MEMORIA

INTORNO

AL RAGGIO ASSOLUTO DEL CIRCOLO OSCULATORE

ED ALLE EVOLUTE DELLE CURVE A DOPPIA CURVATURA

DESCRITTE SOPRA LA SUPERFICIE DELLA SFERA

DEL SIG. COMMENDATORE

PROF. GIOVANNI PLANA

SOCIO ATTUALE

Ricevuta adì 27 Ottobre 1846.

§. I.

Lo scopo che mi sono proposto in questo scritto è, di porre in evidenza le modificazioni che subiscono le formole generali applicate a questo caso, e di formare le più semplici equazioni per le quali si determina sulla sfera il polo del piano osculatore della curva, insieme colle linee trigonometriche pertinenti all' arco di circolo massimo, il di cui seno è precisamente eguale alla linea, che, a norma delle idee di *Monge*, costituisce il raggio assoluto del circolo osculatore.

Che io sappia, queste formole speciali, degne di attenzione per la loro forma ed analitica eleganza, non sono ancora state pubblicate. Per esse si vedrà come sia avvenuto, che, non ostante una indiretta considerazione adoprata da *Eulero* vi sia un perfetto accordo fra l' espressione generale del raggio assoluto del circolo osculatore di una curva descritta sulla superficie della sfera, e l' espressione di quel raggio di piccolo circolo che, nel 1771, è stata data da *Eulero* « *tamquam expressio generalis pro radiis osculi curvarum in superficie sphaerica descriptarum* » in una sua Memoria « *De curva rectificabili in superficie sphaerica* » stampata nel Tomo XV dell' Imp. Accademia di Pietroburgo (Vedi pag. 203.).

Si avrà qui una espressione analitica semplicissima delle tre coordinate della curva che riunisce la totalità dei poli dei piani osculatori: la qual curva vuole essere distinta da quella che sarebbe il luogo geometrico dei centri dei circoli osculatori. La prima fa sulla sfera le veci delle evolute delle curve piane. Quindi è, che se ne può derivare il differenziale dell'arco della curva primitiva in funzione dell'elemento analogo di questa evoluta e del di lei raggio del circolo osculatore, siccome si pratica per le curve piane.

Nel §. V. ho voluto, con questa occasione, dare l'espressione del raggio della *sfera osculatrice* sotto la forma la più semplice che comporta per qualsivoglia curva che fosse descritta sopra una superficie diversa dalla sferica.

§. II.

Sia l'unità il raggio della sfera, ed x, y, z le coordinate ortogonali, riferite al centro di un punto qualunque della sua superficie: esprimendo queste colle coordinate polari si avrà, siccome è noto,

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta \,.\, \sin\phi, \quad z = \sin\theta \,.\, \cos\phi;$$

e per l'elemento ds della curva,

$$(1) \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{d\theta^2 + d\phi^2 \sin^2\theta}.$$

Da questi valori di x, y, z si deduce, differenziando senza definire quale sia il differenziale assunto per costante;

$$(2) \quad \begin{cases} dx = -\sin\theta \,.\, d\theta \\ dy = d\theta \,.\, \sin\phi \cos\theta + d\phi \,.\, \sin\theta \cos\phi, \\ dz = d\theta \,.\, \cos\phi \cos\theta - d\phi \,.\, \sin\theta \sin\phi; \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} d^2 x = -dd\theta \,.\, \sin\theta - d\theta^2 \,.\, \cos\theta, \\ d^2 y = dd\theta \,.\, \sin\phi \cos\theta + dd\phi \,.\, \sin\theta \cos\phi \\ \qquad + 2\, d\theta\, d\phi \,.\, \cos\theta \cos\phi - (d\theta^2 + d\phi^2) \sin\theta \sin\phi; \\ d^2 z = dd\theta \,.\, \cos\phi \cos\theta - dd\phi \,.\, \sin\theta \sin\phi \\ \qquad - 2\, d\theta\, d\phi \,.\, \cos\theta \sin\phi - (d\theta^2 + d\phi^2) \sin\theta \cos\phi. \end{cases}$$

Ciò posto, consideriamo l'equazione

$$(x'-x)\,X' + (y'-y)\,Y' + (z'-z)\,Z' = 0$$

del *piano osculatore* della curva, nella quale si ha

$X' = dy.ddz - dz.ddy$; $Y' = dz.ddx - dx.ddz$; $Z' = dx.ddy - dy.ddx$.

Mediante le equazioni (2) e (3); fatto

$$X = \frac{X'}{d\theta^3}, \quad Y = \frac{Y'}{d\theta^3}, \quad Z = \frac{Z'}{d\theta^3},$$

si troverà

$$(4)\quad \begin{cases} X = -\left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^3 \sin^2\theta - \frac{d\phi}{d\theta}(1+\cos^2\theta) + \left(\frac{d\phi}{d\theta}\cdot\frac{dd\theta}{d\theta^2} - \frac{dd\phi}{d\theta^2}\right)\sin\theta\cos\theta\,; \\ Y = -\cos\varphi - \left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2 \sin^2\theta\cos\varphi - \frac{d\phi}{d\theta}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi + \left(\frac{d\phi}{d\theta}\cdot\frac{dd\theta}{d\theta^2} - \frac{dd\phi}{d\theta^2}\right)\sin^2\theta\sin\varphi\,; \\ Z = \sin\varphi + \left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2 \sin^2\theta\sin\varphi - \frac{d\phi}{d\theta}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi + \left(\frac{d\phi}{d\theta}\cdot\frac{dd\theta}{d\theta^2} - \frac{dd\phi}{d\theta^2}\right)\sin^2\theta\cos\varphi. \end{cases}$$

