INTORNO ALLE EQUAZIONI FONDAMENTALI

DEL MOVIMENTO DI CORPI QUALSIVOGLIONO, CONSIDERATI SECONDO LA NATURALE LORO FORMA E COSTITUZIONE.

MEMORIA

DEL SIG. DOTTOR CABRIO PIOLA

Ricevuta adì 6 Ottobre 1845.

Aviene non di rado cho i muori ritrovamenti mediante i quali fu aceresciuto qualche ramo delle Matematiche applicate, non appajano subito nel concetto e nella esposizione agombri da superfluità o lungaggini. La complicazione de procedimenti analitici può giungere anche a tale da non parer più possibile l'andare innanzi: ed è invece allora che talvolta si scopre un punto di vista più generale, si concentrano molte particolarità e si forma una teorica compendiosa e così bene assicurata da infondere lena per ulteriori progressi. Sarebbe desiderabile che questo avvenisse anche per le ultime aggiunte fatte da moderni Geometri alla Meccanica razionale: e quanto a me direi che il modo di riuscirvi l'abbiano nelle nostre mani: resta a vedere se altri vorranno essere del mio avviso.

Scrissi più volte non parermi necessario il creare una nuova Meccanica, dipartendoci dai luminosi metodi della Meccanica analitica di Lagrange, per rendere ragione dei fenomeni più intimi del moto dei corpi: potersi piegare que' metodi a Tomo XXIV. P.º L. tutte le esigenze della moderna fisica matematica; essere anzi questa la vera via da tenersi, perchè, sicura ne' suoi principi, conduce a sicure conseguenze, e promette ulteriori e grandiose conquiste. Però mi stettero e mi stanno anche attualmente contro autorità ben rispettabili, davanti alle quali io dovrei darmi per vinto, se la bontà della causa avesse ad argomentarsi dal valor scientifico del suo patrocinatore. Ma comecchè io non posso rinunciare alla mia persuasione, credetti convenisse fare un nuovo tentativo, riunendo in questa Memoria i miei pensieri sull'argomento e procurando di esporli con tale accuratezza da conciliar loro l'attenzione dei Geometri. Perocchè non dissimulo accorgermi ora che ne' precedenti miei scritti alcune idee non furono esposte con sufficiente maturità: ve ne ha qualcuna troppo spinta, ve ne ha qualch' altra ancora troppo timorosa: certe parti di quelle scritture potevano essere ommesse, perchè non tendenti direttamente allo scopo; e a più forte ragione quelle altre che quantunque necessarie conseguenze di supposizioni allora tenute per vere, stante l' interpretazione da me data a qualche passo d'insigne Autore, non mi sentirei ora più di ripetere e di sostenere dopo che quelle supposizioni mi apparvero false o per lo meno dubbie (Vedi il già detto nel T. VI del Giornale dell' I. R. Istituto Lombardo pag. 328.).

La ragione in forza della quale, anche più che per l'eleganza e grandiosità de' processi analitici, io preferisco ggli altri tutti in Meccanica i metodi di Lagrange, si è perchè veggo in essi l'espressione di quella saggia filosofa insegnatoti da Newton che parte dai fatti per salire alle leggi, e quindi discendere alla spiegazione degli altri fatti. Fondare le formole primordiali sopra ipotesi anche benissimo ragionate, ma che non rieevono conferma se non per una lontana corrispondenza con alcuni fromomi oisevervati, ottentual scendendo dal generale al particolare, è a parer mio non cautelarsi abbastanza, è un tornare in certa maniera alla filosofia di Cartesio o di Gassendo: giacchè il magistero della natura nei minimi spazi nei quali noi pretendiamo cogliere il lavorio delle azioni molecolari, sarà forse assai diverso da quello che noi possiamo rappresentarci per mezzo di immagini procurate dai nostri sensi contemplando gli effetti in grande. E fosse pur anche piccolissima questa diversità; una deviazione affatto insensibile nei primi elementi che bisogna intendere moltiplicati a milioni a miliardi prima di venire a dimensioni sensibili, può essere il lontano principio di notabili errori. Ma coi metodi di Lagrange mettendosi a calcolo non le azioni delle forze interne, ma i loro effetti, i quali sono ben noti e nulla risentono dell' incertezza intorno al modo d'agire delle cause, non può restarci alcun dubbio sull'esattezza dei risultati. È vero che l'immaginazione nostra riesce meno soddisfatta, perchè non le si concede di salire fino alle primissime origini dei moti intestini nei corpi: ma che perciò? Ben largo compenso di questa privazione abbiamo nella sicurezza delle deduzioni. Io qui potrei ripetere, se non fossero assai noti, i savi documenti coi quali Newton richiamava alla scienza dei fatti i filosofi che prima di lui aveano lasciato alla immaginazione un troppo libero slancio.

E notisi che io non intendo per questo proscrivere i dettati della Fisica moderna intorno alla costituzione interna dei corpi e alle azioni molecolari; penso anzi recar loro il maggior de'servigi. Quando le equazioni degli equilibri e dei moti siano stabilite sopra principi inconcussi, per aver messo a calcolo effetti certi piuttosto che ipotetiche espressioni di forze, credo lecito cercare di ricostruire da capo quelle equazioni mediante supposizioni intorno a queste azioni molecolari: e se ci riesca per tal modo di ridurci a risultamenti identici con quelli che sappiamo in anticipazione esser veri, credo che quelle ipotesi acquisteranno così tal grado di probabilità quale non potrebbero a gran pezza sperare altrimenti. Allora la Fisica molecolare potrà essere incoraggiata a tirare innanzi colle sue deduzioni, purchè, fatta esperta dalle aberrazioni di alcuni antichi pensatori troppo arditi, si risovvenga di cercar tratto tratto nell'osservazione quei richiami che stanno là per avvertirla se mai deviasse.

Taluno potrà quì obbiettarmi essere questa una sapienza assai vecchia, sì da non valere la pena ch' io me ne facessi nuovamente promulgatore: ma che le mie belle teoriche vengono poi meno alla prova, giacchè il Poisson ha assicurato (Mémoires de l' Institut de France T. VIII. pag. 361, 400; Journal de l' Ecole polyt, cah. XX. pag. 2) che la maniera lagrangiana di scrivere gli effetti delle forze per mezzo di equazioni di condizione (quella maniera qui proclamata siccome l'unica idonea a tener conto dei fatti anziche delle cause) è troppo astratta; che vi ha bisogno di una scienza più vicina alla realtà delle cose; che quella analisi estesa ai corpi della natura deve essere rigettata come insufficiente. Rispondo che io pure riconosco star qui il nodo della quistione. Essere poi o no una millantería l'asserzione che i metodi di Lagrange bastino a tutto, ed abbiano anche in se tale potenza che s'agguagli alle possibili ulteriori ricerche, questo è ciò che dovrà decidersi più tardi, e innanzi darmi torto, si troverà giusto di lasciarmi esporre tutto ciò che ho raccolto a mia difesa. Spero mettere in chiaro nella seguente Memoria che l'unico motivo pel quale la Meccanica Analitica parve restar addietro nella trattazione di alcuni problemi, fu che Lagrange nello scrivere dell'equilibrio e del moto di un corpo solido, non è disceso fino ad assegnare le equazioni spettanti a un solo punto qualunque di esso. Se questo avesse fatto, e lo potea benissimo senza uscire dai metodi insegnati nel suo libro, sarebbe giunto prontamente alle stesse equazioni cui arrivarono con molta fatica i Geometri francesi del nostro tempo, e che ora servono di base alle nuove teoriche. Però quello ch' egli non fece, perchè la morte lo tolse alle scienze prima che avesse finita la sua grand' opera, può esser fatto da altri: ed ecco l'assunto intorno al quale arrischiai qualche tentativo fino dagli anni 1832 e 1835 (Vedi la Memoria della Meccanica dei corpi naturalmente estesi inserita nel 1º Tomo degli Opuscoli matematici e fisici; Milano, Giusti, 1832: e l'altra Sulla nuova analisi per tutte le quistioni della Meccanica molecolare inserita nel Tomo XXI di questi Atti.);

Nel mentre poi colla seguente Memoria mirerò di nuovo allo scopo ora divisato, procurerò di raggiungerne anche un altro. Dimostrata rigorosamente in più luoghi è l'equazione generale della Meccanica, scritta colla notazione del calcolo delle variazioni, pel caso di un sistema qualunque discreto di corpi considerati siccome punti in cui siano concentrate diverse masse, animati da forze esterne attive e soggetti anche a forze interne attive e passive. Ma, partire da essa e passare alle formole spettanti all' equilibrio e al moto di corpi estesi secondo le tre dimensioni, è questo un passo assai duro per chi voglia veder le cose con chiarezza e non si accontenti d'una mezza intelligenza. Uno de'miei primi tentativi intorno a questo argomento può vedersi nella Memoria Sui principi della M.º A.º di Lagrange pubblicata in Milano fin dall'anno 1825, dove ho esposte in proposito alcune idee giuste, ma con accompagnamenti o troppo complicati o superflui. Vi tornai sopra nella Memoria posta nel T. XXI di questi Atti, e credetti avervi fatto un notabile guadagno, introducendo non poche semplificazioni ed abbreviazioni: ma poscia mi accorsi della possibilità di ulteriori miglioramenti che farò entrare nella presente. Di grande vantaggio è sempre la cura di chiarir bene le idee intorno alla natura delle diverse quantità analitiche e allo spirito dei metodi: e che anche da questo lato rimanesse qualche cosa a fare, ne lascerò il giudizio ai lettori intelligenti.

Lo studioso s'accorgenà ch' io mi proposi anche altri fini ol presente lavoro, avendovi stabilite varie formole che possono scrvir di punto di partenza per indagini ulteriori. Di uno non voglio tacere ed è quello di ridimostrare (Capo V), adortando le idee meglio assicurate forniteci dalla fisica moderna intorno ai fluidi, le equazioni fondamentali del loro moto. Imperocche essendomi io occupato a lungo in altri miei sciritti dei problemi della idrodinamica (Vedi i due primi volumi delle Memorie dell' I. R. Istituto Lombardo) mi si obbiettò potere quelle mie deduzioni essere in difetto, visto quanto ebbe a dire il Poisson intorno alle equazioni dell'idrodinamica ordinaria.

Ora io credetti poter dimostrare che le considerazioni del Genetra francese in questa circostanza sono corse troppo innauzi, che non ostanti le sue obbiezioni, la teorica fondamentale del moto de' fluidi rimane a tutta prova quale D'Alembert ed Eulero l' hanno stabilita, quale fu riprodotta dallo stesso Fourier coll' aggiunta di altra equazione dedotta dalla teorica del calore, calla quale porò non è necessario aver riguardo nelle questioni più ovvie della scienza delle acque. Per questa parto la presente Memoria serve di sostegno e di complemento alle altre testè ricordate.

CAPO I.

NOZIONI PRELIMINARI (*).

1. Bisogna distinguere con accuratezza il corpo dallo spazio de acso occupato. Questo spazio è sempre un'e stensione continua che possiamo concepira formata dalla congerie di infiniti punti geometrici (così denominando noi per comodo gli eledimenti dell'estensione) posti in assoluto contatto gli uni degli altri, senza alcuna benchè minima interruzione. Non badiamo a quel dilemma che dice: o questi punti sono inestesi, e allora la loro aggregazione, per quanto vogliasi accumulata, non darà mai l'estensione: o sono estesi, e allora un numero infinito di essi darebbe sempre uno spazio infinito. Secondo la vera metafisica degli indivisibili insegnataci da Cavalieri, convienc considerare dapprima lo spazio diviso in un grandissimo numero di parti, la cui somma torni a restituire lo stesso spazio, ma però parti dotte di estensione. In appresso si passa a

^(*) Nen istende recogliere în queste capitole d'interduzione tutte le nozioni pulminari di necessice, gazchés isappong di scirvere pre-lettori intruti, ma quelle sole, che pur sono melte, ver ho deretto introdure modificazioni per potre soloperare i netudi di Lagranga sopra corqi ornalierati riccine emempati di molecche diaginate. Nella stessa occasione ho fatto entrare în questo Capo aleuni preliminari analitici, dei quali avvo himpagon în progresso.

concepire inoltrata all'indefinito questa divisione di parti in altre più piccole di loro, fino a ridurle, se fa bisogno, al dissotto di ogni termine apprezzabile dai sensi e dalla immaginazione. Abbiamo qui a fronte l'uno dell'altro due principi opposti che si compensano. Una somma di termini positivi cresce continuamente accrescendo il numero di tali termini, e diminuisce, diminuendo continuamente la grandezza di ciascuno di essi. Senza dubbio se, ragionando di quella somma, vogliamo badare ad uno solo dei suddetti principi, perdendo di vista l'altro, ne ridurremo il valore all' infinito o allo zero: ma bisogna farli camminare di pari passo, e non disgiungerli mai, di modo che l'accrescimento continuo del numero dei termini compensi sempre il loro attenuarsi continuo. E questa operazione può da noi concepirsi spinta oltre ogni limite, e fin entro a quei recessi dove hanno origine le affezioni delle curve, le prime sfumature nelle quantità che contengono qualche elemento variabile. Pretendere di condurre l'immaginazione a vedere, quasi testimonio oculare, anche in queste profondità il compensarsi reciproco dei due sunnominati principi, è voler cosa non concessa all' uomo nello stato attuale. Ma ciò che è indiscernibile all'immaginazione, è, oso dire, chiaro alla ragione, la quale conosce che a quelle profondità arriva la potenza del calcolo. In queste considerazioni, per dirlo di passaggio, sta quanto basta per poter rispondere ad ogni difficoltà mossa contro le applicazioni del calcolo integrale.

"a. L'esistenza di un corpo è un fenomeno che si avvera in varie parti dello spazio. Dove esiste un corpo, alcuni non tutti i punti geometrici dello spazio da esso occupato sono dotati di proprietà particolari, delle quali sarebbe qui fuori di luogo indagar la natura, bastando il dire essere quelle proprietà che accompagnano l'essenza della materia; chiameremo questi punti privilegiati sparsi fra i geometrici, punti materiali o fisici. Bisogna concepire tali punti materiali disgiunti fra loro e stanti a distanze piccolissime in presenza gli uni degli altri. Anche qui non ci tratteremo a discutere come avvenza che

questi punti materiali disgiunti si tengano fra loro a distanza e non si addossino o si disperdano. Vi ha chi con profonde vedute intorno alle leggi di forze attrative o repulsive emananti dai punti materiali, cercò dare spiegazione di questo fatto; ma tali pensamenti sarebbero ora troppo anticipati. Per noi che qui non miriamo se non a formarci idee chiare, basta am-

mettere il fatto senza indagarne la causa.

3. La distribuzione dei punti materiali fra i geometrici per costituire i diversi corpi (e qui intendiamo sempre corpi che in tutte le loro parti siano della stessa natura) può aver luogo in infinite maniere. Possiamo rappresentarcela all'immaginazione per modo che le minime distanze fra detti punti siano più piccole da una parte che dall'altra, e passino per molte grandezze variabili secondo diversissime leggi. Per formarcene però un concetto matematico, conviene partire come da termine di confronto, da una disposizione regolare, che forse non avrà mai luogo in natura, ma che noi possiamo benissimo immaginare: epperò nella Memoria inserita nel Tomo XXI, la chiamammo disposizione ideale. Riferendo i diversi punti materiali di un corpo a tre assi ortogonali di coordinate x, y, z, suppongo le coordinate x, y, z di uno qualunque di questi punti, funzioni di tre coordinate ortogonali a, b, c per lo stesso punto in una distribuzione antecedente uniforme, nella quale gl'incrementi piccolissimi delle coordinate a, b, c per passare d'uno in altro punto materiale fossero costanti per ciascun asse, eguali fra loro ed espressi da una comune lettera σ di grandezza arbitraria, ma sommamente piccola. Immagino che la diversa struttura dei corpi quali ce li dà la natura, non consista se non nella diversa forma delle funzioni x(a, b, c); y(a, b, c); z(a, b, c)per ciascun corpo. Quando io retrocedo coll' immaginazione a considerare i punti fisici dei differenti corpi (del legno per esempio, o dell' oro) nella disposizione antecedente ideale, me li rappresento tutti in eguali circostanze: passando poi da quella alla disposizione reale, penso che una certa forma delle funzioni x(a,b,c); y(a,b,c); z(a,b,c) mi darà la disposizione dei punti fisici nel legno, un' altra forma mi darà quella dei punti fisici nell'oro, e così via via.

4. Ripeterò quello che disse Newton in un caso simile: mathematicus dumtaxat est hic concentus. Questa maniera di concepire la struttura dei differenti corpi, è quanto basta al Matematico che vuol metterne in equazione gli equilibri e i movimenti. Pei bisogni del Fisico è permesso andare innanzi, e quei punti materiali chiamarli molecole tutte eguali fra loro, ancora estese, diversamente configurate, impenetrabili, inalterabili; però di tale esilità che non sia possibile ai nostri sensi, fossero anche le cento volte più perfetti, notarvi distinzioni di parti. Paò anche immaginare ciascuna di queste molecole composta di un egual numero di particelle (chiamate atomi) di altri corpi semplici, particelle non separabili se non per mezzo di un altro genere di forze diverse da quelle che si considerano in Meccanica, cioè di forze chimiche: e quindi respingere a questa seconda sorta di particelle quella assoluta invariabilità che il Meccanico può supporre addirittura nelle molecole. Il Metafisico va, se gli piace, ancora più innanzi: per lui uno di questi atomi resistenti invincibilmente alle forze fisiche e chimiche, può ingrandirsi ancora quasi un mondo, sì che sia lecito considerarvi per entro un numero quanto vuolsi grande di punfi ridotti adesso affatto inestesi, da cui emanino forze che li tengano a distanze sempre inalterabili da agenti creati. Lasceremo da parte quest'ultima speculazione, forse vera, ma per noi non necessaria: e quanto al mentovato concetto fisico dei punti materiali, lo richiameremo più innanzi quando cercheremo di ravvicinare la nostra maniera di vedere a quella degli Scrittori moderni. Per ora tutto ciò che riterremo dell'averne fatto cenno, sarà l'arbitrio di usare promiscuamente il vocabolo di molecole, invece di punti fisici o materiali.

5. Considerando i corpi fatti di molecole disgiunte, diventa assai chiara l'idea della densità, che si fa maggiore, dove le molecole sono più ravvicinate, minore dove sono più diradate, costante in quei corpi che dappertutto sotto eguali porzioni del

Tomo XXIV. P.te I.

loro volume contengono egual numero di molecole, variabile in quei corpi dove ciò non succede.

Scolio. Per poco che si rifletta, si viene a comprendere. che i corpi possono essere a densità costante anche con diversa disposizione relativa delle loro molecole, bastando che sotto eguali porzioni di volume il numero delle molecole sia dappertutto il medesimo, il che può avverarsi in infiniti modi. Fra questi ne citerò due, l'uno dei quali è puramente ideale, l'altro reale. L' ideale è quello spettante alla distribuzione descritta più sopra al N. 3. in relazione con tre assi ortogonali di coordinate a, b, c: il reale è quello della distribuzione che prendono le molecole dei corpi ridotti allo stato liquido. Farò vedere fra poco che noi possiamo aver di mira il secondo, e ridurlo mentalmente al primo, senza che ciò porti alcuna alterazione nelle formole analitiche. Nella Memoria inserita nel Tomo XXI e anche dopo, ho studiato a lungo per capire come stia la collocazione rispettiva delle molecole nei liquidi: ma debbo confessare, che avendo trovato modo di concepirla chiaramente in un piano, non mi è riuscito lo stesso intento anche nello spazio a tre dimensioni (V. Giornale dell' Istituto Lombardo. T. VI. pag. 328: Nota.). Ora però sono giunto a comprendere (e lo mostrerò fra poco) che si può saltar di piè pari questa difficoltà, si può cioè far di meno del conoscere la vera disposizione rispettiva delle molecole nei liquidi in riposo; bastando il sapere essere essa tale da risultarne dappertutto la densità costante.

Se s' immagina che le molecole di un corpo a densità cosante siano diriadate in uno spazio doppio, triplo, ecc., restando però sempre a densità costante, la 'densità si dirà Tisultare la metà, un terzo, ecc. di quella di prima; e viceversa, se il volume sia ridotto la metà, un terzo, ecc. comprendendo lo stesso numero di molecole, la densità si diria ridotta doppia, tripla, ecc. Adunque le differenti densità costanti di uno stesso corpo sono fra loro in ragione inversa dei volumi occupati da un egual numero di molecole. Una di queste densità suole assumareri per unitaria, ed è quella che corrisponde ad uno stato del corpo in certe determinate circostanze fisiche, stato che si è convenuto di prendere a base dei confronti.

6. La somma di tutte le molecole di un corpo, fatta astrazione dalle distanze che le separano, chiamasi la Massa del corpo. Però l'espressione numerica di questa massa non può venire formata dal numero di dette molecole, il quale in ogni estensione finita è sempre immensamente grande: ma dal rapporto di detto numero grandissimo all'altro pure grandissimo delle molecole dello stesso corpo comprese entro l'unità di volume, e distribuitevi colla densità costante unitaria. Si sa che il rapporto anche di due numeri grandissimi può essere espresso in poche cifre, talora semplicissime. Se pertanto prendasi per unitaria la massa compresa nell'unità di volume colla densità unitaria, la massa M in un volume V, quando la densità costante del corpo è ancora l'unitaria, ci sarà data dall'equazione M = V; e se la densità costante è Γ volte l'unitaria (F numero che spesso è una frazione) sarà espressa dalla formola $M = \Gamma V$.

7. Prima di procedere innanzi sarà bene intrattenerci a spiegare quello che si è soltanto accennato al N. 3., cioè che considerando le x(a,b,c); y(a,b,c); z(a,b,c) (coordinate relative allo stato vero di un corpo qualunque) siccome funzioni delle a, b, c coordinaté spettanti a quella distribuzione ideale nella quale le molecole sono rappresentate agli angoli di tanti cubi immensamente piccoli in contatto gli uni degli altri, possiamo anche dire queste a, b, c essere le coordinate delle diverse molecole in uno stato antecedente liquido da cui si immaginassero tolte per passare a quello che hanno nel corpo naturale anzidetto. E questa riduzione giova, perche questo stato antecedente ideale non è allora più fuori della natura: le idee vengono meglio fissate: e se ne ha un deciso vantaggio principalmente nella Idrodinamica. Tanto razionalmente quanto analiticamente si riconosce permesso lo scambio. Mentalmente niente ci vieta concepire entro uno stesso volume le molecole del liquido togliersi a quella disposizione in cui sono (qualunque essa sia) per mettersi ai vertici degli angoli degli ideati cubetti, e starvi tutte, nessuna eccettuata, estendendosi a tutto ancora il volume: qualche mancanza nei cubetti alle siperficie conterminanti il detto volume, non fa difepto, attesa l'estrema piccolezza di essi, il che si farà manifesto per ciò che a momenti soggiungeremo. Così procedendo, la grandezza σ del lato di tutti quei cubi, la quale sulle prime poteva parere indeterninata, viene a ricevere iuma determinazione, abbisognando che essa sia ne più nè meno di quella che ci vaole affinche sotto lo stesso volume del liquido stia un egnal numero di molecole ridotte alla disposizione dei cubi. Una tale grandezza minina σ è un elemento singolare e di frequentissimo uso anche per le cose posteriori.

Analiticamente poi quello scambio non produce alcuna alterazione sensibile. Dette p,q,r le coordinate di una molecola quando il corpo è nello stato liquido con densità costante, e dette a,b,c le coordinate della stessa molecola quando la disposizione molecolare s'intende essere quella anzidetta dei cubi, le p,q,r. (badisi bene) non possono differire dalle a,b,c se non per differenze minori o eguali al lato σ di quei cubi, talchè sarebbero

(1) $a=p+\sigma l; b=q+\sigma m; c=r+\sigma n;$

essendo $l_r m_p.n$ coefficienti numerici non maggiori dell'unitis', ne farebbe difetto quand' anche fossero due o tre volte più grandi, il che non credo possa mai addivenire. Ora l'assumere le a,b,c invece delle p,q,r non può portare alcun divario apprezzabile nei valori delle formole analitiche, le quali, supponendo fatta la sostituzione dei valori (1); possono immaginarsi svolte secondo le potenze positive della a,c e cangiate in serie i cui primi termini sono que' medesimi che si avrebbero metendo le vere coordinate p,q,f,r,c e gli altri possono francamente trascurarsi perchè moltiplicati colle potenze di a. Vedremo più volte nel seguito di questa Memoria il bisogno di trascurar

termini che essendo moltiplicati per la σ , danno valori di quantità inapprezzabili dai nostri sensi: siccome quindi si tratta di un principio d'uso frequente, gioveranno le seguenti riflessioni.

Scolio. L'ammissibilità del principio si riferisce alla condizione attuale dell' uomo collocato, dice Pascal nei suoi Pensieri (Parte 1ª. Art. IV.) a immense distanze tanto dall'infinito quanto dallo zero: distanze nelle quali è permesso immaginare tanti ordini di grandezze, di cui ciascuno sia come un tutto relativamente a quello che lo precede, e quasi un niente relativamente a quello che lo segue. Quindi risulta che quelle stesse quantità asserite siccome trascurabili per noi senza tema di errore, potrebbero essere grandi e tutt'altro che trascurabili per esseri i quali fossero, per esempio, adatti a percepire le proporzioni che reggono l'organizzazione degli animaletti infusorj. Per tali esseri quei corpi che a noi pajono continui, potrebbero apparire come mucchi di sassi: l'acqua, che per noi è un vero liquido, potrebbe comparire come per noi il miglio o un ammasso scorrevole di pallini di piombo. Ma anche per tali esseri ci sarebbero poi i veri fluidi, rispetto ai quali varrebbero per essi le stesse conseguenze che noi deduciamo rispetto all'accina. Vi hanno dunque quantità che riduconsi nulle assolutamente per tutti gli ordini di esseri, come gli elementi analitici adoperati nel calcolo integrale, e vi hanno quantità nulle solo per esseri di un cert' ordine, che non lo sarebbero per altri, come alcuni elementi che entrano nelle considerazioni di Meccanica. Io, educato da Brunacci alla scuola di Lagrange, ho sempre impugnato l'infinitesimo metafisico, ritenendo che per l'analisi e la geometria (se si vogliono conseguire idee chiare) vi si deve sempre sostituire l'indeterminato piccolo quanto fa bisogno: ma ammetto ciò che potrebbe chiamarsi l'infinitesimo fisico, di cui è chiarissima l'idea. Non è uno zero assoluto, è anzi tal grandezza che per altri esseri potrebbe riuscire apprezzabile, ma è uno zero relativamente alla portata dei nostri sensi, pei quali tutto quanto è al disotto di loro, è precisamente come non esistesse.

Concludiamo pel caso atuale. Delle due maniere indicate al N. 3. per la distribuzione delle molecole onde ottenere la densità costante, possiamo dire essere quella dello stato liquido la precedente colle coordinate a,b,c, da cui immaginiamo trasportati i corpi allo stato atuale colle coordinate x(a,b,c), z(a,b,c)) z(a,b,c): e nondimeno trattare analiticamente le a,b,c come se la disposizione delle molecole fosse quella dei cubi. Quantunque poi questa proposizione, in forza degli addotti ragionamenti, sia a mio parere sufficientemente provata, mi ri-

corderò di recarne più tardi una riconferma.

8. Vediamo di formarci l'idea e l'espressione della densità variabile, e per riuscirvi immaginiamo di assistere a quella operazione mediante la quale le molecole si tolgono alla disposizione (a.b.c) di densità costante assunta come unitaria, per passare alla disposizione reale [x(a,b,c), y(a,b,c), z(a,b,c)]. In quella prima immaginiamo la massa divisa entro uno spazio qualunque in tanti parallelepipedi kii (di lati k.i.i) comprendenti ciascuno un certo numero eguale di quei cubetti descritti al principio del N.º precedente, e in contatto gli uni degli altri. Nel trapasso alla disposizione reale quelle piccole masse eguali in conseguenza di un muoversi delle molecole piccolissimo, e che altera le loro reciproche distanze, saranno venute a disporsi sotto volumi v, v, v, v, v, succedentisi gli uni accanto agli altri, i quali non saranno eguali fra loro, come lo erano quei primi parallelepipedi, e saranno anche di diversa configurazione relativamente alle superficie che li comprendono. Immaginiamo ora che in ciascuno di questi volumetti così stabiliti, le molecole (le quali sono per tutti in egual numero) senza uscire da essi tornino ad una disposizione che dia la densità costante. Poichè i volumi v., v., v. sono fra loro diversi, le anzidette densità costanti in ciascuno, saranno diverse fra loro, e diverse dalla densità unitaria primitiva, ed espresse (Vedi N. 5. sul fine) dalle frazioni

(2)
$$\frac{kij}{v_1}$$
; $\frac{kij}{v_2}$; $\frac{kij}{v_3}$; $\frac{kij}{v_3}$.

Il corpo che risulterebhe dopo l'ideata riduzione delle molecole, sarebbe bensì un corpo a densità variabile. Nondimeno noi possiamo col pensiero impicciolire continuamente di grandezza e crescere di numero i primitrio parallelepipedi kij, e i corrispondenti volumetti v₁, v₂, v₃,..., v₆ che colla loro somma compogno il volume intero del corpo. Gi si presenta allora alla mente una serie indefinita di corpi a densità cangiante, di cocupano tutti uno stesso volume V, nei quali i, salti di densità d'uno in altro volume diventano sempre più frequenti, e una stessa densità persevera sempre più proco. Il corpo a densità variabile è quello, lo stato del quale viene sempre men imperfettamente rappresentato dai corpi dell'azzidetta serie più che c'innoltriamo in essa, e sta come limite di tali successivi avviciamenti.

9. Fissata l'idea della densirà variabile, cerchiamone l'espressione. Il volumetto ε, sia quelle contenente la massa che nella disposizione precedente ideale occupava il parallelepipedo kij il cui vertice più vicino all'origine degli assi avea le coordinate a, b, c. E manifesto che le dimensioni del volume ν, dipenderanno dalle forme delle funzioni x (a, b, c), y (a, b, c), z (a, b, c) e (c, b, c) che regolarono la collocazione rispettiva delle molecole nel trapasso alla disposizione reale. Esso è in generale espresso dalla formola

 $v_n = \int dx \int dy \int dz \cdot 1$

dovendosi intendere, le integrazioni definite secondo i valori che prendono le x,y,z allo superficie conterminanti il volume: ma non si vede a prima giunta come effettuare tale operazione analitica. Si arriva però all'intento trasformando detto integrale triplicato nell' altro equivalente preso per le variabili a,b,c delle quali conosciamo i limiti che si riferiscono alle dimensioni del parallelepipedo kij. Abbiamo per tal modo, giusta la nota teorica per la trasformazione degli integrali triplicati (*)

^(*) Lacroix. Traité ec. T. II. n. 531. pag. 208; ovvero Bordoni. Lezioni ec. T. I. pag. 380.

(3)
$$v_n = \int_a^{a+k} da \int_b^{b+i} db \int_c^{c+j} dc \cdot H$$

essendo H un sestinomio come segue

(4)
$$H = \frac{dx}{da} \frac{dy}{da} \frac{da}{da} - \frac{dx}{db} \frac{dy}{da} \frac{da}{da} \frac{dc}{da}$$

$$+ \frac{dx}{db} \frac{dy}{da} \frac{da}{da} - \frac{dx}{da} \frac{dy}{da} \frac{da}{da}$$

$$+ \frac{dx}{da} \frac{dy}{da} \frac{da}{da} - \frac{dx}{da} \frac{dy}{da} \frac{da}{da}$$

$$+ \frac{dx}{da} \frac{dy}{da} \frac{da}{da} - \frac{dx}{da} \frac{dy}{da} \frac{da}{da}$$

È facile svolgere l'integrale triplicato dell'equazione (3) in una serie ordinata secondo gli aumenti k.i.j: e ciò per la doppia ragione che questi aumenti sono indeterminati, e che i limiti delle successive integrazioni sono indipendenti gli uni dagli altri.

Infatti chiamiamo per un momento F(c) l'integrale fdc.H indefinito ed incompleto, avremo

$$\begin{split} f_c^{c+j}\,dc\,.\,\mathbf{H} = &\mathbf{F}\left(c+j\right) - \mathbf{F}\left(c\right) = j\,\,\frac{d\mathbf{F}}{dc} + \frac{j^a}{a}\,\frac{d^b\mathbf{F}}{dc^2} + \mathrm{ec}.\\ \mathrm{ossia,\ siccome}\ \ \frac{d\mathbf{F}}{dc} = &\mathbf{H}\ , \end{split}$$

$$\int_{c}^{c+j} dc \cdot \mathbf{H} = j \mathbf{H} + \frac{j^{2}}{a} \frac{d\mathbf{H}}{dc} + ec.$$

Ci è quindi lecito cambiare il valore di v_n dato dalla (3) nel seguente

$$v_a = \int_a^{a+k} da \int_b^{b+i} db \left(jH + \frac{j^a}{a} \frac{dH}{dc} + \text{ec.} \right)$$

e come abbiamo potuto fare sparire un segno integrale, collo stesso artifizio faremo sparire anche gli altri due, e ci risulterà

$$v_n = k i j H + \frac{k^a i j}{a} \frac{dH}{da} + \frac{k i^a j}{a} \frac{dH}{db} + \frac{k i j^a}{a} \frac{dH}{dc} + \text{ec.}$$

Sostituendo questo valore di v_s nell'ultima delle espressioni (2), e dividendo i due termini della frazione per kij, avremo

(5)
$$\frac{1}{H + \frac{k}{a} \frac{dH}{da} + \frac{i}{a} \frac{dH}{db} + \frac{j}{a} \frac{dH}{dc} + ec.}$$

per l'espressione della densità costante entro il volumetto v_i , Mentre col successivo impiccolirisi dei volumetti v_i , v_i , \dots , v_i , veniamo, come sopra abbiamo descritto, ad accostarci continuamente al vero corpo a densità variabile, il valore della precedente frazione (5), a motivo dell'impicciolimento continuo delle k_i ; k_i , k_i accosterà esso pure come a limite alla frazione $\frac{v_i}{k_i}$; and $\frac{v_i}{k_i}$ k_i k_i

(6)
$$\Gamma = \frac{r}{H}$$
.

