}+71+b_4=96$, $4x_{r-4}+8x_{r-3}+7x_{r-2}+5x_{r-1}+b_5=0+b_4.10$,

ossia $4x_{r-3}+b_4=25$, $4x_{r-4}+8x_{r-3}+49+b_5=0+b_4.10$.

Se pongo $x_{r-3}=5$, $b_4=5$ la seconda non regge, dunque $x_{r-3}=4$, $b_4=9$

$4x_{r-4}+81+b_5=90$, $4x_{r-5}+8x_{r-4}+7x_{r-3}+5x_{r-2}+b_6=2+b_5.10$,

cioè $4x_{r-4}+b_5=9$, $4x_{r-5}+8x_{r-4}+63+b_6=2+b_5.10$,

$x_{r-4}=0$, $b_5=9$

$4x_{r-5}+63+b_6=92$, $4x_{r-6}+8x_{r-5}+7x_{r-4}+5x_{r-3}+$

$b_7=3+b_6.10$,

ossia $4x_{r-5}+b_6=29$, $4x_{r-6}+8x_{r-5}+20+b_7=3+b_6.10$,

$x_{r-5}=5$, $b_6=9$

. . . . . .

Siccome abbiamo supposto che il vero prodotto abbia comuni col dividendo tutte le nove cifre dell'ordine maggiore, le cifre del quoto che abbiamo ottenute sono le sei prime per ogni numero che avremo ponendo alla destra del dividendo stesso altre quattro cifre.

Essendo poi $a_1 x_{r-5} = 25$, $2 + a_1 x_{r-4} + a_2 x_{r-5} = 2 + 5.7 + 5.0 = 37$,

$3 + a_1 x_{r-3} + a_2 x_{r-4} + a_3 x_{r-5} = 3 + 4.5 + 7.0 + 5.8 = 63$

$6 + a_1 x_{r-2} + a_2 x_{r-3} + a_3 x_{r-4} + a_4 x_{r-5} = 6 + 5.7 + 7.4 + 8.0 + 4.5 = 89$

$8 + a_1 x_{r-1} + a_2 x_{r-2} + a_3 x_{r-3} + a_4 x_{r-4} = 8 + 5.0 + 7.7 + 8.4 + 4.0 = 89$.

Sarà 1498599375 il vero prodotto del divisore e del quoto trovato, e 864 l'avanzo.

Ora che abbiamo comprovata con esempj la speditezza, colla quale si trovano le cifre del quoto col mezzo delle equazioni (a) allorchè si conoscono i numeri $a_{n+r}\, a_{n+r-1} \ldots$; vediamo come determineremo anche le altre, cioè le tre ultime cifre del medesimo quoziente.

Riprendiamo il secondo esempio.

Dividendo 9999859806: $\begin{array}{l} \text{divisore} \\ \text{quoto} \end{array} \dfrac{342168}{x_5 x_4 x_3 x_2 x_1 = 29225}$.

Siamo certi che le tre prime cifre del dividendo appartengono al vero prodotto.

Dunque $3x_5 + b_9 = 9$, $3x_4 + 4x_5 + b_8 = 9 + b_9 . 10$, onde $x_5 = 2$, $b_9 = 3$

$3x_4 + b_8 = 31$, $3x_3 + 4x_4 + 2.2 + b_7 = 9 + b_8 . 10$, $x_4 = 9$, $b_8 = 4$

$3x_3 + b_7 = 9$, $3x_2 + 4x_3 + 2.9 + 1.2 + b_6 = a_7 + b_7 . 10$,

ossia $3x_2 + 4x_3 + 20 + b_6 = a_7 + b_7 . 10$.

Quindi al più $x_3 = 2$. Per accertarci riprendo la formola (k) trovata precedentemente: sarà

$(a_{n+3} + b_{n+3} . 10) 10^n + A_{n+2} . 10^{n-1} \ldots + A_3 = 49 . 10^5 + 98598 = 4998598$,

da cui devo togliere $(a_n . 10^{n-1} \ldots + a_1) 10 . x_4 +$

$(a_{n-1} 10^{n-2} \ldots + a_1) 10^2 . x_5 \ldots + (a_{n-r+4} . 10^{n-r+3} \ldots + a_1) 10^{r-2} x_r$,

cioè moltiplico $\begin{array}{r} 42168 \\ 92 \end{array}$, ossia $9 \times 42168 = 379512$; $2 \times 2168 = 4336$.

$$\text{Sommo} \quad \begin{array}{r} 379512 \\ 4336 \\ \hline 422872 \end{array} ; \qquad \text{Sottraggo} \quad \begin{array}{r} 4998598 \\ 422872 \\ \hline 769878 \end{array} (k)$$

x_3 sarà il numero di volte più grande che il divisore è contenuto in questo residuo (k), appunto $x_3 = 2$ come abbiamo trovato.

Ora da (k) levo il prodotto di x_3 per il divisore, e vi scrivo a destra $A_2 = 0$: x_2 sarà il maggior numero di volte che il divisore è contenuto in (l), onde $x_2 = 2$. Levo da (l) il prodotto di x_2 pel divisore e a destra del residuo scritto $A_1 = 6$ ottengo il numero (m) e sarà x_1 il numero più grande di volte che (m) contiene il divisore, onde $x_1 = 5$. Levato ormai da (m) il prodotto di x_1 per il divisore ho l'avanzo 6: come altrimenti avevamo già conseguìto.

$$\begin{array}{r} 769878 \\ 684336 \\ \hline 855420 \ (l) \\ 684336 \\ \hline 1710846 \ (m) \\ 1710840 \\ \hline 6 \ (n) \end{array}$$

Prendiamo dalla preziosa Aritmetica del Sig. Bourdon un altro esempio segnato come uno che richiede penosi tentativi.

Dividendo 9639475: $\begin{array}{l} \text{divisore} \\ \text{quoto} \end{array} \dfrac{2789}{x_4 x_3 x_2 x_1 = 3456}$.