Ora, se noi facciamo $M = xX + yY + zZ$, queste equazioni danno

$$(5)\qquad M = -2\frac{d\phi}{d\theta}\cos\theta - \left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^3 \sin^2\theta\cos\theta + \left(\frac{d\phi}{d\theta}\cdot\frac{dd\theta}{d\theta^2} - \frac{dd\phi}{d\theta^2}\right)\sin\theta;$$

per modo che si ha

$$(6)\qquad x'X + y'Y + z'Z = M$$

per l'equazione del piano osculatore.

Per porre sotto una forma più semplice le tre funzioni X, Y, Z, osservo che, eliminando il binomio $\frac{d\phi}{d\theta}\cdot\frac{dd\theta}{d\theta^2} - \frac{dd\phi}{d\theta^2}$ mediante l'equazione (5), si ottiene

$$(7)\quad \begin{cases} X = M\cos\theta - \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 \frac{d\phi}{d\theta}\sin^2\theta\,, \\ Y = M\sin\theta\sin\varphi + \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 \left\{ \frac{d\phi}{d\theta}.\sin\varphi\sin\theta\cos\theta - \cos\varphi \right\}, \\ Z = M\sin\theta\cos\varphi + \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 \left\{ \frac{d\phi}{d\theta}.\cos\varphi\sin\theta\cos\theta + \sin\varphi \right\}. \end{cases}$$

Di qui, avendo riguardo all' equazione (1), la quale dà $\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = 1 + \left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2 \sin^2\theta$, si trae facilmente per la somma $X^2 + Y^2 + Z^2$ dei tre quadrati questa semplicissima espressione

$$(8) \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = M^2 + \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^6.$$

Siano α, β, γ gli angoli formati coi tre assi delle x, y, z dalla normale al piano osculatore abbassata dall'origine, ossia centro della sfera: è noto, che fatto $D = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, si ha

$$(9) \qquad \left\{ \cos\alpha = \frac{X}{D}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{D}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{D} \right\}.$$

L' equazione (6) significa adunque, che

$$(10) \qquad x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma = \frac{M}{D},$$

ove $\frac{M}{D}$ è eguale alla normale anzidetta, compresa fra l'origine ed il punto d'intersecazione col piano osculatore. Se adunque si chiama Ω l'angolo formato da questa normale e dal raggio della sfera condotto al punto della sua superficie di cui x, y, z sono le coordinate, si avrà

$$(11) \qquad \begin{cases} \cos\Omega = \frac{M}{D}, \\ \sin\Omega = \sqrt{1 - \frac{M^2}{D^2}} = \frac{1}{D}\cdot\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^3 = \frac{\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^3}{\sqrt{M^2 + \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^6}}. \end{cases}$$

Quest' ultima formola somministra l'espressione generale del raggio assoluto del circolo osculatore, poichè questo raggio è, nel caso attuale, precisamente eguale al raggio del piccolo circolo che nasce dalla intersecazione del piano osculatore colla sfera. Egli è pur chiaro, che di qui si ricava

$$(12) \qquad \operatorname{tang}\Omega = \frac{1}{M}\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^3.$$

Ma è possibile di porre l'espressione di M data dal secondo membro dell'equazione (5) sotto una forma assai più concisa nel modo seguente.

Differenziando l'equazione $ds^2 = d\theta^2 + d\phi^2 \sin^2\theta$ si ha

$$(13) \qquad \frac{ds}{d\theta}\cdot\frac{dds}{d\theta^2} = \frac{dd\theta}{d\theta^2} + \frac{d\phi}{d\theta}\cdot\frac{dd\phi}{d\theta^2}\sin^2\theta + \left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2 \sin\theta\cdot\cos\theta.$$

Per la combinazione delle due equazioni (5) e (13) si avrà pertanto, eliminando $\frac{dd\theta}{d\theta^2}$;

$$M \sin\theta = -\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 \left\{ 2\,\frac{d\phi}{d\theta} \sin\theta \cos\theta + \frac{dd\phi}{d\theta^2} \sin^2\theta - \frac{d\phi}{ds} \cdot \frac{dds}{d\theta^2} \cdot \sin^2\theta \right\},$$

cioè,

$$M \sin\theta = -\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^3 \left\{ \frac{d\phi}{ds}\, d \cdot \sin^2\theta + \frac{d^2\phi}{d\theta\, ds} \sin^2\theta\, d\theta - \frac{d\phi \cdot dds}{ds^3} \sin^2\theta \right\}.$$

Ed è chiaro che si può scrivere

$$M \sin\theta\, d\theta = -\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^3 \left\{ \frac{d\phi}{ds}\, d \cdot \sin^2\theta + \sin^2\theta\, d \cdot \left(\frac{d\phi}{ds}\right) \right\}.$$