È questa una formola capitale, di cui ci occorrent tratto tratto l' applicazione, e da cui si deducono prontamente conseguenze che altrimenti si avevano con molto stento. Viene essa dall' avere considerata la composizione dei corpi come procedente dopo una primitiva disposizione ideale ed uniforme delle loro molecole, quale si ha nello stato di fluidità: e dall'aver riguardate le coordinate x, y, z dello stato reale come funzioni delle coordinate x, b, c spettanti a quello stato precedente (*).

Aggiungiamo una considerazione già fatta da Lagrange, cioè che dalle equazioni

(7)
$$x = x(a,b,c); y = y(a,b,c); z = z(a,b,c)$$
 possono intendersi dedotte le inverse

(8)
$$a = a(x,y,z); b = b(x,y,z); c = c(x,y,z)$$

per cui si abbiano le a, b, c in funzioni delle x, y, z: e che quindi ogni funzione K (a, b, c) delle a, b, c può essere riguardata ridotta ad una forma K (x, y, z) in funzione delle x, y, z

^(*) Nella Memoria inserita nel T. XXI di questi Atti ho dato una dimostrazione della formola (6) diversa dalla presente e molto più lunga: essa era dedotta da considerazioni geometriche che poi conobbi poter eritare, adottando, come qui feci, la teorica dei limiti.

mediante la sostituzione dei valori (3). Adunque la densità $\Gamma(x, y, z)$ nei punto (x, y, z) è quella funzione delle coordinate delle stato reale che si ottiene dal secondo membro della (6) ove s'immaginino eseguite tutte le derivazioni indicate nel sestimonio (3) de ad onervioni finite sostituiti i valori (3).

10. É ora facile avere l'espressione della massa di un corpo a densità variabile per mezzo delle dimensioni ch' esso ha nel suo stato reale. La massa M che sta nel volume V di detto corpo, stava in un diverso volume, quando la disposizione delle molecole era la precedente ideale colla densità unitaria, e. allora sarebbesi avuto (Vedi N. 6)

(9)
$$M = \int da \int db \int dc. 1$$

intendendo le integrazioni definite giusta i valori delle a,b,c alle superficie conterminanti il volume. Mettendo invece dell'unità il valore equivalente Γ H (equazione (6)), la formola precedente diventa

$$M = \int da \int db \int dc \cdot H\Gamma$$

dalla quale, per la teorica della trasformazione degli integrali triplicati più sopra ricordata, si può passare immediatamente all'altra

(10)
$$M = \int dx \int dy \int dz \cdot \Gamma(x, y, z) = \lim_{z \to \infty} e^{-iz}$$

dove adesso i limiti delle integrazioni si hanno pei valori che prendono le x, y, x = a limiti delle superficie nello stato reale del corpo. Se avessimo rapportato lo stato reale del corpo an an on stato antecedente di densità costante unitaria, ma di densità costante espressa da un numero μ ci sarebbe risultato moltiplicato per questo stesso numero μ tanto il secondo membro della formola (f) quanto quello della formola (f) quanto quello della formola (f)

Possiamo osservare che nella formola (10) l'effetto della lunzione Γ introdotta sotto l'integrade triplicato, si è quello di rettificare un errore che senza di essa ci risulterebbe, non potendo più la massa avere per espressione la stessa espressione del volume, come nella formola (φ): influtti la massa è ancora la stessa-e il volume è cambiato. Di più: la struttura del calcolo integrale suppone costanti gli aumenti delle variabili adoperate nelle integrazioni, mentre le $x_i y_i z$ che passano d' una in altra molecola dello stato reale, non hanno veramente i lora unenti, eguali ; pare quindi che si commetta, un errore coll' usare delle $x_i y_i z$ come si farebbe di variabili semplici in formole integrali. Non è vero: l' introduzione del fattore Γ corregge questo errore, ciole fa si che si, abbiano risultati giusti anche adoperando come variabili semplici le $x_i y_i z$ che in realtà non lo sono. È questa una osservazione la quale potrà ricorrere frequentemente nello studio della seguente Memoria.

11. Sogliono i Matematici considerare talvolta la materia, one configurata, ascondo un volume a tre dimensioni ma in una linea o in una superficie⁺ si hanno allora, i sistemi chiamati, ed è percio che la maggiore attenzione, del Geomètra deve sempre rivolgersi ni sistemi a tre dimensioni. Nondimeno ne è utile la considerazione, giacchè le diverse analisi per le tre sorte di sistemi offrono riscontri che le rischiarano, e di più sorte oli sistemi offrono riscontri che le rischiarano, e di più sorte oli antica di applicazioni fisiche, quantunque però sempre in via di approssimazione, non essendo in natura mai il corpo, rigorosamente parl'ando, destituito di una o di due dimensioni.

Quantunque tanto pel sistemi lineari quanto pei superficiali ci abbisognino speciali considerazioni affine di rappresentarci la distribuzione delle molecole, e formarci l'idea della densità e la misura della massa, pure sono esse affatto analoghe alle surriferite pei sistemi a tre dimensioni: quindi le esporrò in maniera succinta.

Pel sistema lineare comunque curvilinco, conviene considerare le molecole nello stato reale, ivi trasportate da uno stato antecedente ideale nel quale erano tutto collocate in una linea retta parallela all'asse delle ascisse, e distanti fra loro d'intervalli piccolissimi eguali. Chiamata a l'ascissa variabile per una molecola generica nello stato antecedente (le altre due coordinate figurano fra le costanti), le coordinate rettangole

x, y, z della stessa molecola nello stato reale debbono riguardarsi funzioni della α ,

$$x = x(a); \quad y = y(a); \quad z = z(a)$$

funzioni che mediante la loro forma regoleranno la distribuzione della materia nello stato reale, e dopo l'eliminazione della a ci daranno le due equazioni della curva geometrica in cui le molecole sono distribuite.

Consideriamo nello stato antecedente molte piccole particulai k di quella retta, comprendenti un egual numero di molecole, le quali nello stato reale occuperanno gli archetti v₂, v₂, v₃, ·..., v_s diseguali fra loro. Se anche qui concepiamo che in ciascuno di questi archetti le piccole masse eguali tornino a mettersi con distanze eguali fra le loro molecole (distanze che saranno però diverse per ciascun archetto) la densità nell'archetto v_s rapportata alla primitiva sarà espressa da

(12)
$$= \frac{k}{v_0}$$

Abbiamo per va tre espressioni: la prima

$$v_n = \int dx \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{d\gamma}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

considerando le y, z funzioni di x ed essendo i limiti dell' integrale determinati dai valori di x per le due estremità di detto arco. La seconda

$$v_n = \int_a^{a+k} da \cdot \frac{dx}{da} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^a + \left(\frac{dz}{dx}\right)^a}$$

quando si trasforma l'integrale e lo si prende per la variabile a di cui la x è funzione. La terza

(13)
$$v_a = k \frac{dx}{da} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^a + \left(\frac{da}{dx}\right)^a + \frac{k^a}{a}} \cdot \frac{d \cdot \frac{dx}{da} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^a + \left(\frac{dz}{dx}\right)^a + cc.}}{da}$$

quando si riduce l'integrale in serie, come si è fatto al N. 9. Dalle espressioni (12) e (13) caviamo mediante una riduzione al limite analoga, ma più semplice, dell'usata al N. 9, la densità variabile F pel punto (2,7,2) espressa dalla formola

(14)
$$\Gamma = \frac{1}{\frac{dx}{da}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2}$$

ovvero, poiche

(15)
$$\frac{dy}{da} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{da}; \quad \frac{dz}{da} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{da}$$

(16)
$$\Gamma = \frac{r}{\sqrt{\left(\frac{dx}{da}\right)^a + \left(\frac{dy}{da}\right)^a + \left(\frac{dz}{da}\right)^a}};$$

il secondo membro di questa equazione ci presenta la densità Γ come funzione di a, ma ci è sempre lecito considerarla funzione di x, immaginando sostituito ad a il suo valore a=a(x) cavato dalla prima delle (11).

Quanto alla misura della massa M, le tre formole che corrispondono successivamente a quelle del N. 9, sono le seguenti

$$M = \int da \cdot 1$$

$$M = \int da \cdot \frac{dx}{da} \Gamma \left[\sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dx}\right)^2} \right]$$

$$M = \int dx \cdot \Gamma \sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dx}\right)^2}.$$
(17)

La prima dà la massa misurata dal volume nella distribuzione primitiva, intendendo che i limiti dell'integrale siano i valori della a per le due estremità di quella retta: la seconda è ancora la prima ove si è introdotta sotto al segno integrale un'espressione eguale all'unità in forza dell'equazione (14): la tetza è quella che si ottiene trasformando l'integrale in maniera che sia espresso mediante le variabili proprie dello stato reale.

12. Pei sistemi superficiali comunque curvi, le molecole nello stato antecedente ideale si suppongono distribuite in un piano che può prendersi parallelo a quello delle x, y, e così uniformemente che distino fra loro di piccoli intervalli egnali secondo i due assi, ovvero, ciò che torna lo stesso, siano collocate agli angoli di tanti quadratelli eguali che ricoprano tutta quella superficie piana, potendo però lasciare (il che non fa difetto) qualche manco vicino alle linee curve da cui può intendersi limitata la figura piana. Chiamate a, b le coordinate variabili della molecola generica in tale stato antecedente, le coordinate rettangole x, y, z della stessa molecola nello stato reale, debbono riguardarsi funzioni delle a. b.

(18)
$$x = x(a,b); y = y(a,b); z = z(a,b);$$

funzioni che mediante la loro forma regoleranno la distribuzione della materia per entro alla superficie curva dello stato reale. Si può intendere che vengano eliminate fra esse le due variabili a. b. e così ottenuta una equazione fra le x, y, z, che sarà quella della superficie del sistema.

Consideriamo nello stato antecedente tanti piccoli rettangoli ki che comprendano un egual numero di molecole: passando allo stato reale, queste piccole masse eguali si metteranno in tante porzioncelle va, va, va..... va di superficie curva, le quali, generalmente parlando, saranno diverse fra loro, e in nessuna di esse la densità sarà costante. Però immaginando che in ciascuno di questi spazietti le molecole si rimettano in una distribuzione uniforme, avremo un sistema superficiale a densità cangiante, che si avvicinerà sempre più al sistema vero. quanto più i mentovati spazietti cresceranno di numero e seemeranno di grandezza. La densità nello spazietto v. rapportata alla primitiva dello stato ideale, sarà espressa da ming al mon

espressiono egualo all'unità in forza dell' equazione (14): la terna di quella che si otzicus di asformando l'integrale in (et) miera che sia espresso mediante le variabili proprie dallo sarto Abbiamo per v, tre espressioni. La prima

intendendo z funzione di z, y, e supponendo le integrazioni definite secondo i valori che prendono le z, y alle linee conterminanti lo spazietto superficiale. La seconda espressione di v, c i e data trasformando, secondo la nota teorica, il l'precedente integrale duplicato in un altro preso per le a, b di cui le x, v sono funzioni e risulta

ie
$$x, y$$
 sono funzioni e risulta
$$v_n = \int_a^{a+b} da \int_b^{b+1} db \cdot K$$

essendosi posto per abbreviare

(20)
$$K = \left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\right)\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^a + \left(\frac{dz}{dy}\right)^a}$$

Da ultimo otteniamo il moona è abacces al : avisimira occiand

(a1)
$$v_i(a)$$
 and $v_i = ki$. $K \mapsto \frac{b^2i}{dk} + \frac{k^2}{a} \frac{dK}{dk} + ec.$) about of all the considert allow points allow some forward allow associate associated as $v_i(a)$.

svolgendo in serie l'integrale duplicato nella maniera indicata

Dalle espressioni (19) e (21) ci risulta colla teorica dei limiti la densità variabile P pel punto (2,7,2) del sistema superficiale, espressa da della punco della

Noteremo che ricavando i valori di $\frac{dz}{dx}$; $\frac{dz}{dy}$ dalle due equazioni

(23)
$$\frac{dz}{da} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{da} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{da}; \quad \frac{dz}{db} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{db} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{db};$$

e sostituendoli nella formola (26), essa riducesi alla più simmetrica

(24)
$$K = \sqrt{\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dz}{db}\frac{dy}{da}\right)^2 + \left(\frac{dz}{da}\frac{dz}{db} - \frac{dz}{db}\frac{dz}{da}\right)^2 + \left(\frac{dy}{da}\frac{dz}{db} - \frac{dy}{db}\frac{dz}{da}\right)^2}$$
;

per la quale la (22) ci presenta la densità Γ funzione delle a,b: ma ci è sempre lecito considerarla funzione di x,y, immaginando sostituiti ad a,b i loro valori

(25)
$$a = a(x, y); b = b(x, y)$$

dedotti dalle prime due delle equazioni (18).

Quanto alla misura della massa M, le formole che corrispondono successivamente a quelle del N. q. sono le seguenti

$$M = \int da \int db \cdot 1$$

$$M = \int da \int db \cdot \left(\frac{dx}{2a} \frac{dy}{db} - \frac{dx}{2b} \frac{dy}{2a} \right) \Gamma \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

(26) $M = \int dx \int dy \cdot \Gamma \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^a + \left(\frac{dz}{dy}\right)^a}.$

Di esse la prima dà la massa misurata dal volume, nella distribuzione primitiva: la seconda è ancora la prima, messavii sotto il doppio segno integrale, KΓ in luogo dell'unità per effetto della formola (2a), avendo assituito per K il valore (2c): e da essa si passa alla terza in forza della teorica della trasformazione degli integrali duplicati, avendosi così un integrale espresso mediante le variabili proprie dello stato reale.

il 13. Dalle formole ottenute in questi ultimi numeri possono dedursi prontanente alcune consegenzes alle quali altrimenti non si arriva se non con qualche stento. Prima però farò osservare che quando si considerano i corpi nello stato di moto, le coordinate x,y,z di un punto qualunque del corpo alla fine del tempo . t_2 si debbono considerare funzioni di coordinate p_1 , q_2 , r corrispondenti a quel punto al principio del tempo, e di t. Le coordinate p_1 , q_2 , r corrispondenti a quel punto al principio del tempo, e di t. Le coordinate di uno stato antecedente ideale. Nondimeno è lecito, saltar via la considerazione delle coordinate di uno stato antecedente ideale. Nondimeno è lecito, saltar via la considerazione delle coordinate intermedie p_1 , q_2 , r e invece di contemplare forme come la

$$= x[p(a,b,c), q(a,b,c), r(a,b,c), t]$$

proporcia dirittura le forme x'(a,b,c,t'), y'(a,b,c,t), z'(a,b,c,t) quali risulterebbero dalle precedenti per lo scioglimento e la fusione delle funzioni p(a,b,c), q(a,b,c), r(a,b,c). Quando poi il corpo sia un liquido che parte dalla quiete al principio del tempo t, t è manifesto che le a,b,c tengono il llogo delle p,q,t, giusta l'idea che ci siamo formati dello stato precedente ideale sulla fine del N. τ .

14. Ai numeri (43) e (44) della Memoria inserita nel T. XXI ho fatto vedere come dalla equazione (6) dipende la formola delle condensazioni, e la così detta equazione della continuità, la quale non si verifica soltanto pei corpi fluidi, ma in generale. Mi sarebbe comodo rimandare il lettore al luogo citato: affinche però l'attuale Memoria possa essere letta indipendentemente da quella, riprodurrò qui almeno la dimostrazione dell'equazione della continuità.

Si pongono le seguenti denominazioni introdotte la prima volta da Lagrange (ho cambiate le lettere per evitare equivoci)

Tomo XXIV. P. t. I.

richiamando altresi l'espressione della H data nella (4): e si osserva mediante l'attuale sostituzione l'identità delle nove equazioni

$$\begin{array}{c} l.\,\frac{ds}{ds} + m_1\,\frac{ds}{ds} + n_1\,\frac{ds}{ds} \equiv H \\ l.\,\frac{ds}{ds} + m_2\,\frac{ds}{ds} + n_3\,\frac{ds}{ds} = 0 \\ l.\,\frac{ds}{ds} + m_3\,\frac{ds}{ds} + n_3\,\frac{ds}{ds} = 0 \\ l.\,\frac{ds}{ds} + m_3\,\frac{ds}{ds} + n_3\,\frac{ds}{ds} = 0 \\ l.\,\frac{ds}{ds} + m_1\,\frac{ds}{ds} + m_1\,\frac{ds}{ds} = 0 \\ l.\,\frac{ds}{ds} + m_1\,\frac{ds}{ds} + n_3\,\frac{ds}{ds} = H \\ l.\,\frac{ds}{ds} + m_3\,\frac{ds}{ds} + n_3\,\frac{ds}{ds} = 0 \\ l.\,\frac{ds}{ds} + m_4\,\frac{ds}{ds} + n_4\,\frac{ds}{ds} = 0 \\ l.\,\frac{ds}{ds} + m_4\,\frac{ds}{ds} + n_4\,\frac{ds}{ds} = 0 \\ l.\,\frac{ds}{ds} + m_3\,\frac{ds}{ds} + n_4\,\frac{ds}{ds} = 0 \\ l.\,\frac{ds}{ds} + m_4\,\frac{ds}{ds} + n_4\,\frac{ds}{ds} = 0 \\ l.\,\frac{ds}{ds} + m_4\,\frac{ds}{ds} + n_4\,\frac{ds}{ds} + n_4\,\frac{ds}{ds} = 0 \\ l.\,\frac{ds}{ds} + m_4\,\frac{ds}{ds} + n_4\,\frac{ds}{ds} + n_4\,\frac{ds}{ds} = 0 \\ l.\,\frac{ds}{ds} + m_4\,\frac{ds}{ds} + n_4\,\frac{ds}{ds} + n_4\,\frac{ds}{ds} = 0 \\ l.\,\frac{ds}{ds} + m_4\,\frac{ds}{ds} + n_4\,\frac{ds}{ds} + n_4\,\frac{ds}{ds} = 0 \\ l.\,\frac{ds}{ds} + m_4\,\frac{ds}{ds} + n_4\,\frac{ds}{ds} + n_4\,\frac{ds}{ds} = 0 \\ l.\,\frac{ds}{ds} + m_4\,\frac{ds}{ds} + n_4\,\frac{ds}{ds} + n_4\,\frac{ds}{ds} = 0 \\ l.\,\frac{ds}{ds} + m_4\,\frac{ds}{ds} + n_4\,\frac{ds}{ds} + n_4\,\frac{ds}{ds} = 0 \\ l.\,\frac{ds}{ds} + m_4\,\frac{ds}{ds} + n_4\,\frac{ds}{ds} + n_4\,\frac{ds}{ds}$$

Indico con un apice la derivata totale della densità Γ pel tempo (indicazione mantenuta anche per altre quantità), e noto essere

(29)
$$\Gamma = \frac{d\Gamma}{dz} u + \frac{d\Gamma}{dy} v + \frac{d\Gamma}{dz} \omega + \frac{d\Gamma}{dt}$$

quando si considera $\Gamma(x,y,x,t)$ ridotta funzione delle tre concinate e del tempo esplicito, come si è detto sul finire del N. 9. Lo u, v_0, w stanno in luogo delle derivate $\frac{\partial x}{\partial x}, \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial x}{\partial t}$ delle x,y,zpel tempo, derivate che dapprima-funzioni di a,b,c,t si riguardano ridivenute funzioni di x,y,z,t, sempre pel giuoco dei valori (8), talche si abbiano le equazioni identiche

(30)
$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t); \frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t); \frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t);$$

la $\frac{d\Gamma}{dt}$ indica la derivata parziale della $\Gamma\left(\,x,y,z,\,t\,\right)$ pelt solamente esplicito.

Dalla equazione (6) derivata logaritmicamente e totalmente pel tempo, abbiamo

$$(31) \qquad \qquad \frac{\Gamma}{\Gamma} + \frac{H'}{H} = 0;$$

abbiamo poi dalla (4) e dalle (27)

$$H' = l, \frac{d^2x}{dadt} + m, \frac{d^2x}{dbdt} + n, \frac{d^2x}{dodt}$$

(32)
$$+ l_s \frac{d^3y}{dadt} + m_s \frac{d^3y}{dbdt} + n_s \frac{d^3y}{dcdt} + l_3 \frac{d^3z}{dzdt} + m_3 \frac{d^3z}{dzdt} + n_3 \frac{d^3z}{dzdt}$$

Ora dalle (3o) deduciamo prontamente le nove

$$\frac{d^4x}{dx dt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dx} + \frac{du}{dx}\frac{dy}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d^2x}{dbdt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{db} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{db} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{db}$$

$$\frac{d^3x}{dcdt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dc} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dc} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dc}$$

$$\frac{d^3y}{dadt} = \frac{dv}{dx}\frac{dz}{da} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{da} + \frac{dv}{dz}\frac{dz}{da}$$

$$\frac{d^3y}{dhdt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dh} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dh} + \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dh}$$

$$\frac{d^2y}{dcdt} = \frac{de}{dx}\frac{dx}{dc} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dc} + \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dc}$$

$$\frac{d^3z}{dadt} = \frac{d\sigma}{dx}\frac{dx}{da} + \frac{d\omega}{dy}\frac{dy}{da} + \frac{d\omega}{dz}\frac{dz}{da}$$

$$\frac{d^{2}z}{dkdt} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{dk} + \frac{dw}{dx}\frac{dy}{dk} + \frac{dw}{dx}\frac{dz}{dk}$$

$$\frac{d^3z}{dcdt} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{dc} + \frac{dw}{dy}\frac{dy}{dc} + \frac{dw}{dz}\frac{dz}{dc}$$

e questi valori sostituiti nel precedente di H' (equazione (32)) lo riducono

$$\begin{split} \mathbf{H} &= \frac{da}{da} \left(\hat{I}, \frac{dc}{da} + m, \frac{dc}{db} + n, \frac{dc}{dc} \right) \\ &+ \frac{da}{da} \left(\hat{I}, \frac{dc}{da} + m, \frac{dc}{db} + n, \frac{dc}{dc} \right) \\ &+ \frac{da}{da} \left(\hat{I}, \frac{dc}{da} + m, \frac{dc}{db} + n, \frac{dc}{dc} \right) \\ &+ \frac{da}{da} \left(\hat{I}, \frac{dc}{da} + m, \frac{dc}{db} + n, \frac{dc}{dc} \right) \\ &+ \frac{dc}{da} \left(\hat{I}, \frac{dc}{da} + m, \frac{dc}{db} + n, \frac{dc}{dc} \right) \\ &+ \frac{dc}{dc} \left(\hat{I}, \frac{dc}{da} + m, \frac{dc}{db} + n, \frac{dc}{dc} \right) \\ &+ \frac{dc}{dc} \left(\hat{I}, \frac{dc}{da} + m, \frac{dc}{db} + n, \frac{dc}{dc} \right) \\ &+ \frac{dc}{dc} \left(\hat{I}, \frac{dc}{da} + m, \frac{dc}{da} + n, \frac{dc}{dc} \right) \\ &+ \frac{dc}{dc} \left(\hat{I}, \frac{dc}{da} + m, \frac{dc}{da} + n, \frac{dc}{dc} \right) \\ &+ \frac{dc}{dc} \left(\hat{I}, \frac{dc}{da} + m, \frac{dc}{da} + n, \frac{dc}{dc} \right) \\ &+ \frac{dc}{dc} \left(\hat{I}, \frac{dc}{da} + m, \frac{dc}{da} + n, \frac{dc}{dc} \right) \\ &+ \frac{dc}{dc} \left(\hat{I}, \frac{dc}{da} + m, \frac{dc}{da} + n, \frac{dc}{dc} \right) \\ &+ \frac{dc}{dc} \left(\hat{I}, \frac{dc}{da} + m, \frac{dc}{da} + n, \frac{dc}{dc} \right) \\ &+ \frac{dc}{dc} \left(\hat{I}, \frac{dc}{da} + m, \frac{dc}{da} + n, \frac{dc}{dc} \right) \\ &+ \frac{dc}{dc} \left(\hat{I}, \frac{dc}{da} + m, \frac{dc}{da} + n, \frac{dc}{dc} \right) \\ &+ \frac{dc}{dc} \left(\hat{I}, \frac{dc}{da} + m, \frac{dc}{da} + n, \frac{dc}{dc} \right) \\ &+ \frac{dc}{dc} \left(\hat{I}, \frac{dc}{da} + m, \frac{dc}{da} + n, \frac{dc}{dc} \right) \\ &+ \frac{dc}{dc} \left(\hat{I}, \frac{dc}{da} + m, \frac{dc}{da} + n, \frac{dc}{dc} \right) \\ &+ \frac{dc}{dc} \left(\hat{I}, \frac{dc}{da} + m, \frac{dc}{da} + n, \frac{dc}{dc} \right) \\ &+ \frac{dc}{dc} \left(\hat{I}, \frac{dc}{da} + m, \frac{dc}{da} + n, \frac{dc}{dc} \right) \\ &+ \frac{dc}{dc} \left(\hat{I}, \frac{dc}{da} + m, \frac{dc}{da} + n, \frac{dc}{dc} \right) \\ &+ \frac{dc}{dc} \left(\hat{I}, \frac{dc}{da} + m, \frac{dc}{da} + n, \frac{dc}{dc} \right) \\ &+ \frac{dc}{dc} \left(\hat{I}, \frac{dc}{da} + m, \frac{dc}{da} + n, \frac{dc}{dc} \right) \\ &+ \frac{dc}{dc} \left(\hat{I}, \frac{dc}{da} + m, \frac{dc}{dc} + m, \frac{dc}{dc} \right) \\ &+ \frac{dc}{dc} \left(\hat{I}, \frac{dc}{dc} + m, \frac{dc}{dc} + m, \frac{dc}{dc} \right) \\ &+ \frac{dc}{dc} \left(\hat{I}, \frac{dc}{dc} + m, \frac{dc}{dc} \right) \\ &+ \frac{dc}{dc} \left(\hat{I}, \frac{dc}{dc} + m, \frac{dc}{dc} + m, \frac{dc}{dc} \right) \\ &+ \frac{dc}{dc} \left(\hat{I}, \frac{dc}{dc} + m, \frac{dc}{dc} + m, \frac{dc}{dc} \right) \\ &+ \frac{dc}{dc} \left(\hat{I}, \frac{dc}{dc} + m, \frac{dc}{dc} + m, \frac{dc}{dc} \right) \\ &+ \frac{dc}{dc} \left(\hat{I}, \frac{dc}{dc} + m, \frac{dc}{dc} + m, \frac{dc}{dc} \right) \\ &+ \frac{dc}{dc} \left(\hat{I}, \frac{dc}{dc} + m, \frac{dc}$$

il quale per le identiche equazioni (28) diventa a colpo d'occhio

$$H' = H\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right);$$

quindi l'antecedente equazione (31) risulta

(33)
$$\frac{\Gamma'}{\Gamma} + \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0;$$

ossia moltiplicando per P e mettendo per P' il valore (26)

(34)
$$\frac{d \cdot \Gamma u}{dx} + \frac{d \cdot \Gamma v}{dy} + \frac{d \cdot \Gamma w}{dz} + \frac{d \cdot \Gamma}{dt} = 0.$$

È molto importante l'osservazione che questa equazione delle continuità non contiene più alcuna traccia delle a,b,c variabili dello stato antecedente, le quali nondimeno fanno tanto giuoco nella dimostrazione.

15. Formiamoci a seconda degli stessi principi le equazioni della continuità anche per gli altri due sistemi lineare e superficiale.

Cominciando dal lineare; la formola (16) ci dà

$$\frac{\Gamma}{\Gamma} + \frac{\frac{dx}{da} \frac{d^3x}{dadt} + \frac{dy}{da} \frac{d^3y}{dadt} + \frac{dz}{da} \frac{d^3z}{dadt}}{\left(\frac{dz}{da}\right)^3 + \left(\frac{dy}{da}\right)^3 + \left(\frac{dz}{da}\right)^3} = 0.$$

Osserviamo che in questo caso le u, v, w rispettivamente eguali alle $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, sono da considerarsi funzioni soltanto delle x, t:

quindi

$$\frac{d^*x}{dadt} = \frac{du}{da} = \frac{du}{dx} \frac{dx}{da},$$
 e similmente

$$\frac{d^3y}{dadt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{da}; \quad \frac{d^3z}{dadt} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{da};$$

e rammentate anche le (15), la precedente formola ci si muterà nell'altra

$$(35) \quad \frac{\Gamma}{\Gamma} \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^a + \left(\frac{dz}{dx}\right)^a \right\} + \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dx} \frac{dv}{dx} + \frac{dz}{dx} \frac{d\omega}{dx} = 0$$

che è l'equazione cercata, la quale ora più non contiene se non quantità in relazione collo stato reale del sistema.

Pei sistemi superficiali: derivando pel tempo l'equazione (22) ove K ha il valore (24) e richiamando per abbreviare le ultime tre denominazioni scritte nelle (27) abbiamo

(36)
$$\frac{\Gamma}{\Gamma} + \frac{n_1 n'_1 + n_2 n'_2 + n_3 n'_3}{n_1^a + n_2^a + n_3^a} = 0.$$

Nel caso attuale le u, v, w, eguali rispettivamente alle $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, si debbono considerare ridotte funzioni di x, y, t: abbiamo quindi primieramente

$$n'_{+} = \frac{dy}{da} \frac{dw}{db} + \frac{dz}{da} \frac{dw}{da} - \frac{dz}{da} \frac{dw}{db} - \frac{dy}{db} \frac{dw}{da}$$
 $n'_{+} = \frac{dz}{da} \frac{du}{db} + \frac{dz}{db} \frac{dw}{da} - \frac{dz}{da} \frac{dw}{db} - \frac{dz}{da} \frac{dw}{da}$
 $n'_{+} = \frac{dz}{da} \frac{dw}{db} + \frac{dz}{da} \frac{dw}{da} - \frac{dz}{da} \frac{dw}{da} - \frac{dz}{da} \frac{dw}{da}$
 $n'_{+} = \frac{dz}{da} \frac{dw}{da} + \frac{dy}{da} \frac{dz}{da} - \frac{dz}{da} \frac{dw}{da} - \frac{dz}{da} - \frac{dz}{da} \frac{dw}{da} - \frac{dz}{da} \frac{dw}{da} - \frac{dz}{da} \frac{dw}{da} - \frac{dz}{da} \frac{dw}{da} - \frac{dz}{da} - \frac{dz}{da} \frac{dw}{da} - \frac{dz}{da} - \frac{dz}{$

poi osservando essere

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dw}{dx}\frac{dy}{dt}; \quad \frac{dv}{dz} = \frac{dv}{dz}\frac{dx}{dz} + \frac{dv}{dz}\frac{dy}{dz};$$

e così per altre quattro espressioni simili, tenuti d'occhio i valori di cui n₁₂, n₂₃, n₃ sono un'espressione compendiosa, ci risultano

$$\begin{split} n'_{1} &= -n_{3} \, \frac{dw}{dx} - n_{a} \, \frac{de}{dx} + n_{1} \, \frac{de}{dy} \\ n'_{2} &= n_{a} \, \frac{du}{dx} - n_{1} \, \frac{du}{dy} - n_{3} \, \frac{dw}{dy} \\ n'_{3} &= n_{3} \left(\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dy} \right) \quad ; \end{split}$$

e osservando inoltre che dalle equazioni (23) sciolte per $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$

si cavano
$$\frac{dz}{dx} = -\frac{n_1}{n_3}$$
, $\frac{dz}{dy} = -\frac{n_2}{n_3}$

da cui possono dedursi i valori di n_1 , n_s dati per n_3 : fatte tutte le sostituzioni, la (36) si riduce

$$\begin{array}{l} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left\{ 1 + \left(\frac{dz}{dz}\right)^a + \left(\frac{dz}{dy}\right)^a \right\} + \left\{ 1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^a \right\} \frac{du}{dz} \\ - \frac{dz}{dz} \frac{dz}{dy} \left(\frac{du}{dy} + \frac{dz}{dz}\right) + \left\{ 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^a \right\} \frac{dv}{dy} + \frac{dz}{dx} \frac{du}{dz} + \frac{dz}{dy} \frac{dv}{dy} = 0. \end{array}$$

Questa è la cercata equazione della continuità pei sistemi superficiali, che non contiene se non quantità in relazione collo stato reale. Io la diedi per la prima volta fino dall'anno 1825, e il ch. Signor Dottor Pietro Maggi ne ha fatto un uso felice nella sua Memoria sulle linee di stringimento e di allargamento pubblicata in Verona l'anno 1835.

CAPO II.