Siccome $2x_4 + b_6 = 9$, $2x_3 + 7x_4 + b_5 = 6 + b_6 . 10$,

quindi $x_4 = 3$, $b_6 = 3$

$2x_3 + 21 + b_5 = 36$, $2x_2 + 7x_3 + 8x_4 + b_4 = a_5 + b_5 . 10$,

cioè $2x_3 + b_5 = 15$, $2x_2 + 7x_3 + 24 + b_4 = a_5 + b_5 . 10$,

dunque al più $x_3 = 4$, $b_5 = 7$, $2x_2 + 52 + b_4 = a_5 + 70$,

ossia $2x_2 + b_4 = a_5 + 18$.

Generalmente resterà incerto il valore di x_3, ma nel caso presente non essendovi dubbio procediamo a trovare x_2. Sopprimo nel dividendo la parte considerata 96, ed alla sinistra l'ultima cifra, onde resta 3947. Vi pongo a sinistra $b_5 = 7$ ed ho 73947. Moltiplico $\begin{array}{r} 789 \\ \underline{34} \end{array}$, ossia $\begin{array}{r} 4 . 789 = 31\ 56 \\ 3 . \ 89 = \underline{26\ 7} \\ 58\ 26 \end{array}$ e sommo.

	73947	
Sottraggo	5826	la cifra x_2 indica quante volte (k) con-
	15687 (k)	tiene il divisore, epperò $x_2=5$. Levo
	13945	da (k) il prodotto di x_2 pel divisore e
	17425 (l)	alla destra del residuo (l) scrivo l' ul-
	16734	tima cifra 5 del dividendo. Il numero
	691 (m)	x_1 indicherà quante volte il divisore si

contiene in (l), cioè $x_1=6$. Levo da (l) il prodotto di $x_1=6$ pel divisore, ed ho l' ultimo avanzo (m).

Dividendo 1498600239, divisore 4875. Siccome questo secondo numero ha quattro cifre e la terza a sinistra del dividendo è uno zero possiamo trovarci nel caso eccezionale. Ad evitare ogni molestia, sommo i numeri dati e prendo a dividere

$$1498605114 : \frac{4875}{x_6 x_5 x_4 x_3 x_2 x_1 = 307406}.$$

$4x_6+b_8=14$, $4x_5+8x_6+b_7=9+b_8.10$, onde $x_6=3$, $b_8=2$

$4x_5+24+b_7=29$, $4x_4+8x_5+21+b_6=8+b_7.10$,

ossia $4x_5+b_7=5$, $4x_4+8x_5+13+b_6=b_7.10$;

quindi non potendo essere $x_5=1$, $b_7=1$ in forza della seconda equazione, saranno

$x_5=0$, $b_7=5$: $4x_4+b_6=37$, $4x_3+8x_4+7x_5+5x_6+b_5=6+b_6.10$,

ossia $4x_3+8x_4+9+b_5=b_6.10$,

epperò $x_4=7$, $b_6=9$: $4x_3+b_5=25$,

$4x_2+8x_3+49+b_4=a_9+b_5.10$, ed al più $x_3=4$, $b_5=9$.

Sebbene possiamo aver per buono il valore di x_3, per confermarci, e trovare x_2, x_1 riccorriamo alla regola superiormente indicata. Sopprimo nel dividendo a sinistra la parte già impiegata, a destra le ultime due cifre ed ho 051. Eseguisco la moltiplicazione

$$\begin{array}{r} 875 \\ \underline{307} \end{array} \text{ vale a dire } \left.\begin{array}{r} 875\times 7 \\ 75\times 0 \\ 5\times 3 \end{array}\right\} = \begin{array}{r} 6125 \\ 000 \\ 15 \\ \hline 7625 \end{array}.$$

Alla sinistra di 051 scrivo $a_6+b_6.10=96$ ottengo e sottraggo (l). Sarà $x_3=4$ il maggior numero di volte che il divisore stà in (l). Levo da (l) il prodotto di x_3 pel divisore e a destra dell' avanzo pongo in (m) la penultima cifra del dividendo: sarà $x_2=0$ che indica quante volte il divisore stà in (m). Levo da (m) il prodotto del divisore per $x_2=0$, scrivo a destra del residuo l' ultima cifra del dividendo ho (n), e sarà $x_1=6$. Quanto il divisore stà in (n) ne tolgo da (n) il prodotto, ed ottengo l'ultimo avanzo (p).

96051	
7625	
19801	(l)
19500	
3011	(m)
30114	(n)
29250	
864	(p)

Il quoto sarà 307405: il vero prodotto 1498599375 che cade nella eccezione.

Facciamo un ultimo esempio.

Dividendo 10000201973 $\begin{array}{l}\text{divisore}\\ \text{quoto}\end{array}\ \dfrac{342168}{x_5x_4x_3x_2x_1=29226}$.

Siccome la sesta cifra a sinistra del dividendo non è lo zero non ha luogo l' eccezione.

$3x_5+b_9=10,\ 3x_4+4x_5+b_8=0+b_9.10,\ x_5=2,\ b_9=4,\ 3x_4+b_8=32$

$3x_3+4x_4+4+b_7=0+b_6.10,\ x_4=9,\ b_8=5,\ 3x_3+b_7=10,$

$3x_2+4x_3+20+b_6=a_7+b_7.10,$

al più $x_3=2$, $b_7=4$. Ma non conoscendo a_7 ricorriamo alla solita regola. Tolgo dal dividendo 02019: scrivo a destra $a_8+b_8.10=50$ ottengo 5002019.

Moltiplico $\begin{array}{r}42168\\ 29\\ \hline\end{array}$ ed ho $\begin{array}{r}379512=42168\times 9\\ 4336\ =\ 2168\times 2.\\ \hline 422872\end{array}$

Sottraggo

5002019	
422872	
773299	(l)
684336	
889637	(m)
684336	
2053013	(n)
2053008	
5	(p)

Siccome il divisore è contenuto due volte in (l) $x_3=2$, ne levo il prodotto e alla destra dell' avanzo pongo la penultima cifra del dividendo ed ho (m). Il divisore è contenuto due volte in (m), epperò $x_2=2$; ne levo il prodotto, alla destra del residuo scrivo l'ultima cifra del dividendo ho (n), in cui il divisore si contiene 6 volte, $x_1=6$ e tolto il prodotto da (n) ho l'ultimo residuo (p).