Per modo che si ha questa concisa equazione

$$(14) \qquad M \cdot \sin\theta\, d\theta = -\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^3 d \cdot \left\{ \frac{d\phi}{ds} \cdot \sin^2\theta \right\},$$

in forza della quale, le equazioni (11) e (12) diventano

$$(15) \qquad \sin\Omega = \frac{d \cdot \cos\theta}{\sqrt{\left[d \cdot \cos\theta\right]^2 + \left[d \cdot \left(\frac{d\phi}{ds} \sin^2\theta\right)\right]^2}},$$

$$(16) \qquad \operatorname{tang}\Omega = \frac{d \cdot \cos\theta}{d \cdot \left\{ \frac{d\phi}{ds} \sin^2\theta \right\}}.$$

Facendo $\cos\alpha = x''$, $\cos\beta = y''$, $\cos\gamma = z''$, le coordinate x'', y'', z'' saranno quelle del *polo del piano osculatore*. E per via delle equazioni (9) si ha

$$(17) \qquad \begin{cases} x'' = \dfrac{X}{\sqrt{M^2 + \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^6}}, \\[2ex] y'' = \dfrac{Y}{\sqrt{M^2 + \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^6}}, \\[2ex] z'' = \dfrac{Z}{\sqrt{M^2 + \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^6}}, \end{cases}$$

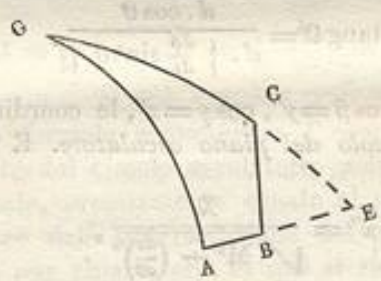
Essendo data la curva descritta sulla sfera sarà pure data un' equazione della forma $F(\theta, \phi) = 0$, od altra equivalente. Per

modo che, eliminando ϕ fra questa equazione e le tre precedenti, si può fingere che si hanno tre equazioni della forma

$$x'' = f(\theta), \quad y'' = f'(\theta), \quad z'' = f''(\theta),$$

per le quali $x''^2 + y''^2 + z''^2 = 1$. Adunque, eliminando θ fra due di queste tre equazioni si avrebbe l'equazione della curva che è il luogo geometrico della totalità dei poli dei piani osculatori della data curva.

In generale, questa curva può essere considerata siccome formata dalla successiva intersecazione degli archi Ω di circolo massimo condotti normalmente alla data curva, e potrebbe chiamarsi la di lei *evoluta sferica*; poichè un filo ad essa avvolto, e sviluppato, tenendolo teso sulla superficie della sfera, descriverebbe colla sua estremità la curva primitiva, rimanendo sempre applicato sopra di un circolo massimo, stante che si dimostra che tale è la curva sulla sfera onde sia minima la distanza che unisce due punti.



Siano AB, BC due elementi consecutivi dell' evoluta di cui qui si parla: saranno due archi infinitesimi di circolo massimo. Conducendo due archi di circolo massimo AG e CG ad essi normali si formerà il punto G pertinente all' evoluta dell' evoluta primitiva. Prolungando gli archi AB e CG fino al loro concorso in E, si avrà il triangolo sferico AGE rettangolo in A, nel quale $\operatorname{tang} E = \frac{\operatorname{tang} GA}{\sin AE}$.

Ma, considerando siccome rettilineo il triangolo infinitesimo CBE, si avrà $CEB + CBE = 90^\circ$, essendo (per costruzione) retto l'angolo in C. Adunque, chiamando ω' l'angolo di contingenza CBE, ed s' la lunghezza di un arco dell'evoluta, si ha l'equazione

$$\text{tang}\,(90^\circ - \omega') = \frac{\text{tang}\,\Omega'}{\sin ds'},$$

ove $\Omega' = GA$. Di qui si trae $\omega' = \frac{ds'}{\text{tang}\,\Omega'}$, poichè è lecito di porre $\sin ds' = ds'$, $\text{tang}\,\omega' = \omega'$. Ora, vuolsi osservare, che l'angolo ω', formato dai due piani consecutivi normali alla curva, si trova sul piano osculatore, e che si ha $ds = \omega' . \sin\Omega$, stantechè l'archetto ω' è descritto col raggio $\sin\Omega$ del circolo osculatore. Quindi è che noi abbiamo l'equazione

$$(18) \qquad \frac{ds}{\sin\Omega} = \frac{ds'}{\text{tang}\,\Omega'}.$$

In forza della generazione dell'evoluta sferica è lecito di porre $\Omega = s' + k$, ove k è un arco di circolo massimo il di cui seno rappresenta il raggio assoluto di curvatura al primo punto della data curva. Si può adunque stabilire l'equazione

$$(19) \qquad ds = \frac{\sin(s'+k) . d(s'+k)}{\text{tang}\,\Omega'},$$

la quale è analoga all'equazione

$$ds = \frac{(s'+k)\, d(s'+k)}{r'}$$

che si ha per le curve piane; chiamando r' il raggio del circolo osculatore dell'evoluta; s' l'arco di essa, ed s l'arco dell'evolvente.