Schiarimenti relativi al passaggio dall'equazione generale della Meccanica pei sistemi discreti a quella per le tre sorte di sistemi continui

L' equazione generale della Meccanica relativa al moto e all'equilibrio di un sistema discreto di punti ove si considerino concentrate differenti masse finite, e in qualunque modo agenti gli uni sugli altri, o assoggettati a condizioni scritte in equazioni alle quali le coordinate di quei punti debbano sempre soddisfare: una tale equazione, dico, espressa mediante i simboli propri del calcolo delle variazioni, è dimostrata in più libri con tal rigore che non può lasciar luogo ad alcun dubbio ragionevole. Citerò, oltre la M.ª A.ª, la Meccanica Celeste T. I. pag. 38: e forse per riguardo alla considerazione delle differenti masse, non dispiacerà vedere quanto io ne scrissi nella Memoria pubblicata fin dall'anno 1825: (pag. 42 e seguenti). Assumerò pertanto una tale equazione siccome una verità nota, e solo mi farò a descriverla per ben fissare le idee da annettersi ai differenti elementi analitici che la compongono. Ma pel passaggio da essa a quelle che si riferiscono alle tre sorte di sistemi continui, troppe cose furono lasciate sottintese, la di cui mancanza è maggiormente sensibile nel proposito di considerare i corpi come ammassi di molecole disgiunte: quindi taluno forse mi saprà buon grado d'aver qui riunite le opportune spiegazioni, visto che è poi dalle tre accennate riduzioni dell' equazione generale, che emergono i mezzi a trattare le più grandi e difficili questioni della Meccanica.

16. I punti fisici sono di numero n, ed

 $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots x_n, y_n, z_n$

esprimono le rispettive coordinate ortogonali alla fine di un tempo t;

$$X_{1}, Y_{1}, Z_{1}; X_{2}, Y_{3}, Z_{3}; \ldots X_{n}, Y_{n}, Z_{n}$$

le rispettive componenti secondo i tre assi delle forze acceleratrici esterne alla fine dello stesso tempo t;

le forze acceleratrici interne che agiscono secondo le rette congiungenti i punti (1,2), (1,3), ..., (2,3).... e in generale (i,j); $m: m: \dots m$.

le masse dei rispettivi punti fisici;

L = 0, M = 0; N = 0; ec.

varie equazioni di condizione che hanno luogo fra le coordinate dei diversi punti.

L'equazione generale, di cui si disse, è la seguente

$$S m \left\{ \left(\mathbf{X} - \frac{d^{2}x}{dt^{2}} \right) \delta x + \left(\mathbf{Y} - \frac{d^{2}y}{dt^{2}} \right) \delta y + \left(\mathbf{Z} - \frac{d^{2}x}{dt^{2}} \right) \delta z \right\} \\
+ S m_{i} \mathbf{H}_{i} \mathbf{K} \delta p + \lambda \delta \mathbf{L} + \mu \delta \mathbf{M} + v \delta \mathbf{N} + cc. = 0;$$

il primo segno S significa la somma di tauti trinomi quanti se ne ottengono marcando successivamente il trinomio scritto, cogli indici 1, 2, 3, né di diversi punti ai piedi delle lettere che lo compongono, eccettuate quelle che indicano operazioni cioè le d, ô. Il secondo segno S esprime la somma di tutti i termini introdotti dalle forze interne attive, essendo

$$p = \sqrt{(x_j - x_i)^* + (y_j - y_i)^* + (z_j - z_i)^*}.$$

Le lettere λ , μ , ν , ec. significano moltiplicatori indeterminati; la caratteristica δ è come nel calcolo delle variazioni.

Circa ai termini di terza specie portati nella equazione (1) de quazioni di condizione, può osservarsi che spesso non diversificano tra di loro se non pel passaggio da un punto all' altro in condizioni affatto simili, e che allora molti di essi possono abbracciarsi con un segno sommatorio, e invece di quella terza parte, si può scrivere

(a)
$$S\lambda \delta L + S\mu \delta M + S\nu \delta N + ec.$$

17. È noto che l'equazione (1) si rompe in tante quante sono le variazioni indipendenti dx., dv., dz.; dx., dv., dz.; cioè 3n; e che se mettiamo fra le x, y, z, z, x, ec. un numero p di equazioni di condizione, lo spezzamento non si effettua più allo stesso modo, ma possono seguirsi due vie, le quali conducono ai medesimi risultamenti. Possono dette equazioni trattarsi, come vedesi nella terza parte della equazione generale (1); e allora le $\partial x_1, \partial y_1, \partial z_1, \partial x_2, \dots$ si considerano ancora come se fossero fra di loro indipendenti, a motivo dei nuovi moltiplicatori introdotti i quali sono tanti, quante le anzidette equazioni fra le variabili. E si possono mediante le variate di dette equazioni di condizione determinare linearmente per le altre tante delle variazioni $\partial x_1, \partial y_2, \partial z_3, \partial x_4, \dots$ quante sono quelle equazioni. Allora, fatta la sostituzione dei valori ottenuti, il numero delle residue variazioni indipendenti si riduce 3n-p: e quindi 3n-p sono le equazioni che si ricavano col mettere i loro coefficienti a zero nella equazione generale; i risultamenti sono i medesimi che si avrebbero tenendo la prima strada e poi eliminando fra le equazioni ottenute i coefficienti indeterminati introdotti operando a quella maniera. È poi permesso adottare un metodo misto, vale a dire conservare alcune equazioni di condizione e trattarle come si vede nella terza parte dell'equazione generale (1), e per un altro numero di equazioni di condizione, contemplarle tenendo il secondo dei sopra descritti andamenti.

18. Prima di progredire spiegando le modificazioni prese dall'equazione (1) nei tre casi dei sistemi continui, è bene che ci tratteniamo alquanto in considerazioni relative alle quantità

 $X, Y, Z_i \stackrel{\partial^{*} x}{\partial x}, \stackrel{\partial^{*} y}{\partial x}, \stackrel{\partial^{*} z}{\partial x}$, cui siamo soliti chiamare forze acceleratrici applicate, io forze acceleratrici attuali pel punto generico di un corpo; sia poi il sistema a tre dimensioni, o superficiale o lineare. Noni c'è dubbio che queste stesse capressioni nella equazione generale (1) dei sistemi discreti, significano forze rapportate ad una forza unitaria applicata all'unità di

Tomo XXIV. P. to I.

massa: ciò è tanto vero, che quando nei diversi punti del sistema discreto s' intendono concentrate diverse masse m., m., man, aueste stesse m. m. man, che sono numeri rapportati all' unità di massa, diventano moltiplicatori di quelle forze, come si vede nella (1). E qui giova rammentare che per la misura delle forze continue, noi cominciamo a convenire di chiamare unità di forza quella forza acceleratrice costante che fa percorrere all'unità di massa nell'unità di tempo, partendo dalla quiete, la mezza unità di spazio. Come poi faccia la detta forza unitaria a produrre un tale effetto sull' unità di massa, quando questa non è considerata siccome concentrata in un punto, ma occupante spazio (il che si avvera sempre nello stato naturale), vi sono due maniere per farcene un'immagine. Si può intendere la forza unitaria divisa in innumerabili forze elementari eguali applicate ai diversi punti fisici della massa unitaria, ovvero si può intendere detta massa ridotta solida, e applicata la forza ad un solo punto di essa, propagandosi il moto agli altri punti per effetto della rigidità del corpo. Denominiamo poi X una forza multipla X volte dell'anzidetta.

Ma quando parliamo di forze X, Y, Z applicate ai singoli punti di un corpo, che cosa dobbiamo intendere? È manifesto che se ognuna di tali forze fosse della grandezza di quelle che muovono l'unità di massa, poichè sempre maggiore d'ogni assegnabile è il numero delle molecole di un corpo, la somma di tutte quelle forze sarebbe per noi sempre una forza infinita. Adunque in tal caso esse sono forze simili a quelle forze elementari nelle quali dicemmo più sopra potersi intendere divisa la forza unitaria: cioè le lettere X, Y, Z debbono aucora intendersi numeri rapportati all'unità di forza applicata all'unità di massa, ma estremamente impiccoliti a motivo del fattore m. che si vede nell'equazione generale (1), e che in tal caso diventa piccolissimo. Importa assai conoscere l'espressione di questo fattore. Supponendo (ed è lecito il farlo senza nuocere alla generalità) che tutte le molecole del corpo siano eguali fra loro, il numero m esprimente la massa di ciascuna, è eguale per tutte. Immaginiamo l'unità di massa distribuita nel cubo eguale all'unità di volume; come si è detto al N. 6 del Capo precedente, di maniera che tutte le molecole di essa massa siano nel verso dei tre lati del cubo fra loro distrutti di intervalli eguali e piccolissimi espressi dalla lettera σ . Sia n il numero degli intervalli eguali fra molecola e molecola in un lato del cubo, talchè, per essere ogni spigolo del cubo eguale all' unità lineare, si abbia

il numero totale delle molecole nel detto cubo sara $(a \leftarrow i)^2$; quindi, essendo per mezzo dell'unità espressa la massa cioè la somma delle molecole in tutto il cubo, detta massa per una sola molecola avrà l'espressione $\frac{e^2}{(i+a)^2}$, ovvero $\frac{e^2}{(i+a)^2}$, avendo messo per n il suo valore cavato dalla (3); ma la massa di una molecola è altrimenti significata da mj dunque l'equazione

(4) $m = \frac{\sigma^3}{(1+\sigma)^3} = \sigma^3 - 3\sigma^4 + 6\sigma^5 - \text{ec.};$

della quale serie basterà tenere il primo termine, giacchè i seguenti essendo estremamente piccoli a fronte del primo, darebbero nell'equazione generale termini della stessa natura di quelli che al N. 7 dicemmo potersi francamente trascurare.

10. Forza elementare di diverso genere da quella ora descritta, occorre quando s'intende che una massa finita sia mossa, non da forze applicate a tutti i suoi punti, come nel caso della gravità, ma da forze applicate ai soli punti di una parte della sua superficie, come nel caso della pressione atmosferica sulla superficie dei corpi. Non impegnamoci per ora a voler concepire il modo col quale l'azione effettuata sui punti della superficie si trasmette a tutti gli altri punti della massa: ammettamo il fatto, e immagianado il cubo, come sopra contenente l'unità di missa; mosso da tante forze elementari eguali appicate alla sole molecole che sono in una sola sua faccia, cerchiamo l'espressione di una di esse: vedremo così come debba interpretarsi in tal caso la lettera me he moltipicasse un'espressione di forza nella equazione generale. Essendo $(n+1)^*$ il muero delle molecole in una di quelle facce, un numero $(n+1)^*$ di forze elementari eguali produrrebbe lo stesso effetto della forza operante sull'unità di massa, quindi una di quelle è $\frac{1}{(n+1)^*}$ di questa. Pertanto il fattore che in tal caso impicciolisce le forze $X, Y, Z \in \frac{1}{(n+1)^*} = \frac{\sigma^*}{(n+1)^*}$, σ si ha.

(5)
$$m = \frac{\sigma^3}{(1+\sigma)^3} = \sigma^3 = 2 \sigma^3 + 3 \sigma^4 - \text{ec.}$$

20. Altra forza elementare di diverso genere delle due sopra descritte è quella che si suppone produrre moto in una massa finita essendo applicata ai singoli punti di una sola linea tracciata sulla superficie di un corpo. Per averne l'espressione, immaginiamo ancora lo stesso cubo coll' unità di massa, mosso da tante forze elementari eguali applicate ai singoli punti di un suo lato, che sono di numero n+1 Si yede che un numero n+1 di tali forze elementari produce lo stesso effecto della forza operante sull'unità di massa, e che quindi una di quelle $\frac{1}{n+1}$ di questa. Di tali maniera il fattore che impicciolisce le $\frac{1}{n+1}$ di questa. Di tali maniera il fattore che impicciolisce le $\frac{1}{n+1}$ di questa. Di tali maniera il fattore che impicciolisce le $\frac{1}{n+1}$ di questa. Di tali maniera il fattore che impicciolisce le $\frac{1}{n+1}$ di questa.

(6)
$$m = \frac{\sigma}{1+\sigma} = \sigma - \sigma^2 + \sigma^3 - \text{ec.}$$

Finalmente si ha il caso di una forza X che produce moto nella unità di massa essendo applicata ad un solo suo punto, e allora non occorre più la considerazione di forze elementari: quella medesima ha il concetto che serve di base alle precedenti deduzioni.

21. Nelle questioni di moto di equilibrio per corpi estesi, resentano spesso a comporre il fenomeno forze di tutte quattro le differenti specie sopra descritte; però le lettere X, Y, Z, e qualunque altra espressione di forza significano sempre numeri rapportatti a forze della quarta specie delle sunnominate, cicò muoventi masse finite essendo applicate ad un solo loro

punto. Per le altre tre specie i numeri X, Y, Z, e simili, s' intendono impiccioliti da fattori somministrati dalla lettera m che
apparisce nell'equazione generale (1), giusta il canone seguente.

Conando si parla di forze applicate ai singoli punti di una

linea fisica, alla 'lettera m nella equazione generale devesi
sostituire la σ intervallo fra molecola e molecola nella disposizione antecedente ideale; quando si parla di forze applicate
ai singoli punti di una superficie, devesi alla m sestituire il
afattore σ*; e interpretare la stessa m come avente il valore
σσ*, quando si tratta di forze applicate ai singoli punti fisici
« di un corpo dotato delle tre dimensioni.»

22. Ciò che si è detto delle forze elementari di seconda e terza specie applicate a superficie o a linee fisiche, vale eziandio quando queste superficie o queste linee non si considerano nei corpi, ma astrattamente in quei sistemi che denominiamo superficiali o lineari. Già dicemmo (Cap. 1º, n. 11) che tali sistemi, rigorosamente parlando, non si danno, giacchè una terza dimensione nel caso di un velo materiale, e due altre dimensioni nel caso di un filo materiale, veramente non mancano: prova ne è il potersi le masse in questi due casi confrontare con quelle dei corpi a tre dimensioni. Siccome dunque un sistema lineare o un sistema superficiale non sono che supposizioni ammissibili per approssimazione, non deve far urto in tali casi un' altra correlativa supposizione, cioè che le molecole per essi siano di differente natura in paragone di quelle dei corpi a tre dimensioni. Pei sistemi lineari sono molecole con tali concentrazioni di massa secondo due dimensioni che la riunione di quel numero soltanto di esse che stanno con intervallo piccolissimo σ in una linea finita, basta per avere a dirittura una massa confrontabile colle masse finite; e nei sistemi superficiali sono molecole colla concentrazione di massa secondo una dimensione, di modo che si ottiene una massa finita raccogliendone quante ne stanno in una superficie estesa con intervalli molecolari per due versi come l'anzidetto. Pertanto in questi casi è anche più manifesto di quando si considerano le linee o le superficie nei corpi, il doversi la m interpretare per σ è pen σ . Lifatti un numero n+1 di quelle molecole (sistema lineare) darit intra massa quanta è l' unitaria, dunque la massa di una sola molecola e $\frac{1}{r+1} = \sigma - \text{e.c.}$; un numero (n+1)! (sistema superficiale) darà ancora tanta massa quanta è l'unitaria, dunque la massa di una nolecola in questo escondo caso sarà $\frac{1}{r+1} = \sigma^2 - \frac{1}{r+1} = \sigma^2$

É auche possibile escogitare forze elementari di un ordine di piccolezza più elevato di quello per le forze della prima specie che cercammo spiegare al N. 10; siccome però una siffatta speculiazione non occorre se non quindo si cerca formarsi un concetto delle azioni molecolari, ci riserberene di farne pa-

rola a luogo più opportuno.

a3. S'introduce la continuità in un sistema quando si suppone che le coordinate di tutti i suoi punti dipendano da tre
sole funzioni di una, o di due, o di tre variabili semplici (cui
se è questione di moto si aggiunge anche il tempo). Le quali
mantengano sompre le stesse forme passando da un punto all'
altro del sistema e soltanto imutino valore pel cangiar di valore
the fanno quelle variabili semplici. Giò verremo ora mettendo
in chiaro per le tre sorte di sistemi continuit. Introdurre per
tal modo la continuità equivale al legare tutte le variabili esprimenti le coordinate dei diversi punti mediante tante equazioni
di conditione quante sono esse variabili, meno tre. È questo
un principio sottinteso nella Meccanica Analtica che giova ridurre

più esplicito, giacche sta in esso veramente il mezzo col quale passare dall'equazione generale della Meccanica pei sistemi discreti a quelle pei continui.

and ab after chainnime Sistems Linearies (a) indication all

24. Adottando per un tal genere di sistemi il concetto gia dichiarato al N. 11 Capo precedente, porremo a significare le coordinate del punto generico le equazioni

(7)
$$x = f(a, t); \quad y = \phi(a, t); \quad z = \psi(a, t)$$

Le forme di finzioni espresse cai simboli f_i, g_i, ψ rimangono le medesime percorrendo i diversi punti fisici del sistema. Se si immagina che il filo materiale cominci quando $a=f_i$, e finisca quando $a=f_i$, si deve intendere che le coordinate dei suoi diversi punti abbiano espressioni come segue

$$x_1 = f(l,t); \quad x_2 = f(l+\sigma,t); \quad x_3 = f(l+\sigma,t); \text{ ec.}$$

(8)
$$y_i = \phi(l,t); y_i = \phi(l+\sigma,t); y_i = \phi(l+2\sigma,t); \text{ ec.}$$

$$z_i = \psi(l,t); z_i = \psi(l+\sigma,t); z_i = \psi(l+\sigma,t);$$
 ec.

essendo rispettivamente f(k,t), $\phi(k,t)$, $\psi(k,t)$ i valori delle coordinate dell'ultimo punto:

Qui possiamo immaginare eliminata la l fra la prima e le seguenti equazioni della prima fila. Sia $l\!=\!p(x_1)$ il valore di l dedotto dalla prima equazione; risostituendolo in tutte quelle equazioni, esse diverranno

(9) x,=√[p(x), k²]; x,=√[p(x)+a,t²]; x,=√[p(x)+aa,t²]; cc. la prima sarà identica, cioè come se non fosse, le segnenti che hanno un significato, saranno tante quante le x dei diversi punti meno una. Allo stesso modo, se l=q(x,) sarà il valore di l cavato dalla prima equazione nella seconda fila delle (8), potremo serviere

(10)
$$y_i = \phi[q(y_i), t]; y_i = \phi[q(y_i) + \sigma_i t]; y_i = \phi[q(y_i) + 2\sigma_i t]; ec.$$

e similmente on li esperante de esperante il mesatronia niciliare nico

(ii) $z_i = \psi[r(z_i), t]; z_i = \psi[r(z_i) + \sigma_i t]; z_i = \psi(r(z_i) + 2\sigma_i t]; \text{ ec.}$

avendo rappresentato per $l=r(z_i)$ il valore di l dedotto dalla prima equazione della terza fila.

Le equazioni (9), (10), (11), che incominciano tutte da una carazione identica, sono le equazioni di condizione fra le coordinate dei diversi punti, introdotte dall'ammettere la continuità, come dicemino del num; precedente, e che sono tante quanto le coordinate, meno tre: A tallori potrebbe sembrare che risultassero due altre equazioni di condizione

of energianity
$$y_i = \phi[p(x_i), t]$$
; o $x_i = \psi[p(x_i), t]$ is small ad

mettendo al luogo di l' nelle espressioni per y, , z, il valore della stessa l' dedotto dalla prima equazione: ma sarebbe in inganno.

Si disse che le forme f, ϕ , ψ sono arbitrarie, ciascuna indipendentemente dalle altre due: stabilita la forma f per la prima fila delle equazioni (3), risuta veramente un legame fra le x dei diversi punti, come apparisce dalle (5), non gà un legame fra l ex c le f : l'arbitric che sussiste mella forma ϕ anche quando è pronunciata l a f (dicasi a un di presso della forma ϕ per riguardo alle g ! toglic quely vincelo di dipendenza che sembrerebbe apparire nelle due equazioni ultimamente scritte.

25. Passiamo a vedere come debba intendersi nel nostro caso la composizione delle variazioni δx_i , δy_i , δz_i , δx_k , ec. Se prendiamo le variate delle equazioni (9), (10), (11), abbiamo

$$\delta z = \psi \left(r \right) r \left(z \right) \delta z$$
, $\delta z = \psi \left(r + \sigma \right) r \left(z \right) \delta z$,

in guisa che ponendo

(13)
$$p'(x_i) \delta x_i = \xi; \quad q'(y_i) \delta y_i = \eta; \quad f'(z_i) \delta z_i = \xi$$

MEMORIA DEL SIG. DOTTOR PIOLA 41 e restituendo in luogo delle $p(x_1)$, $q(y_1)$, $r(z_1)$ la l che le eguaglia tutte e tre, otteniamo

 $\delta x_i = f'(l) \xi$; $\delta x_a = f'(l+\sigma) \xi$; $\delta x_3 = f'(l+2\sigma) \xi$;

(14) $\partial y_1 = \phi'(l) \eta$; $\partial y_2 = \phi'(l+\sigma) \eta$; $\partial y_3 = \phi'(l+2\sigma) \eta$; ec.

 $\delta z_1 = \psi'(l) \xi$; $\delta z_2 = \psi'(l+\sigma) \xi$; $\delta z_3 = \psi'(l+2\sigma) \xi$;

Vedesi dopo di ciò, che chiamando δx , δy , δz le variazioni delle coordinate x, y, z spettanti al punto generico, avremo

(15) $\delta x = f'(a) \xi$; $\delta y = \phi'(a) \eta$; $\delta z = \psi'(a) \xi$,

essendo le ξ_*, η_*, ξ quantità che non mutano di valore passando dal primo all' ultimo punto del sistema. Pertanto le equazioni (14), (15) ci insegnano che le variazioni contengono bensi tro quantità arbitrarie, cioè le $\partial_x i_*, \partial y_*$, ∂_z , delle equazioni (13), ma non variano passando dalle coordinate di un punto del sistema a quelle di un altro punto se non alla maniera colla quale (equazioni (6)) variano le stesse coordinate.

a6. Adottare per le x₁, y₁, x₂, x₄, ec., o per le δx₁, δy₂, δz₃, ce. valori come quelli espressi nelle equazioni (β) (14) è in sostanza un seguire il secondo degli andamenti descritti al num². 17, è cioè un adottare valori in forza dei quali riescano di loro natura glà soddisfatte tutte le equazioni di condizione introdotte dalla continuità ed espresse colle (ο), (10), (11); quest' ultime quindi non si dovranno più contemblare a parte.

È ora facile capire che il segno S nella prima parte della quazione generale (t) si cambia in una sommatoria estesa da a=t fino ad a=k, ossia in un integrale finito definito (vedi i trattatisti, o il Vol. XX di questi Atti, pag. 63a) esteso da a=t sino ad $a=k+\sigma_c$, che può sorivera.

(16) $\Sigma_{\Gamma}^{k+\sigma} \Delta a \cdot \sigma \left\{ \left(\mathbf{X} - \frac{d^3x}{dt^2} \right) \delta x + \left(\mathbf{Y} - \frac{d^3y}{dt^2} \right) \delta y + \left(\mathbf{Z} - \frac{d^3z}{dt^2} \right) \delta z \right\}$

dove ho messo σ in luogo di m giusta il detto al num°. 21.

Tomo XXIV. P.º I.

Abbiamo un teorema d'analisi (*) che ci somministra il mezzo di passare da un integrale finito definito ad un integrale continuo parimente definito, e può scriversi nella equazione

(17)
$$\sigma \Sigma_l^{k+\sigma} \Delta a \cdot \Omega = \int_l^k da \cdot \Omega + \sigma \Psi$$

essendo Ω una funzione qualunque della variabile a e intendendosi nell'espressione $o\Psi$ compendiati tutti i termini che facendosi sempre più piccoli finiscono coll'annullarsi insieme con σ . Pertanto l'espressione (16) può cambiarsi nella equivalente (18)

$$\int_{1}^{k} da \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^{3}x}{dt^{2}} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^{3}y}{dt^{2}} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^{3}z}{dt^{2}} \right) \delta z \right\} + \sigma \Psi$$

e l'aggiunta $\sigma \Psi$ si dovrà trascurare per la ragione più volte accennata. Ed ecco come si adatta ad un sistema lineare la prima parte dell'equazione generale (1); ommetterò in questo luogo d'introdurre termini corrispondenti alla seconda parte di quella equazione generale, portati da forze interne attive, supponendo che tali forze non vi siano, e tanto per incominciare a dare un esempio e venire a qualche conclusione nota, tratterò il caso del fio flessibile ed inestensibile.

a γ . La condizione dell' inestendibilità del filo ci fa capire che la densità Γ colla quale la materia è distribuita nel filo, quantunque possa cambiare passando da un punto all'altro, resterà per ogni pinto la stessa in qualtunque ipotesi di curvatura e di movimento, ossia (analticamente parlando) anche quando le x, y, z si mutano nelle $x+i \delta x, y+i \delta y, z+i \delta z$. Risulta quindi nulla la variazione della densità, e si ha Γ equazione di condizione

(19) $\delta \Gamma \! = \! c \, ;$ ossia mettendo per Γ il suo valore (Capo 1°. equazione (16))

(20)
$$\frac{dx}{da} \frac{d\delta x}{da} + \frac{dy}{da} \frac{d\delta y}{da} + \frac{dz}{da} \frac{d\delta z}{da} = 0.$$

^(*) Lacroix: Traité ec. T. III. pag. 98: ovvero Bordoni: Lezioni ec. T. II. p. 479-

Questa equazione di condizione deve intenderai replicata per ogni punto del sistema. Ora convien fissare un principio generale. Quando una equazione di condizione non muta passando da un punto all'altro del sistema se non pel mutare delle coordinate, non può che cambiare alla stessa maniera anche il ceefficiente che nell'equazione generale meccanica ne moltiplica la variata. Nol caso attuale, se l'equazione ei seprimo per L=0, essa si adatta ai diversi punti mettendo per L (che è una funzione di a) prima a=1, poi a=1+a, poi a=1+a a, cc., talché le diverse equazioni di condizione pei diversi punti possono indicarsi con

Queste introdurrebbero nella terza parte dell'equazione generale (1) i termini

(21)
$$\lambda_1 \delta L_1 + \lambda_2 \delta L_2 + \lambda_3 \delta L_3 + ec.$$

Ora si dice che i coefficienti λ_1 , λ_2 , λ_3 , ec. non possono cambiare che come cambiano le L_r , L_2 , L_3 , ec., cioè debbono discendere tutti da una stessa funzione $\lambda(a)$, cosicchè si abbia

$$\lambda_s = \lambda(l)$$
; $\lambda_s = \lambda(l+\sigma)$; $\lambda_s = \lambda(l+2\sigma)$; ec.

Giò essendo, si fa manifesto che tutti i termini come nella somma qui sopra segnata (a1), possono raccoglieris mediante una sommatoria; il che avevamo già previsto scrivendo l'espressione (a). Vi sono due modi per giungere a persuadersi l'esposto principio. Il primo è desunto dalla considerazione che quei coefficienti (come ha provato si bene Lagrange pei sistemi discreti) rappresentano forze interne passive, cicò pressioni o tensioni che hanno luogo in quel punto pel quale si verifica l'un punto all'altro unicamente pel cambiare che fanno le coordinate. L'altro mezzo è puramente analitico e consiste nell'osservare quel che avviene me' sistemi discreti quando regna fra i loro punti una condizione dell'indole delle sopra indicate, per esempio la costanza delle distanze. Dalle equazioni spettanti

ad un punto si cava il valore del coefficiente che moltiplica la variata dell'equazione corrispondente, e da quelle spettanti ad un altro punto si cava il valore del coefficiente analogo, e si vede che talli valori non differiscono se non pei valori diversi delle coordinate. Ed anche senza pensare di aver condotto alla fine tali calcoli: ed anche quando il sistema è continuo alla maniera sopra descritta, si sente che se tutto ciò da cui dipende la determinazione del coefficiente λ non muta nei due casi se non per esservi al luogo della variabile auna volta la $l_1+\alpha_s$ i due valori del coefficiente non possono che differire alla stessa maniera. Questo ragionamento vale anche quando essendo più d'una le equazioni di condizione che si ripettono di punto in punto, sono anche più d'uno i rispettivi coefficienti: caso preveduto nello stendere l'espressione (a).

28. Nel caso attuale la sommatoria che comprende tutti i termini portati nell'equazione generale (1) dall'equazione di condizione (2c), e che può tradursi in un integrale finito definito in corrispondenza al già detto per l'espressione (16), sar\u00e4.

(22)
$$\Sigma_l^{k+\sigma} \Delta a \cdot \sigma \lambda \left(\frac{dx}{da} \frac{d\delta x}{da} + \frac{dy}{da} \frac{d\delta y}{da} + \frac{dz}{da} \frac{d\delta z}{da} \right)$$
;

dove ho messo $\sigma\lambda$ in luogo di λ , il che può sembrare arbitrario trattandosi di un coefficiente indeterminato, ma l'ho fatto appositamente, perchè siccome poco più sopra dicemmo, un tal coefficiente rappresenta una forza della stessa natura delle X_1 , X_2 , rapportata alla stessa unità di misura, quindi il numero che la significa deve essere attenuato, del pari che per le anzidette, dal coefficiente σ (rivedi il canone stabilito al nume", 21.)

L'espressione (22) si muta come la (16) in forza del teorema (17) nell'altra

(23)
$$f_1^k da \cdot \lambda \left(\frac{dx}{da} \frac{d\delta x}{da} + \frac{dy}{da} \frac{d\delta y}{da} + \frac{dz}{da} \frac{d\delta z}{da} \right) + \sigma \Phi$$

essendo compendiati nella quantità $\sigma\Phi$ i termini che poi si debbono trascurare.

Riunendo le espressioni (18) e (23) e non essendovi nel presente caso altre condizioni da contemplare, l'equazione pel moto del filo inestendibile cavata dalla generale (1) sarà

Potrei qui trattenermi a far vedere le deduzioni che discendono da questa equazione; cominciando dal trasformare i termini sotto il secondo integrale per modo che le variazioni dx, dy, dz non siano affette da altre operazioni di derivazione (trasformazioni note nel calcolo delle variazioni) mi risulterebbero tre termini da compenetrarsi con quelli esistenti sotto il primo integrale, e avrei di più una quantità trinomiale che porterei ai limiti, essendo una quantità differenziale esatta sulla quale si eseguisce l'integrazione: annullando poi sotto il segno integrale i coefficienti totali delle dr. dv. dz. come Lagrange ha insegnato doversi fare, mi verrebbero tre equazioni che con molta facilità trasformerei nelle già conosciute. Potrei anche dire che per certi problemi sotto il primo integrale dell' equazione (24) conviene introdurre un fattore N(a) la cui origine dipende dalle riflessioni accennate verso il fine del numº, 22. Memore però di avere un lungo viaggio a percorrere, mi dispenso dallo stendere le indicate operazioni, essendo solo mio scopo in questo Capo, siccome dissi al principio di esso, dare le spiegazioni rimaste sottintese nella grand' opera di Lagrange: il che seguiterò a fare, colla intenzione d'invogliare sempre più i lettori a studiar finamente anche i più tenui passaggi nell'uso di un metodo il quale, vogliasi o non vogliasi, finirà col trionfare d'ogni contraria insistenza, e si stabilirà sovrano nella meccanica razionale, come il calcolo differenziale e integrale si è stabilito nell'analisi.

 $f(l_i t) : f'(l + a_i t) : f'(l + a_i a_i t) = ...$

(25)

SISTEMI SUPERFICIALI.

20. Per dedurre dall'equazione meccanica (1) generale pei sistemi discreti quelle pur generali relative all'equilibrio e al moto di sistemi superficiali, limiteremo dapprima le nostre considerazioni ad un aggregato di molecole che nella disposizione antecedente ideale (rivedi il numº, 12) fossero configurate in un rettangolo; vedremo poi fra poco che questa limitazione può togliersi restando le più importanti conseguenze anche per quando la configurazione delle molecole nello stato antecedente si supponga in una superficie piana terminata da un contorno qualunque: ma giova sul principio evitare una complicazione non necessaria a comprendere quella riduzione che ci siamo proposto di schiarire. Nella supposizione pertanto del rettangolo. ammettiamo che le ascisse a cominciassero da a=L e finissero con a=k, e le ordinate b cominciassero da b=h, e finissero con b=i. Passando alla considerazione delle coordinate x, y, z dello stato reale, i valori di tutte le x per quel aggregato di molecole potranno distribuirsi in una serie doppia che indicheremo dapprima con indici al piede come segue

$$x_{1,1}$$
; $x_{3,1}$; $x_{3,1}$; $x_{4,1}$; ec. $x_{1,3}$; $x_{3,3}$; $x_{3,3}$; $x_{4,3}$; ec. $x_{1,3}$; $x_{3,3}$; $x_{3,3}$; $x_{3,3}$; $x_{4,3}$; ec.

poi coi valori corrispondenti dedotti da una sola funzione f(a,b) alla maniera che soggiungiamo

(a6)
$$f(l,h+2\sigma)$$
; $f(l+\sigma,h+2\sigma)$; $f(l+2\sigma,h+2\sigma)$ $f(k,h+2\sigma)$

$$f(l,i)$$
; $f(l+\sigma,i)$; $f(l+2\sigma,i)$ $f(k,i)$.

Similmente dovremo immaginare che si faccia per le diverse y_s e per le diverse z: cioè indicandone dapprima i valori con indici al piede e con serie doppie analoghe alla (25): poi rispettivamente con serie doppie dedotte per le y da una funzione $\phi(a,b)$, e per le z da una funzione $\psi(a,b)$ in perfetta corrispondenza colla (26).