REGOLA DI FOURIER. (*Analyse des équations.*)

Suppongo che siano

$$p10^{m+r}+p_1 10^{m+r-1}+p_2 10^{m+r-2}\ldots,\quad b.10^n+b_1 10^{n-1}+b_2 10^{n-2}\ldots,$$
$$a\,10^r+a_1\,10^{r-1}+a_2\,10^{r-2}\ldots$$

il dividendo, il divisore ed il quoziente.

Saranno $(a.10+a_1)(b.10^2+b_1 10+b_2)<p.10^3+p_1 10^2+p_2.10+10$

$a(b.10+b_1)10+a_1(b\,10+b_1)+ab_2>p.10^2+p_1.10+p_2+1$,

quindi $a_1(b10+b_1)$ non $>(p.10^2+p_1.10+p_2)-a(b.10+b_1)-ab_2=R_1$.

Avremo pure $(a.10^2+a_1\,10+a_2)(b.10^3+b_1\,10^2+b_2.10+b_3)$

non $>p.10^5+p_1\,10^4+p_2.10^3+p_3.10^2+10^2$,

onde $a(b.10+b_1)10^2+ab_2.10+ab_3+a_2(b.10+b_1)$

$+a_1(b.10+b_1)10+a_1b_2$ non $>p.10^3+p_1\,10^2+p_2.10+p_3$,

quindi $a_2(b.10+b_1)$ non $>[R_1 10+p_3-a_1(b10+b_1)]-(a_1b_2+ab_3)=R_2$.

Così $(a.10^3+a_1\,10^2+a_2\,10+a_3)(b.10^4+b_1\,10^3\ldots+b_4)$

non $>p.10^7+p_1\,10^6\ldots+p_4.10^3+10^3$,

epperò $a(b.10+b_1)10^3+ab_2.10^2+a\,b_3.10+a\,b_4$

$+a_1(b\,10+b_1)10^2+a_1b_2.10+a_1b_3$

$+a_2(b\,10+b_1)10+a_2b_2$

$+a_3(b.10+b_1)$

non $>p.10^4+\ldots+p_4$;

quindi $a_3(b\,10+b_1)$

non $>[R_2.10+p_4-a_2(b.10+b_1)]-(a_2b_2+a_1b_3+ab_4)$

ecc. ecc.

Essendo $(a.10+a_1)(b.10^3+b_1 10^2+b_2 10+1)<(p.10^2+p_1 10+p_2)10^2$,

onde $a(b.10+b_1)10^3+a_1(b.10+b_1)10^2+ab_2\,10^2+$

$(a_1b_2+a)10+a_1<(p.10\ldots+p_2)10^2$;

questa condizione sarà soddisfatta quando sia

$a+a_1b_2<[p.10^3+p_1 10+p_2-a(b.10+b_1)10-a_1(b.10+b_1)-ab_2+1]\,10,$

ossia $\quad a+a_1b_2<(R_1-a_1(b\,10+b_1)+1)\,10$

e molto più se $\quad (\alpha)\quad a+a_1<R_1-a_1(b.10+b_1).$

Così $\quad (a.10^3+a_1 10+a_2)(b.10^4\ldots+b_3.10+1)=$

$=a(b.10+b_1)10^5+a_1(b.10+b_1)10^4+a_2(b.10+b_1)10^3+$

$(ab_2 10^4+ab_3 10^3+a\,10^2)+(a_1b_2 10^3+a_1b_3 10^2+a_1 10)$

$+(a_2b_2 10^2+a_2b_3 10+a_2)<[(p.10^2+p_1.10+p_2)10+p_3+1]\,10^3,$

quindi $(a+a_1b_3+a_2b_2)10^2+(a_1+a_2b_3)10+a_2<[R_2.10-a_2(b.10+b_1)]10^3,$

la quale condizione sussisterà quando sia

$$a+a_1b_3+a_2b_2<[R_2.10-a_2(b.10+b_1)]\,10,$$

e molto più se $\quad (\beta)\quad a+a_1+a_2<R_2.10-a_2(b.10+b_1).$

Le condizioni $(\alpha),(\beta)\ldots\ldots$ sono quelle assegnate dal Fourier, e la nostra analisi insegna ad apprezzarne il vantaggio, il quale generalmente non può essere notevole. Meno inesatti, ma più complicati, sono i criterj forniti dalle relazioni antecedenti da cui abbiamo desunti quelli dovuti all' illustre Autore della Teoria del Calorico.

Della estrazione di radici.

Si voglia la $\sqrt{(17698844)}$? Indichiamola con

$a_3 10^3+a_2.10^2+a_1.10+a_0,$ e dovrà essere

$17698844=a^2_0+2a_0a_1.10+(a^2_1+2a_0a_2)10^2+(2a_1a_2+2a_0a_3)10^3+$

$(a^2_2+2a_1a_3)10^4+2a_2a_3.10^5+a^2_3.10^6.$

Suppongo $\quad a^2_0=a_6+b_6.10,\ b_6+2a_0a_1=a_5+b_5.10,$

$b_5+a^2_1+2a_0a_2=a_4+b_4.10\ldots\ldots$

$a^2_3+b_1=a_0+b_0.10,\ 2a_2a_3+b_2=a_1+b_1.10,$

$a^2_2+2a_1a_3+b_3=a_2+b_2.10,\ 2a_1a_2+2a_0a_3+b_4=a_3+b_3.10,$

e, fingendo che il numero proposto sia un quadrato, dovranno essere $\quad a_0+b_0.10=17,\ a_1=6,\ a_2=9,\ldots$ e $b_1, b_2, b_3\ldots\ldots$

i porti delle somme antecedenti. Assumo il principio fondamentale, dimostrato in seguito, che il valore di a_3 debba essere il più grande compatibile colle due ultime equazioni, che anche a_2 debba avere il valore più grande, il quale col valore trovato di a_3 soddisfa la penultima e terz' ultima equazione: e così di seguito.