Per meglio distinguere la curva compresa nelle equazioni (17) soggiungerò che, x', y', z' essendo, in generale, le coordinate del centro del circolo osculatore della curva descritta sulla sfera si ha

$$(20) \qquad \begin{cases} x' = \cos\Omega . \cos\alpha; \quad y' = \cos\Omega . \cos\beta; \quad z' = \cos\Omega . \cos\gamma; \\ x' = \frac{M}{D} . \cos\alpha; \quad y' = \frac{M}{D} . \cos\beta; \quad z' = \frac{M}{D} . \cos\gamma: \end{cases}$$

ed essendo $\cos\alpha = x''$, $\cos\beta = y''$, $\cos\gamma = z''$ ne segue, che

$$(21)\quad \begin{cases} x' = \dfrac{MX}{M^2 + \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^6}; \\ y' = \dfrac{MY}{M^2 + \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^6}; \\ z' = \dfrac{MZ}{M^2 + \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^6}. \end{cases}$$

La superficie conica, avente il vertice al centro della sfera, sulla quale si concepiscono descritte ambidue le curve comprese nelle equazioni (17) e (21), è quella sola che può contenere una infinità di linee curve, che, giusta la teoria di *Monge*, possono essere considerate siccome *evolute* della curva primitiva. Queste evolute sono generalmente espresse dalle tre equazioni

$$\frac{\xi}{\zeta} = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} = \frac{X}{Z},$$

$$\frac{\eta}{\zeta} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{Y}{Z},$$

$$(\xi - \cos\theta) - (\zeta - \sin\theta\cos\varphi)\,\frac{d\xi}{d\zeta} = 0,$$

nelle quali ξ, η, ζ sono le coordinate della superficie conica anzidetta, la quale è rappresentata dalle due prime: la terza è la projezione della retta tangente all' evoluta. Ed è chiaro, che l' infinito numero di queste curve tiene all' esistenza della costante arbitraria che sarebbe introdotta per l' integrazione dell' equazione differenziale in ξ, ζ, $\frac{d\xi}{d\zeta}$ che si avrebbe mediante l' eliminazione di θ e φ. Ora vuolsi osservare, che rappresentando con $f\left(\xi, \zeta, \frac{d\xi}{d\zeta}\right) = 0$ l'equazione così risultante; dessa potrà avere, oltre l' integrale completo, anche una *soluzione particolare*. Ma, nè l' una, nè l' altra potrebbe comprendere la curva espressa per le equazioni (17), poichè le linee *rette* tangenti a questa, non passano, comunque prolungate, per la data curva.

§. III.

La funzione $\frac{d\phi}{ds}\sin^2\theta$, che, giusta la formola (15) entra nell' espressione del raggio di curvatura ha un significato del tutto trigonometrico che importa di aver presente alla mente. Infatti, sia per un momento ω l'angolo formato sulla superficie della sfera dai due elementi $d\theta$ e ds: il terzo elemento $d\phi\sin\theta$ essendo perpendicolare a $d\theta$, si ha

$$\sin\omega = \frac{d\phi}{ds}\sin\theta, \quad \cos\omega = \frac{d\theta}{ds}.$$

Ed è palese, che fatto $\psi = 90^\circ - \omega$ ne segue che,

$$(22) \quad \left\{ \sin\theta . \cos\psi = \frac{d\phi}{ds}\sin^2\theta; \quad \sin\psi = \frac{d\theta}{ds}; \quad \operatorname{tang}\psi = \frac{d\theta}{d\phi\sin\theta} \right\},$$

ove l'angolo ψ è quello che è formato dalla intersecazione del piano che contiene l'arco di circolo massimo θ col piano che contiene l'altro arco di circolo massimo perpendicolare a ds.

Introducendo l'angolo ψ nelle formole (7), si avrà

$$(23) \quad \begin{cases} X = M\cos\theta - \frac{\sin\theta . \cos\psi}{\sin^3\psi}, \\ Y = M\sin\theta\sin\phi - \left\{ \frac{\cos\phi . \sin\psi - \sin\phi\cos\psi . \cos\theta}{\sin^3\psi} \right\}, \\ Z = M\sin\theta\cos\phi + \left\{ \frac{\sin\phi . \sin\psi + \cos\phi\cos\psi . \cos\theta}{\sin^3\psi} \right\}. \end{cases}$$

La forma di queste espressioni suggerisce, che, formando un triangolo sferico rettangolo ABC, nel quale l'angolo $A = \theta$, l'angolo $B = 90^\circ$, ed il lato $AC = \psi - 90^\circ$, si avrà, chiamando μ'' il lato BC;

$$(24) \quad \cos\mu'' = \sin\theta . \sin(\psi - 90^\circ) = -\sin\theta . \cos\psi.$$

Formando un secondo triangolo sferico obliquangolo ABC, nel quale l'angolo $A = \theta$, il lato $AB = 180^\circ - \phi$, il lato $AC = 90^\circ - \psi$, facendo il lato $BC = \mu'$, si avrà

$$(25) \quad \cos\mu' = \cos(180^\circ - \phi).\cos(90^\circ - \psi) + \sin(180^\circ - \phi)\sin(90^\circ - \psi)\cos\theta.$$

Finalmente, formando un terzo triangolo sferico ABC, pure obliquangolo, nel quale l'angolo $A=\theta$, il lato $AB=90^\circ-\varphi$, il lato $AC=90^\circ-\psi$, se vi si fa il lato $BC=\mu$, si avrà

$$(26)\qquad \cos\mu=\cos(90^\circ-\varphi)\cos(90^\circ-\psi)+\sin(90^\circ-\varphi)\sin(90^\circ-\psi).\cos\theta.$$