Ora vogilamo anche qui provare, come nel \S , precedente, che dovendo le forme f_i , $\hat{\phi}_i$, ψ non mutarsi mai per tutto il sistema, vengono a introdursi tante equazioni di condizione quante sono le coordinate dei diversi punti, meno tre: e dedursene per conseguenza che le variazioni $\hat{\sigma}_i$, $\hat{\sigma}_j$, $\hat{\sigma}_i$ ze delle coordinate dei diversi punti mutano da un punto all'altro alla stessa maniera con cui mutano i valori delle coordinate nella serie doppia (a6) e nelle altre due simili: non restare quindi che tre variazioni veramente indipendenti ed arbitrarie. Immaginiamo dalle dine emazioni

$$x_{i,j} = f(l,h); \quad y_{i,j} = \phi(l,h)$$

cavati i valori inversi di I, h, che segneremo mediante le

(27)
$$l=p(x_{i,1}, y_{i,1}); h=q(x_{i,1}, y_{i,1}),$$

e sostituiti în tutti i termini della serie doppia (26). Il confronto delle espressioni che risultano dopo tale sostituzione coi valori corrispondenti della serie doppia (25) darà tante equazioni fra varie coordinate dei diversi punti, quanti sono i punti: una sarà identica e le altre saranno equazioni di condizione. Prendendone le variate, e ponendo per abbreviare

(28)
$$\xi = p'(x_{i,1}) \, \delta x_{i,1} + p'(y_{i,1}) \, \delta y_{i,1}$$

$$\gamma = q'(x_{i,1}) \, \delta x_{i,1} + q'(y_{i,1}) \, \delta y_{i,1} ;$$

poscia indicando con un apice in alto le derivate per p, e con un apice al basso quelle per q, avremo

$$\begin{split} &\delta x_1, = f'(p,q)\xi + f, (p,q)\eta \\ &\delta x_2, = f'(p+\sigma,q)\xi + f, (p+\sigma,q)\eta \\ &\delta x_3, = f'(p+\sigma,q)\xi + f, (p+\sigma,q)\eta \\ &\delta x_3, = f'(p+\sigma,q)\xi + f, (p+\sigma,q)\eta \end{split}$$

(29) $\delta x_{1,s} = f'(p,q+\sigma)\xi + f_s(p,q+\sigma)\eta$ $\delta x_{2,s} = f'(p+\sigma,q+\sigma)\xi + f_s(p+\sigma,q+\sigma)\eta$

Presentemente rimettendo per p, q i valori dati dalle (27) si vedrà che queste variazioni (29) variano come i termini della serie doppia (26), essendo ξ, η quantità che rimangono le medesime per tutte. In maniera affatto simile colla sostituzione dei valori (27) nei termini della serie doppia simile alla (26) e formata mediante la funzione d'(a,b), comporremo un altro numero di equazioni di condizione eguale a quello delle molecole: una però di tali equazioni sarebbe identica. Prendendone poi le variate, potremo provare che anche le variazioni dy, ,;; $\delta y_{1,1}; \delta y_{3,1}; \ldots \delta y_{1,2}; \delta y_{1,2}; \ldots$ variano da punto a punto come le (29) e quindi come i termini della (26). Volendo da ultimo venire alle stesse conseguenze anche per un terzo numero di equazioni di condizione eguale al numero delle molecole, compresavi una identica, e per le variazioni dz. . . ; $\delta z_{*,1}; \delta z_{3,1}; \ldots \delta z_{1,2}; \delta z_{*,2}, \ldots$, converrà assumere le equazioni $x_{...} = f(l,h)$; $z_{...} = \psi(l,h)$ onde dedurne i valori inversi del L h analogamente al già detto scrivendo le (27), e rifare per le x, e per le z il medesimo discorso sopra tenuto per le x e per le y. I valori di tutte le variazioni (29) e delle altre due serie corrispondenti conterranno le tre sole variazioni $\partial x_{i,j}$; $\partial y_{i,j}$; $\partial z_{i,j}$, rimaste assolutamente arbitrarie. Se a taluno paresse risultare pei sistemi superficiali dal principio della continuità un' altra equazione di condizione fra le coordinate, oltre quelle di numero eguale al triplo del numero delle molecole, meno tre, il suo dubbio potrebbe dissiparsi per mezzo di un ragionamento simile al praticato sul fine del numº. 24.

30. Assicurati così che tutte le quantità componenti il t_{i-1} nomio sottoposto al primo segno 8 nella equazione generale (t) variano da molecola a molecola alla maniera dei termini di una serie doppia, potremo invece di 8 mettere il segno di una doppia sommatoria o di un duplicato integrale finito, il quale sia definito in quanto ad a fra i limiti a=l, a=k+a, c in quanto a b fra i b=l b=l+a; avremo cioè invece di quella prima parte l'espressione (3c)

$$\sum_{i}^{k+\sigma} \Delta a \sum_{h}^{i+\sigma} \Delta b \cdot \sigma^{s} \left\{ \left(\mathbf{X} - \frac{d^{s}x}{dt^{s}} \right) \delta x + \left(\mathbf{Y} - \frac{d^{s}y}{dt^{s}} \right) \delta y + \left(\mathbf{Z} - \frac{d^{s}z}{dt^{s}} \right) \delta z \right\}$$

nella quale ho introdotto il fattore σ^* invece della lettera m_* , giusta l'esposto ai numeri a_1 , a_2 , a e avrei anche potuto (in conformità al detto verso il fine del num * , a_2) far entrare un altro fattore N funzione di a, b, che ommetto non essendo necessario al mio intento.

Non riuscirà ora difficile capire che se la configurazione delle molecole nello stato antecedente non sarà un rettangolo ma una superficie piana limitata da un contorno fatto di linee qualsivogliono, siccome supponemmo anche al num.º 12., non avremo più i limiti dell' integrale finito duplicato (3c) costanti e fra di loro indipendenti, ma che nel resto sussisteranno tutte le precedenti deduzioni. Vuolsi dire che in tal caso le diverse linee orizzontali della serie doppia equivalente, non saranno fatte di un egual numero di termini, un tal numero cambierà dipendentemente dal cambiare che fa la differenza dei valori estremi della a; invece della b poi vi sarà una funzione di a costante in ogni linea orizzontale (rivedi la (26)) ove a avrà il valore dell'ascissa per quel punto della linea di contorno che è insieme il primo di quella fila orizzontale. La somma di tutti i termini di una così fatta serie doppia equivarrà ancora ad un integrale duplicato: solamente i limiti di b saranno funzioni di a, e i limiti di a saranno i valori di questa variabile la cui differenza è la massima. Pertanto in questo caso più generale basterà indicare i segni integrali della espressione (30) scrivendo

Tomo XXIV. P.te I.

 $\Sigma \Delta a \Sigma \Delta b$, e intendendo che i limiti debbano essere opportunamente determinati all'oggetto di comprendere tutti i punti fisici del sistema.

Operata una tale sostituzione di segui integrali nella espressione (3c), faremo un altro passo corrispondentemente al già fatto per passare dalla espressione (16) alla (18). L'applicazione del teorema (17) replicata due volte di seguito, avvertendo di somporre il fattore σ' per dare un σ semplica ei ciascuno dei due integrali, ci fa conoscere che la prima parte dell'equazione generale (1) si trasforma quando trattasi di un sistema superficiale, nella quantità seguente

(31)

$$\int da \int db, \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dz^2}\right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dz^2}\right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dz^2}\right) \delta z \right\} + \sigma \Psi$$

intendendo compresi nell'aggiunta $\sigma\Psi$ tutti i termini che poi si debbono ommettere, e ritenendo che il doppio integrale continuo va definito secondo i limiti assegnati alle variabili dalle linee circoscriventi la materia nella precedente disposizione.

Potrei qui pure immaginare una condizione estensibile a uttiti i punti del sistema e far vedere com' essa ci porga un altro integrale duplicato simile al precedente e da sommarsi con esso, in corrispondeixa a quanto dissi quando mostrai che l'espressione (23) si sommava colla (18) per darci l'equazione (24). Ma ormai il lettore deve aver capito l'andamento da tenersi. A me basta aver dimostrato che il segno S della equazione generale (1) si cambia pei sistemi superficiali in un duplicato integrale continno definite, come cambiavasi in un integrale definito semplice pei sistemi lineari; con quel di più che parevami opportuno onde condurci passo passo a penetrare nelle varie sue parti quel metodo ammirabile del quale mi sono fatto propugnatore.

ean ni a là la allah Pialar i catgamantangga abatanar ing a butmen a plidainer of side of Santing of a deal's protected research

Sistemi a tre dimensioni.

31. Passando a dire dei sistemi a tre dimensioni, anche le equazioni generali dell'equilibrio e del moto per essi, possono dedursi dalla solita (1) pei sistemi discreti: solamente in questo caso quelle somme si tramutano in integrali triplicati, il che resta a vedere. Limiteremo dapprima le nostre considerazioni ad un aggregato di molecole le quali nella disposizione antecedente ideale presentassero la figura di un parallelepipedo rettangolo. In tale supposizione le molte x appartenenti a quelle molecole trasportate allo stato reale potranno distribuirsi in una serie tripla che indicheremo mediante un succedersi di serie doppie, primieramente con indici al piede, come segue

x,,,,	;	x , , , ,	;	x3,1,1;	ec.
x; , , , ;	;	22, 2, 1	;	x3,4,1;	ec.
x, , 3 , 1	;	x4,3,1	5	x3,3,1;	ec.
dell.	- ,	a (p-l		is Hills	100
x,,,,,	;	x . , , , , a	;	x3,1,1;	ec.
x,,,,,	;	x,,,,,	;	x3, 2, 2 5	ec.
x, 3, 1	;	2,3,5	;	x3,3,2;	ec.
				The state of the s	
	. 1				

ec. ec.

ec.

e poi mutando opportunamente i valori delle a,b,c in una stessa funzione f(a,b,c), ritenendo che la variabile a cominci da a=l, e proceda per ammenti costanti σ fino ad a=k, la b prenda valori fra i limiti b=h, b=i, e la c fra i limiti c=a, c=i.

Quest' altra serie tripla i cui termini debbono intendersi uno ad uno eguagliati a termini corrispondenti della precedente

(32), è la seguente

$$f(l,h,n); f(l+\sigma,h,n); \dots \cdot f(k,h,n)$$

$$f(l,h+\sigma,n); f(l+\sigma,h+\sigma,n); \dots \cdot f(k,h+\sigma,n)$$

$$f(l,i,n); f(l+\sigma,i,n); \dots \cdot f(k,i,n)$$

 $f(l, h, n \leftarrow \sigma)$; $f(l \leftarrow \sigma, h, n \leftarrow \sigma)$; $f(k, h, n \leftarrow \sigma)$ (33) $f(l, h \leftarrow \sigma, n \leftarrow \sigma)$; $f(l \leftarrow \sigma, h \leftarrow \sigma, n \leftarrow \sigma)$; . . . $f(k, h \leftarrow \sigma, n \leftarrow \sigma)$

$$f(l,i,n+\sigma)$$
; $f(l+\sigma,i,n+\sigma)$; $f(k,i,n+\sigma)$

essendo l'ultima delle serie doppie di cui la tripla è composta

$$f(l, h, j); f(l+\sigma, h, j); \dots, f(k, h, j)$$

 $f(l, h+\sigma, j); f(l+\sigma, h+\sigma, j); \dots, f(k, h+\sigma, j);$
 $f(l, i, j); f(l+\sigma, i, j); \dots, f(k, i, j).$

E quanto qui si è detto dei valori delle diverse x, potremo ripeterlo pei valori delle diverse y, indicandoli prima, come nella (3a), per mezzo d'i indici al piede, poi deducendoli tutti, come nella (33) da una stessa funzione $\phi(a,b,c)$; così dei valori delle diverse z, deducendoli tutti nel secondo quadro da una stessa funzione $\psi(a,b,c)$.

Soggiungeremo, come nei casi simili degli altri due sistemi, od dovendo le forme f_1, θ_1, ψ non mutarsi per tutto il corpo, si hanno tante equazioni di condizione, quante sono le coordinate dei diversi punti, meno tre: e che quindi le variazioni $\partial z_2, \partial y_1, \partial z$ cambiano da un punto all'altro alla stessa maniera che i valori delle coordinate nella serie tripla (33) e nelle due analoghe per le y_1 , e per te z.

A veder chiaro quello che qui abbiamo asserito, immaginiamo che dalle tre equazioni

 $x_{i,i,j,i} = f(l,h,n)$; $y_{i,i,j,i} = \phi(l,h,n)$; $z_{i,j,j,i} = \psi(l,h,n)$ siano stati dedotti i valori inversi

(34)
$$l = p(x_{1,1,1}, y_{1,1,1}, z_{1,1,1}) \\ h = q(x_{1,1,1}, y_{1,1,1}, z_{1,1,1}) \\ n = r(x_{1,1}, y_{1,1,1}, z_{1,1,1})$$

e sostituiti nelle espressioni di tutti i termini della (33). Allora il confronto delle (33), (33), termine per termine, ci darà tante equazioni fra varie ecoordinate di diversi punti, quanti sono tutti i punti fisici del sistema: una di tali equazioni sarà identica, e le altre saranno equazioni di condizione. Prendendone le variate, e ponendo per abbreviare

$$\begin{split} \xi &= p'(x_{i+1,i}) \partial x_{i+1,i} + p'(y_{i+1,i}) \partial y_{i,1,i} + p'(z_{i+1,i}) \partial z_{i+1,i} \\ \gamma &= q'(x_{i+1,i}) \partial x_{i+1,i} + q'(y_{i+1,i}) \partial y_{i+1,i} + q'(z_{i+1,i}) \partial z_{i+1,i} \\ \xi &= r'(x_{i+1,i}) \partial x_{i+1,i} + r'(y_{i+1,i}) \partial y_{i+1,i} + r'(z_{i+1,i}) \partial z_{i+1,i} \\ \end{split}$$
 otterremo

$$\delta x_{3,1,1} = f'(p+2\sigma_{3}q_{1}r)\xi + f_{1}(p+2\sigma_{3}q_{1}r)\eta + f(p+2\sigma_{3}q_{1}r)\xi$$
ec.
ec.
ec.

dove gli apici in f', f_i, f' indicano derivate parziali per p, q, r rispettivamente.

In questi valori (35) delle variazioni $\partial x_{r,r,r}$, $\partial x_{r,r,r}$, cintendiamo risostituiti alle p, q, r i valori l, h, n che le uguazioni (10) valori (10)

In conseguenza del fin qui detto tutti i trinomi che nella quazione generale (1) sono abbracciati dal primo segno sommatorio S, comporranno visibilmente una serie tripla, la quale potrà esprimersi mediante una tripla sommatoria o un integrale finito triplicato, come segue.

36) $\sum_{h}^{k+\sigma} \Delta a \sum_{h}^{i+\sigma} \Delta b \sum_{n}^{i+\sigma} \Delta c \cdot \sigma^{3} \left\{ \left(\mathbf{X} - \frac{d^{2}x}{dx^{2}} \right) \delta x + \left(\mathbf{Y} - \frac{d^{2}y}{dx^{2}} \right) \delta y + \left(\mathbf{Z} - \frac{d^{2}z}{dx^{2}} \right) \delta z \right\}$

dove vedesi introdotto il fattore σ^3 in luogo della lettera m, di conformità al già dimostrato nei numeri 18, 21.

3a. Diventa ora facile l'argomentare, in correlazione con quanto si dise al num. 3o pei sistemi superficiali, che se la configurazione delle molecole nello stato antecedente ideale non sarà più quella di una sola porzione della materia foggiata in parallelepipedo rettangolo, ma presenterà un'volume conterminato da superficie qualsivogliono, sussisterà ancora il ragionamento diretto a provare che la somma dei trinoni colle forze applicate a tutte le molecole, si può compendiare mediante un triplo integrale finito definito; però i limiti di tale integrale triplicato, invece di essere fra di loro indipendenti, come nella precedente espressione (36), saranon funzioni delle variabili che ancora restano dipendentemente dalla equazione della superficie te terminava il volume occupato dalla materia nello stato precedente. In tale supposizione converrà surrogare alla espressione (36) quest'à dira

(37) ΣΔα ΣΔb ΣΔc. σ³ { (X − d³x²/dx³) δx + (Y − d³y²/dx³) δy + (Z − d³x²/dx²) δz } intendendo i limiti opportunamente determinati, come si è detto.

Ora conviene fare il passo per tradurre l' integrale triplicató finito in un simile integrale continuo, applicando tre volte di seguito il teorema scritto nella equazione (τ ?) e avvertendo di scomporre il fattore σ^2 in maniera da dare un σ semplice a ciascuno dei tre integrali. Sumejamo per la giusa all'espressione

(38)
$$\int da \int db \int dc$$
. $\left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\} + \sigma \Psi$

consej al solito di dover trascurare l'aggiunta σ V, e di dover prendere i limiti dell'integrale triplicato quali li assegna la su-perficie circoscrivente la materia nella precedente disposizione.

Visto così come deve interpretarsi il segno S nella prima parte della equazione generale (1) quando il sistema è continuo a tre dimensioni, potrei aggiungere altri integrali triplicati provenienti da equazioni di condizione che si estendessero a tutti i punti del sistema: ed anche integrali duplicati che venissero introdotti nell' equazione generale del moto e dell'equilibro pressioni esercitate alla superficie del corpo. L'andamento da tenersi per simili aggiunte parmi abbastanza dichiarato dopo l'esposto nei paraggafi. di questo Capo. Credo poi più conveniente trattare a parte alcune delle questioni per le quali si verifica quanto ora si è accennato.

CAPO III.

Del moto e dell'equilibrio di un corpo qualunque rigido.

Mi propongo di dare in questo Capo quelle equazioni spettanti al moto di un punto qualunque di un corpo rigido, che Lagrange ha ommesse, e delle quali dissi nel preambolo della Memoria, che se il nostro Antore le avesse date, come gli era ficile usando de suoi metodi, avrebbe prevenuto il meglio di quanto è stato trovato di poi. Per avviarci in tale ricerca seguendo l'andamento che io ho preso a difendere e raccomandare, ci è prima necessario esprimere per mezzo di equazioni di condizione la rigidità del corpo. 33. Chiarissima è l'idea della rigidità in un corpo: si suppone che per effetto di essa le distanze rispettive di tutti i punti fisici del corpo siano invariabili durante qualunque movimento. Questa idea si può associare mentalmente con quel di una qualunque distribuzione della materin, sia a densità costante, sia a densità variabile: assumeremo la seconda supposizione per maggiore generalità.

Immaginiamo tre assi rettangolari connessi invariabilmente col corpo per modo che l'accompagnino in tutti i suoi movimenti ulteriori; dette allora

le coordinate di una molecola qualunque del corpo relativamente a tali asis, queste p_s , q_r saramo (precisamente come le $x_s p_s x$ del num². 3.) quelle funzioni delle a, b, c che esprimono la struttura del corpo nello stato reales, e le coordinate x_s , y_s della stessa molecola dopo un tempo t relativamente x_s tra x_s disis inello spazio, saramo funzioni lineari delle $p_s q_s r$ date dalle equazioni

(1)
$$x = f + \alpha_1 p + \beta_1 q + \gamma_1 r$$

$$y = g + \alpha_2 p + \beta_3 \hat{q} + \gamma_3 r$$

$$z = h + \alpha_3 p + \beta_3 q + \gamma_3 r$$

essendo $f,g,h;\alpha_1,\beta_1,\gamma_1;\alpha_2,\beta_1,\gamma_1;\alpha_3,\beta_3,\gamma_3$ dodici quantità funzioni del solo tempo t senza le a,b,c; cicò f,g,h le coordinate che alla fine del tempo t corrispondono al punto d'origine degli assi fissi nel corpo e mobili con esso, e $a_1,\beta_1,\gamma_1;a_2,\beta_3,\gamma_3$ nove quantità angolari di cui ecco la significazione prificazione a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_5

$$a_1 = \cos(p.x);$$
 $\beta_1 = \cos(q.x);$ $\gamma_1 = \cos(r.x)$
 $a_2 = \cos(p.y);$ $\beta_3 = \cos(q.y);$ $\gamma_4 = \cos(r.y)$
 $\alpha_3 = \cos(p.x);$ $\beta_3 = \cos(q.x);$ $\gamma_3 = \cos(r.x).$

Fra queste nove quantità si hanno le ventuna equazioni

$$a_1^a + a_2^a + a_3^a = i$$
; $a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2 + a_3 \beta_3 = 0$

(3)
$$\beta_1^a + \beta_2^a + \beta_3^a = 1$$
; $\alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + \alpha_3 \gamma_3 = 0$
 $\gamma_1^a + \gamma_2^a + \gamma_3^a = 1$; $\beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3 = 0$

$$\alpha_i^a + \beta_i^a + \gamma_i^a = i$$
; $\alpha_i \alpha_a + \beta_i \beta_a + \gamma_i \gamma_a = 0$

(4)
$$a_a^a + \beta_a^a + \gamma_a^a = 1$$
; $a_1 a_3 + \beta_1 \beta_3 + \gamma_1 \gamma_3 = 0$
 $a_3^a + \beta_3^a + \gamma_3^a = 1$; $a_2 a_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 = 0$

$$a_1 = \beta_1 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_4$$
; $a_2 = \beta_3 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_3$; $a_3 = \beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_3$

(5)
$$\beta_1 = \alpha_3 \gamma_3 - \alpha_3 \gamma_3$$
; $\beta_3 = \alpha_1 \gamma_3 - \alpha_3 \gamma_1$; $\beta_3 = \alpha_4 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_3$
 $\gamma_1 = \alpha_4 \beta_3 - \alpha_3 \beta_4$; $\gamma_4 = \alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3$; $\gamma_5 = \alpha_1 \beta_4 - \alpha_4 \beta_1$

le quali però sono sostanzialmente soltanto sei, cioè le (3), o le (4), cavandosi tutte le altre da combinazioni delle medesime. Ciò è notissimo, ed anche è noto che la deduzione delle (4), (5) dalle (3) può farsi per solo processo analitico, come può vedersi nella prima Nota ch' io posi alla Memoria dell'anno 1832, citata nel preambolo di questa, e in una Memoria del Sig. Cavaliere Gactano Giorgini inserita nel Tomo XXI degli Atti di questa Società.

34. Assumiamo per comodo le seguenti denominazioni

$$t_i = \left(\frac{dx}{da}\right)^2 + \left(\frac{dy}{da}\right)^2 + \left(\frac{dz}{da}\right)^2$$

$$t_s = \left(\frac{dx}{db}\right)^a + \left(\frac{dy}{db}\right)^a + \left(\frac{dz}{db}\right)^a$$

$$t_3 = \left(\frac{dx}{dc}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dc}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dc}\right)^2$$

$$t_4 = \frac{dz}{da} \frac{dz}{db} + \frac{dy}{da} \frac{dy}{db} + \frac{dz}{da} \frac{dz}{db}$$

$$t_5 = \frac{dx}{dz} \frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} \frac{dy}{dz} + \frac{dz}{dz} \frac{dz}{dz}$$

$$t_6 = \frac{dx}{db} \frac{dx}{dc} + \frac{dy}{db} \frac{dy}{dc} + \frac{dz}{db} \frac{dz}{dc}$$

$$t_6 = \frac{dx}{db} \frac{dx}{dc} + \frac{dy}{db} \frac{dy}{dc} + \frac{dz}{db} \frac{dz}{dc}$$

le quali fanno un gran giuoco, come apparirà dall'attuale Capo e dai successivi.

Dalle equazioni (1) derivate per a, b, c otteniamo le nove

$$\frac{dx}{da} = \vec{a}_1 \frac{dp}{da} + \vec{p}_1 \frac{da}{da} + \gamma_1 \frac{dx}{da}$$

$$\frac{dy}{da} = a_1 \frac{dp}{da} + \beta_2 \frac{da}{da} + \gamma_2 \frac{dx}{da}$$

$$\frac{da}{da} = a_2 \frac{dp}{da} + \beta_3 \frac{da}{da} + \gamma_3 \frac{dx}{da}$$

$$\frac{da}{da} = a_3 \frac{dp}{da} + \beta_3 \frac{da}{db} + \gamma_3 \frac{dx}{da}$$

$$\frac{dx}{db} = a_3 \frac{dp}{db} + \beta_4 \frac{dy}{db} + \gamma_5 \frac{dx}{da}$$

$$\frac{dx}{db} = a_3 \frac{dy}{db} + \beta_4 \frac{dy}{db} + \gamma_5 \frac{dx}{da}$$

$$\frac{dx}{da} = a_3 \frac{dy}{db} + \beta_4 \frac{dy}{db} + \gamma_5 \frac{dx}{da}$$

$$\frac{dx}{da} = a_3 \frac{dy}{db} + \beta_4 \frac{dx}{db} + \gamma_5 \frac{dx}{da}$$

$$\frac{dx}{da} = a_4 \frac{dx}{dc} + \beta_4 \frac{dx}{dc} + \gamma_5 \frac{dx}{da}$$

$$\frac{dx}{dc} = a_5 \frac{dx}{dc} + \beta_4 \frac{dx}{dc} + \gamma_5 \frac{dx}{da}$$

$$\frac{dx}{dc} = a_5 \frac{dx}{dc} + \beta_4 \frac{dx}{dc} + \gamma_5 \frac{dx}{da}$$

$$\frac{dx}{dc} = a_5 \frac{dx}{dc} + \beta_5 \frac{dx}{dc} + \gamma_5 \frac{dx}{da}$$

La sostituzione di questi valori nei secondi membri delle (6) può sembrare sulle prime operazione alquanto prolissa, ma viene facilitata dalla simmetria, e si scorge senza difficoltà, che in virtà delle equazioni (3) risultano le sei

(8)

$$t_1 = \left(\frac{g_p}{2a}\right)^2 + \left(\frac{g_p}{2a}\right)^2 + \left(\frac{g_p}{2a}\right)^2$$

 $t_2 = \left(\frac{g_p}{2a}\right)^2 + \left(\frac{g_p}{2a}\right)^2 + \left(\frac{g_p}{2a}\right)^2$
 $t_3 = \left(\frac{g_p}{2a}\right)^2 + \left(\frac{g_p}{2a}\right)^2 + \left(\frac{g_p}{2a}\right)^2$
 $t_4 = \frac{g_p}{2a} \frac{g_p}{2a} + \frac{g_p}{2a} \frac{g_p}{2a} + \frac{g_p}{2a} \frac{g_p}{2a} + \frac{g_p}{2a} \frac{g_p}{2a}$
 $t_5 = \frac{g_p}{2a} \frac{g_p}{2a} + \frac{g_p}{2a} \frac{g_p}{2a} + \frac{g_p}{2a} \frac{g_p}{2a}$
 $t_6 = \frac{g_p}{2a} \frac{g_p}{2a} + \frac{g_p}{2a} \frac{g_p}{2a} + \frac{g_p}{2a} \frac{g_p}{2a}$
 $t_6 = \frac{g_p}{2a} \frac{g_p}{2a} + \frac{g_p}{2a} \frac{g_p}{2a} + \frac{g_p}{2a} \frac{g_p}{2a}$

Queste equazioni, se ben si considerano, meritano molta attensione. Esse c'insegnano primieramente che i sei trimoni j_t, t_t, t_s , t_t , t_t, t_s , t_t , sono sei quantità indipendenti dal tempo, cioè tali che la variabile t entrando nelle singole loro parti, esce non-dimenoi di per se stessa dal complesso di tutte. Ma ciò che più importi si è che esse sono le cercate equazioni di condistone espimenti la rigilità del corpo. Basta infatti rillettere che i secondi loro membri (per essere p, q, r coordinate relative ad assi fassi nel corpo) sono quantità invariabili in qualunque ipotesi di movimento, e che perciò, prendendo le varrate di tali equazioni, si ottengono le sei

le quali sussistono per ogni punto fisico del corpo. Può notarsi che le equazioni (8) ovvero (9) sono veramente le equazioni di condizione significanti la rigidità del corpo, in quanto non contengono le dodici quantità $f, g, h; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ visibili nelle equazioni (1). Queste dodici quantità (che in virtu delle equazioni (3) si riducono a sei) possono avere valori arbitrari, essendo noi liberi di piantare diversamente in mille modi gli assi fissi nel corpo: il che equivale a dire esservi infinite terne di assi fissi nel corpo rimpetto ai quali le coordinate p, q, r sono invariabili per una stessa molecola. Ma questo concetto che ci dà propriamente l'idea della rigidità, è un concetto il quale, con sott'occhio le equazioni (1), rimane nella nostra mente senza trasfondersi allo scritto, essendo quelle dodici lettere per se stesse mute e incapaci a ridircelo. Si trasfonde esso veramente allo scritto quando si hanno equazioni come le (8), (9) tra espressioni differenziali, le quali dice Lagrange (Lecons sur le calcul des fonctions. Paris 1806 in 8°. pag. 162-163) sono più generali delle equazioni primitive o integrali, ed equivalgono a tutte insieme tali equazioni primitive che non differirebbero fra loro se non pel valore delle costanti sparite nelle equazioni differenziali.

35. Le equazioni di condizione (o) sono della stessa natura di quelle (rivedi l'equazione (19) del Capo precedente numeri 27. 28) per le quali occrammo di stabilire un principio generale circa al modo d'introdurne la significazione nell'equazione generale della meccanica per mezzo di sommatoric che nel caso attuale si traducono in integrali triplicati. Riletti i citati numeri, e risasunto l'esposto nel § 3. del Capo precedente, non si avrà alcuna difficoltà ad ammettere, che chiamando A, B, C, D, E, F sei coefficienti indeterminati funzioni, delle a, b, c o delle x, y, z ('rivedi le equazioni ('7) e ('8) del mun", 9.), l'equazione generale (1) nel caso del moto de corpi rigidi si trasformerà nella seguente nella seguente

$$\int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \partial x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \partial y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \partial z \right\}$$
(10)

 $+ \int da \int db \int dc \cdot [A \delta t_1 + B \delta t_2 + C \delta t_3 + D \delta t_4 + E \delta t_5 + F \delta t_6] + \Omega = 0$

dove ho inteso di comprendere nella lettera Ω quei termini che venissero introdotti nell'equazione generale da forze applicate solamente a superficie esterne, o a linee, o a punti determinati del sistema: termini però i quali non potrebbero avere alcuna loro parte affetta da un segno d'integrale triplicato, come la parte scritta.