Affinchè siano

$a^2_3+b_1=17$, $2a_2a_3+b_2=6+b_1.10$ devono essere $a_3=4$, $b_1=1$

Avremo poi

$8a_2+b_2=16$, $a^2_2+8a_1+b_3=9+b_2.10$, quindi $a_2=2$, $b_2=0$

$8a_1+b_3=5$, $4a_1+8a_0+b_4=8+b_3.10$, onde $a_1=0$, $b_3=5$

$8a_0+b_4=58$, $4a_0+b_5=8+b_4.10$, dunque $a_0=7$, $b_4=2$,

epperò $\sqrt{(17698844)}=4207$.

Volendo la $\sqrt[3]{(3297734021843 2)}=$

$a_4.10^4+a_3.10^3+a_2.10^2+a_1.10+a_0$, sarà

$$3297734021843 2=a^3_4.10^{12}+3a^2_4a_3.10^{11}+$$
$$(3a^2_4a_2+3a_4a^2_3)10^{10}+(3a^2_4a_1+6a_2a_3a_4+a^3_3)10^9$$
$$+(3a^2_2a_4+3a_0a^2_4+6a_1a_3a_4)10^8+$$
$$(3a_1a^2_3+6a_0a_3a_4+6a_1a_2a_4+3a^2_2a_3)10^7$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

avremo quindi a trattare le equazioni seguenti

$a^3_4+b_0=32$, $3a^2_4a_3+b_1=9+b_0.10$,

dalle quali desumo $a_4=3$, $b_0=5$

$27.a_3+b_1=59$, $3a^2_4a_2+3a_4a^2_3+b_2=7+b_1.10=27.a_3+9a^2_3+b_2$,

onde $a_3=2$, $b_1=5$

$27.a_2+36+b_2=57$, $3a^2_4a_1+6a_2a_3a_4+a^3_3+b_3=7+b_2.10$,

vale a dire $27.a_2+b_2=21$, $27.a_1+36a_2+8+b_3=7+b_2.10$,

ed $a_2=0$, $b_2=21$

$27.a_1+b_3=209$,

$3a^2_2a_4+3a_0a^2_4+6a_1a_3a_4+b_4=3+b_3.10=27a_0+36a_1+b_4$.

Se pongo $a_1 = 7$, $b_3 = 20$ la seconda $27\,a_0 + 252 + b_4 = 203$ è assurda, onde $a_1 = 6$, $b_3 = 47$.

Poi $27\,a_0 + b_4 = 257$,

$3a^2_3\,a_1 + 6a_0\,a_3\,a_4 + 6a_1\,a_2\,a_4 + 3a^2_2\,a_3 + b_5 = 4 + b_4 . 10 = 36 . a_0 + 72$.

Da cui ricavo $a_0 = 8$, $b_4 = 41$, e la seconda equazione essendo possibile, conchiudo essere $\sqrt[3]{(32977340218432)} = 32068$.

È tale la speditezza della nostra regola a fronte di quella in uso che stimo inutile lo instituire esame sul numero e la difficoltà delle operazioni che vengono risparmiate. Se il numero dato non è una potenza dell' ordine di cui si cerca la radice, e questa si vuole soltanto approssimata, lo stesso metodo risolve il problema senza ulteriore difficoltà: quando però ne abbisogni la radice della maggiore potenza di un certo ordine contenuta nel numero dato, accade, come nella divisione, che le cifre minori si debbano trovare col metodo comune. Ne adduco le prove con brevità essendo analoghe a quelle relative alla divisione.

La formola $(a_n . 10^n + a_{n-1} . 10^{n-1} \ldots . + a_0)^2 =$

$$a^2_n . 10^{2n} + 2a_n\,a_{n-1} . 10^{2n-1} + \ldots\ldots \qquad (1)$$

dimostra che il quadrato di un numero di $n+1$ cifre ne contiene $2n+1$ ovvero $2n+2$: che se al numero (1) si aggiunge $2(a_n . 10^n + \ldots\ldots + a_0) + 1 \ldots\ldots$ (2), onde avere il quadrato del numero maggiore di una unità verranno generalmente alterate tutte le cifre minori fino a quella dell' ordine 10^n ed anche 10^{n+1}, per il porto delle somme antecedenti: ma le cifre degli ordini superiori generalmente conserveranno il proprio valore. Ciò molto più avrà luogo se al numero (1) aggiungeremo altro numero minore di (2). Dunque il quadrato più grande compreso in un numero dato generalmente avrà comuni con questo le $n-1$ cifre dell' ordine più elevato. Se alcune cifre del numero dato antecedenti e seguenti quella che occupa il posto n, e questa stessa, saranno eguali allo zero, le $n+2$ cifre mag-

giori di quel numero potranno essere comuni ad esso ed al quadrato immediatamente più grande: lo che si prova come abbiamo fatto parlando della divisione.

Scriviamo la formola nota (Q).

$$(a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} \ldots\ldots +$$
$$a_{n-r+1} \cdot 10^{n-r+1} + a_{n-r} \cdot 10^{n-r} + a_{n-r-1} \cdot 10^{n-r-1} \ldots + a_1 10 + a_0)^2$$
$$= a^2_n \cdot 10^{2n} + 2a_n a_{n-1} \cdot 10^{2n-1} + (a^2_{n-1} + 2a_n a_{n-2}) 10^{2n-2} +$$
$$(2a_n a_{n-3} + 2a_{n-1} a_{n-2}) 10^{2n-3} \ldots\ldots$$
$$+ (2a_n a_{n-r} + 2a_{n-1} a_{n-r+1} + 2a_{n-2} a_{n-r+2} + \ldots\ldots) 10^{2n-r}$$
$$+ (2a_n a_{n-r-1} + 2a_{n-1} a_{n-r} + 2a_{n-2} a_{n-r+1} + \ldots\ldots) 10^{2n-r-1} \ldots\ldots$$
$$+ (2a_0 a_3 + 2a_1 a_2) 10^3 + (2a_0 a_2 + a^2_1) 10^2 + 2a_0 a_1 \cdot 10 + a^2_0 .$$