Ciò posto è chiaro che si ha

$$(27)\qquad \begin{cases} X=M\cos\theta+\frac{\cos.\mu''}{\sin^3\psi}, \\ Y=M\sin\theta.\sin\varphi+\frac{\cos.\mu'}{\sin^3\psi}, \\ Z=M\sin\theta.\cos\varphi+\frac{\cos.\mu}{\sin^3\psi}. \end{cases}$$

Ma noi abbiamo trovato più sopra, che

$$\frac{M}{D}=\cos\Omega\,,\quad \frac{1}{D}=\sin^3\psi.\sin\Omega:$$

egli è pertanto dimostrato, che le formole (9) e (17) sono equivalenti alle seguenti; cioè

$$(28)\qquad \begin{cases} \cos\alpha=x''=\cos\theta.\cos\Omega+\sin\Omega.\cos\mu'', \\ \cos\beta=y''=\sin\varphi\sin\theta.\cos\Omega+\sin\Omega.\cos\mu', \\ \cos\gamma=z''=\cos\varphi\sin\theta.\cos\Omega+\sin\Omega.\cos\mu. \end{cases}$$

La prima di queste tre equazioni, dopo avervi sostituito il valore di $\cos\mu''$ dato dall' equazione (24) diventa

$$(29)\qquad \cos\alpha=\cos\theta.\cos\Omega-\sin\Omega.\sin\theta\cos\psi.$$

Differenziando i due membri, si ha

$$d(\cos\alpha)=\cos\Omega\,d(\cos\theta)-\sin\Omega\,d(\sin\theta\cos\psi)$$
$$+\cos\theta\,d(\cos\Omega)-\sin\theta\cos\psi\,d(\sin\Omega).$$

La prima di queste due linee è eguale a zero, in forza del valore precedente di $\tang\Omega$ dato dalle equazioni (16) e (22): quindi è che si ha

$$d(\cos\alpha)=-d\Omega\,\{\cos\theta.\sin\Omega+\sin\theta\cos\psi.\cos\Omega\}.$$

È pertanto dimostrato per questa equazione, che non è ammissibile l' equazione $d(\cos a)=0$, quando si passa da un punto al punto consecutivo della curva descritta sulla superficie della sfera, giusta l' idea inerente alla differenziazione. Ma, chi facesse variare nel secondo membro dell' equazione (29) solamente i due angoli θ e ψ, lasciando costante l' arco Ω: allora avrebbe infatti $d(\cos a)=0$, ossia

$$\cos\Omega\, d(\cos\theta) - \sin\Omega\, d(\sin\theta\cos\psi) = 0. \tag{30}$$

Un tal modo rapido di stabilire quest' ultima equazione è quello che è stato adoprato da *Eulero* nel luogo citato al primo paragrafo di questa Memoria. Ma havvi in questo ragionamento una certa oscurità, poichè l' angolo Ω essendo pure, implicitamente, dei due angoli θ e ψ, sui quali si porta la differenziazione, vuolsi scorgere chiaramente come si possa differenziare il secondo membro dell' equazione (29), trattando Ω a guisa di quantità indipendente dalle variazioni di θ e ψ.

Checchè ne sia di questa oscurità, siccome l' equazione (30) somministra il valore di $\operatorname{tang}\Omega$ quale noi l' abbiamo trovato per via di operazioni inconcusse, non è possibile di impugnare la verità di questo risultato. Del resto si potrebbe giustificare il ragionamento qui fatto da *Eulero* dicendo, che è analogo a quello che si fa, ponendo eguale a zero il differenziale, preso rispetto ad a soltanto, dell' equazione $y=ax+F(a)$, onde avere, per l' eliminazione di a, l' equazione della curva nata dalle successive intersecazioni delle linee rette.

§. IV.

Ora se si finge data la curva descritta sulla superficie della sfera, si dovrà avere l' equazione di una delle sue projezioni: o per via di una sola equazione in θ e ϕ: o, per via di due equazioni che daranno queste variabili in funzione di una terza, la quale sarebbe presa per la variabile indipendente. Mediante le due formole (11) e (15) si potrà sempre determinare il raggio assoluto del circolo osculatore, cioè $\sin\Omega$.

Per esempio, se fosse quistione della curva *rettificabile* descritta sulla superficie della sfera, per la quale si ha

$$(31) \qquad \left\{ s = a\cos\theta; \qquad d\phi = \frac{d\theta}{\sin\theta}\sqrt{a^2\sin^2\theta - 1} \right\},$$

a essendo una quantità costante maggiore dell' unità (Vedi pag. 199 del Tomo XV dei *Novi Commentarj*, oppure il T. 2°. del Trattato di Lacroix, p. 216-17) ne seguirebbe, assumendo θ per la variabile indipendente, $\frac{ds}{d\theta} = -a\sin\theta$; $\frac{dds}{d\theta^2} = -a\cos\theta$: quindi è che per la formola (15) si ha immediatamente

$$\sin\Omega = \frac{d\theta\sin\theta}{\sqrt{d\theta^2\sin^2\theta + \frac{1}{a^2}\left(d.\sqrt{a^2\sin^2\theta - 1}\right)^2}};$$

e per conseguenza

$$(32) \qquad \sin\Omega = \frac{\sqrt{a^2\sin^2\theta - 1}}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Nel caso semplicissimo in cui si avesse $\frac{d\phi}{d\theta} = m$, essendo m quantità costante, la formola (11) darebbe facilmente

$$(33) \quad \sin\Omega = \frac{(1 + m^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1 + 4m^2 + m^2(4m^2 - 1)\sin^2\theta + m^4(m^2 - 1)\sin^4\theta}}.$$