36. Prendansi per t₁, t₂, t₃, t₄, t₅, t₅ i valori dati dai secondi membri delle equazioni (6), e il polinomio sottoposto al secondo segno integrale della precedente equazione generale (10) si troverà equivalente alla quantità che segue

$$2A \left(\frac{dx}{da}\frac{d3x}{da} + \frac{dy}{da}\frac{d3y}{da} + \frac{dx}{da}\frac{d3x}{da}\right) + 2B \left(\frac{dx}{da}\frac{d3x}{db} + \frac{dy}{da}\frac{d3y}{da} + \frac{dx}{da}\frac{d3x}{db}\right) + 2B \left(\frac{dx}{db}\frac{d3x}{db} + \frac{dy}{db}\frac{d3y}{db} + \frac{dx}{db}\frac{d3x}{db}\right) + 2C \left(\frac{dx}{da}\frac{d3x}{db} + \frac{dy}{da}\frac{d3y}{db} + \frac{dx}{da}\frac{d3x}{db}\right) + D \left(\frac{dx}{da}\frac{d3x}{db} + \frac{dy}{da}\frac{d3y}{db} + \frac{dx}{da}\frac{d3x}{db}\right) + D \left(\frac{dx}{da}\frac{d3x}{db} + \frac{dy}{da}\frac{d3x}{db} + \frac{dx}{da}\frac{d3x}{db}\right) + D \left(\frac{dx}{da}\frac{d3x}{dc} + \frac{dy}{da}\frac{d3x}{dc} + \frac{dx}{da}\frac{d3x}{dc}\right) + D \left(\frac{dx}{da}\frac{d3x}{dc} + \frac{dx}{da}\frac{d3x}{dc}\right) + D \left(\frac{dx}{da}\frac{d3x}{dc}\right) + D \left(\frac{dx}{da}\frac{dx}{dc}\right) + D \left(\frac{dx}{da}\frac{dx}{dc}\right) + D \left(\frac{dx}{da}\frac{dx}{da}\right) + D \left(\frac{dx}{da}\frac{dx}{da}\right$$

I ventisette termini dei quali questa quantità è composta, possone tutti subire una trasformazione analoga quelle usate nel calcolo delle variazioni e diretta a ridurre la quantità (11) siccome risultante di due parti, la prina delle quali contenga le $\delta x, \delta y, \delta x$ non affette da alcuna operazione di derivazione, e la seconda consti di derivate esatte o per a o per b o per c. Le trasformazioni possono eseguirisi tutte sui due modelli

$$2\Lambda \frac{dx}{dx} \frac{dx}{dx} = -\frac{d \cdot \left(2\Lambda \frac{dx}{dx}\right)}{dx} \cdot \delta x + \frac{d \cdot \left(2\Lambda \frac{dx}{dx}\delta x\right)}{dx}$$

$$D \frac{dx}{dx} \frac{d\delta x}{dx} = -\frac{d \cdot \left(D \frac{dx}{dx}\right)}{dx} \cdot \delta x + \frac{d \cdot \left(D \frac{dx}{dx}\delta x\right)}{dx}$$

dopo di che la quantità (11) prende la forma

(13)
$$+ \left(\frac{dL_s}{da} + \frac{dN_s}{db} + \frac{dN_s}{dc}\right) \delta \gamma$$

$$+ \left(\frac{dL_s}{da} + \frac{dN_t}{db} + \frac{dN_t}{dc}\right) \delta z + T$$

essendo

$$\mathbf{L}_i = -2\mathbf{A}\frac{dx}{da} - \mathbf{D}\frac{dx}{db} - \mathbf{E}\frac{dx}{dc}$$

$$M_i = -D \frac{dx}{da} - 2B \frac{dx}{db} - F \frac{dx}{dc}$$

$$N_x = - E \frac{dx}{da} - E \frac{dx}{db} - 2C \frac{dx}{dc}$$

$$L_i = -2A \frac{dy}{da} - D \frac{dy}{db} - E \frac{dy}{dc}$$

(14)
$$M_a = -D \frac{dy}{da} - 2B \frac{dy}{db} - F \frac{dy}{dc}$$

$$N_4 = - E \frac{dy}{da} - F \frac{dy}{db} - 2C \frac{dy}{dc}$$

$$L_3 = -2A\frac{dz}{da} - D\frac{dz}{db} - E\frac{dz}{dc}$$

$$M_3 = -D \frac{dz}{da} - aB \frac{dz}{db} - F \frac{dz}{dc}$$

$$N_3 = - E \frac{dz}{da} - F \frac{dz}{db} - 2C \frac{dz}{dc}$$

T _ d.(L,
$$\delta x$$
 + L, δy + L, δz)

$$T = -\frac{d \cdot (L, \delta s + L, \delta y + L, \delta z)}{ds}$$

$$-\frac{d \cdot (M, \delta z + M, \delta y + M, \delta z)}{db}$$

$$-\frac{d \cdot (M, \delta z + M, \delta y + M, \delta z)}{db}$$

Sostintia la quantità (13) sotto il secondo segno integrale della equazione generale (10), e compenetrati i due integrali triplicati in un solo, è manifesto che sulle tre parti di cui è formata la quantità T (equazione (15)) può eseguirsi alcuna delle integrazioni per a, o per b, o per c, e che quindi queste parti vanno a mettersi sotto integrali daplicati. Esse allora vengono ad unirsi colle simili comprese (se pur vi sono) nella quantità \(\Omega\) della equazione (10) sottoposte a segni d'integrali duplicati e provenienti da forze applicate a soli punti di una superficie. Quanto alla quantità che rimane sotto l'integrale triplicato, vi si debbono, secondo c'insegna il calcolo delle variazioni, annullare i tre coefficienti totali delle variazioni \(\Omega\), \(\Omega\); \(\

(16)
$$X - \frac{d^{2}r}{dt^{2}} + \frac{dI_{c}}{ds} + \frac{dM_{c}}{ds} + \frac{dN_{c}}{dc} = 0$$

$$Y - \frac{d^{2}r}{dt^{2}} + \frac{dI_{c}}{ds} + \frac{dM_{c}}{ds} + \frac{dN_{c}}{dc} = 0$$

$$Z - \frac{d^{2}s}{ds} + \frac{dI_{c}}{ds} + \frac{dM_{c}}{ds} + \frac{dN_{c}}{ds} = 0$$

37. Ora si vorrebbero trainutare queste equazioni (16) in altre che non contenessero traccia delle a, b, c, e non constassero che di quantità spettanti allo stato reale del corpo. A questo oggetto mi è necessaria una breve digressione per dimostrare un principio analitico già messo a pag. 20.5 del Tomo XXI di questi Atti. Ora ne darò una dimostrazione un poco diversa, tanto più volentieri in quanto è legata coll'altra di tre equazioni identiche che rassonigliamo a quella della continuità, e possono venir utili anche altrimenti. Ecco in che consiste. Se si ha un trinomio come

$$\frac{d\mathbf{L}}{da} + \frac{d\mathbf{M}}{db} + \frac{d\mathbf{N}}{dc}$$

dove L, M, N sono funzioni qualunque delle a, b, c; esso può tradursi in un altro trinomio nel quale le derivate siano prese per le x, y, z: si ha cioè

(17)
$$\frac{dL}{da} + \frac{dM}{db} + \frac{dN}{dc} = \frac{1}{\Gamma} \left(\frac{dK_1}{dx} + \frac{dK_2}{dy} + \frac{dK_3}{dz} \right)$$

essendo le K, K, K, date per le L, M, N mediante le formole

$$K_{i} = \Gamma \left(L \frac{dx}{da} + M \frac{dx}{db} + N \frac{dx}{dc} \right)$$

(18)
$$K_a = \Gamma \left(L \frac{dy}{da} + M \frac{dy}{db} + N \frac{dy}{dc} \right)$$

$$K_3 = \Gamma \left(L \frac{dz}{da} + M \frac{dz}{db} + N \frac{dz}{dc} \right).$$

Per vedere la verità di questo principio, cominceremo a designare con lettere particolari le derivate parziali delle x, y, z per le a, b, c, come abbiamo fatto (n. 14. equazioni (30)) delle derivate parziali pel tempo: scrivendo

$$\varepsilon_i = \frac{ds}{ds}; \ \delta_i = \frac{dy}{ds}; \ \tau_i = \frac{ds}{ds}$$

$$\varepsilon_s = \frac{ds}{dt}; \ \delta_s = \frac{dy}{dt}; \ \tau_s = \frac{ds}{db}$$
19)

 $\varepsilon_3 = \frac{dx}{dc}; \ \vartheta_3 = \frac{dy}{dc}; \ \tau_3 = \frac{dz}{dc};$

e intendendo queste quantità ridotte (mediante l'uso delle equazioni (8) num. 9) funzioni di x, y, z, t. Dopo ciò seguendo un andamento affatto analogo a quello tenuto al num. 14., troveremo primieramente l'equazione

$$\begin{array}{l} \frac{dH}{da} = l_{s} \frac{d^{2}x}{da^{2}} + m_{s} \frac{d^{2}x}{dadb} + n_{s} \frac{d^{2}x}{dadc} \\ \\ + l_{s} \frac{d^{2}y}{da^{2}} + m_{s} \frac{d^{2}y}{dadb} + n_{s} \frac{d^{2}y}{dadc} \\ \\ + l_{3} \frac{d^{2}z}{da^{2}} + m_{3} \frac{d^{2}z}{da^{2}} + n_{3} \frac{d^{2}z}{da^{2}} \end{array}$$

poi, sostituendo le denominazioni assunte nella prima fila delle precedenti equazioni (19), ci verranno per esprimere i valori delle derivate seconde $\frac{d^3x}{da^3}$, $\frac{d^3x}{da\,dh}$, ec., come in quel luogo per le derivate simili, nove equazioni le quali non differiranno nei secondi membri da quelle ivi scritte se non per esservi le lettere ε. . 3. . τ. invece di u, v, w. Arriveremo quindi all'equazione analoga alla colà ottenuta,

$$\frac{dH}{da} = H \left(\frac{ds_i}{dx} + \frac{db_i}{dy} + \frac{d\tau_i}{dz} \right)$$

la quale per effetto della (6) numº, o si muta nella

$$\frac{d\Gamma}{da} = -\Gamma \left(\frac{d\varepsilon_i}{dx} + \frac{d\vartheta_i}{dy} + \frac{d\tau_i}{dz} \right).$$

Con processo analitico in tutto somigliante troveremo le altre due equazioni

$$\frac{d\Gamma}{db} = -\Gamma \left(\frac{d\epsilon_s}{dx} + \frac{d2_s}{dy} + \frac{d\tau_s}{dz} \right)$$

$$\frac{d\Gamma}{dz} = -\Gamma \left(\frac{d\epsilon_s}{dz} + \frac{d2_s}{dz} + \frac{d\tau_s}{dz} \right).$$
(21)

Avendo poi altrimenti manifestamente

$$\frac{d\Gamma}{da} = \frac{d\Gamma}{dx} \, \varepsilon_i + \frac{d\Gamma}{dy} \, \vartheta_i + \frac{d\Gamma}{dz} \, \tau_i$$

$$\frac{d\Gamma}{db} = \frac{d\Gamma}{dx} \; \ell_x + \frac{d\Gamma}{dy} \; \delta_x + \frac{d\Gamma}{dz} \; \tau_z$$

$$\frac{d\Gamma}{dc} = \frac{d\Gamma}{dz} \, \varepsilon_3 + \frac{d\Gamma}{dz} \, \vartheta_3 + \frac{d\Gamma}{dz} \, \tau_3$$

la sostituzione di questi valori nelle (20), (21) le riduce alle tre somiglianti all'equazione della continuità

$$\frac{d \cdot \Gamma \epsilon_i}{dx} + \frac{d \cdot \Gamma \vartheta_i}{dy} + \frac{d \cdot \Gamma \tau_i}{dz} = 0$$

(22)
$$\frac{d \cdot \Gamma \epsilon_b}{dx} + \frac{d \cdot \Gamma \overline{\epsilon}_b}{dy} + \frac{d \cdot \Gamma \overline{\epsilon}_b}{dz} = 0$$

$$\frac{\frac{d \cdot \Gamma \epsilon_{3}}{dx} + \frac{d \cdot \Gamma 2_{3}}{dy} + \frac{d \cdot \Gamma \epsilon_{3}}{dz} = 0 \ .}{Tomo \ XXIV. \ P. ^{\epsilon_{0}} \ I.}$$

Ora prendasi una funzione qualunque L di a,b,c, che per la sostituzione dei valori (8) numº. 9 può anche intendersi ridotta funzione di x,y,z: avremo

$$\frac{d\mathbf{L}}{da} = \frac{d\mathbf{L}}{dx} \frac{dx}{da} + \frac{d\mathbf{L}}{dy} \frac{dy}{da} + \frac{d\mathbf{L}}{dz} \frac{dz}{da} .$$

A motivo delle denominazioni (19) (prima fila), non sarà alterata la precedente equazione scrivendola

$$\frac{dL}{da} = \frac{\tau}{\Gamma} \left(\frac{dL}{dx} \cdot \Gamma \epsilon_{\tau} + \frac{dL}{dy} \cdot \Gamma \beta_{\tau} + \frac{dL}{dz} \cdot \Gamma \tau_{\tau} \right).$$

Di più: se prendiamo la prima delle equazioni (22), moltiplicandola per $\frac{\Gamma}{\Gamma}$, non avremo difficoltà a capire che non si altera l'equazione precedente aggiungendo al suo secondo membro l'espressione

$$\frac{1}{\Gamma}\left(\mathrm{L}\, \frac{d\cdot\Gamma\epsilon_{i}}{dx} + \mathrm{L}\, \frac{d\cdot\Gamma\delta_{i}}{dy} + \mathrm{L}\, \frac{d\cdot\Gamma r_{i}}{dz}\right)$$

Così vedremo risultare

$$(23) \qquad \frac{dL}{da} = \frac{i}{\Gamma} \left(\frac{d \cdot \Gamma L \epsilon_1}{dx} + \frac{d \cdot \Gamma L S_1}{dy} + \frac{d \cdot \Gamma L \epsilon_1}{dz} \right)$$

Chiamate M, N due altre funzioni di a, b, c, come la L, in maniera affatto simile, facendo uso delle altre denominazioni (19) e delle altre due equazioni (22), troveremo

Sommando le equazioni (33), (a4), compenetrando nel secondo membro le derivate relative alla stessa variabile, risostituendo alle \(\ell_i, \gamma_i, \tau_i, \sigma_i\). El derivate equivalenti (equazioni (19)), e adottando per compendio le espressioni (18), si vedrà risultare l'equazione (17) in cui si legge il principio analitico enunciato. 38. Ora, mediante l'uso del principio espresso nelle equazioni (17), (18), vedesi a colpo d'occhio che ponendo

$$P_{i} = \Gamma \left(L_{i}, \frac{dx}{dx} + M_{i}, \frac{dx}{dx} + N_{i}, \frac{dx}{dx} \right)$$

$$P_{i} = \Gamma \left(L_{i}, \frac{dx}{dx} + M_{i}, \frac{dx}{dx} + N_{i}, \frac{dx}{dx} \right)$$

$$P_{i} = \Gamma \left(L_{i}, \frac{dx}{dx} + M_{i}, \frac{dx}{dx} + N_{i}, \frac{dx}{dx} \right)$$

$$Q_{i} = \Gamma \left(L_{i}, \frac{dx}{dx} + M_{i}, \frac{dx}{dx} + N_{i}, \frac{dx}{dx} \right)$$

$$Q_{i} = \Gamma \left(L_{i}, \frac{dx}{dx} + M_{i}, \frac{dx}{dx} + N_{i}, \frac{dx}{dx} \right)$$

$$Q_{i} = \Gamma \left(L_{i}, \frac{dx}{dx} + M_{i}, \frac{dx}{dx} + N_{i}, \frac{dx}{dx} \right)$$

$$Q_{i} = \Gamma \left(L_{i}, \frac{dx}{dx} + M_{i}, \frac{dx}{dx} + N_{i}, \frac{dx}{dx} \right)$$

$$R_{i} = \Gamma \left(L_{i}, \frac{dx}{dx} + M_{i}, \frac{dx}{dx} + N_{i}, \frac{dx}{dx} \right)$$

$$R_{i} = \Gamma \left(L_{i}, \frac{dx}{dx} + M_{i}, \frac{dx}{dx} + N_{i}, \frac{dx}{dx} \right)$$

$$R_{i} = \Gamma \left(L_{i}, \frac{dx}{dx} + M_{i}, \frac{dx}{dx} + N_{i}, \frac{dx}{dx} \right)$$

$$R_{i} = \Gamma \left(L_{i}, \frac{dx}{dx} + M_{i}, \frac{dx}{dx} + N_{i}, \frac{dx}{dx} \right)$$

$$R_{i} = \Gamma \left(L_{i}, \frac{dx}{dx} + M_{i}, \frac{dx}{dx} + N_{i}, \frac{dx}{dx} \right)$$

le equazioni (16) si mutano nelle seguenti

$$\Gamma\left(\mathbf{X} - \frac{d^2x}{dx^2}\right) + \frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dy} + \frac{dP_3}{dz} = 0$$

$$\Gamma\left(\mathbf{Y} - \frac{d^2y}{dx^2}\right) + \frac{dQ_1}{dx} + \frac{dQ_2}{dy} + \frac{dQ_3}{dz} = 0$$

$$\Gamma\left(\mathbf{Z} - \frac{d^2x}{dx^2}\right) + \frac{dR_3}{dx} + \frac{dR_4}{dy} + \frac{dR_3}{dz} = 0$$

le quali sono quelle che si cercavano colle derivate espresse relativamente alle coordinate x, y, z dello stato reale.

Potremo poi avere immediatamente i valori delle nove quantità P₁, P₁, P₂, Q₃, Q₃, Q₃, R₃, R₃, R₃ atti per le sei A, B, C, D, E, F, sostituendo nelle equazioni (a5) alle nove quantità L₁, M₁, N₁; L₃, M₃, N₃; L₃, M₃, N₃; V₃, N₃ i valori somministratici dalle equazioni (i4). Chiaminsi per abbreviare (1), (III), (III), (IV), (VI), (VI), esi quantità di cui scrivo i valori

$$(11) = -aA \left(\frac{dx}{dx}\right)^a - aB \left(\frac{dx}{dx}\right)^a - aC \left(\frac{dx}{dx}\right)^a$$

$$-aD \frac{dx}{dx} \frac{dx}{dx} - aE \frac{dx}{dx} \frac{dx}{dx} - aF \frac{dx}{dx} \frac{dx}{dx}$$

$$(II) = -aA \left(\frac{dx}{dx}\right)^a - aE \left(\frac{dx}{dx}\right)^a - aC \left(\frac{dx}{dx}\right)^a$$

$$-aD \frac{dx}{dx} \frac{dy}{dx} - aE \frac{dy}{dx} \frac{dy}{dx} - aF \frac{dy}{dx} \frac{dy}{dx}$$

$$(III) = -aA \left(\frac{dx}{dx}\right)^a - aE \left(\frac{dx}{dx}\right)^a - aC \left(\frac{dx}{dx}\right)^a$$

$$-aD \frac{dx}{dx} \frac{dx}{dx} - aE \frac{dx}{dx} \frac{dx}{dx} - aF \frac{dx}{dx} \frac{dx}{dx}$$

$$-aD \frac{dx}{dx} \frac{dx}{dx} - aE \frac{dx}{dx} \frac{dx}{dx} - aF \frac{dx}{dx} \frac{dx}{dx}$$

$$-D \left(\frac{dx}{dx} \frac{dx}{dx} + aF \frac{dx}{dx} \frac{dy}{dx} - aF \frac{dx}{dx} \frac{dx}{dx}\right)$$

$$-E \left(\frac{dx}{dx} \frac{dy}{dx} + \frac{dx}{dx} \frac{dy}{dx}\right)$$

$$-E \left(\frac{dx}{dx} \frac{dy}{dx} + \frac{dx}{dx} \frac{dy}{dx}\right)$$

$$-F \left(\frac{dx}{dx} \frac{dx}{dx} + \frac{dx}{dx} \frac{dx}{dx}\right)$$

e le indicate sostituzioni ci porgeranno

$$P_s = \Gamma(I); P_s = \Gamma(IV); P_3 = \Gamma(V)$$

 $Q_s = \Gamma(IV); Q_s = \Gamma(II); Q_s = \Gamma(VI)$

$$R_i = \Gamma(V); R_i = \Gamma(VI); R_i = \Gamma(III)$$

dalle quali ci viene insegnato sussistere fra le nove quantità $P_1,\ P_3,\ P_3,\ Q_4,\ ec.$ le tre relazioni

(29)
$$P_i = Q_i$$
; $P_j = R_i$; $Q_i = R_i$.

Chi confronterà le ottenute equazioni (ab), (a9) coi risultati datici dai moderni geometri (*), troverà che per vie diversissime siamo giunti alle medesime conseguenze. Taluno forse mi obbjetterà che queste equazioni essendo qui dimostrate pel solo caso de 'corpi rigidi, hanno una estensione assai minore di quella loro concessa dai sullodati Geometri francesi. Ad una tal obbjezione risponderà il Capo seguente, ove si vedrà da che parte stal a maggiore generalità.

39. Non tacerò che questa nostra analisi supponendo in numero di sei le equazioni di condizione fra le coordinate x, x, z del punto generico, non sembra accordarsi con quel passo della Meccanica Analitica (T. I. pag. 86) ove si restringe in generale a tre il numero di si fatte equazioni. Io tengo per fermo però che Lagrange in quel luogo non chbe di mira il caso nel quale le equazioni di condizione sono alle derivate parziali per variabili. di cui le x, y, z si considerino funzioni potendo allora benissimo dette equazioni essere più di tree, senza che le ultime siano conseguenze necessario delle tre prime. L'ufficio delle ultime è in tal caso di determinare le funzioni arbitrarie introdotte dall' integrazione delle prime, di far cioe cosa a cui le prime non bastano; e perciò quelle non possono essere mere combinazioni di queste. Ammesso ciò, non e nemmeno

^(*) Canchy. Exercices de Mathématiques. T. II. pag. 111; Tom. III. pag. 166.
Poisson. Mémoires de l'Institut de France. T. VIII. pag. 387; T. X. p. 578.
Journal de l'Ecole Polyt. Cahier XX. pag. 54, ec.

più in tal caso applicabile il corollario che si abbiano sempre tante equazioni quante ne abbisognano per determinare i valori delle coordinate generiche x, y, z, e di tutti i coefficienti indeterminati introdotti secondo il metodo. Del resto tengo poi in serbo una risposta atta a guadagnarmi il suffragio anche di chi credesse sussistere sempre senza alcuna eccezione l'addotta sentenza del nostro Autore. Se nell'impianto di un problema meccanico secondo i metodi del nostro testo, si ommettono alcune delle essenziali equazioni di condizione, non si esprimono tutti i dati della questione, e si viene a conseguenze erronee. Non è di eguale importanza il guardarsi dall'usare qualche equazione di condizione di più del bisogno, la quale sia conseguenza di altre parimenti adoperate. Lagrange ha provato per via d'esempj (M. A. T. I. pag. 135 e altrove) che in tal caso nella pratica del metodo (il quale è poi quello che si segue anche nel calcolo delle variazioni) non ne risulta errore a motivo del compenetrarsi che fanno, pel giuoco de' coefficienti indeterminati i termini superflui cogli altri esistenti in forza delle equazioni necessarie. Ciò intendasi detto unicamente a sempre maggior guarentigia della verità delle precedenti deduzioni: la mia opinione è che nel caso attuale tutte e sei le equazioni di condizione dovevano essere contemplate.

4e. Aggiungero per ragioni che il lettore comprendera da se stesso fra poco, una maniera di dimostrare speditamente tre formole note e di grande effetto pella trattazione del moto di un corpo solido per quella parte che il Signor Giorgini (nella Memoria più sopra citata) chiama geometrica sull'esempio di alcuni illustri francesi. Derivando pel tempo le equazioni (1) numº, 33, abbiamo, giusta l'adottata massima di scrivere cogli

apici le derivate totali prese riguardo al tempo;

(3o)
$$\begin{aligned} u &= f^* + \alpha', p + \beta', q + \gamma', r \\ v &= g' + \alpha', p + \beta', q + \gamma', r \\ w &= h' + \alpha', p + \beta', q + \gamma', r \end{aligned}$$

Dalle stesse equazioni (1) moltiplicate rispettivamente e successivamente prima per α_1 , α_2 , α_3 , poi per β_1 , β_4 , β_5 , da ultimo per γ_1 , γ_2 , γ_3 e ogni volta sommate, si ottengono in virtù delle (3) le equazioni inverse che sono

$$p = a_{\tau}(x-f) + a_{\tau}(y-g) + a_{\tau}(z-h)$$

$$q = \beta_{\tau}(x-f) + \beta_{\tau}(y-g) + \beta_{\tau}(z-h)$$

$$r = \gamma_{\tau}(x-f) + \gamma_{\tau}(y-g) + \gamma_{\tau}(z-h).$$

Poniamo questi valori di p, q, r nelle precedenti (3c) ed otterremo

$$u = f' + (a_{\alpha}a'_{\alpha} + \beta_{\beta}\beta'_{\alpha} + \gamma_{\gamma}\gamma'_{\gamma})(x-f)$$

$$+ (a_{\alpha}a'_{\alpha} + \beta_{\beta}\beta'_{\alpha} + \gamma_{\gamma}\gamma'_{\gamma})(y-g)$$

$$+ (a_{\alpha}a'_{\alpha} + \beta_{\beta}\beta'_{\gamma} + \gamma_{\gamma}\gamma'_{\gamma})(z-h)$$

$$v = g' + (a_{\gamma}a'_{\alpha} + \beta_{\beta}\beta'_{\gamma} + \gamma_{\gamma}\gamma'_{\gamma})(x-f)$$

$$+ (a_{\gamma}a'_{\alpha} + \beta_{\beta}\beta'_{\gamma} + \gamma_{\gamma}\gamma'_{\gamma})(y-g)$$

$$+ (a_{\gamma}a'_{\alpha} + \beta_{\beta}\beta'_{\gamma} + \gamma_{\gamma}\gamma'_{\gamma})(x-f)$$

$$w = h' + (a_{\gamma}a'_{\gamma} + \beta_{\beta}\beta'_{\gamma} + \gamma_{\gamma}\gamma'_{\gamma})(x-f)$$

$$+ (a_{\gamma}a'_{\gamma} + \beta_{\beta}\beta'_{\gamma} + \gamma_{\gamma}\gamma'_{\gamma})(y-g)$$

$$+ (a_{\beta}a'_{\gamma} + \beta_{\beta}\beta'_{\gamma} + \gamma_{\gamma}\gamma'_{\gamma})(x-f)$$

Queste equazioni ci danno a dirittura le tre velocità u, v, w espresse per le coordinate x, y, z e per quantità funzioni del solo tempo che non cambiano passando da un punto all'altro del corpo. Volendo ridurle alle forme conosciute, poniamo per abbreviazione

(33)
$$c_1 = a_1 a_2' + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2'$$

$$c_2 = a_2 a_2' + \beta_2 \beta_2 + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_3 = a_1 a_2' + \beta_1 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_4 = a_1 a_2' + \beta_1 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_5 = a_1 a_2' + \beta_1 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_6 = a_1 a_2' + \beta_1 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_7 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_1 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

$$c_8 = a_1 a_2' + \beta_2 \beta_2' + \gamma_2 \gamma_2'$$

Derivando ora per t le equazioni (4) numº. 33, otterremo

$$a_1 a'_1 + \beta_1 \beta'_1 + \gamma_1 \gamma'_1 = 0$$

$$a_2 a'_2 + \beta_2 \beta'_3 + \gamma_2 \gamma'_3 = 0$$

$$a_3 a'_3 + \beta_3 \beta'_3 + \gamma_3 \gamma'_3 = 0$$

(34)
$$a_{\alpha}a'_{\beta} + \beta_{\alpha}\beta'_{\beta} + \gamma_{\alpha}\gamma'_{\beta} = -c_{\beta}$$

$$a_{\alpha}a'_{\beta} + \beta_{\beta}\beta'_{\beta} + \gamma_{\beta}\gamma'_{\beta} = -c_{\beta}$$

$$a_{\beta}a'_{\alpha} + \beta_{\beta}\beta'_{\beta} + \gamma_{\beta}\gamma'_{\beta} = -c_{\beta}$$

Col mezzo di queste ultime nove equazioni le (32) si riducono a colpo d'occhio

(35)
$$u = f' + c_1(z-h) - c_3(y-g)$$

$$v = g' + c_3(x-f) - c_1(z-h)$$

$$w = h' + c_1(y-g) - c_2(x-f)$$

e diverrebbero ancora assai più semplici se le f, g, h fossero zero, cioè se il punto d'origine delle x, y, z fosse un punto fisso del corpo intorno a cui esso potesse volgersi liberamenite. Sogliono i meccanici chiamare le c, c, c, c, velocità angolari intorno agli assi delle x, y, z: importa ritenere (come si fa manifesto pei valori (33)) che queste velocità angolari non dipendono dalle coordinate dei diversi punti del corpo per rapporto agli assi mobili con esso.

41. Le equazioni (35) che danno le tre velocità del punto generico cognite per quanto spetta alla loro composizione in x, y, z, e soltanto incognite per rapporto a funzioni del solo tempo, sono poi quelle che combinate colle equazioni meccaniche porgono l'intera soluzione del problema. Ognun vede però quanto la soluzione anzidetta sia avanzata in virtà delle sole equazioni (35) indipendenti da qualunque principio meccanico, e come le equazioni meccaniche non facciano che portarvi un compimento, il quale viene facilitato dall'uso di altre nove eleganti equazioni che si trovano (oltre le equazioni di posizione (33)) fra le velocità angolari c, c, c, c, e, e i nove coseni a, s, y, y, z, e. e. Non è min intenzione ritessere qui una tale

trattazione del moto di un corpo solido, già condotta a fine da insigni autori. Il lettore conosce lo scopo ch'i o mi sono proposto. Soltanto, vedendole in qualche relazione collo scopo medesimo, soggiungerò tre equazioni che si deducono dalle (3) derivandole ancora pel tempo, e sostituendo alle x, v, w che si generano durante l'operazione, gli stessi valori (35). Dopo varie riduzioni che si presentano senza difficolta; si giunge alle tre

$$u' = f'' - (c_a^* + c_a^*)(x - f) - (c_a' - c_a c_a)(y - g) + (c_a' + c_a c_a)(z - h)$$

(36)
$$v' = g'' + (c'_s + c_s c_s)(x - f') - (c^*, + c^*)(y - g) - (c'_s - c_s c_s)(z - h)$$

 $w' = h'' - (c'_s - c_s c_s)(x - f) + (c'_s + c_s c_s)(y - g) - (c^*, + c^*)(z - h).$

Siccome le u', v', w' equivalgono rispettivamente alle

^{dys.} ^{dys.} ^{dys.} ^{dys.} i trovati valori potramo sostituirsi nelle equazioni meccaniche (aó), e così (richiamate anche le (ao)) contribuire alla determinazione delle quantità P, P, P, Q, co. Conviene però che il lettore attenda quanto siamo per dire in generale nel Capo seguente intorno a quantità che tengono il posto delle nove anzidette.

43. Terminerò il Capo attuale col mostrare che lo stesso andamento tentto qui sopra al num". 4c. vale all'oggetto di trovare il valore delle variazioni $\partial x, \partial y, \partial z$ attribuibili alle coordinate x, y, z di ciascun punto del corpo in forza di una circostanza particolare degnissima di osservazione e che produce notabili effetti, come vedremo nel Capo seguente. Qualunque sia il sistema, invariable o variabile, no ne 'è in generale una ragione per cui, avendone riferito il moto a tre assi ortogonali presi a piacere, non potessimo riferirlo anche a tre altri assi ortogonali comunque posti nello spazio rimpetto ai primi. Supponiamo di aver fatto il primo riferimento, e che allora le coordinate del punto generico fossero p, q, r o (tanzioni poi queste di a, b, c, t secondo le idee del Capo primo); facendo il secondo riferimento, le coordinate, che denomineremo x, y, z, p possono esserdate per le p, q, r mediante le equazioni (1) num". 33. Suppo-

Tomo XXIV. P. te I.

niamo di più che le anzidette coordinate x_2, y_z prendano amenti indeterminati ∂x_i ∂y_i ∂z (i e il coefficiente indeterminato che si Tiduce piecolo quanto si vuole secondo lo spirito del calcolo delle variazioni) in conseguenza di uno spostarsi arbitrario dei secondi assi rispetto ai primi, il che torna lo stesso che dire, ammettendo che crescano degli aumenti indeterminati ∂f_i $\partial d z_i$ e cutte le dodici quantità f_i g, h, a_i , e c. delle equazioni (1), tra le quali regnano le sei equizioni di condizione (3) ovvero (4) num². 33. Possiamo cercare i valori delle variazioni ∂x_i , ∂y_i ∂z_i per un sistema qualunque in maniera analoga a quella con cui cercammo i valori delle velocità u, v, w per un corpo solido. Pertanto invece delle (8) o avremo le tre

$$\begin{split} \delta x &= \delta f + \delta a_i p + \delta \beta_i q + \delta \gamma_i r \\ \delta y &= \delta g + \delta a_s p + \delta \beta_s q + \delta \gamma_s r \\ \delta z &= \delta h + \delta a_s p + \delta \beta_s q + \delta \gamma_s r \end{split}$$

le quali, dopo avervi sostituiti i valori di p, q, r datici dalle (31) ci diventeranno, in corrispondenza colle (32),

$$\begin{split} \delta x &= \delta f + (a, \partial a_i + \beta, \partial \beta_i + \gamma, \delta \gamma_i) (x - f) \\ &+ (a_k \partial a_i + \beta_k \partial \beta_i + \gamma_k \delta \gamma_i) (y - g) \\ &+ (a_k \partial a_i + \beta_k \partial \beta_i + \gamma_k \delta \gamma_i) (y - g) \\ &+ (a_k \partial a_i + \beta_k \partial \beta_i + \gamma_i \delta \gamma_i) (z - h) \\ \delta y &= \delta g + (a_k \partial a_k + \beta_k \partial \beta_k + \gamma, \delta \gamma_i) (y - g) \\ &+ (a_k \partial a_k + \beta_k \partial \beta_k + \gamma, \delta \gamma_i) (y - g) \\ &+ (a_k \partial a_k + \beta_k \partial \beta_k + \gamma, \delta \gamma_i) (z - h) \\ \delta z &= \delta h + (a_k \partial a_k + \beta_k \partial \beta_k + \gamma, \delta \gamma_i) (y - g) \\ &+ (a_k \partial a_k + \beta_k \partial \beta_i + \gamma, \delta \gamma_i) (z - h) \\ &+ (a_k \partial a_k + \beta_k \partial \beta_i + \gamma, \delta \gamma_i) (z - h) \end{split}$$

Poscia in riscontro delle (33) stabiliremo le denominazioni

$$\varsigma_1 = a_a \delta a_b + \beta_a \delta \beta_b + \gamma_a \delta \gamma_b$$

 $\varsigma_a = a_b \delta a_t + \beta_b \delta \beta_t + \gamma_b \delta \gamma_t$
 $\varsigma_b = a_b \delta a_b + \beta_b \delta \beta_b + \gamma_b \delta \gamma_b$

In appresso le variate delle equazioni (4) ci daranno

$$a, \delta a, + \beta, \delta \beta, + \gamma, \delta \gamma, = 0$$

 $a, \delta a, + \beta, \delta \beta, + \gamma, \delta \gamma, = 0$
 $a, \delta a, + \beta, \delta \beta, + \gamma, \delta \gamma, = 0$
 $a, \delta a, + \beta, \delta \beta, + \gamma, \delta \gamma, = -\varsigma,$
 $a, \delta a, + \beta, \delta \beta, + \gamma, \delta \gamma, = -\varsigma,$
 $a, \delta a, + \beta, \delta \beta, + \gamma, \delta \gamma, = -\varsigma,$
 $a, \delta a, + \beta, \delta \beta, + \gamma, \delta \gamma, = -\varsigma,$

Ora in virtù di queste ultime nove equazioni, adottando anche di mettere

(38)
$$o_z = \delta f - \varsigma_z h + \varsigma_s g$$
; $o_z = \delta g - \varsigma_s f + \varsigma_t h$; $o_z = \delta h - \varsigma_t g + \varsigma_s f$ le precedenti (37) si muteranno nelle

$$\begin{aligned}
\partial x &= a, + \varsigma, z - \varsigma, y \\
\partial y &= a, + \varsigma, x - \varsigma, z \\
\partial z &= a, + \varsigma, y - \varsigma, x
\end{aligned}$$

che sono quelle che ci cravamo proposto di trovare, e che ci verranno utili nel Capo seguente. Si osservi sui valori delle sei quantità α_1 , α_2 , α_3 , α_5 , ζ_5 , ζ_5 , ch' esse non dipendono dalle coordinate variabili del sistema, ma solo dalle dodici quantità seprimenti l'arbitrio della posizione dei secondi assi rispetto ai primi. Siccome poi fra tali dodici quantità sei rimangono assolutamente arbitrarie, potremo ritenere arbitrarie e indipendenti fra loro le stesse sei α_1 , α_4 , α_5 , $\alpha_$

CAPO IV.

Del moto e dell'equilibrio di un corpo qualunque.