Supponiamo

$$\left.\begin{array}{l} a^2_n + b_{2n-1} = a_{2n} + b_{2n} \cdot 10, \\ 2a_n a_{n-1} + b_{2n-2} = a_{2n-1} + b_{2n-1} \cdot 10, \\ 2a_n a_{n-2} + a^2_{n-1} + b_{2n-3} = a_{2n-2} + b_{2n-2} \cdot 10 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (l)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2a_n a_{n-r} + 2a_{n-1} a_{n-r+1} + 2a_{n-2} a_{n-r+2} \ldots\ldots + \\ \qquad b_{2n-r-1} = a_{2n-r} + b_{2n-r} \cdot 10, \\ 2a_n a_{n-r-1} + 2a_{n-1} a_{n-r} \ldots\ldots + \\ \qquad b_{2n-r-2} = a_{2n-r-1} + b_{2n-r-1} \cdot 10, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2a_0 a_2 + a^2_1 + b_1 = a_2 + b_2 \cdot 10, \quad 2a_0 a_1 + b_0 = a_1 + b_1 \cdot 10, \\ \qquad a^2_0 = a_0 + b_0 \cdot 10 \end{array}\right\} (m)$$

per cui sarà

$$Q = (a_{2n} + b_{2n} \cdot 10 - b_{2n-1}) 10^{2n} +$$
$$(a_{2n-1} + b_{2n-1} \cdot 10 - b_{2n-2}) 10^{2n-1} +$$
$$(a_{2n-2} + b_{2n-2} \cdot 10 - b_{2n-3}) 10^{2n-2} \ldots \text{ ec.}$$
$$= (a_{2n} + b_{2n} \cdot 10) 10^{2n} + a_{2n-1} \cdot 10^{2n-1} + a_{2n-2} \cdot 10^{2n-2} \ldots\ldots +$$
$$a_{2n-r+1} \cdot 10^{2n-r+1} + (a_{2n-r} - b_{2n-r-1}) 10^{2n-r}$$
$$+ (2a_n a_{n-r-1} + 2a_{n-1} a_{n-r} + \ldots\ldots) 10^{2n-r-1} +$$
$$(a_{2n-r-2} + b_{2n-r-2} \cdot 10) 10^{2n-r-2} + a_{2n-r-3} \cdot 10^{2n-r-3} \ldots + a_0 .$$

Se $2n-r-1>n+1$, onde $n>r+2$, $2n-r-2>n$, $a_{2n}, b_{2n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{2n-r-2}$ sono cifre comuni al Q e ad ogni numero di cui Q rappresenta il più grande quadrato in esso contenuto: epperò se da un tal numero leveremo la parte a destra

$$a_{2n-r-2} \cdot 10^{2n-r-2} \ldots\ldots + A_1 \cdot 10 + A_0$$

sarà $\quad Q > (a_{2n} + b_{2n}\, 10)\, 10^{2n} + a_{2n-1} \cdot 10^{2n-1} \ldots\ldots +$

$$a_{2n-r+1}\, 10^{2n-r+1} + a_{2n-r} \cdot 10^{2n-r} + a_{2n-r-1} \cdot 10^{2n-r-1}$$

e siccome $\quad (2a_{n-1} + 2a_n \cdot 10)\, 10^{2n-r-1}$

$$> 2a_n\, a_{n-r-1} \cdot 10^{2n-r-1} + a_{2n-r-2} \cdot 10^{2n-r-2} \ldots\ldots + a_1\, 10 + a_0$$

ne segue $\quad (a_{2n} + b_{2n} \cdot 10)\, 10^{2n} + a_{2n-1} \cdot 10^{2n-1} + \ldots\ldots +$

$$a_{2n-r+1} \cdot 10^{2n-r+1} + a_{2n-r} \cdot 10^{2n-r} - b_{2n-r-1} \cdot 10^{2n-r} +$$

$$(2a_{n-1}\, a_{n-r} + \ldots\ldots)\, 10^{2n-r-1} + b_{2n-r-2} \cdot 10^{2n-r-1}$$

$$+ (2a_{n-1} + 2a_n\, 10)\, 10^{2n-r-1} > (a_{2n} + b_{2n}\, 10)\, 10^{2n} \ldots\ldots +$$

$$a_{2n-r} \cdot 10^{2n-r} + a_{2n-r-1} \cdot 10^{2n-r-1},$$

ossia $\quad 2a_{n-1}(a_{n-r} + 1) + 2a_{n-2}\, a_{n-r+1} + \ldots\ldots +$

$$b_{2n-r-2} > a_{2n-r-1} + (b_{2n-r-1} - 2a_n)\, 10. \qquad (n)$$

Ciò premesso supponiamo determinate mediante le equazioni (l) tutte le cifre $a_n, a_{n-1} \ldots\ldots$ fino ad a_{n-r+1}, e conseguentemente i porti $b_{2n}, b_{2n-1} \ldots\ldots, b_{2n-r}$ e che si debba trovare a_{n-r}: dovremo quindi verificare le relazioni

$$2a_n\, a_{n-r} + 2a_{n-1}\, a_{n-r+1} \ldots\ldots + b_{2n-r-1} = a_{2n-r} + b_{2n-r} \cdot 10,$$

$$2a_{n-1}\, a_{n-r} + 2a_{n-2}\, a_{n-r+1} \ldots\ldots + b_{2n-r-2} \text{ non } > a_{2n-r-1} + b_{2n-r-1} \cdot 10.$$