E vuolsi osservare, che fatto $\theta = \tau - 90^\circ$, $m = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} = \frac{c}{b}$, si avrebbe per questa curva

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{c} x = \sin\tau,\ y = \cos\tau.\sin\left(\frac{c}{b}\tau + \varepsilon\right),\ z = \cos\tau.\cos\left(\frac{c}{b}\tau + \varepsilon\right) \\ bs = \int d\tau\sqrt{1 - c^2\sin^2\tau}; \end{array} \right.$$

ε essendo una costante arbitraria. Per modo chè, dessa è rettificabile per via di un arco elittico.

Per avere sulla superficie della sfera la curva che è rettificabile mediante le trascendenti elittiche di prima specie, si pone

$$ds = \sqrt{d\theta^2 + d\phi^2\sin^2\theta} = \frac{d\theta}{\sqrt{1 - c^2\cos^2\theta}},$$

d'onde si ricava

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{c \,.\, \cos\theta}{\sin\theta \,.\, \sqrt{1 - c^2 \cos^2\theta}}; \quad \frac{d\phi}{ds} \sin^2\theta = c \,.\, \sin\theta \cos\theta;$$

$$\phi = \varepsilon + \frac{c}{b} \log \left\{ \frac{\sqrt{1 - c^2 \cos^2\theta} - b}{c \sin\theta} \right\}.$$

La formola (15) dà

$$\sin\Omega = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + c^2 \cos^2 . 2\theta}}. \tag{35}$$

Presentemente, se noi facciamo $\theta = \tau - 90^\circ$ si avrà sulla superficie della sfera una curva avente per coordinate ortogonali

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \sin\tau, \\ y &= \cos\tau . \sin \left\{ \varepsilon + \frac{c}{b} \log \left[\frac{\Delta - b}{c \,.\, \cos\tau} \right] \right\}, \\ z &= \cos\tau . \cos \left\{ \varepsilon + \frac{c}{b} \log \left[\frac{\Delta - b}{c \,.\, \cos\tau} \right\} \right., \end{aligned} \right. \tag{36}$$

per la quale, fatto $\Delta = \sqrt{1 - c^2 \operatorname{sen}^2\tau}$, si avrà

$$s = \int \frac{d\tau}{\Delta} + \textit{costante}. \tag{37}$$

È adunque possibile di descrivere sulla superficie della sfera una curva trascendente, di cui le lunghezze degli archi avranno le proprietà delle trascendenti ellittiche di prima specie.

Volendo far incominciare l'arco s della curva con $\theta = 0$, si prenderà

$$-F'(c) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\Delta}$$

per la costante arbitraria che entra nel secondo membro dell' equazione (37), e si scriverà

$$s = \int_0^{\tau} \frac{d\tau}{\Delta} - F'(c) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\tau} \frac{d\tau}{\Delta} = F'(c) - \int_0^{\pi - \tau} \frac{d\tau}{\Delta}. \tag{38}$$

Questa curva, a doppia curvatura, presenta un singolar contrasto quando se ne faccia il confronto colla curva piana avente per coordinate ortogonali

$$x''' = \frac{1}{2c} \log \left\{ \frac{1 - c.\cos\tau'}{1 + c.\cos\tau'} \right\}; \quad y''' = \frac{1}{c} . ax . \left\{ \operatorname{tang} = \frac{c}{b} \sin\tau' \right\},$$

per la quale si ha, siccome è noto,

$$s''' = \int_0^{\tau' - \frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\Delta}$$

(Vedi Tomo 1° del *Traité des Fonctions Elliptiques de Legendre* pag. 40 e 41.).

Per far sì che si abbia $s = s'''$ si dovranno prendere le due ampiezze $\pi - \tau$, $\tau' - \frac{\pi}{2}$, tali che si abbia l'equazione

$$b \operatorname{tang}(\pi - \tau) . \operatorname{tang}\left(\tau' - \frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

poichè allora si ha

$$F'(c) = \int_0^{\pi - \tau} \frac{d\tau}{\Delta} + \int_0^{\tau' - \frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\Delta}.$$

Ritornando alla prima delle tre curve prese in esempio, vuolsi osservare che, avendosi per essa,

$$\sin\Omega = \frac{\sqrt{a^2 \sin^2\theta - 1}}{\sqrt{a^2 - 1}}, \qquad \cos\Omega = \frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2 - 1}},$$

$$\sin\psi = \frac{-1}{a\sin\theta}, \qquad \cos\psi = \frac{\sqrt{a^2 \sin^2\theta - 1}}{a\sin\theta},$$

si avrà per la prima delle tre formole (28)

$$\cos\omega = x'' = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a},$$

e per conseguenza $y''^2 + z''^2 = \frac{1}{a^2}$. Il luogo geometrico *dei poli* della curva rettificabile è adunque un piccolo circolo della sfera del raggio $\frac{1}{a}$, il di cui piano è perpendicolare all'asse delle x.