43. Dico qualunque quel corpo che può mutare di forma, cangiandosi per effetto di moti intestini le posizioni relative delle sue molecole. Lagrange trattò nella sua M. A. varie questioni che si riferivano a sistemi variabili di simil natura: trattò dell' equilibrio di fili e di superficie estensibili e contrattili, trattò dell'equilibrio e del moto de'liquidi e de'fluidi elastici. A tal fine egli adottò un principio generale (S. q. della Sez. IIa, e 6. della IVa), mediante il quale l'espressione analitica dell' effetto di forze interne attive riesce affatto analoga a quella che risulta per le forze passive quando si hanno equazioni di condizione: il che si ottiene assumendo dei coefficienti indeterminati e moltiplicando con essi le variate di quelle stesse funzioni che rimangono costanti per corpi rigidi, o inestensibili, o liquidi. Se ci conformassimo ad un tal metodo, potremmo a dirittura generalizzare i risultamenti ai quali siamo giunti nel capitolo precedente: io però preferisco di astenermene, giacchè la mia ammirazione pel grande Geometra non m' impedisce di riconoscere come in quel principio rimanga tuttavia alcun che di oscuro e di non dimostrato. Cerchiamo quindi di conseguire lo stesso intento altrimenti, anche a motivo dell' impegno in cui siamo entrati di voler dedurre tutte le equazioni meccaniche per qualunque corpo dall'equazione generalissima (1) numº, 16. spettante ai sistemi discreti. E qui ci si presentano due vie. La prima di rinvenire, anche pel caso di corpi qualunque, estensibili, elastici, fluidi, equazioni di condizione che ne esprimano la natura, in quella guisa che le equazioni (8) del numº. 34. esprimevano quella de' corpi rigidi, e quindi trattare ogni sorta di forze interne al modo delle passive, ossia mediante la terza parte della anzidetta equazione generale (1) numº. 16. L'altra strada che potrebbe seguirsi sarebbe di studiare i termini introdotti dalle forze interne attive usando della seconda parte della mentovata equazione generale. Mi attemi a quest'ultima nella Memoria, inserita, nel Tomo XXI dei volumi Sociali, ed ora farò vedere nel Capitolo VI, che un tale andamento si può di molto abbreviare, rendendolo insieme più sicuro. Per le ragioni poi addotte nel preambolo dell'attuale Memoria credo più filosofico il primo dei descritti andamenti, il quale però presenta alcune non lievi difficoltà.

Queste difficoltà vengono dal dover trovare in generale equazioni di condizione per esprimere i legami interni fra le molecole dei corpi, di qualunque natura essi siano. Dopo lunghe ricerche credo di aver ottenuto l'intento mercè le seguenti considerazioni. Vi ha nella Meccanica un fatto che ben merita l'attenzione del geometra, ed è che le stesse sei equazioni le quali sussistono per l'equilibrio e pel moto di un corpo solido libero (cioè non avente punti fissi od obbligati a stare sopra linee o superficie determinate) (M. A. Tom. I. pag. 170.) si estendono altresì ai corpi liberi non solidi (M. A. T. I. p. 257. e seguenti), essendo quelle che contengono i due principi generali della conservazione del moto del centro di gravità, e della conservazione delle aree. Io avea bisogno di una generalizzazione simile per estendere le equazioni (26), (29) del Capo precedente, dimostrate pei corpi solidi, anche ad altri corpi qualsivogliono. Mi posi quindi ad analizzare sottilmente il metodo per mezzo del quale si arriva alle equazioni generali contenenti i detti due principi, ed a cercare la ragione per cui in tal caso quello che vale pei corpi solidi, vale anche pei non solidi. Ora credo di non poter far meglio che dimostrare al lettore essere le medesime le considerazioni che conducono all' anzidetto risultamento già ammesso dai geometri, e all'altro ch' io ho di mira.

44. Supponiamo di essere giunti a trovare le accemante equazioni di condizione generali che esprimano la natura del corpo, qualunque esso sia, e che valgano per ogni punto del medesimo; si capisce che invece dell'equazione (10) numº. 35. particolare pei corpi rigidi avremo

(1)
$$\int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \dots \right\} + \int da \int db \int dc \cdot G + Q = 0$$

indicando con G il complesso dei termini introdotti dalle equazioni di condizione che non conosciamo, e che nel luogo citato era significato dal sestinomio

$$A\delta t_1 + B\delta t_2 + C\delta t_3 + D\delta t_4 + E\delta t_5 + F\delta t_6$$

Ma queste equazioni di condizione che non conosciamo, possono risultarci note cambiando le variabili a cui si riferiscono gli integrali alla maniera che son per dire.

Non immaginismo le x, y, z finzioni immediatamente delle a, b, c, t, ma prima funzioni di tre altre p, q, x a motivo di un riferimento successivo del corpo a due diverse terne di assi ortogonali, come sopra si è insimato al num". 4a. L'artificio che ottiene l'intento sta nell'usare di queste coordinate intermedie p, q, r, e de eseguire in due volte la trasformazione degli integrali. La prima volta invoce di trasformazione depresi per a, b, c in altri presi per x, y, z (come al num". 1c, Capo 1". 1, il trasformeremo in integrali presi per p, q, r e passeremo poscia dalle p, q, r alle x, y, z.

45. A tal fine ci conviene premettere un principio analitico che nel caso attuale ed anche in altri apre l'adito a serie ed utili speculazioni intorno ai diversi gradi di composizione nei quali è duopo considerare le quantità per ottener ciò che

altrimenti non si potrebbe.

Se le x, y, z si riguardano funzioni di a, b, c in quanto sono prima funzioni delle p, q, r le quali sono poi funzioni con sono prima funzioni delle a, b, c, il sestinomio H (equazione (4) num. 9. Capo t^*) composto colle derivate delle x, y, z press immediatamente per le a, b, c is saltata la considerazione intermedia delle p, q, r e guaglia il produtto di due simili sestinomi H_1, H_2, H_3 il prime dei quali è fatto colle x, y, z derivate per le p, q, r, c e il secondo colle p, q, r derivate per le a, b, c: abbiamo colle p, q, r derivate per le a, b, c: abbiamo colle p, q, r derivate per le a, b, c:

condesimos se capisco obre
$${}_{a}H_{a}H_{b}=H$$
 quarione (a) nume. (a)

essendo

(3)
$$H_{\tau} = \frac{dx}{dp} \frac{dy}{dq} \frac{dz}{dr} - \frac{dx}{dq} \frac{dy}{dp} \frac{dz}{dr} - \frac{dx}{dq} \frac{dy}{dp} \frac{dz}{dr}$$

$$+ \frac{dx}{dq} \frac{dy}{dr} \frac{dz}{dr} - \frac{dz}{dr} \frac{dy}{dq} \frac{dz}{dr}$$

$$+ \frac{dx}{dr} \frac{dy}{dq} \frac{dz}{dr} - \frac{dz}{dr} \frac{dy}{dq} \frac{dz}{dr}$$

$$+ \frac{dz}{dr} \frac{dy}{dq} \frac{dz}{dr} - \frac{dz}{dr} \frac{dy}{dr} \frac{dz}{dr}$$

(4)
$$H_* = \frac{dp}{da} \frac{dq}{db} \frac{dr}{dc} - \frac{dp}{db} \frac{dq}{da} \frac{dr}{db} + \frac{dp}{da} \frac{dq}{db} \frac{dr}{da} + \frac{dp}{db} \frac{dq}{da} \frac{dr}{db} + \frac{dq}{db} \frac{dq}{db} \frac{dr}{da} + \frac{dp}{dc} \frac{dq}{dc} \frac{dr}{dc} + \frac{dq}{dc} \frac{dr}{dc} \frac{dr}{dc} + \frac{dq}{dc} \frac{dr}{dc} \frac{dr}{$$

La dimostrazione del principio esposto si conseguisce sostituendo nell'espressione del sestinomio H i valori desunti da nove equazioni, delle quali le prime tre sono

$$\frac{ds}{da} = \frac{dx}{dp} \frac{dp}{da} + \frac{dx}{dq} \frac{dq}{da} + \frac{dx}{dr} \frac{dr}{da}$$
(5)
$$\frac{dy}{da} = \frac{dy}{dp} \frac{dp}{da} + \frac{dy}{dq} \frac{dq}{da} + \frac{dy}{dr} \frac{dr}{da}$$

$$\frac{dz}{da} = \frac{dz}{dp} \frac{dp}{da} + \frac{dz}{dr} \frac{dq}{da} + \frac{dz}{dr} \frac{dr}{da}$$

e poi seguono altre tre colle derivate per b, ed altre tre colle derivate per c, ad ottener le quali basta cambiare nelle precedenti (5) prima la lettera a colla b; poi la stessa a colla c. Siccome però le operazioni sono prolisse, descriverò un andamento buono a tenersi per non deviare in lungaggini le quali potrebbero togliere la lena di arrivare fino alla fine.

Primieramente si osserva che il valore di H datoci dalla equazione (4) numº, 9., può scriversi senza alterazione

(6)
$$\mathbf{H} = \frac{dz}{dz} \left(\frac{dz}{dz} \frac{dz}{dz} - \frac{dz}{dz} \frac{dz}{dz} \right) + \frac{dz}{dz} \left(\frac{dz}{dz} \frac{dz}{dz} - \frac{dz}{dz} \frac{dz}{dz} \right) + \frac{dz}{dz} \left(\frac{dz}{dz} \frac{dz}{dz} - \frac{dz}{dz} \frac{dz}{dz} \right) + \frac{dz}{dz} \left(\frac{dz}{dz} \frac{dz}{dz} - \frac{dz}{dz} \frac{dz}{dz} \right).$$

Ora mediante le equazioni (5) e le sei seguenti ommesse per brevità, ma che il lettore farà bene a costruirsi secondo l'indicazione, convien trovare i valori dei tre binomj

(7)
$$\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}; \quad \frac{dx}{dc}\frac{dy}{da} - \frac{dx}{da}\frac{dy}{dc}; \quad \frac{dx}{db}\frac{dy}{dc} - \frac{dx}{dc}\frac{dy}{db}.$$

Basterà però cercare colla materiale sostituzione soltanto il primo, e/così ottenere mercè riduzioni che si presentano da se stesse

il valore del binomio successivo si avrà dal precedente mettendo e per b nei secondi fattori e cambiando loro i segni: e parimenti si dedurrà il valore del terzo de' binomi (7) ponendo e per a nell'ultima equazione (8) e cambiando i segni ai due membri.

Avendo così sott'occhio queste tre equazioni (quanto alla seconda ed alla terza il lettore se le scriva), si passi a moltiplicarle rispettivamente per le tre seguenti

(9)
$$\frac{dz}{dz} = \frac{dz}{dp} \frac{dp}{dc} + \frac{dz}{dq} \frac{dq}{dc} + \frac{dz}{dc} \frac{dr}{dc}$$

$$\frac{dz}{dz} = \frac{dz}{dp} \frac{dp}{dc} + \frac{dz}{dq} \frac{dr}{dc} + \frac{dz}{dz} \frac{dr}{dc}$$

$$\frac{dz}{dz} = \frac{dz}{dp} \frac{dp}{dc} + \frac{dz}{dc} \frac{dq}{dc} + \frac{dz}{dc} \frac{dz}{dc}$$

$$\frac{dz}{dz} = \frac{dz}{dc} \frac{dz}{dc} + \frac{dz}{dc} \frac{dz}{dc} + \frac{dz}{dc} \frac{dz}{dc}$$

e poscia sommarle: vedremo prodursi per tal modo nel primo membro il valore di H quale è scritto nella antecedente (6). La moltiplicazione dei secondi membri facciasi in tre volte,

La moltiplicazione dei secondi membri facciasi in tre volte, cioè primieramente come se nelle equazioni (9) non vi fossero che i primi termini dei trinomj: si trovera che i coefficienti totali dei termini

$$\frac{dz}{dp}\left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq}-\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp}\right);\quad \frac{dz}{dp}\left(\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dp}-\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dr}\right)$$

si ridacono, identicamente zero, e che quello del termine $\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)$ equivale al sestinomio H., Progredendo nella moltiplicazione, facciasi come se le equazioni (9) avessero nei secondi membri i soli secondi termini dei trinomi: troveremo anche qui che due coefficienti totali riescono zero, e che in quello del termine $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\right)$ ritorna il sestinomio H., Finalmente l'operare cogli ultimi termini delle equazioni (9) ci mostrerà nulli due altri coefficienti totali, ed eguale al sestinomio H., il coefficiente totale di $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\right)$. Dopo ciò raccogliendo i tre fattori di H., nei tre termini rimasti, si vedrà che la loro somma riproduce il sestinomio H. (equazione (3)). e che per tal guisa resta dimenstrata l'equazione (2).

Il principio analitico espresso nella equazione (2) può essere generalizzato. Se le x, y, z si considerassero funzioni di a, b, c, in quanto prima lo fossero delle ξ, η, ζ, le quali fossero funzioni delle p, q, r, che da ultimo lo fossero delle a, b, c; il sestinomio fatto delle x, y, z colle derivate prese direttamente per a, b, c, si proverebbe eguale al prodotto di tre simili sestinomi, dei quali il primo tra le x, y, z colle derivate per ξ, η, ζ, il secondo tra le ξ, η, ζ colle derivate per p, q, r, e il terzo tra le p, q, r colle derivate per a, b, c. Basta per la dimostrazione sopprimere da prima la considerazione delle ξ, η, ζ servendosi della equazione (2), poi in virtù della stessa equazione mostrare che al sestinomio H, può sostituirsi il prodotto di quello tra le x, y, z colle derivate per ξ, η, ζ, e di quello tra le ξ, η, ζ colle derivate per p, q, r. Così si progredirebbe se si volesse immaginare un più inoltrato comprendimento di funzioni entro funzioni. Questo principio ci fa conoscere la possibilità di considerare le coordinate x, y, z come quantità

Tomo XXIV. P.™ I.

fatte di altre, e queste di altre, e via via, spingendo innami a piacere il grado di composizione. E sta qui, se io non fallo, il mezzo per isciogliere il nodo della questione. Havyi tal grado di composizione delle dette quantità nel quale riescono ricon-cibili quelle equazioni di condizione, che più non lo sono in tal altro: conviene coglierle dove sono e adattarvi le rimanenti quantità: ciò abbiamo già accennato superiormente, e si farà più manifesto per quel che segue.

46. Premetteremo che nel caso in cui tra le x, y, z e le

p, q, r sianvi le equazioni (1) numº, 33, abbiamo o imp edone

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dp} &= a, ; \quad \frac{dx}{dq} &= \beta, ; \quad \frac{dx}{dr} &= \gamma, & \text{mans fab ellows} \\ \frac{dy}{dp} &= a, ; \quad \frac{dy}{dq} &= \beta, ; \quad \frac{dy}{dr} &= \gamma, & \text{mans fact (a)} \\ \frac{dy}{dp} &= a_2; \quad \frac{dx}{dq} &= \beta_3; \quad \frac{dx}{dr} &= \gamma_2 & \text{mans fact (a)} \\ \end{aligned}$$

e che quindi il sestinomio H₁ (equazione (3)) diventa tale che può scriversi

$$\alpha_1(\beta_*\gamma_3-\gamma_*\beta_3)+\beta_1(\gamma_*\alpha_3-\alpha_*\gamma_3)+\gamma_1(\alpha_*\beta_3-\beta_*\alpha_3),$$

la quale espressione a motivo di tre fra le nove equazioni (5) del num°. 33. si può mutare in quella del trinomio $a^*, +\beta^*, +\gamma^*$, che è equivalente all'unità per la prima delle (4) num°. 33.

Pertanto l'equazione (2) ci dà nel caso attuale H = H₂, e l'equazione (6) num°, 9, del Capo 1° ci fornisce

$$(11)$$
 $H_{a}\Gamma = 1$.

In vista di quest' ultima possiamo scrivere senza alterazione l'equazione generale (1) del presente Capo al modo che segue

e adesso, osservato il valore di H, (equazione (4)) e rammentato il teorema per la trasformazione degli integrali triplicati di cui abbiamo fatto cenno più volte (per es. al num^o. 1c. del Gapo 1°.), potremo nella precedente (12) passare dagli integrali per a,b,c a quelli per p,q,r, cambiandola colla seguente

(13)
$$fdp fdq fdr.\Gamma \left\{ \left(X - \frac{d^4x}{dt^2} \right) \delta x + \dots \right. \right\}$$

$$+ fdp fdq fdr.\Gamma G + \Omega = 0$$

dove bisogna intendere che anche per entro alle espressioni indicate colle lettere Γ , G, Ω sia eliminata ogni traccia delle a_a,b_c , costituendo mentalmente a queste i loro valori in p,q_{sr} per effetto delle equazioni inverse indicate al num^o. 9, del Capo i^* , o segnate (8); fatta riflessione che nel caso attuale le p,a_{sr} tengono il luogo colà tenuto dalle x_s,y_s .

47. Nella teste scritta equazione generale (13), la seconda di condizione, non più tra le x,y,z e le a,b,c, ma tra le x,y,z e le p,q,r. Ma quest'ultime equazioni ci sono note, giacchè in vista delle precedenti (10) e delle quazioni (3) num. 33,

abbiamo

abbiamo
$$\left(\frac{dx}{dp}\right)^{a} + \left(\frac{dx}{dp}\right)^{a} + \left(\frac{dx}{dp}\right)^{a} = 1$$
 $\left(\frac{dx}{dp}\right)^{a} + \left(\frac{dx}{dp}\right)^{a} + \left(\frac{dx}{dp}\right)^{a} = 1$
 $\left(\frac{dx}{dp}\right)^{a} + \left(\frac{dx}{dp}\right)^{a} + \left(\frac{dx}{dp}\right)^{a} = 1$
 $\left(\frac{dx}{dp}\right)^{a} + \left(\frac{dx}{dp}\right)^{a} + \left(\frac{dx}{dp}\right)^{a} = 1$
 $\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dp} + \frac{dy}{dp}\frac{dy}{dq} + \frac{dy}{dp}\frac{dy}{dq} = 0$
 $\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dx} + \frac{dy}{dp}\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dp}\frac{dx}{dx} = 0$
 $\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dx} + \frac{dy}{dp}\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dp}\frac{dx}{dx} = 0$
 $\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dx} + \frac{dy}{dp}\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dp}\frac{dx}{dx} = 0$

equazioni a derivate parziali che non contenendo le dodici quantità f, g, h, a,, ec., sono più generali delle loro integrali (le (1) del num°. 33.), come si disse in un caso analogo al num". 34.: appartengono a tutti i possibili sistemi di assi da prendersi per le s_i , s_i , c_i de seprimono veramente l'arbitrio in cui siamo nel collocarli relativamente ai primi delle p_i , q_i , r_i . Si può sempre più ribadire la stessa massima con altre parole dicendo che nelle equazioni (i) del num". 33. è lecito supporre che le dodici quantità f_i , g_i , g_i , g_i , q_i , ec. mutino di valore quante volte ci aggrada, ma che tutti i differenti valori delle s_i , y_i , s_i originati da tali cambiamenti debbono sempre soddisfare alle medesime (t.4).

Assumeremo pertanto le (14) come le equazioni di condizione da usarsi per formare la seconda parte dell' equazione generale (13), e circa l'essere in un numero che pare soverchio, ci riporteremo alle osservazioni fatte più sopra al num' 39, Quella seconda parte presenterà così sotto il segno d'integrale triplicato una espressione analoga alla (11) del Gapo precedente, cioè

$$2 A \left(\frac{dp}{dp} \frac{d\beta x}{dp} + \frac{dy}{dp} \frac{d\beta y}{dp} + \frac{dz}{dp} \frac{d\beta y}{dp} \right)$$

$$+ 2 B \left(\frac{dx}{dp} \frac{d\beta x}{dp} + \frac{dy}{dp} \frac{d\beta y}{dp} + \frac{dz}{dp} \frac{d\beta z}{dp} \right)$$

$$+ 2 C \left(\frac{dz}{dr} \frac{d\beta x}{dr} + \frac{dy}{dr} \frac{d\beta y}{dp} + \frac{dz}{dp} \frac{d\beta z}{dr} \right)$$

$$+ D \left(\frac{dz}{dp} \frac{d\beta x}{dr} + \frac{dy}{dp} \frac{d\beta y}{dp} + \frac{dz}{dp} \frac{d\beta z}{dp} \right)$$

$$+ D \left(\frac{dz}{dp} \frac{d\beta x}{dp} + \frac{dy}{dp} \frac{d\beta y}{dp} + \frac{dz}{dp} \frac{d\beta z}{dp} \right)$$

$$+ E \left(\frac{dx}{dp} \frac{d\beta x}{dr} + \frac{dy}{dp} \frac{d\beta y}{dr} + \frac{dz}{dp} \frac{d\beta z}{dp} \right)$$

$$+ E \left(\frac{dx}{dp} \frac{d\beta x}{dr} + \frac{dy}{dp} \frac{d\beta y}{dr} + \frac{dz}{dp} \frac{d\beta z}{dr} \right)$$

$$+ F \left(\frac{dz}{dp} \frac{d\beta x}{dr} + \frac{dy}{dp} \frac{d\beta y}{dr} + \frac{dz}{dp} \frac{d\beta z}{dr} \right)$$

$$+ E \left(\frac{dz}{dp} \frac{d\beta x}{dr} + \frac{dy}{dp} \frac{d\beta y}{dr} + \frac{dz}{dr} \frac{d\beta z}{dp} \right)$$

$$+ \frac{dz}{dr} \frac{d\beta z}{dp} + \frac{dy}{dr} \frac{d\beta y}{dp} + \frac{dz}{dr} \frac{d\beta z}{dr} + \frac{dz}{dr} \frac{d\beta z}{dr} \right)$$

$$+ \frac{dz}{dr} \frac{d\beta z}{dp} + \frac{dy}{dr} \frac{d\beta y}{dr} + \frac{dz}{dr} \frac{d\beta z}{dr} \right)$$

avendo preso, secondo il metodo, sei coefficienti indeterminati A, B, C, D, E, F, 6 moltiplicato con essi le variata delle equazioni (r4), intendendovi compenetrato (appunto perchè sono arbitrari) il fattore l'visibile nella seconda parte della (r3). Per quest' ultima ragione ed anche per attre che lo studioso potrà desumere dalle cose che seguono, riterremo che le A, B, C, D, E, F qui adottate, supposto pure che si ritornasse dalla considerazione di un corpo qualunque a quella di un corpo rigido, tengono bensi il posto delle simili quantità indicate nell'espressione (ii) del numº. 36, ma non sono identicamente le medesime.

48. Ora possono percorrersi due strade analogamente a quanto si è detto al numo. 17.: possono assumersi per le variazioni dx. dv. dz tali valori particolari che soddisfacciano alle variate di tutte le equazioni di condizione (14), nel qual caso la parte (15) introdotta da tali equazioni dovrà sparire da per se stessa; e può ritenersi la parte (15), lasciando alle variazioni dx, dy, dz l'intera e piena loro generalità. Seguasi il primo andamento, prendendo per le dx, dy, dz i valori (39) scritti alla fine del Capo precedente, valori nati appunto dalla considerazione dell' arbitrio in cui siamo nel porre i secondi assi rimpetto ai primi, che ci condusse alle equazioni (14): tutta la quantità (15) dovrà sparire da per se stessa. Che veramente la sostituzione dei valori (39) numº. 42. renda identicamente nulli i trinomi e sestinomi per cui nella espressione (15) sono moltiplicate le quantità 2A, 2B, 2C, D, E, F, è un fatto analitico che può facilmente verificarsi: basta rammentarsi che le sei arbitrarie a, o, o, 51, 52, 53 sono indipendenti dalle p, q, r, e che quindi nelle derivazioni le prime tre svaniscono, e le seguenti vanno trattate come costanti.

Se di più supponiamo che il corpo sia libero, talche nella equazione generale (13) manchi l'ultima parte espressa dalla lettera Q, si vede che quando le variazioni \(\pa_x, \phi_y, \phi_z\) prendono gli anzidetti valori, nella equazione generale non rimane che la prima parte. Vedesi inoltre che una tal prima parte può

scomporsi in sei termini tutti moltiplicati per alcuna delle sei indeterminate a. a. a. c. c. c. le quali essendo costanti per riguardo alle p, q, r, escono dai segni integrali. L'assoluto arbitrio poi di queste sei indeterminate fa si che l'equazione qual fu ridotta si scomponga in altre sei, ponendo eguale a zero ciascuno dei coefficienti di dette sei indeterminate. I primi membri di tali sei equazioni sono affetti da segni integrali presi per le variabili p. q. r. ma facilmente si traducono ad essere integrali presi per le x, y, z; bastando a questo fine introdurre in ciascuno come coefficiente della Γ il sestinomio H. (equazione (3)) che al cominciare del numº, 46, dimostrammo eguale all' unità, e richiamare il principio analitico più volte usato per simili trasformazioni, principio che già ci fece fare il primo passo per ridurci dalla (12) alla (13), cioè dalle a, b, c alle p, a, r, e che ora ci fa fare il secondo, come si è accennato alla fine del numº, 44. Abbiamo pertanto le sei

$$\begin{aligned} fdx fdy fdz & \Gamma\left(\mathbf{X} - \frac{d^{2}z}{dx^{2}}\right) = 0 \\ fdx fdy fdz & \Gamma\left(\mathbf{Y} - \frac{d^{2}z}{dx^{2}}\right) = 0 \\ fdz fdy fdz & \Gamma\left(\mathbf{Z} - \frac{d^{2}z}{dx^{2}}\right) = 0 \\ fdz fdy fdz & \Gamma\left(\mathbf{Z} - \frac{d^{2}z}{dx^{2}}\right) - y\left(\mathbf{X} - \frac{d^{2}z}{dx^{2}}\right) \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} fdz fdy fdz & \Gamma\left\{z\left(\mathbf{X} - \frac{d^{2}z}{dx^{2}}\right) - x\left(\mathbf{Z} - \frac{d^{2}z}{dx^{2}}\right)\right\} = 0 \\ fdz fdy fdz & \Gamma\left\{z\left(\mathbf{X} - \frac{d^{2}z}{dx^{2}}\right) - z\left(\mathbf{Z} - \frac{d^{2}z}{dx^{2}}\right)\right\} = 0 \end{aligned}$$

Sono queste lle sei equazioni che contengono, i due principi della conservazione del moto del centro di gravità, e delle aree. La precedente dimostrazione fa vedere chi esse sussistono veramente non solo pe' corpi solidi, ma per ogni sorta di corpi, clastici ed anche fluidi, purche libieri (?). In fatti essa è dedotta

^(*) Poisson. Traité de Mécanique. T. 2. " pag. 447. Laplace. Système du Monde. Liv. 4. Chap. X, Liv. 5. Chap. VI.

unicamente dal riferimento del corpo a due diversi sistemi di assi ortogonali: e l'arbitrio nel porre i secondi assi relativamente ai primi, sta sempre lo stesso qualunque sia il corpo.

49. Ma potevasi tenere anche il secondo degli andamenti menzionati al principio del numero precedente, conservando tutta la quantità (15). e flaciando alle ∂x, ∂y, ∂x tutta la generalità loro propria. Allora si ha ad operare molto similmente a quanto si è praticato al num?, 36.: anxi e per le trasformazioni indicate nelle equazioni (12) di quel numero, e per la susseguente espressione (13) che ne raccoglie i risultati, non si ha a fare che uno scambio di lettere. Solamente nelle nove equazioni a riscontro di quelle (14), invece delle derivate

 $\frac{dx}{dp}$, $\frac{dx}{dp}$, $\frac{dx}{dp}$, $\frac{dx}{dp}$, ec. metteremo i valori angolari somministratici dalle (tr.) del precedente num°. 46. Per tal modo ci persuaderemo che la quantità (15) num°, 47. si trasforma senza alterazione di valore nella seguente

essendo state adottate nuove denominazioni di quantità di cui si espongono i valori

$$T = -\frac{d \cdot (I_1 \cdot 8x + I_2 \cdot 9y + I_3 \cdot 8z)}{dy}$$
(19) man light of $-\frac{d \cdot (N_1 \cdot 8x + N_2 \cdot 9y + N_3 \cdot 8z)}{dy}$

$$\frac{d \cdot (N_2 \cdot 8x + N_2 \cdot 9y + N_3 \cdot 8z)}{dx}$$

In appresso col medesimo ragionamiento scritto verso il fine del nun". 36. proveremo, cho prescindendo sulle prime dall' esaminare le conseguenze derivanti dalla quantità (19) influente solo ai limiti del corpo, si hamo intanto le equazioni relative al moto di um punto qualtaque interno, ché sono

$$\Gamma\left(\mathbf{X} - \frac{d^2x}{d^2}\right) + \frac{dL_1}{dp} + \frac{dM_1}{dq} + \frac{dN_2}{dz} = 0$$

$$\Gamma\left(\mathbf{Y} - \frac{dx}{dr}\right) + \frac{dL_2}{dp} + \frac{dM_2}{dq} + \frac{dN_2}{dz} = 0$$

$$\Gamma\left(\mathbf{Z} - \frac{dx}{dz}\right) + \frac{dL_1}{dz} + \frac{dM_2}{dz} + \frac{dN_2}{dz} = 0$$

$$\Gamma\left(\mathbf{Z} - \frac{dx}{dz}\right) + \frac{dL_1}{dz} + \frac{dM_2}{dz} + \frac{dN_1}{dz} = 0$$

(21)
$$\frac{dL}{dp} + \frac{dM}{dq} + \frac{dN}{dr} = \frac{dK_1}{dx} + \frac{dK_2}{dy} + \frac{dK_3}{dz}$$
essendo

(22)
$$K_{i} = L\alpha_{i} + M\beta_{i} + N\gamma_{i}$$

$$K_{a} = L\alpha_{a} + M\beta_{a} + N\gamma_{a}$$

$$K_{b} = L\alpha_{b} + M\beta_{b} + N\gamma_{c}$$

L'applicazione tre volte ripetuta di questa formola alle equazioni (20) le cangia nelle

$$\Gamma\left(\mathbf{X} - \frac{d^{2}x}{dt^{2}}\right) + \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{X}}{dy} + \frac{d\mathbf{A}}{dz} = 0$$

$$\Gamma\left(\mathbf{Y} - \frac{d^{2}y}{dt^{2}}\right) + \frac{d\mathbf{X}}{dx} + \frac{d\mathbf{X}}{dy} + \frac{d\mathbf{X}}{dz} = 0$$

$$\Gamma\left(\mathbf{Z} - \frac{d^{2}x}{dt^{2}}\right) + \frac{d\mathbf{A}}{dx} + \frac{d\mathbf{Y}}{dy} + \frac{d\mathbf{X}}{dz} = 0$$

avendo assunte per abbreviare le denominazioni

$$\begin{split} &\Lambda = - \, 2\alpha^*_1 \Lambda - \alpha\beta^*_1 B - \alpha\gamma^*_1 C - \alpha\alpha_1\beta_1 D - \alpha\alpha_1\gamma_1 E - \alpha\beta_1\gamma_1 F \\ &\Xi = - \, 2\alpha^*_2 \Lambda - \alpha\beta^*_1 B - \alpha\gamma^*_1 C - \alpha\alpha_1\beta_1 D - \alpha\alpha_1\gamma_1 E - \alpha\beta_1\gamma_1 F \\ &\Pi = - \, \alpha\alpha^*_2 \Lambda - \alpha\beta^*_1 B - \alpha\gamma^*_1 C - \alpha\alpha_1\beta_1 D - \alpha\alpha_2\gamma_1 E - \alpha\beta_1\gamma_1 F \\ &\Sigma = - \, 2\alpha_1\alpha_1 \Lambda - \alpha\beta_1\beta_1 B - \alpha\gamma_1\gamma_1 C \end{split}$$

$$\Sigma = -\alpha_{\alpha}a_{\alpha}A - \alpha\beta_{\beta}B - \alpha\gamma\gamma_{\gamma}G$$

$$(24) \qquad - (\alpha_{\beta}a_{+}\beta_{\alpha a})D - (\alpha_{\gamma}a_{+}\gamma_{\alpha a})E - (\beta_{\gamma}a_{+}\gamma_{\beta})F$$

$$\Phi = -\alpha_{\alpha}a_{\beta}A - \alpha\beta_{\beta}B - \alpha\gamma_{\gamma}G$$

$$- (\alpha_{\beta}a_{+}\beta_{\alpha a})D - (\alpha_{\gamma}a_{+}\gamma_{\gamma}a_{3})E - (\beta_{\gamma}a_{+}\gamma_{\gamma}\beta_{5})F$$

$$\Psi = -\alpha_{\alpha}a_{\beta}A - \alpha\beta_{\beta}B - \alpha\gamma_{\gamma}G$$

$$- (\alpha_{\beta}a_{+}\beta_{\alpha b})D - (\alpha_{\gamma}a_{+}\gamma_{\alpha a})E - (\beta_{\gamma}a_{+}\gamma_{\beta})F,$$

$$- (\alpha_{\beta}a_{+}\beta_{\alpha b})D - (\alpha_{\gamma}a_{+}\gamma_{\alpha a})E - (\beta_{\gamma}a_{+}\gamma_{\alpha}\beta_{5})F,$$

Il sistema di queste equazioni (23), (24) è d'una generalità ed importanza quale meglio che con parole prevenienti è provata dalle applicazioni.

51. Il secondo passo dalle coordinate intermedie p, q, t alle attuali x, y, z, invece di farlo sulle equazioni (ac) possianio effettuarlo a dirittura nella equazione generale (13): anzi ci è necessario di far così quando vi sono anche forze particolari applicate alla superficie del corpo. A questo fine osserveremo che l'espressione (17) equivalente alla (15) la quale fu dimoratta rappresentare tutta la quantità sottoposta al secondo integrale nella (13), può ridursi fra derivate per le x, y, z mediante il principio analitico seritto nelle equazioni (al.), (2a).