Se a_{n-r}, b_{2n-r-1} indicassero i veri valori di questi simboli, ponendo nella prima relazione $a_{n-r}+1$, $b_{2n-r-1} - 2a_n$ in luogo di a_n e b_{2n-r-1} sarebbe tutt' ora soddisfatta, e se sussistesse anche la seconda avremmo

$$2a_{n-1}(a_{n-r} + 1) + 2a_{n-2}\, a_{n-r+1} \ldots\ldots +$$

$$b_{2n-r-2} \text{ non } > a_{2n-r-1} + (b_{2n-r-1} - 2a_n)\, 10,$$

la quale contraddice alla condizione (n). Dunque il valore di a_{n-r} deve essere il più grande compatibile dalle condizioni (m). Questi dati bastano a trovare speditamente col soccorso delle equazioni (l) (m) tutte le cifre dell' ordine maggiore fino alla terz' ultima, da che l' ultimo dei numeri b_{2n}, a_{2n}, a_{2n-1} ..... che generalmente è dato essendo a_{n+2}, e per trovare a_{n-r} abbisogna a_{2n-r-1}, quindi se $2n-r-1=n+2$, $n-r=3$, epperò l' ultima cifra della radice che possiamo determinare con quelle equazioni è appunto a_3. Le altre si trovano colla regola comune come dichiareremo con esempj.

Tutto quanto poi ho detto per la radice seconda sussiste per la terza, e si prova collo stesso discorso.

Si cerca la radice del più grande quadrato contenuto nel numero 568283 91?

Avremo $a^2_3+b_1=56$, $2a_2a_3+b_2=8+b_1.10$,

$$a^2_2+2a_1a_3+b_3=a_4+b_4.10.$$

Quindi $a_3=7$, $b_1=7$, $14a_2+b_2=78$, $a^2_2+14a_1+b_3=a_4+b_4.10$,

onde $a_2=5$, $b_2=8$.

Siccome $(a_3.10^3+a_2.10^2+(a_1+1)10)^2=$

$$a^2_3.10^6+2a_2a_3.10^5+a^2_2.10^4+2(a_3.10^3+a_2 10^2)(a_1+1)10$$

$$+(a_1+1)^2.10^2=(a_0+b_0.10-b_1)10^6+(a_1+b_1.10-b_2)10^5+$$

$$a^2_2.10^4+2.75(a_1+1)10^3+(a_1+1)^2.10^2>$$

$>568283=(a_0+b_0 10)10^6+a_1.10^5+283.10^2$, dunque

$2.75(a_1+1)10+(a_1+1)^2>b_2.10^3-a^2_2.10^2+283=8283-2500=5783$,

mentre $2.75.a_1.10+a^2_1$ deve essere minore dello stesso numero, però $a_1=3$.

Proveremo poi che $2.753(a_0+1)10+(a_0+1)^2$

$$>(5783-(2.75.10+a_1)a_1)10^2+91$$

$$>(5783-4509)10^2+91$$

$$>127491,$$

onde $a_0=8$ e siccome $(2.7530+a_0)a_0=120544$ avremo l' avanzo $127491-120544=6947$, e la radice 7538.

Ma è nel calcolo approssimato delle radici, epperò ne' bisogni più frequenti, che la nostra regola merita forse maggiormente di essere preferita a quella in uso, e valgano a conferma gli esempj, che adduco.

Si voglia il valore approssimato di $\sqrt{2}$? Considero $2 . 10^{2n} = 2,00,00,00$: e formo le equazioni

$a^2_n + b_0 = 2$, $2a_n a_{n-1} + b_1 = b_0 . 10$, da cui $a_n = 1$, $b_0 = 1$

$2a_{n-1} + b_1 = 10$, $2a_n a_{n-2} + a^2_{n-1} + b_2 = b_1 . 10$,

cioè $2a_{n-2} + a^2_{n-1} + b_2 = b_1 . 10$, $a_{n-1} = 4$, $b_1 = 2$

$2a_{n-2} + 16 + b_2 = 20$, $2a_n a_{n-3} + 2a_{n-1} a_{n-2} + b_3 = b_2 . 10$,

vale a dire $2a_{n-2} + b_2 = 4$, $2a_{n-3} + 8a_{n-2} + b_3 = b_2 . 10$,

$a_{n-2} = 1$, $b_2 = 2$

$2a_{n-3} + b_3 = 12$, $2a_n a_{n-4} + 2a_{n-1} a_{n-3} + a^2_{n-2} + b_4 = b_3 . 10, =$

$2a_{n-4} + 8a_{n-3} + 1 + b_4$, onde

$a_{n-3} = 4$, $b_3 = 4$, $2a_{n-4} + 33 + b_4 = 40$, ossia $2a_{n-4} + b_4 = 7$

$2a_n a_{n-5} + 2a_{n-1} a_{n-4} + 2a_{n-2} a_{n-3} + b_5 = b_4 . 10 =$

$2a_{n-5} + 8a_{n-4} + 8 + b_5$,

quindi $a_{n-4} = 2$, $b_4 = 3$, $2a_{n-5} + b_5 = 6$,

$2a_n a_{n-6} + 2a_{n-1} a_{n-5} + 2a_{n-2} a_{n-4} + a^2_{n-3} + b_6 = b_5 . 10$,

ossia $2a_{n-6} + 8a_{n-5} + 20 + b_6 = b_5 . 10$,

quindi $a_{n-5} = 1$, $b_5 = 4, \ldots\ldots$

Dunque $\sqrt{2} = 2,41421 \ldots\ldots$

Si debba trovare il valore approssimato di $\sqrt[3]{3}$? Considero $3 . 10^{3n}$ e risolvo le equazioni

$a^3_n + b_0 = 3$, $3a^2_n a_{n-1} + b_1 = b_0 . 10$, da cui $a_n = 1$, $b_0 = 2$