Ed avendosi per le equazioni (2) e (31)

$$\sqrt{dy^2 + dz^2} = \sqrt{d\theta^2 \cos^2\theta + d\varphi^2 \sin^2\theta} = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a} . ds,$$

ne consegue, che chiamando s_1 l'arco della projezione sul piano delle y, z della curva rettificabile descritta sulla sfera, si ha

$$s_1 = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a} . s .$$

Per essere costante il rapporto $\frac{s_1}{s}$, è chiaro, che la curva *rettificabile* diventa una *linea retta*, sviluppando la superficie cilindrica eretta normalmente al piano delle y, z sulla curva che ne è la projezione. Per questa proprietà è singolarmente agevolata la descrizione della curva sulla sfera, quando non si voglia far uso del piccolo circolo che ne è l' *evoluta sferica*.

Havvi un terzo modo di descrizione organica, che pel primo è stato riconosciuto da *Giovanni Bernoulli* (Vedi pag. 236 del Tomo terzo delle sue Opere.). Chi fisserà l'occhio e la mente sopra questo opuscolo di *G. Bernoulli* non potrà a meno di ravvisare quanto fosse, in quel tempo, difficile quella scelta nelle variabili, che salva le inutili complicazioni, anche per un uomo dotato di mirabile ingegno e fervida fantasía. Allora non era ancora del tutto compresa e sentita la risoluzione che stava preparando *Eulero*, surrogando l'analisi e la potenza delle sue trasformazioni ai ragionamenti più sensibili tratti dalla Geometria, o dalla Meccanica.

Rispetto alla curva definita per le equazioni (36) si ha

$$\sin\Omega = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + c^2\cos^2.2\theta}}, \qquad \cos\Omega = \frac{c.\cos.2\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + c^2\cos^2.2\theta}},$$

$$\sin\psi = \sqrt{1 - c^2\cos^2\theta}, \qquad \cos\psi = c\cos\theta;$$

d'onde si trae per le formole (28)

$$x'' = \frac{c.\cos\theta\,(1 - 3\sin^2\theta)}{\sqrt{\sin^2\theta + c^2\cos^2.2\theta}},$$

$$y'' = \frac{c.\sin\theta.\sin\varphi\,(3\cos^2\theta - 1) - \sin\theta\cos\varphi.\sqrt{1 - c^2\cos^2\theta}}{\sqrt{\sin^2\theta + c^2\cos^2.2\theta}},$$

$$z'' = \frac{c.\sin\theta.\cos\varphi\,(3\cos^2\theta - 1) + \sin\theta\sin\psi.\sqrt{1 - c^2\cos^2\theta}}{\sqrt{\sin^2\theta + c^2\cos^2.2\theta}}.$$

Sostituendo per ϕ il valore logaritmico in funzione di θ, precedentemente trovato, si avrà per l'istessa variabile θ le coordinate della curva che è il luogo geometrico dei poli.

Per applicare le precedenti formole alla curva conosciuta nella nautica sotto il nome di *Lossodromia* basterebbe osservare, che questa curva essendo, per sua natura, tale che interseca tutti i meridiani con angolo costante si ha, chiamando ω quest' angolo,

$$\frac{d\theta}{ds} = \cos\omega = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2 \sin^2\theta}}.$$

Per modo che, le formole (15) e (16) danno

$$\operatorname{tang}\Omega = \frac{\operatorname{tang}\theta}{\sin\omega}, \qquad \sin\Omega = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta\sin^2\omega}}.$$

L'arco s della curva numerato da $\theta = 90°$, ossia dall'equatore, è espresso per l'equazione $s = \frac{\frac{\pi}{2} - \theta}{\cos\omega}$: e la longitudine ϕ è basata colla latitudine $\frac{\pi}{2} - \theta$ per via dell' equazione

$$\phi = -\operatorname{tang}\omega . \int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \varepsilon - \operatorname{tang}\omega . [\log . \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta],$$

ε essendo una costante arbitraria che rappresenta la longitudine del punto iniziale della curva.

Le coordinate ortogonali x, y, z della lossodromia sono pertanto:

$$x = \cos\theta,$$
$$y = \sin\theta . \sin\left\{\varepsilon - \operatorname{tang}\omega . \log . \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta\right\},$$
$$z = \sin\theta . \cos\left\{\varepsilon - \operatorname{tang}\omega . \log . \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta\right\}.$$

Mettendo per θ il suo valore in funzione dello spazio per esso s, si avrà

$$\phi = \varepsilon + \operatorname{tang}\omega . \log\left\{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{s}{2}\cos\omega\right)\right\}.$$

Mediante la tavola di *Legendre* si potrebbe facilmente ridurre in numeri questa formola.

§. V.

Rispetto alle curve descritte sopra superficie diverse dalla sferica, la posizione del centro della *sfera osculatrice* ed il suo raggio, possono essere analiticamente determinati colle seguenti formole. Siano

$$(39)\quad \begin{cases} (x'-x)\,dx + (y'-y)\,dy + (z'-z)\,dz = 0, \\ (x'-x)\,d^2x + (y'-y)\,d^2y + (z'-z)\,d^2z = ds^2, \\ (x'-x)\,d^3x + (y'-y)\,d^3y + (z'-z)\,d^3z = 3\,ds\,.\,d^2s, \end{cases}$$

le equazioni di tre piani consecutivi, normali alla curva.