Per la parte che riguarda i tre coefficienti delle ∂x , ∂y , ∂z , la riduzione si pratica come più sopra per venire alle (23), ed essa si cangia nella

 $\left(\frac{d\Lambda}{dx} + \frac{dZ}{dy} + \frac{d\Phi}{dz}\right) \delta x$ $+ \left(\frac{d\Psi}{dx} + \frac{dZ}{dy} + \frac{d\Psi}{dz}\right) \delta y$ $+ \left(\frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Psi}{dz} + \frac{d\Pi}{dz}\right) \delta z$

avendo le Λ , Ξ , ec. i valori ($\omega \beta$). Quanto alla parte residua nella espressione ($t\gamma$), cioè alla T, si noti (equazione ($t\gamma$) ciòè essa è ancora un trinomio di cui può effettuarsi la trasformazione per mezzo della formola (21). Facciasi, e raccogliendo i coefficienti totali delle ∂x , ∂y , ∂z , e sostituendo i valori ($t\delta$), si troverà a motivo delle denominazioni (24) essere

(26)
$$T = -\frac{d \cdot (\Lambda \delta x + \Sigma \delta y + \Phi \delta z)}{dx}$$

$$-\frac{d \cdot (\Sigma \delta x + \Sigma \delta y + \Psi \delta z)}{dy}$$

$$-\frac{d \cdot (\Phi \delta x + \Psi \delta y + \Pi \delta z)}{dz}.$$

La somma delle due espressioni (a5), (a6) è quella che va posta sotto il secondo integrale della (73). Cambierem poi gli integrali per p, q, r in quelli per x, y, z come al unm°. 48. introducendo sotto i segni il fattore H, che non altera i valori per essere eguale alla unità, e facendo uso del solito teorema: Riunti i due primi termini della (13) mediante un solo segno d'integrale triplicato, se si annullano i coefficienti totali delle $\delta x, \delta y, \delta z$, esclusa la quantità T, veggonsi ritornare le equazioni (23). Ma v' è la quantità T ridotta all'espressione (26) fatta di tre parti, sopra ciascuma delle quali può eseguirisi alema delle integrazioni per x o per y o per x. Eseguiscansi tali integrazioni, e si avranno nella equazione generale (13) i termini

$$(27) - \int dx f dy \cdot (\Phi \delta x + \Psi \delta y + \Pi \delta z)$$

$$- \int dx f dz \cdot (\Sigma \delta x + \Xi \delta y + \Psi \delta z)$$

$$- \int dy f dz \cdot (\Lambda \delta x + \Sigma \delta y + \Phi \delta z)$$

intorno ai quali vi è bisogno di qualche spiegazione. Veramente stando a quanto pratico Lagrange in un caso simile (M. A. T. 1.º pag. 212.) i precedenti integrali duplicati invece di tre dovrebbero essere sei, avendosene due di segno contrario per ogni integrazione effettuata, espressi mediante la convenzione di marcare con uno o due tratti le quantità spettanti a limiti opposti. Ma Lagrange stesso nel luogo citato ha fatto conoscere che tali integrali a due a due possono concentrarsi in un solo, intendendo che la terza variabile, oltre le due per le quali è indicata l'integrazione (nel primo dei precedenti sarebbe la z) prenda tutti i valori somministrati dalla equazione della superficie conterminante il corpo, cioè tanto quelli rispondenti ad un limite, come quelli rispondenti al limite opposto. Allora i segni si aggiustano da se stessi a motivo di un' altra supposizione sottintesa che apparirà più chiara per ciò che ora soggiungeremo.

Oltre la parte (a?) venutaci in conseguenza di integrazioni seguite, può esservone nell' equazione generale (13) un'altra affetta da segno d'integrale duplicato, compresa nell'ultimo termine Ω , proveniente da una forza applicata ai punti della superficie del corpo, e che ora è bene mettere in evidenza. Chiamate λ , μ , ν le tre componenti di questa forza parallele ai tre assi per un punto qualunque (x, y, z) della superficie, raccoglieremo tutti i trinonj

$\lambda \partial x + \mu \partial y + v \partial z$

spettanti ai diversi punti della superficie stessa mediante un integrale duplicato preso per rapporto a due variabili semplici di cui le x, y, z si considerino funzioni (equazione (3) num². 3c.), indi passeremo ad un integrale duplicato per le x, y, come già praticaumo altrovo (equazione (a6) num². 1a.). Ci risulterà allora l'espressione.

(28) $\int dx \int dy \cdot (\Gamma) \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} (\lambda \partial x + \mu \partial y + \nu \partial z)$

dove ho indicato con (I) la densità che regna fra le molecole alla superficie. Oui però convien fare una osservazione, ed è che siccome una pressione sulla superficie del corpo opera sempre dal di fuori verso il di dentro, girando tutt' all' intorno di esso corpo, ad ogni pressione diretta per un verso ne corrisponde una di segno contrario. Per questa circostanza la precedente espressione integrale (28) dovrebbe essere scomposta in due parti simili di cui l'una si assumesse positiva, l'altra negativa: il che si tralascia di fare, tenendo la cosa per sottintesa. È per la ragione analoga che i due integrali duplicati i quali, come sopra dicemmo, avrebbero dovuto prendere il posto di ciascuno degli espressi nella quantità (27), hanno potuto compendiarsi in un solo; di guisa che devesi ritenere che la parte espressa nella (27) corrisponde alla parte espressa nella (28), e la negativa sottintesa di quella corrisponderebbe alla negativa sottintesa di questa. Pertanto dopo una tale dichiarazione tutta la parte dell'equazione generale (13) affetta da segni d'integrali duplicati può ritenersi rappresentata dalla somma delle due quantità (27), (28).

52. Ma ciò non basta ancora per dedurre le equazioni che i verificano soltanto alla superficie del corpo. Nella quantità (27) si veggono tre integrali duplicati dove le variabili semplici non sono sempre le stesse: il primo suppone che la terza variabile z diventi quella funzione di x, y che risulta sciogliendo per essa l'equazione della superficie, il secondo suppone invece

dedotta dalla stessa equazione la φ in funzione di x, z, ed il tezzo suppone funzione delle altre due la x. Conviene adunque trasformare i due integrali secondo e terzo per modo che siano anch' essi presi considerando le x, y variabili semplici, i clio lo giù fatto altrove in un caso più particolare (Vedi Giornale dell' I. R. Istituto Lombardo. T. VI, pag. 33 τ .). Richiamiamo la teorica per la trasformazione di un integrale duplicato

(29)
$$\int dp \int dq \cdot P(p,q)$$

quando si vogliono mutare le variabili p, q in altre r, s in virtù di due equazioni

(3c)
$$p = p(r, s); q = q(r, s).$$

L'integrale trasformato equivalente al precedente (29) è

(31)
$$fdr fds \cdot P(p(r,s), q(r,s)) \left(\frac{dp}{dr} \frac{dq}{ds} - \frac{dp}{ds} \frac{dq}{dr}\right)$$

Il teorema è dimostrato da tutti i Trattatisti, e noi pure ne facemmo in questa Memoria replicatamente uso dove parlammo dei sistemi continui superficiali.

Cominciamo pertanto a trasformare il terzo degli integrali (27), prendendo nelle formole (29), (31)

$$p=y$$
, $q=z$; $r=x$, $s=y$,

e adottando in luogo delle (3c) le due equazioni

1-b cioling
$$y = y$$
; $z = z(x, y)$

delle quali la prima è identica. Vedremo facilmente che ci viene

(32)
$$fdy fdz \cdot (\Lambda \partial x + \Sigma \partial y + \Phi \partial z) =$$

$$- fdx fdy \cdot \frac{dz}{dz} (\Lambda \partial x + \Sigma \partial y + \Phi \partial z) .$$

Similmente per trasformare il secondo degli integrali (27), prenderemo nelle formole (29), (31)

$$p=x, q=z; r=y, s=x$$

surrogando alle equazioni (30) le seguenti same allab embet

$$x=x$$
; $z=z$ (x,y)
e così otterremo
$$\int dx \int dz . (\Sigma \delta x + \Xi \delta y + \Psi \delta z) =$$

(33)
$$- \int dx \int dz \cdot (2\delta x + \Xi \delta y + \Psi \delta z) = - \int dx \int dy \cdot \frac{dz}{dx} (\Sigma \delta x + \Xi \delta y + \Psi \delta z).$$

Adesso per effetto delle equazioni (32), (33) tutti i quattro integrali duplicati di cui consta la somma delle quantità (27), (28) vengono ridotti colle stesse variabili semplici; e quindi quella somma può portare un solo segno d'integrale duplicato, e scriversi

(34)
$$\int dx \int dy \cdot \left\{ \left(\lambda \left[\Gamma \right] \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2} - \Phi + \frac{dz}{dx} \Lambda + \frac{dz}{dy} \Sigma \right) \partial x + \left(\mu \left[\Gamma \right] \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2} - \Psi + \frac{dz}{dx} \Sigma + \frac{dz}{dy} \Sigma \right) \partial y + \left(\nu \left[\Gamma \right] \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2} - \Pi + \frac{dz}{dx} \Phi + \frac{dz}{dy} \Psi \right) \partial z \right\}.$$

Non essendovi da estrarre altro integrale duplicato dall'ultima parte Q dell'equazione generale (13), i coefficienti totali delle variazioni dx, dy, dz nella precedente espressione (34), giusta i principi del calcolo delle variazioni, debbono essere zero. Di qui tre equazioni che si verificano alla superficie del corpo, e dalle quali possono dedursi importanti teoremi. Ne vedremo uno nel Capo seguente pel caso particolare che il corpo sia un fluido.

53. Prima di lasciare queste considerazioni sulle quantità ai limiti, dirò che da esse può facilmente cavarsi tutta quella dottrina che diede argomento a varie Memorie del Sig. Cauchy inserite ne' suoi primi Esercizi di Matematica. Ci è lecito in fatti immaginare per entro alla massa del corpo e per la durata di un solo istante di tempo (quando trattasi di moto) un parallelepipedo rettangolo grande o piccolo come più piace, e restringerci a riguardare il moto o l'equilibrio di esso solo. astraendolo col pensiero dall'equilibrio o dal moto di tutto il resto del corpo, e intendendo supplito l'effetto di tutta la materia circostante col mezzo di pressioni esercitate sulle sei facce di quel parallelepipedo. Allora in virtà delle tre equazioni che sul fine del numº, precedente insegnammo a dedurre e che in tale particolare supposizione diventano assai più semplici, troveremo tre equazioni fra le componenti 2, u, v, parallele agli assi, della pressione per un punto qualunque di una faccia, e le sei quantità Λ. Ξ. Π. Σ. Φ. Ψ nelle quali le variabili x, y, z abbiano assunti i valori propri delle coordinate di quel punto. Ma se per detto punto prendasi quello di un angolo del parallelepipedo, appartenendo esso contemporaneamente a tre facce. le equazioni anzidette cresceranno a maggior numero. Oltre le tre componenti 2, u, v della pressione per quel punto considerato siccome appartenente ad una faccia, avremo tre simili componenti di un' altra pressione, considerando il punto come appartenente ad un' altra faccia, e così tre altre per la terza faccia. Le sei quantità però A, E, ec. saranno sempre le stesse, giacchè esse non dipendono che dai valori delle coordinate del punto, le quali non mutano in qualunque faccia il punto si consideri. Eliminando quindi queste sei quantità fra le nove equazioni che risultano, si giunge a tre relazioni fra le dette componenti. Di più: può immaginarsi un altro parallelepipedo rettangolo diverso dal precedente, ma avente comune con esso il vertice di un angolo, cioè il punto (x, y, z): allora si ottengono altre nove equazioni, considerando lo stesso punto come appartenente a tre facce del miovo parallelepipedo: ma le sei quantità A, E, ec. rimangono sempre immutate. Di qui altre relazioni fra le pressioni sulle facce del nuovo parallelepipedo e quelle sulle facce dell'antico. Questi teoremi hanno qualche merito: noterò il vantaggio di potere per mezzo delle ideate pressioni fissare un significato, cioè dare una rappresentazione meccanica (sebbene con un po' di stento) a ciascuna delle sei quantità A, E, ec. La nostra analisi però cammina indipendentemente dai mentovati teoremi, e quindi essi riescono per noi di molto minore importanza che pel ricordato Geometra. Mi dispenserò pertanto dal farne l'esposizione che mi condurrebbe un po' in lungo, e mi basterà aver indicato il principio da cui dedurli per via piana e diretta; essendo mio proposito, come dissi più volte, far vedere che i metodi di Lagrange arrivano (e meglio che gli altri) a tutto, e solo si rifiutano di dar ciò che altrimenti si può provare non essere esattamente vero. Intanto prego il lettore a voler por mente che il verificarsi dei teoremi fra le pressioni alla superficie dei corpi nel moto del pari che nell'equilibrio, è verità non chiaramente dimostrabile se non col nostro metodo. Qui infatti si vede subito che l'espressione (34) rimane la stessa in ambi i casi: il passaggio dall'equilibrio al moto introduce mutazione nelle sole quantità sottoposte all' integrale triplicato, cioè in luogo delle X, Y, Z, introduce i binomi

 $X = \frac{d^3x}{dt^3}$, $Y = \frac{d^3y}{dt^3}$, $Z = \frac{d^3z}{dt^3}$:

quindi le equazioni che si verificano a parte, perchè desunte dall'integrale duplicato (34), rimangono le medesime.

54. Ripigliamo ora le equazioni (a3), (a4) estensibili a tutta la massa del corpo, e troveremo che ci diranno importanti verità, se sapremo opportunamente interrogarle. Prima però ci conviene spingere più innazi le considerazioni intorno alle molecole dei corpi, che al numº. 4. lasciammo imperfette, e intorno al modo con cui esse agiscono le une sulle altre. Tali azioni possono essere di due sorte: alcune provenienti da forze internie attive che produrrebbero un effetto quand' anche non vi lossero forze esterne applicate, per esempio, da attrazioni od clasticità: alcune provenienti da queste forze esterne le quali, applicate a certe molecole, si propagano eziandio alle altre, come pressioni sopra superficie ed anche forze simili alla gravità, essendo evidente nel maggior numero dei casi, che ciascuma molecola non risente della sola gravità propria, ma attresi di quella propria delle altre. Di qualanque natram siano

sì fatte azioni è facile capire, per le cose che ora diremo, dipendere esse principalmente dalla posizione rispettiva delle molecole, poi anche dalla loro figura. Stando alla nostra maniera di vedere esposta nel preambolo della Memoria, non dobbiamo fare ipotesi sulla natura delle forze molecolari. Però abbiamo ammesso le molecole disgiunte, e quel solo che di esse disse Newton (*), cioè che quantunque di una piccolezza immensamente al di sotto della portata de' nostri sensi, pure sono nei diversi corpi di differenti figure, e inalterabili da forze meccaniche. Ciò premesso, distinguiamo con diligenza le azioni reciproche delle molecole dipendentemente soltanto dalla collocazione delle une rispetto alle altre, e le azioni che dipendono inoltre dalle figure individuali: il che può anche dirsi più brevemente, distinguiamo ciò che deriva dalle molecole considerate fra loro da ciò che deriva dalle molecole considerate in se stesse. Una così fatta distinzione è fondamentale. A ravvisare le azioni della prima specie, immaginiamo le molecole omogenee e di figura sferica, e comprenderemo senza difficoltà che quelle azioni non possono essere alterate voltando ogni molecola per guisa che la parte di sopra venga di sotto, o la parte a sinistra passi a destra, purchè i centri delle sfere rimangano agli stessi posti. A ravvisare le azioni della seconda specie, immaginiamo le molecole di figura diversa dalla sferica, per esempio, prismatica o piramidale: e ci si farà manifesto, che quand' anche fossero eguali le distanze del centro di gravità di una molecola dai centri simili di due vicine, l'azione della prima sopra quella delle seconde cui rivolgesse una base o la punta, sarebbe diversa dall'azione sopra l'altra cui presentasse invece una faccia.

Se lle azioni molecolari sono della sola prima specie, cioè non dipendenti dalla figura, le loro espressioni analitiche avranno questa proprietà, che date in funzioni delle coordinate delle diverse molecole riferite a tre assi rettangolari, e poi in funzione

- (35) $\rho = \sqrt{(p_1 p)^2 + (q_1 q)^2 + (r_1 r)^2}; \quad \rho_1 = \sqrt{(p_2 p)^2 + (q_3 q)^2 + (r_3 r)^2}; \infty$ e lo sono dai radicali
- (86) $\rho = \bigvee (x,-x)^2 + (x,-x)^2 + (x,-x)^2$; $\rho_1 = \bigvee (x,-x)^2 + (x,-x)^2 + (x,-x)^2$; equando il riferimento è agli assi delle x, y, z. I coseni degli angoli che la direzione di ciascuna delle ρ_1, ρ_1, ρ_2 , ec. fa coi tre assi ortogonali, hanno i valori

(37)
$$\frac{p_i-p}{p}$$
, $\frac{q_i-q}{p}$, $\frac{r_i-r}{p}$; $\frac{p_i-p}{p}$, ec.

nel primo caso, mettendo per ρ, ρ, ec. i radicali (35); e i valori

$$\frac{x_i-x}{\rho}$$
, $\frac{y_i-y}{\rho}$, $\frac{z_i-z}{\rho}$; $\frac{x_i-x}{\rho_i}$, ec.

nel secondo caso, mettendo per ρ , ρ ,, ec. i radicali (36). A motivo poi di un teorema notissimo, anche i coseni degli angoli fatti dalle rette ρ , ρ ₁, ρ ₂, ec. fra loro, che nel primo caso sono espressi dalle formole

(38)
$$\cos \cdot \rho \cdot \rho_i = \frac{(p_i - p)(p_s - p) + (q_i - q)(q_s - q) + (r_i - r)(r_s - r)}{\rho \rho_i}; \text{ ec. }$$

lo sono nel secondo mediante formole costrutte affatto similmente colle x, y, z.

Se poi sussistono fra le molecole azioni della seconda specie, azioni cioè alle quali prende parte la figura delle molecole stesse, allora non è più vero che per cambiare le loro espressioni analitiche riferite agli assi delle p, q, r in quelle riferite agli assi delle x, y, z, basti sostituire in esse le x, y, z alle p, q, r: conviene cambiare altri elementi analitici. Per veder ciò chiaramente, immaginiamo anche una sola molecola di figura prismatica, della quale uno spigolo faccia cogli assi delle p. a. r angoli di coseni a, a, a; questi coseni entreranno nell' espressione dell'azione ch' essa molecola fa o riceve dalle circostanti: ed è manifesto, perchè se stando al loro posto tutte le molecole circostanti, essa mutasse la direzione di quello spigolo, l'azione vicendevole muterebbe. Adunque nelle espressioni delle azioni reciproche molecolari debbono entrare tante quantità a . a . a . a . ec. pei valori delle quali venga fissata interamente la posizione di ciascuna molecola relativamente ai tre assi: il loro intervento in termini che si suppongono non trascurabili, significa che si è tenuto conto di quella parte di azione che è dovuta alla figura delle molecole diversa dalla sferica. Tali coseni a, a, a, a, ec. sono per natura affatto diversi da quelli sopra marcati colle formole (37): non si possono tradurre in espressioni fatte colle sole coordinate delle diverse molecole: possono essere differenti e di numero grandissimo, se le molecole entrano a comporre il corpo alla rinfusa sotto qualsivoglia direzione dei loro spigoli od assi, ma possono essere anche in pochissimo numero, se s'immagina che le molecole siano tutte disposte uniformemente, cioè abbiano i loro spigoli od assi fra loro paralleli, come credesi che avvenga ne' corpi cristallizzati. In conseguenza del fin qui detto si capisce che quando si passa a riferire il corpo agli assi delle x. y. z. nelle formole esprimenti le azioni delle molecole i coseni a,, a,, a,,... dovranno essere cambiati con altri b,, b, b3, di diverso valore; giacchè è evidente che le direzioni degli spigoli od assi delle molecole prismatiche, piramidali, ellissoidali, ec., faranno cogli assi delle x, y, z angoli diversi da quelli che facevano cogli assi delle p, q, r. Ecco il di più da aggiungersi al cambiamento delle coordinate, che bastava nel primo caso. Per altro ai coseni b_1 , b_2 , b_3 , b_4 ,... possono poi intendersi sostituiti valori equivalenti fatti dei primi coseni a_1 , a_4 , a_3 ,... e dei nove coseni a_1 , b_1 , b_2 , b_3 , b_4 , b_4 , b_4 , b_5 , b_6 , b_7 , b_8 , b

teorema di geometria analitica più sopra ricordato.

55. Ora vogliamo provare che le sei quantità 2A, 2B, 2C, D. E. F significano rapporto agli assi delle p, q, r ciò stesso che le sei Λ. Ξ. Π. Σ. Φ. Ψ significano rapporto agli assi delle x. v. z: però prescindendo dal segno, il che non fa difetto, essendo sempre in nostro arbitrio supporre originariamente cambiato il segno a quelle prime, con che renderemo positivi anche i secondi membri delle (24). A tale intendimento partiremo dalle equazioni (20) le quali partecipano d'entrambi i riferimenti alle due terne di assi, giacchè i trinomi che terminano i primi membri di quelle equazioni sono fatti di derivate per le p, q, r, e i primi termini, oltre le derivate seconde delle x, y, z pel tempo, contengono le X, Y, Z componenti della forza esterna parallele agli assi di queste coordinate. Quando siamo passati dalle (20) alle (23) abbiamo nelle prime trasformati que'trinomi, adesso convien trasformarne i primi termini. Chiamate P. O. R. le tre componenti della forza esterna parallele agli assi delle p, q, r, avremo dalla teorica della composizione delle forze e dalle denominazioni (2) del numº. 33.

(39)
$$X = \alpha, P + \beta, Q + \gamma, R$$

$$Y = \alpha, P + \beta, Q + \gamma, R$$

$$Z = \alpha, P + \beta, Q + \gamma, R$$

Avremo altresì dalle equazioni (1) del numº. 33.

$$\frac{d^3x}{dc^2} = \alpha_i \frac{d^3p}{dc^2} + \beta_i \frac{d^3q}{dc^2} + \gamma_i \frac{d^3r}{dc^2}$$

$$\frac{d^3p}{dc^2} = \alpha_i \frac{d^3p}{dc^2} + \beta_i \frac{d^3q}{dc^2} + \gamma_i \frac{dr_i}{dc^2}$$

$$\frac{d^3q}{dc^2} = \alpha_i \frac{d^3p}{dc^2} + \beta_i \frac{d^3q}{dc^2} + \gamma_i \frac{dr_i}{dc^2}$$

$$\frac{d^3q}{dc^2} = \alpha_i \frac{d^3p}{dc^2} + \beta_i \frac{d^3q}{dc^2} + \gamma_i \frac{dr_i}{dc^2}$$

Prendansi questi valori ultimamente ottenuti (39), (4c), e si sostituiscano insieme coi (18) nelle equazioni (20): operando con diligenza noteremo che si giunge a tre risultati i quali possono essere compendiati sotto le forme

(41)
$$a_1 S + \beta_1 U + \gamma_1 W = 0$$

$$a_2 S + \beta_2 U + \gamma_2 W = 0$$

$$a_3 S + \beta_3 U + \gamma_3 W = 0$$

dove le S, U, W hanno valori che dopo poche linee porremo per disteso. Si moltiplichino rispettivamente per α_i , α_s , α_s le ultime equazioni (41), indi si sommino: si moltiplichino da capo rispettivamente per β_s , β_s , β_s , β_s , o parimenti si sommino: e si operi una terza volta similmente moltiplicando per le γ_s , γ_s , γ_s , γ_s . In conseguenza delle equazioni (3) del num^o. 33. ci risulteranno le cemazioni

$$S=0$$
; $U=0$; $W=0$

le quali, mettendo per S, U, W i valori testè accennati e che abbiamo sospeso di scrivere, saranno

$$\Gamma \left(P - \frac{d^3 F}{dt^2}\right) - \frac{d \cdot 8A}{dp} - \frac{dD}{dq} - \frac{dE}{dq} = 0$$

$$\Gamma \left(Q - \frac{d^3 F}{dt^2}\right) - \frac{dD}{dp} - \frac{d \cdot 8B}{dq} - \frac{dF}{dt} = 0$$

$$\Gamma \left(R - \frac{2t^2}{dt^2}\right) - \frac{dE}{dq} - \frac{d \cdot 8B}{dq} - \frac{d \cdot 8C}{dt} = 0.$$

Ecco le equazioni che stanno a riscontro delle (a3) e che si appoggiano unicamente agli assi delle p, q, r, come le (a3) si appoggiano unicamente agli assi delle x, y, z. Vedesi dal confronto di queste (4a) colle (a3) l'asserita corrispondenza delle sei unantità a meno della differenza dei segni.

56. Diciamo inoltre che le mentovate sei quantità in ambi i casi sono le espressioni analitiche contenenti l'effetto complessivo di tutte le azioni interne sopra il punto generico (p,q,r) ovvero (x, y, z). Qui potremmo giovarci di quanto è scritto in

più luoghi della M. A. intorno ai coefficienti che moltiplicano le variate delle equazioni di condizione, che cioè può darsi loro una rappresentazione di forze: e veramente le sei quantità A. B. C. D. E. F (espressione (15) numº, 47) furono coefficienti introdotti a questa maniera. Ma non mi pare che ciò sia necessario: ho già insinuato nel preambolo della Memoria che il grande vantaggio dei metodi lagrangiani sta appunto nel prestarsi ad esprimere analiticamente i fatti, senza esigere che si vada a scrutinare la struttura interna di quelle quantità che ne significherebbero le cause, struttura la quale ci resterà sempre occulta, come ci occorrerà di meglio dichiarare nel Capo VI; di guisa che non abbisognano se non di ciò a cui la mente umana arriva con sicurezza, e fanno senza di ciò intorno a cui non potremo mai dire niente di certo. Se le forze interne tra le molecole non sussistessero, queste sarebbero punti fisici affatto liberi, e le equazioni del loro moto si avrebbero dai soli primi termini delle equazioni (23) o (42), ommessi quei trinomi colle derivate parziali. Tali trinomi invece esistono (e lo abbiamo provato) quando vi sono le azioni vicendevoli molecolari: essi adunque raccolgono l'espressione dei loro effetti; il che ci basta, senza imbarazzarci del come.

 di dette sei quantità. Esse, quali appajono nelle equazioni (42), (23), sono funzioni delle sole coordinate p, q, r ovvero x, y, z del punto generico, mentre in quelle quantità (35), (38), che sopra dicemmo dover costituire come gli elementi analitici delle espressioni delle forze interne, entravano anche le coordinate p1, q1, r1; p2, q2, r2, ec. di altre molecole. Rispondo che deve appunto essere così per la ragione che le sei quantità 2A, 2B, ec, rappresentano il complesso di tutte le azioni delle molecole circostanti su quella che ha per coordinate p, q, r. Se si trattasse di una sola espressione dell'azione elementare fra la molecola (p, q, r) e un' altra qualunque (E, p, L), certamente vi dovrebbero entrare tanto le prime che le seconde coordinate. ma trattandosi del complesso di tutte le azioni simili, le variabili ξ, η, ζ debbono (restando ferme le p, q, r) prendere successivamente i valori delle coordinate di tutte le molecole del corpo, ed esaurire per intero la loro variabilità, talchè più non compajano. Quelle sei quantità vestono il significato di veri integrali definiti triplicati presi per le variabili £, p, £, e aventi per limiti i valori di queste variabili ai limiti del corpo. Ciò apparirà più chiaro nel Capo VI. Può anche erigersi qualche altra difficoltà, di cui ci pare più opportuno riserbare l'esposizione al Capo seguente.

Dopo il fin qui detto avremo nozioni più chiare intorno alle quantiti che compongono le equasioni (4A), appunto come si richiede per poterne trarre profitto. Nei primi membri le A, Z, ec. sono funzioni della x,y,z e di quei coseni $b_1,b_1,b_2,...$ che intervengono nel solo caso che si tien conto della figura delle molecole: nei secondi membri le 2A, 2B, 2C, D, E, F sono funzioni dei coseni a_2 , a_3 , a_2 , corrispondenti ai b_1 , b_2 , b_2 , b_3 , b_3 , b_4

quantità Λ, Ξ, ec. siano stati sostituiti ai coseni b, b, b, b, i loro valori equivalenti espressi cogli a, a, a, a, ... e cogli altri a., B., 71, a., ec., siccome dicemmo alla fine del numº. 54.: e che dappertutto le x, y, z abbiano ripresi i valori (1) del numº. 33. fatti colle p, q, r. Vediamo allora mentalmente che nei secondi membri le sei quantità 2A, 2B, ec. ritornano funzioni delle p, a, r e delle a., a, a, ... quali ce le dà immediatamente il riferimento del corpo ai primi assi. Ed ecco il vero punto di vista di dove riconoscere il grande vantaggio che verremo a ritrarre dalle equazioni (24). Quelle nove quantità a., B., y., a., ec., le quali, secondo l'ultimo concetto stanno dentro le A, E, ec. mischiate colle a, , a, , a, ... e colle p, q, r, nei secondi membri sono esplicite, non entrando per niente a formare le espressioni 2A, 2B, 2C, D, E, F. Possiamo quindi dar loro valori particolari a fine di modificare opportunamente le quantità dei primi membri, ossia (ciò che vale lo stesso) possiamo appoggiarci agli assi delle p, q, r per andare in cerca di altri assi delle x, y, z dotati di proprietà speciali.

57. Un' idea che suggerisce per la prima si è di determiare le α_i, ĝ_i, γ_i, α_s, ec. in maniera che una delle sei quantità formanti i primi membri delle equiazioni (24), per esempio la Λ, riesca massima o minima. Rammentandoci che abbiamo l'equazione di condizione α_i + β_i + γ_i + γ_i = 1 (prima delle (4) num⁰. 33.), la ridurremo col secondo membro zero, ne motipilicheremo il primo membro per un coefficiente indeterminato λ, e aggiungendo il prodotto alla quantità Λ, tratteremo tal somma come se le α_i, β_i, γ_i fossero fra di loro indipendenti ; così arriveremo alle equazioni

(43)
$$\begin{aligned} & 2\Delta a_i + D\beta_i + E\gamma_i = \lambda a_i \\ & Da_i + aB\beta_i + F\gamma_i = \lambda \beta_i \\ & E\alpha_i + F\beta_i + aC\gamma_i = \lambda \gamma_i. \end{aligned}$$

Dividendole tutte per uno dei coseni da determinarsi, per esempio per α_i , si possono dalle tre equazioni eliminare i due rapporti

 $\frac{\beta_1}{a_1}$, $\frac{\gamma_1}{a_2}$, e allora si ottiene per determinar λ l'equazione del terzo grado

$$\lambda^{3} - 2 (A+B+C) \lambda^{2} + (4AB+4AC+4BC-D^{*}-E^{*}-F^{*}) \lambda^{4} + 2AF^{*} + 2BE^{*} + 2CD^{*} - 8ABC - 2DEF = 0 (*)$$

già nota (quanto alla forma) in meccanica, e trattata da varj autori.

La stessa ricerca poteva istituirsi a fine di render massima o minima la Ξ_s visto il suo valore datoci dalla seconda delle (24), avvertendo che fra le α_s , β_s , γ_s sussiste un'equazione di condizione che si legge nella seconda delle equazioni (4) num'. 33. Saremmo per tal guisa giunti alle equazioni

$$2Aa_s + D\beta_s + E\gamma_s = \mu a_s$$

$$Da_s + 2B\beta_s + F\gamma_s = \mu \beta_s$$

$$Ea_s + F\beta_s + 2C\gamma_s = \mu \gamma_s$$

essendo qui la μ il moltiplicatore introdotto dall' equazione di condizione. E la stessa ricerca istituita per rendere massima o minima la Π ci avrebbe porte le equazioni

$$(46) \qquad 2A\alpha_3 + D\beta_3 + E\gamma_3 = \nu\alpha_3$$

$$D\alpha_3 + 2B\beta_3 + F\gamma_3 = \nu\beta_3$$

$$E\alpha_1 + F\beta_3 + 2C\gamma_3 = \nu\gamma_3$$

in cui la v fa le veci delle λ , μ nelle simili.

Siccome le (45) non diversificano dalle (43) se non per esservi le α_s , β_s , γ_s in luogo delle α_s , β_s , γ_s , e luiente che, eliminate le α_s , β_s , γ_s , arriveremo alla stessa equazione di terzo grado (44), colla sola differenza

Tomo XXIV. P. I.

^(*) Che questa equazione cubica abbia sempre tutte tre le sue radici reali, ne abbiamo una bella e recente dimostrazione di un geometra tedesco Signor Kummer, tradotta in italiano e illustrata dal celebre Signor Jacobi. (Vedi Giornale arcadico di Roma: Tomi XCVIII, XCIX.)

che l'incognita sarà la u invece della 2: e lo stesso accadrà eliminando le a3, β3, γ3 dalle (46). Da ciò non dobbiamo conchiudere che le 2, u, v siano fra loro eguali, ma che corrispondono alle tre radici dell'equazione (44). Per ogni terna di equazioni (43), (45), (46), aggiunta la relativa equazione di condizione, si possono ricavare i valori dei tre coseni, e quindi determinare tutte le nove quantità a. , B. , v. , a., ec. in funzioni delle sei 2A, 2B, 2C, D, E, F. Questo calcolo è già stato fatto da altri (si può consultare Cauchy, Lecons sur l'application du calcul infinitésimal à la Géometrie. T. I. pag. 241): ed anche senza giovarsi di altri sussidi, si capisce subito come deve essere condotto. Dove parmi che il cammino possa essere di molto abbreviato, è quando si tratta di venire alla conseguenza che le tre rette determinanti gli angoli di coseni α, β, γ, α, ec. sono poi fra loro ad angolo retto, vale a dire costituiscono un sistema di assi ortogonali: il che analiticamente si riduce a provare che essendovi fra le dette nove quantità le prime tre equazioni delle (4) numº, 33,, nel nostro caso sussistono anche le seconde tre. Ecco una via facile per giungere a tal conclusione. Si moltiplichino rispettivamente per α, , β, , γ, le equazioni (45), e quindi si sommino; nel far la somma de' primi membri si raccolgano i coefficienti totali delle α, β, γ, e vi si sostituiscano i valori dati dalle equazioni (43): avremo un' equazione che potremo scrivere

$$(\lambda - \mu)(\alpha, \alpha_s + \beta, \beta_s + \gamma, \gamma_s) = 0.$$

Facciasi la stessa operazione sulle equazioni (46), e conseguiremo l'altra equazione

$$(v-\lambda)(a_1a_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3)=0.$$

Si moltiplichino poi rispettivamente le (46) non più per α_i , β_i , γ_i , ma per α_s , β_s , γ_s , e sommandole e sostituendo ai coefficienti totali delle α_s , β_s , γ_s i valori dati dalle equazioni (45), otterremo la terza

$$(\mu-v)(\alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3)=0.$$

Ora, se i valori delle tre radici λ , μ , ν dell'equazione (44) sono fra loro diversi (senza di che non avremo più tre rette distinte, ma una sola), i primi fattori nie primi mempi delle tre ultime equazioni non possono essere zero: conviene pertanto che lo siano i secondi fattori: il che prova ciò che era in questione.