$3a_{n-1} + b_1 = 20$, $3a^2_n a_{n-2} + 3a_n a^2_{n-1} + b_2 = b_1 . 10$,

ossia $3a_{n-2} + 3a^2_{n-1} + b_2 = b_1 . 10$,

onde $a_{n-1} = 4$, $b_1 = 8$, $3a_{n-2} + 48 + b_2 = 80$,

ossia $3a_{n-2} + b_2 = 32$

$3a^2_n\, a_{n-3} + 6a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} + a^3_{n-1} + b_3 = b_2 \,.\, 10 =$
$3a_{n-3} + 24 \,.\, a_{n-2} + 64 + b_3$,

quindi $a_{n-2} = 4$, $b_2 = 20$, $3a_{n-3} + 160 + b_3 = 200$,
ovvero $3a_{n-3} + b_3 = 40$

$3a^2_n\, a_{n-4} + 6a_n\, a_{n-1}\, a_{n-3} + 3a^2_{n-1}\, a_{n-2} + 3a_n\, a^2_{n-2} + b_4 = b_3 \,.\, 10$,

cioè $3a_{n-4} + 24a_{n-3} + 240 + b_2 = b_3 \,.\, 10$,
dunque $a_{n-3} = 2$, $b_3 = 34$

$3a_{n-4} + b_4 = 52$, $3a_{n-5} + 24 \,.\, a_{n-4} + 336 + b_4 = b_3 \,.\, 10$,
$a_{n-4} = 3$, $b_4 = 43$

$3a_{n-5} + 408 + b_4 = 430$, ossia $3a_{n-5} + b_4 = 22$, ...

Dunque $\sqrt[3]{3} = 1{,}4423$ .....

Per eseguire speditamente questi calcoli bisogna ricordare la formola generale del cubo di un polinomio, della quale ho sottoscritti molti termini, ed esercitarsi ad esaminare contemporaneamente ciascuna coppia di equazioni, da cui dipende ogni cifra, affine di diminuire i tentativi.

Coefficienti delle potenze 10^{3n}, 10^{3n-1} .... *fino a* 10^{3n-8}.

a^3_n; $3a^2_n\, a_{n-1}$; $3a^2_n\, a_{n-2} + 3a_n\, a^2_{n-1}$;
$3a^2_n\, a_{n-3} + 6a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} + a^3_{n-1}$

$3a^2_n\, a_{n-4} + 6a_n\, a_{n-1}\, a_{n-3} + 3a^2_{n-1}\, a_{n-2} + 3a_n\, a^2_{n-2}$

$3a^2_n\, a_{n-5} + 3a^2_{n-1}\, a_{n-3} + 6a_n\, a_{n-1}\, a_{n-4} + 6a_n\, a_{n-2}\, a_{n-3} +$
$3a_{n-1}\, a^2_{n-2}$

$3a^2_n\, a_{n-6} + 3a^2_{n-1}\, a_{n-4} + a^3_{n-2} + 3a_n\, a^2_{n-3} + 6a_n\, a_{n-1}\, a_{n-5} +$
$6a_n\, a_{n-2}\, a_{n-4} + 6a_{n-1}\, a_{n-2}\, a_{n-3}$

$3a^2_n\, a_{n-7} + 3a^2_{n-1}\, a_{n-5} + 3a^2_{n-2}\, a_{n-3} + 3a_{n-1}\, a^2_{n-3} +$
$6a_n\, a_{n-1}\, a_{n-6} + 6a_n\, a_{n-2}\, a_{n-5} + 6a_n\, a_{n-3}\, a_{n-4} + 6a_{n-1}\, a_{n-2}\, a_{n-4}$

$3a^2_n\, a_{n-8} + 3a^2_{n-1}\, a_{n-6} + 3a^2_{n-2}\, a_{n-4} + 3a^2_{n-3}\, a_{n-2} + 3a_n\, a^2_{n-4} +$
$6a_n\, a_{n-1}\, a_{n-7} + 6a_n\, a_{n-2}\, a_{n-6} + 6a_{n-1}\, a_{n-2}\, a_{n-5} + 6a_{n-1}\, a_{n-3}\, a_{n-4}$

. . . . . .

Le quali formole si compongono con nota legge.

Risoluzione aritmetica delle equazioni.

La regola che espongo è, usando parole del Newton, *breviter explicatam, potius quam accurate demonstratam.* Ma in altra occasione spero di poter dichiarare ed estenderne l' applicazione. Prendo esempj già calcolati, onde evitarne la verificazione.

La equazione data sia $x^2+3x-32=0$ (Bellavitis. Istituto Veneto. Vol. 3°.)

Pongo $\frac{1}{10}=a$, $x=a+ba+ca^2+da^3+ea^4\ldots\ldots$:
sostituisco ed ordino per a il risultato
$(a^2+3a-32)+a(2ab+3b)+a^2(2ac+b^2+3c)+$ ecc. $=0$.

Rappresento questa equazione con.....

$$A_n a^n+A_{n-1}a^{n-1}+A_{n-2}a^{n-2}+A_{n-3}a^{n-3}\ldots\ldots=0.$$

Indico con b_{n+1}, il porto dei termini antecedenti ad $A_n a^n$ e suppongo $b_{n+1}+A_n=a_n+b_n.10$, $b_n+A_{n-1}=a_{n-1}+b_{n-1}.10$,
$b_{n-1}+A_{n-2}=a_{n-2}+b_{n-2}.10,\ldots\ldots$
quella equazione darà.....

$$+a_n.10^n+a_{n-1}.10^{n-1}+a_{n-2}.10^{n-2}\ldots\ldots+a_0+b_0.10=0,$$

per cui dovranno essere $b_0=0$, $a_0=0$, $a_1=0\ldots\ldots a_n=0\ldots\ldots$

Considero quindi le equazioni $a^2+3a-32+b_1=b_0.10=0$, $2ab+3b+b_2=b_1.10$, ecc., cerco i valori interi più grandi di $a, b, c\ldots\ldots$ che le rendono soddisfatte, e

trovo $a=4$, $b_1=4$

$11.b+b_2=40$, $2ac+b^2+3c+b_3=b_2.10$,
ossia $11.c+b^2+b_3=b_2.10$, onde $b=3$, $b_2=7$

$11.c+9+b_3=70$, $2ad+2bc+3d+b_4=b_3.10$,
cioè $11.c+b_3=61$, $11.d+6c+b_4=b_3.10$, d'onde $c=5$, $b_3=6$,