Risolvendole rispetto ad $(x'-x)$, $(y'-y)$, $(z'-z)$ si trova, che fatto

$$V' = -X'\,d^3x - Y'\,d^3y - Z'\,d^3z,$$

si ha

$$(40)\quad \begin{cases} x'-x = \dfrac{ds^2.\,dX' - 3\,ds\,.\,dds\,.\,X'}{V'}, \\ y'-y = \dfrac{ds^2.\,dY' - 3\,ds\,.\,dds\,.\,Y'}{V'}, \\ z'-z = \dfrac{ds^2.\,dZ' - 3\,ds\,.\,dds\,.\,Z'}{V'}; \end{cases}$$

ove X', Y', Z' sono funzioni dei differenziali di x, y, z delle quali si ha l' espressione nel secondo paragrafo.

Ora, chiamando r il raggio della sfera osculatrice, cioè

$$r = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2},$$

ne risulterà l' equazione

$$(41)\quad \begin{aligned} V'^2.\,r^2 = {} & (ds)^4\,\{(dX')^2 + (dY')^2 + (dZ')^2\} \\ & + 9\,(ds)^2\,(dds)^2\,(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) \\ & - 3\,(ds)^3.\,dds\,.\,d.\,\{X'^2 + Y'^2 + Z'^2\}. \end{aligned}$$

Sotto questa forma non si vedrebbe facilmente, che per le curve descritte sulla sfera si deve avere r costante ed eguale al raggio

istesso della sfera. Ma le tre equazioni (39), dalle quali quest' ultima deriva, sono immediatamente soddisfatte, quando $x^2+y^2+z^2=1$, facendovi $x'=0, y'=0, z'=0$: ond' è palese, anche per l' analisi, ciò che la Geometria svela *a priori*, vale a dire la compenetrazione della sfera osculatrice colla data sfera.

§. VI.

Prima di por fine a questa Memoria farò osservare, che chi volesse prendere le mosse dalla formola generale

$$u=\frac{ds^2}{\sqrt{(ddx)^2+(ddy)^2+(ddz)^2-(dds)^2}}$$

per formare l' espressione del raggio assoluto del circolo osculatore per le curve descritte sulla sfera avrebbe un risultato assai meno semplice di quello che è dato, sia dalla formola (11), sia dalla formola (15). Infatti, adoprando le formole (3) si trova per $u=\sin\Omega$;

$$\sin\Omega=\frac{\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2}{\sqrt{P+Q\sin^2\theta+R\sin 2\theta-\left(\frac{dds}{d\theta^2}\right)^2}},$$

ove per brevità si è fatto

$$P=1+\left(\frac{dd\theta}{d\theta^2}\right)^2+4\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2,$$

$$Q=\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^4+\left(\frac{dd\varphi}{d\theta^2}\right)^2-2\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2,$$

$$R=2\,\frac{d\varphi}{d\theta}\cdot\frac{dd\varphi}{d\theta^2}-\frac{d\varphi}{d\theta}\cdot\frac{dd\theta}{d\theta^2}.$$

Ed eliminando $\frac{ds}{d\theta}$, $\frac{dds}{d\theta^2}$ per le formole (1) e (13), si avrebbe

$$\sin\Omega=\frac{\left\{1+\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2\sin^2\theta\right\}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{U}},$$

facendo

$$U=\left(1+\frac{d\varphi^2}{d\theta^2}\sin^2\theta\right)\left(P+Q\sin^2\theta+R\sin 2\theta\right)-\left(\frac{ds}{d\theta}\cdot\frac{dds}{d\theta^2}\right)^2.$$

Le operazioni da farsi per ridurre questa formola alla forma di quella che si ha per l' equazione (15) farebbero conoscere, per la loro complicazione, quanto fosse infelice l' idea di applicare direttamente a questo caso la precedente espressione di u. La scelta idonea, sì delle formole che delle variabili, è sempre un punto essenziale nell'applicazione dei principj generali.

Per offrirne un esempio sopra queste istesse formole soggiungerò, che $f(\theta)$ essendo una data funzione di θ che rappresenta il raggio assoluto di curvatura di una ignota curva descritta sulla superficie della sfera; per determinarla, od almeno ridurne la ricerca alle quadrature, vi sarebbe sommo vantaggio adoprando la formola (16). Poichè avendosi $\sin\Omega = f(\theta)$, e per conseguenza

$$\operatorname{tang}\Omega = \frac{f(\theta)}{\sqrt{1-[f(\theta)]^2}},$$

si avrebbe d'un colpo

$$\frac{d\phi}{ds}\sin^2\theta = -\int d\theta \sin\theta \,.\, \frac{\sqrt{1-[f(\theta)]^2}}{f(\theta)}.$$

Chiamando $F(\theta)$ il secondo membro di questa equazione, si avrà

$$\frac{d\phi}{d\theta\sqrt{1+\left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2\sin^2\theta}} = F(\theta):$$

e di quì si trae

$$\phi = \int \frac{F(\theta)\,d\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta\,[F(\theta)]^2}}.$$

Per altra via il problema non sarebbe così facilmente ridotto a questi termini.