$11.d+b_4=30$, $2ae+2bd+c^2+3e+b_5=b_4.10$,
ossia $11.e+6.d+25+b_5=b_4.10$, $d=2$, $b_4=8$

$11 . e + b_5 = 43,\ 2af + 2be + 2dc + 3f + b_6 = b_5 . 10,$

cioè $11 . f + 6 . e + 20 + b_6 = b_5 . 10,\ e = 3,\ b_5 = 10$

$11 . f + b_6 = 62,\ 2ag + 2bf + 2ec + 3g + d^2 + b_7 = b_6 . 10,$

cioè $11 . g + 6f + 30 + b_7 = b_6 . 10,$ epperò $f = 5,\ b_6 = 7$

$11g + b_7 = 10,\ g = 0,$ ecc. dunque $x = 4{,}352350 \ldots\ldots$

Si vuole risolvere $x^3 - 2x - 5 = 0$ (Lagrange. Equations numeriq.).

Sostituito in questa equazione $x = a + ba + \ldots\ldots$ e raccolti i coefficienti di a

avremo $a^3 - 2a - 5 + b_1 = b_0 . 10 = 0,\ 3a^2b - 2b + b_2 = b_1 . 10,$

onde $a = 2,\ b_1 = 1$

$10 . b + b_2 = 10,\ b = 0$

$3a^2c + 3b^2a - 2c + b_3 = b_2 . 10,$ ossia $10 . c + b_3 = 100$

$3a^2d + b_3 + 6abc - 2d + b_4 = b_3 . 10,$ cioè $10 . d + b_4 = b_3 . 10,$

$c = 9,\ b_3 = 10$

$10 . d + b_4 = 100,\ 3a^2e + 3b^2c + 3c^2a + 6abd - 2e + b_5 = b_4 . 10,$

ossia $10 . e + 486 + b_5 = b_4 . 10,\ d = 4,\ b_4 = 60$

$10 . e + b_5 = 114,\ 3a^2f + 6acd - 2f + b_6 = b_5 . 10,$

cioè $10 . f + 432 + b_6 = b_5 . 10,$ onde $e = 7, \ldots\ldots\ x = 2{,}0947.$

Considero la equazione $x^5 + 10x^2 - 1 = 0$ (Cauchy. Sur le rapports entre le calcul des Residus..... Turin. 1831.).

$a^5 + 10a^2 - 1 + b_1 = 0,\ 5a^4b + 20 . ab + b_2 = b_1 . 10,$

$5a^4c + 10a^3b^2 + 10 . b^2 + 20 . ac + b_3 = b_2 . 10,$

$5a^4d + 20a^3bc + 10a^2b^3 + 20bc + 20ad + b_4 = b_3 . 10$

$5a^4e + 20a^3bd + 10a^3c^2 + 30a^2b^2c +$

$5ab^4 + 20ae + 20 . bd + 10c^2 + b_5 = b_4 . 10.$

Dunque $a = 0,\ b_1 = 1,\ b_2 = 10$

$10 . b^2 + b_3 = 100,\ 20 . bc + b_2 = b_3 . 10,\ b = 3,\ b_3 = 10$

$60c + b_4 = 100,\ 20bd + 10c^2 + b_5 = b_4 . 10,$

cioè $60 . d + 10 . c^2 + b_5 = b_4 . 10,\ c = 1,\ b_4 = 40$

$60 . d + b_5 = 390,\ b^5 + 2be . 10 + 2cd . 10 + b_6 = b_5 . 10,$

ossia $243 + 60e + 20 . d + b_6 = b_5 . 10,\ d = 5,\ b_5 = 90$

$6e + b_6 = 557,\ 5b^4c + 20bf + 20 . ce + 10d^2 + b_7 = b_6 . 10,$

cioè $60f + 20 . e + 655 + b_7 = b_6 . 10,\ e = 9,\ b_6 = 504, \ldots$

Dunque $x = 0{,}3159 \ldots$

Si vuol risolvere $2x^3 + 5x^2 + 7x - 188 = 0$ (Bellavitis....).

Avremo $2a^3 + 5a^2 + 7a - 188 + b_1 = b_0 . 10 = 0,$

$b(6a^2 + 10a + 7) + b_2 = b_1 10,\ b^2(6a + 5) + c(6a^2 + 10a + 7) + b_3 = b_2 10$

$2b^3 + bc(12ab + 10b) + d(6a^2 + 10a + 7) + b_4 = b_3 . 10,$

$c^2(6a + 5) + 6d(12a + 10) + e(6a^2 + 10 . a + 7) + b_4 = b_3 . 10$

. . . . . .

Onde $a = 3,\ b_1 = 68$

$91 . b + b_2 = 680,\ 23 . b^2 + 91 . c + b_3 = b_2 . 10,\ b = 6,\ b_2 = 134,$

$91 . c + 828 + b_3 = 1340,$

$276 . c + 91 . d + 432 + b_4 = b_3 . 10,\ c = 3,\ b_3 = 239$

$91 . d + 1260 + b_4 = 2390,$ cioè $91 . d + b_4 = 1130,$

$276 . d + 91 . e + 207 + b_5 = b_4 . 10,\ d = 9,\ b_4 = 311$

$91 . e + b_5 = 419,\ e = 4$ incerto. Finalmente $x = 3{,}6394 \ldots$

Il nostro metodo si applica con vantaggio alle equazioni che presentano una sola variazione. Se i coefficienti sono fratti si ordinano preventivamente secondo le potenze di a: e si può impiegare anche alla risoluzione di più equazioni numeriche contemporanee. Sulle quali cose spero di ritornare con altro lavoro (1).

(1) Per una nota inserita dall' illustre Sig. Crelle nel giornale per l'anno 1846, pag. 167 ora conosco che il Capitano Francese Sig. Guy ha pubblicato un metodo per la divisione numerica abbreviata, ma da quanto pare le nostre regole devono essere affatto diverse.