Osservisi che la somma dei primi membri delle (45) moltiplicati rispettivamente per a_i , β_i , γ_i riproduce (equazioni (24)) il valore della quantità $-\Sigma$: la somma simile dei primi membri delle (46) moltiplicati per gli stessi coseni, presenta quello della quantità $-\Psi$: e l'altra simile delle stesse (46) moltiplicate per a_i , β_i , γ_i , il valore della quantità $-\Psi$. E siccome abbiamo già provato che queste somme sono zero, emerge la bella proprietà dell'amunifara il e quantità Σ , Ψ , Ψ per quei tre assi ortogonali pei quali le Λ , Ξ , Π hanno le proprietà analitiche spettanti al massimo o al minimo.

58. Abbiamo trovato, pel corpo qualunque che consideriamo, tre assi ortogonali dotati della descritta insigne proprietà, appoggiandoci ad assi delle p, q, r arbitrariamente posti nello spazio, e mediante i valori delle sei quantità 2A, 2B, 2C, D, E, F legate ai detti assi. Se fossimo partiti da assi presi nello spazio in posizione affatto diversa, saremmo arrivati agli stessi assi pel corpo, aventi quella proprietà? Rispondo che sì: e ciò è cosa degna di molta attenzione. C'è dell'arbitrario nel mezzo che si adopera per la determinazione degli anzidetti assi nel corpo. ma l'arbitrario sparisce quando si ottiene il fine. Così si prova che gli assi ortogonali dotati di quella proprietà sono unici per ogni molecola nel corpo alla fine del tempo t, e inerenti alla natura del corpo stesso. Dissi alla fine del tempo t, il che torna come dire sono assi istantanei: giacchè le quantità 2A, 2B, ec. da cui vedemmo dipendere gli angoli che ne fissano la posizione, sono, generalmente parlando, funzioni del tempo.

Descriverò e non esporrò il calcolo atto a dimostrare l'asserita proposizione: credo potermi prendere un tal comodo per due ragioni: la prima, che l'esposizione riescirebbe lunga, a danno di quell' economia di spazio alla quale mi tengo obbligato in questa Memoria: la seconda, che malgrado la sua prolissità il calcolo è facile, ed il lettore intelligente non avrà bisogno che di pazienza se gli venga voglia di stenderlo.

Chiamo (I) il sistema arbitrariamente posto degli assi p, q, r; e (III) il sistema degli assi trovati mediante le equazioni (43), (45), (46), dove converrà accentare tutte le nove quantità a . 8 . 7 . a . ec., le quali non sono ora più le generali, avendo ricevuta la determinazione portata dalle stesse equazioni: queste α', β', γ', α', ec. significano le relazioni angolari fra (III) ed (1). Chiamo (II) un altro sistema di assi ortogonali diverso da quello delle p, q, r, comunque posto nello spazio relativamente ad esso sistema (I): e per rapporto a questo nuovo sistema (II) indico con 2A', 2B', 2C', D', E', F' le solite sei quantità. Chiamo altresì (IV) il sistema degli assi ortogonali ottenuto partendo da (II) col mezzo di equazioni fatte come le (43), (45), (46); dove bisognerà esprimere con lettere diverse, per esempio con l',, m',, n',, l',, ec., i soliti nove coseni, che significheranno fra (IV) e (II) quello che a', \(\beta'_1, \(\gamma'_1, \eta'_1, \eta'_1, \) ec. significano fra (III) e (I). Se vogliamo riferire anche il sistema (IV) direttamente al sistema (I), ci è necessario designare con nuove lettere a",, \beta",, \gamma",, a",, ec. i nove coseni portati da questa diretta relazione. Ma possiamo fare un tal riferimento in un' altra maniera: mettere nelle nove equazioni simili alle (43), (45), (46), fra (IV) e (II), per 2A', 2B', 2C', D', E', F' gli stessi valori delle Λ, Ξ, Π, Σ, Φ, Ψ offertici dalle equazioni (24), giacchè sono valori per assi in qualsivoglia modo collocati rispetto a quelli delle p, q, r: e mettere per l_1, m'_1, n'_1, l_2 , ec. i valori equivalenti datici dalla Geometria analitica e formati cogli α, β, γ, α, ec. fra (II) e (I) e cogli α", β", γ", α", ec. fra (IV) ed (I). Allora, mediante un processo di calcolo che è il medesimo praticato al numº. 55. per passare dalle equazioni (41) alle tre seguenti, otterremo nove equazioni finali che non diversificheranno dalle (43), (45), (46) se non per esservi le a''_1 , β''_1 , γ''_1 , a''_2 , ec. in luogo delle a'_1 , β'_1 , γ'_1 , a'_2 , ec. Ma queste nove quantità ricevono appunto la determinazione dei loro valori dalle dette nove equazioni: dunque i valori sono i medesimi: dunque il sistema (IV) coincide col sistema (III).

50. Si può provare tenendo dietro a quanto ha seritto il Sig. Cauchy in un caso analogo nell' opera superiormente citata, che i tre assi del corpo contraddistinti dalla proprietà di eni parliamo, coincideno coi tre assi di una elissoide espressa dalla equazione

$$A\xi^2 + B\eta^3 + C\xi^3 + D\xi\eta + E\xi\xi + F\eta\xi = \frac{1}{2}.$$

È ben certo che secondo la diversa natura dei corpi presi ad esame, i suddetti assi debbono presentare altre proprietà speciali mecaniche e fisiche, diventando in qualche caso i medesimi per tutte le molecole: e che la strada per venirne in cognizione non può essere che quella d'insistere sull'analisi della quale si e cercato di mettere qui più in chiaro i principi.

6c. Sul fine di questo Capo porrò due osservazioni generali. La prima tende a sdebitarmi di una promessa incorsa fino dal numº. 7. Cap. I., quando dissi potersi prendere la disposizione delle molecole di un liquido invece di quella delle molecole ai vertici di picciolissimi cubi, purchè la densità dei due ammassi resti costante ed eguale in entrambi. Si ha una riconferma di quanto là si è asserito, riguardando la composizione delle quantità analitiche rappresentanti le coordinate dei punti del sistema, sotto quel punto di vista che abbiamo cercato di indicare verso la fine del numº. 45, dove sponemmo il principio analitico di que' sestinomi che si moltiplicano successivamente. Ivi dicemmo che quel grado di composizione può spingersi innanzi a piacimento, e si può anche da un grado più spinto retrocedere ad uno che lo sia meno. Se quindi ci accomoda pel meccanismo del calcolo assumere quale ultimo termine di confronto, non le coordinate spettanti alla distribuzione del liquido, ma quelle spettanti alla distribuzione dei cubi, possiamo farlo, come pure ci è lecito retrocedere mentalmente da questa a quella per fissare le idee sopra un fatto esistente in natura. Quantunque ci sia ignoto il modo, con cui vengono espresse le une per le altre le coordinate spettanti a queste due composizioni, l'ignoranza non ci nuoce: andando su o giù di un grado per la scala di que sestinomi, gl'integrali triplicati possono intendersi analogamente cambiati, e l'effetto rimane il medesimo. Si mediti sui trapassi da coordinate a coordinate praticati dopo quel num², 45, e si capirà la verità della nostra asserzione.

Passando alla seconda riflessione, inviterò il lettore a volgere un colpo d'occhio a quel principio uno, di dove emanano tutte le equazioni che comprendono innumerabili verità. Un tal principio sta nel riferimento simultaneo di un qualunque sistema a due terne di assi ortogonali: esso può adoperarsi in due maniere e in entrambe produce grandiosi effetti. Si adopera in una prima maniera per rischiarare quanto già dicevasi intorno ai moti minimi compatibili colle equazioni di condizione a fine di dimostrare il principio delle velocità virtuali, ed anche gli altri della conservazione del moto del centro di gravità, e delle aree. Invece di concepire in tal caso le ôx, ôy, ôz dei diversi punti del sistema come velocità virtuali o spazietti infinitesimi descritti in virtù di quel moto fittizio (il quale fu poi altresi detto dopo Carnot un moto geometrico), è assai più naturale e non ha nulla di misterioso il ravvisarle quali aumenti che prendono le coordinate degli anzidetti punti quando il sistema si riferisce ad altri tre assi ortogonali vicinissimi ai primi, come se questi si fossero di pochissimo spostati. Tutti sanno che noi acquistiamo l'idea del moto osservando relazioni di distanze: quelle coordinate tanto possono mutare per un movimento del sistema, stando fermi gli assi, come per un movimento degli assi, stando fermo il sistema. Intendendo la relazione al secondo modo, si viene a supplire ai così detti moti geometrici, e allora si capisce chiaro come gli aumenti delle coordinate abbiano luogo senza alterazioni nelle azioni reciproche delle parti del sistema le une sulle altre. Questa maniera . di veder la cosa è indotta, senza alcuno sforzo, dal riflettere

essere arbitraria nello spazio la posizione degli assi cui si rificrisce un sistema, sia in moto, sia in equilibrio: che era giustò di fare attenzione anche ad un si fatto arbitrio, il quale, messo a calcolo, dovea pur condurre a qualche risultato diverso da quelli che si ottengono quando ad esso arbitrio non si bada. In virtù di un tal moto degli assi le \(\partia_{\chi}, \partia_{\chi}, \partia_{\chi} \partia_{\chi} \text{ diversi} punti assumono i valori dati dalle equazioni (39) num.\(\partia_{\chi}, \partia_{\chi}, \partia_{\chi} \text{ diversi} quali sono quei valori particolari che soddisfanno a tutte le equazioni di condizione esprimenti gli effetti delle forze interne, siccome vedemmo al num.\(\partia_{\chi}, \text{ 33}.\)

Il riferimento simultaneo del sistema a due terne di assi ortogonali giuoca poi efficacemente in un'altra maniera, essendo due i metodi con cui si possono trattare le equazioni di condizione, giusta l'esposto al numº. 17. Cap. II. Qui s'intende parlare di quel metodo che lascia alle dx, dy, dz tutta la loro generalità, e tratta le equazioni di condizione, introducendo moltiplicatori indeterminati. In tal caso la contemplazione delle due terne di assi giova per l'impianto delle dette equazioni di condizione, che altrimenti non si saprebbero assegnare in generale: in esse compajono per l'indicazione delle derivate parziali quelle variabili p, q, r, che ad operazioni finite, sono poi destinate ad uscir dal calcolo. Un tal punto di vista parmi sfuggito a Lagrange e ad altri Geometri: ad esso si riferisce quanto nella presente Memoria può essere più meritevole di attenzione. Circa poi al non comprendersi chiaramente come da dette sei equazioni di condizione vengano significati gli effetti delle forze interne, mi riporterò alle considerazioni generali poste nel prologo.

CAPO V.

Del moto e dell' equilibrio de' fluidi.

61. Abbiamo dato le equazioni generali del moto di un corpo qualunque: nessun dubbio adunque che in esse siano comprese anche le equazioni generali del moto de'fluidi. Volendo però deciferare queste seconde, due cose si richieggono: la prima, una definizione che ben determini in che consista lo stato fluido di un corpo: la seconda, l'introduzione delle analoghe modificazioni nelle equazioni generali onde piegarle alla più particolare rappresentazione di cui ora ci vineni bi bisogno.

Di tutte le definizioni che si sono date dei fluidi parmi la più chiara quella dei fisici moderni, la quale inoltre è la sola che renda ragione del perchè uno stesso corpo possa passare dallo stato solido al fluido, e ritornare dal secondo al primo. Presentemente si ritiene che lo stato fluido in un corpo provenga dalla distanza rispettiva che prendono le sue molecole maggiore che nello stato solido: in conseguenza cessa, o almeno non dà più effetto apprezzabile, l'azione secondaria delle molecole dovuta alla loro diversa figura, azione che nella minore lontananza di esse era in giuoco e produceva la solidità. Ecco le parole del Poisson. « Dans les corps solides, cristallisés ou « non, la cause particulière qui retient les molécules sur les « directions où elles sont plus ou moins resserrées, ne peut « être que la partie de leur action qui dépend de leur forme « et de leur situation relatives. Si l'on écarte les molécules « par une addition de calorique, cette force secondaire diminue « en général plus rapidement que l'autre partie de leur action « mutuelle: son effet peut devenir insensible: et le corps passe « alors à l'état fluide ». (Journal de l'École Polyt. Cah. XX. pag. 93.). Pertanto i corpi fluidi sono quelli in cui le molecole, quantunque non lo siano, possono riguardarsi come se fossero sferiche: infatti se fossero sferiche non avrebbe più luogo azione dovuta alla figura di esse (rivedi il già detto al numº. 54). Adottata questa definizione, vediamo come debbano essere

Adottata questa definizione, vediamo come debbano essere ora considerate le sei quantità Δ_s , B_b , C_b , D_c , F_c , F_c e le sei Δ_s , E_s , E

Così quelle sei prime quantità si mutano nelle seconde sei, unicamente col mutare le p, q, r nelle x, y, z. Il ch. Geometra Sig. Mossotti ha espressa efficacemente una tale proprietà colle seguenti parole: « i fluidi differiscono dai solidi in quanto che « le forze che ciascuna molecola spiega sulle altre, sono, pro-« babilmente per causa di un maggiore scostamento, indipen-« denti dall'orientazione degli assi della sua figura ». (Lezioni Elem. di fisica matematica. T. I. pag. 116. Però quantunque le 2A, 2B, ec. debbano essere fatte colle p, q, r come le A, E, ec. colle x, y, z, e solo differirne in quanto contengono le prime lettere in luogo delle seconde: tuttavia non hanno precisamente questa idea nelle equazioni (24) numº. 50. Se ben si considera l'andamento analitico del numº. 50., le 2A, 2B, 2C, D, E, F in quelle equazioni (24) hanno ricevuto al posto delle p, q, r i loro valori dati dalle equazioni (31) numº, 40. Veramente in una tale sostituzione spariscono le dodici quantità f, g, h, α_i, β_i , ec., e l'effetto torna lo stesso come scrivendo le x, y, zin luogo delle p, q, r. Per altro l'identità di queste due proposizioni non è evidente, e si può essere d'accordo sull'una senza conceder di subito l'altra. Si arriva a convincersene richiamando le espressioni (35), (38) del numº. 54, e verificando col fatto che la sostituzione dei valori (31) numº, 40, muta le prime nelle (36) e le seconde in altre a loro simili, proprio come se si scrivessero le x, y, z al luogo delle p, q, r. L'effetto succede in forza delle equazioni (4) numº. 33. Lagrange avea notata la singolarità di questo risultamento analitico nelle espressioni come le (35) (Vedi M. A. T. I. pag. 254) e ultimamente il Sig. Cauchy fece di questa proprietà in alcune funzioni delle coordinate soggetto di speciali ricerche (Exercices d'Analyse et de Physique Math. T. I. pag. 107.).

Conviene ora riflettere che le azioni fra molecola e molecola, quando non è in giucco la figura delle medesime, non possono dipendere che dalle reciproche distanze, e che per l'effetto complessivo di tutte queste azioni elementari sul punto (p, q, r) ovvero (x, y, z) possono anche influire gli angoli che

Tomo XXIV. P.ze I.

ianno fra loro le rette congiungenti. le molecole. Siccome poi tanto negli uni che negli altri di detti elementi analitici (formole (35), (38)) l'indicata proprietà si verifica, saremo condotti ad ammettere ch' essa si verifica anche nelle sei quantità più volte ricordate. Adunque nelle equazioni (24) mum'. 5c. le $2\Lambda_{s}$ 2B cc. in cui le p, q, r, hanno preso i valori (31) mum'. 4p. vengono in sostanza ad aver ricevute le lettere x_{s}, y_{s} in luogo delle p, q, r, p con ciò si sono mutate nelle stesse Λ , \mathbb{Z} , cc. dei primi membri.

Ma come va che nelle dette equazioni (a4) veggonsi nei secondi membri i nove coseni a_i , β_i , γ_i , a_s , ec., mentre, se ben si considerano le cose dette sul fine del num. 36, essi nel caso presente (stante l'assenza degli altri çoseni a_i , a_s , a_s , ... e dei corrispondenti b_i , b_s , b_s ,...) non entriano ne nelle 2A, 2B, ec., nè nelle $\Lambda_i \subseteq c$.? Sembra che in quelle equazioni (a4) i secondi membri siano in contradizione coi primi. Giò e verissimo; ma è appunto dal non potere i nove coseni α_i , β_i , γ_i , α_s , ec. entrare nelle anzidette equazioni se non apparentemente, che emergono le proprietà per le quali le solite sei quantità vengono ad essere particolarizzate ed adattate al caso dei fluidi : ll che passiamo a vedere.

62. Premettiamo che tra quei nove coseni essendovi sei equazioni sostanzialmente diverse (cioè le (3), o(4) del numº 33.), vi è modo di determinare sei di essi in funzione dei tre che rimangono, quando questi siano stati opportunamente scelti. Ecco le eleganti formole del Monge (*). Per le tre arbitrarie sono state societe le tre quantità α₁, β₂, γ₃, e avendo posto

M = 1 +
$$\alpha_1$$
 + β_2 + γ_3
N = 1 + α_1 - β_2 - γ_3
P = 1 - α_1 + β_2 - γ_3
Q = 1 - α_1 - β_2 + γ_3

^(*) Lacroix, Traité de Calcul, T. I. pag. 533.

'il suddetto autore ha trovato essere

$$\beta_{l} = \frac{1}{2}\sqrt{NP} + \frac{1}{2}\sqrt{MQ}$$

$$\alpha_{s} = \frac{1}{2}\sqrt{NP} - \frac{1}{2}\sqrt{MQ}$$

$$\alpha_{t} = \frac{1}{2}\sqrt{NQ} + \frac{1}{2}\sqrt{MP}$$

$$\gamma_{t} = \frac{1}{2}\sqrt{NQ} - \frac{1}{2}\sqrt{MQ}$$

$$\gamma_{t} = \frac{1}{2}\sqrt{PQ} + \frac{1}{2}\sqrt{MQ}$$

$$\beta_{t} = \frac{1}{2}\sqrt{PQ} - \frac{1}{2}\sqrt{MQ}$$

formole che si possono non difficilmente verificare a posteriori sostituendo gli ottenuti valori (2) nelle equazioni (3) o (4) del num. 33. e riconoscendo come esse risultino identicamente saddisfatte

Non è poi difficile dalle precedenti formole (a) dedurer gli sviluppi in serie secondo le potenze e i prodotti delle tre indeterminate α , β , γ , γ . Le operazioni si eseguiscono coi procedimenti ordinarj ed ovvj, e fermandoci ai termini di due dimensioni, otteniamo :

$$\beta_{1} = 1 - \frac{1}{2} a^{3}, -\frac{1}{2} \beta^{3}, + ec.$$

$$a_{2} = 1 - \frac{1}{2} a^{3}, -\frac{1}{2} \gamma^{3}, + ec.$$

$$\gamma_{1} = 1 - \frac{1}{2} \beta^{3}, -\frac{1}{2} \gamma^{3}, + ec.$$

$$a_{2} = -\gamma_{3} + a_{1} \beta_{4} + ec.$$

$$\beta_{3} = -a_{1} + \beta_{4} \gamma_{3} + ec.$$

$$\gamma_{1} = -\beta_{4} + a_{1} \gamma_{3} + ec.$$

Ora sostituiscansi questi valori (3) nei secondi membri delle equazioni (24) num^o. 50., e ordinando per le potenze e i prodotti delle tre indeterminate α_i , β_* , γ_3 , avremo

 $\Lambda = -2B - 2D\alpha_1 + 2F\beta_2 + 2E\alpha_1\beta_2 - 2(A - B)\alpha_1^2 + 2(B - C)\beta_2^3 + ec.$ $\Xi = -2C - 2F\beta_s + 2E\gamma_s + 2D\beta_s\gamma_s - 2(B - C)\beta_s^s + 2(C - A)\gamma_s^s + ec.$ $\Pi = -2A - 2E\gamma_3 + 2D\alpha_1 + 2F\alpha_1\gamma_3 - 2(C - A)\gamma_3 + 2(A - B)\alpha_1 + ec.$ $\Sigma = -F - 2(B - C)\beta_s - 2(C - A)\alpha_s\gamma_s + D(\gamma_s - 2\alpha_s\beta_s)$

 $-E(\alpha_1+\beta_2\gamma_3)+F(2\beta_3+\frac{1}{2}\alpha_3+\frac{1}{2}\gamma_3)+ec.$ (4) Φ —D= $\alpha(A=B)\alpha$. $\alpha(B=C)\beta$, γ_3 + $E(\beta_3$ = α_3 γ_3) $-F(\gamma_s+\alpha_s\beta_s)+D(2\alpha^s,+\frac{1}{2}\beta^s,+\frac{1}{2}\gamma^s)+ec.$ $\Psi = -E - 2(C - A)\gamma_3 - 2(A - B)\alpha_1\beta_2 + F(\alpha_1 - 2\beta_1\gamma_3)$ $-D(\beta_2+\alpha_1\gamma_3)+E(2\gamma^2_3+\frac{1}{2}\alpha^2_4+\frac{1}{2}\beta^2_2)+ec.$

non ritenendo se non i termini nei quali le quantità angolari sono a due dimensioni.

Siccome queste equazioni debbono sussistere indipendentemente dalle tre indeterminate α_i , β_s , γ_3 , le quali restano assolutamente arbitrarie, è necessario che in esse siano eguali a zero tutti i coefficienti delle diverse potenze e dei diversi prodotti delle indeterminate stesse. Quindi primieramente si cavano le equazioni

(5)
$$\Lambda = -2B; \Xi = -2C; \Pi = -2A$$

 $\Sigma = -F; \Phi = -D; \Psi = -E;$

poi dall' annullare i coefficienti anzidetti quest' altre, e unicamente queste:

D=0; E=0; F=0

A - B =
$$\circ$$
; B - C = \circ ; C - A = \circ .

Le tre ultime si riducono alle due

A = B = C(8)

per le quali le (5) ci somministrano dotti delle tre indetermini, $\Pi = \Xi \triangleq \Lambda$

(9)

A motivo poi delle prime fra le (7), le (6) diventano

(10)
$$\Sigma = 0$$
; $\Phi = 0$; $\Psi = 0$.

Se volessimo prendere ad esame le equazioni che si deducono dall'annullare i coefficienti nei termini ulteriori delle serie (4), non faremmo che sempre avere e riavere le stesse equazioni già ottenute (7), (8), le quali potevano dedursi dalle serie (4) ritenendovi anche soltanto i termini ove le indeterminate si trovano ad una dimensione. Può valere a riconferna l'osservare che, date le (7), (8), deduciamo subito dalle equazioni (24) num". 5c. le equazioni (9), (1c) in forza delle equazioni (4) num". 33.

Le equazioni (9), (10) sono quelle che esprimono la natura del fluido: per esse le equazioni generali (25) numº. 5c. spettanti al moto di un corpo qualunque, si particolarizzano e si adattano a significare il moto de'fluidi. Le equazioni modificate riescono

(i1)
$$\Gamma\left(X - \frac{d^3x}{dt^2}\right) + \frac{d\Lambda}{dx} = 0$$

$$\Gamma\left(Y - \frac{d^3y}{dt^2}\right) + \frac{d\Lambda}{dy} = 0$$

$$\Gamma\left(Z - \frac{d^3x}{dt^2}\right) + \frac{d\Lambda}{dx} = 0.$$

Queste sono le notissime equazioni del movimento de' fluidi; delle quali i Geometri sono in possesso da molto tempo, e la di cui esattezza in tutti i casi venne dal Poisson negata. Così la teorica analitica del moto de' fluidi dataci da Eulero, ridimostrata da Lagrange partendo da un principio diverso, si trova riconfermata anche dalle moderne teoriche fisiche quando si tengano entro i giusti limiti: del che diremo in appresso.

63. La precedente dimostrazione parmi tanto importante, che mi preme metterla in salvo da varie obbjezioni che possono presentarsi alla mente degli studiosi: sponendo le quali farò di comprendervi anche quelle a cui intendeva di alludenti un passo del num. 56 Prima obbiezione. Che la risultante

di tutte le forze interne applicate al punto (p, q, r) ovvero (x, y, z) debba essere (quando le molecole sono o possono considerarsi sferiche) funzione delle sole distanze molecolari e degli angoli fatti dalle direzioni di esse (espressioni (35), (38) numº. 54.), questo si può agevolmente comprendere: quindi nessun dubbio che detta risultante abbia la proprietà riscontrata nelle formole (35), (38). Ma che la stessa proprietà debba sussistere in ciascuna delle sei 2A, 2B, ec., ovvero A, E, ec., ciò non pare abbastanza provato, potendo darsi che queste quantità vengano da quella risultante decomposta secondo direzioni vincolate cogli assi. Allora reggerebbe bensì la proprietà dell'essere le sei quantità fatte prima colle p, q, r affatto similmente come dopo colle x, y, z, senza che si avveri il passaggio dalla prima scrittura alla seconda per via della sostituzione dei valori (31) numº. 40. Sta infatti la prima proprietà e non la seconda nei coseni espressi dalle formole (37) num.º 54. - Questa obbjezione è forte, e tale che la risposta efficace a pienamente dissiparla ci convienrimetterla al Capo seguente, dove vedremo col fatto che le sei quantità dipendono interamente da elementi analitici, nei quali si verifica la seconda proprietà anzidetta del pari che nelle formole (35), (38). Qui però possiamo dire in anticipazione che la quantità (15) numº. 47. esprimente la totalità delle azioni interne, viene rappresentata altrimenti mediante una somma

$S_1 \delta s_1 + S_2 \delta s_3 + S_3 \delta s_3 + ec.$

nella quale s_1 , s_2 , s_3 , s_c . e. essendo gli stessi radicali scritti nelle formole (35), godono la nota proprietà, e ne godono anche i coefficienti S_1 , S_2 , S_3 , e.e. esprimenti le forze che operano secondo quelle direzioni, quando sono funzioni solamente delle auzidette distanze s_1 , s_3 , s_3 , e.e. L'o perazione indicata dalla caratteristica ∂ si ferma dapprima sulle ∂p_1 , ∂q_2 , ∂r_3 , indi pasando si movi assi, sulle ∂x_i , ∂r_j , ∂r_j , e, e le quantità che entrano a comporre le equazioni generali sono raccolte dai coefficienti di si fatte variazioni. Non è possibile (badisi hene) che la seconda volta ricompajano quei coseni α_1 , β_1 , γ_1 , α_2 , α_3 , e.e. che

sono già svaniti sostituendo nei radicali s., sa, sa, ec. alle p. q. r i valori (31) numº. 4c.: di qualunque sorta siano le posteriori operazioni analitiche. Per maggiore intelligenza gioverà ricordare la distinzione fatta da Lagrange (M. A. T. I. pag. 31-32) delle forze interne ed esterne secondo che hanno per loro centri punti appartenenti o non appartenenti al sistema. È nel solo primo caso che i radicali s, s, s, s, ... dell' espressione (12) godono della più volte proclamata proprietà d'indipendenza dagli assi: per le forze esterne il mutamento degli assi importa che si faccia la risoluzione e composizione praticata mediante le equazioni (30) numº. 55. Ma di qui appunto può nascere una seconda difficoltà. Se per le forze esterne, mutando gli assi, fu trovata necessaria la decomposizione indicata nelle anzidette equazioni (30), pare che dovrebbe farsi altrettanto sulle 2A, 2B, ec. che pur sono forze o somme di forze. Comincerò a rispondere coll'osservazione generale, che quando una verità è ben dimostrata, non è necessario per conservarne la persuasione trattenerci a trovar la soluzione d'ogni dubbio che possa insorgere; si sa in prevenzione che una tale soluzione ci deve essere. Basterà in tali casi (e sarà un di più) a togliere quelle ubbie anche solo accennare di dove sarebbe possibile cavare la risposta diretta, senza veramente dedurla in modo perspicuo: giacchè questa deduzione equivarrebbe ad una seconda dimostrazione, la quale non è necessaria quando se ne ha già un' altra. Nel caso attuale rifletteremo al modo con cui le sei quantità 2A, 2B, ec. ovvero A, E, ec. entrano nelle equazioni (42), (23); vi entrano dopo che se ne sono prese le derivate parziali per le tre variabili p, q, r, ovvero x, y, z. Deve ritenersi che tale derivazione supplisca alla risoluzione e composizione indicate nelle (39) numº. 55.; quelle sei quantità che stanno senza alcun riferimento ad assi determinati, allorquando se ne prendono le derivate per p, q, r, si riferiscono agli assi delle p, q, r, e allorquando se ne prendono le derivate per x, y, z, si riferiscono agli assi delle x, y, z. Si scorge un chiaro indizio di ciò osservando le formole (21), (22) del numº. 50. e notando che nel secondo caso entrano quei coseni a, , \$, , y .. a .. ec. , pei quali vien determinata la posizione dei secondi assi relativamente ai primi. - D'indole somigliante è la difficoltà che può occorrere a chi prende a considerare le sei quantità A. E. ec. . non più come somme, ma come veri integrali definiti, siccome si è detto al numº. 56. Finchè si riguardano come somme di termini dedotti dalla espressione (12), non si dura fatica ad ammettere ch' esse assumano lo stesso valore numerico, tanto mettendo i valori di tutte le p. q. r. quanto mettendo quelli di tutte le x, y, z: tali somme, per la più volte ricordata proprietà, non portano con se l'idea di un riferimento ad assi determinati. Ma gl' integrali definiti involgono naturalmente il concetto di limiti assegnati dalla figura del corpo, che debbono condurre a valori diversi quando gli assi ai quali la figura del corpo è riferita, non sono più i medesimi. Sia: nel caso per altro di questi integrali definiti abbiamo la prima volta salvate le variabili p, q, r, coordinate del punto generico, e la seconda le variabili x, y, z. Accadrà (senza trattenerci a ridur la cosa ostensibile, non essendo necessario, come si disse di sopra) che quando alle p, q, r si sostituiscano i loro valori in x, y, z (formole (31) numº. 40.) i coseni a, B, y, a, ec. vadano a combinarsi cogli altri simili elementi analitici in virtù dei quali gl' integrali definiti hanno la seconda volta valori diversi dagli avuti dapprima, sì che da tal combinazione risulti una eliminazione di essi elementi per effetto delle solite equazioni del numº. 33., e si abbiano valori non vincolati ad assi. - Da ultimo alcuno potrebbe dire. Voi volete che nel caso dei fluidi le forze interne sieno funzioni soltanto delle distanze: ma è manifesto che a svolgere l'azione di queste forze contribuiscono assaissimo le forze esterne X, Y, Z. Ponete che le espressioni analitiche delle forze interne abbiano per l'indicata ragione ad essere funzioni anche delle X, Y, Z: siccome queste esterne hanno centri stranieri al sistema, non regge più per esse la proprietà di mantenere gli stessi valori cambiando gli assi, ed ecco a terra tutto quanto si è dedotto appoggiandosi a tal proprietà attribuita alle A, Z, ec. Rispondo non credere io che le espressioni delle forze interne abbiano a contenere le X, X, sensa dubbio queste seconde influiscono s'ulla attuazione di quelle, ma influiscono diminuendo o accrescendo le distanze, fra le molecole, sia pure anche insensibilmente, come nei liquidi. Facendo dunque le forze interne funzioni delle distanze, vengono ad avere espresso implicitamente nella condizione alterata delle dette distanze l'effetto delle forze esterne, senza bisogno di farle altresi funzioni dei loro valori analitici. — Potrei aggiungere altre parole per meglio dissipare le difficoltà già esposte, e prevenime delle nuove: più però di quanto potrei qui soggiungere varranno a tale intento le dottrine del Capo seguente.

64. È notissimo che nella teorica Euleriana si suole aggiungere alle tre equazioni (11) ma quarta detta della continuità, che è la (33) o (34) num". 14. già dimostrata in generale nel Capo I. Qui inoltre chiameremo l'attenzione del leitore sopra un teorema sussistente fra le quantità alla superficie del fluido, il quale risulta dalle tre equazioni cavate dall'integrale duplicato (34) num". 5-z., siccome dicemmo sulla fine di quel numero. A motivo delle precedenti (9), (1c) quelle tre equazioni diventano

(14) f(x, y, z, t) = 0

 l^{\ast} equazione della superficie del fluido, sappiamo che se ne ricavano le due

tho ie due
$$\frac{dz}{dx} = -\frac{f'(z)}{f'(z)}; \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{f'(y)}{f'(z)};$$

$$Tomo \ XXIV. \ P.^{te} \ I.$$

quindi, ponendo per comodo

(15)
$$\theta = \frac{\Lambda}{(\Gamma)}; R = \sqrt{f'(x)^2 + f''(y)^2 + f''(z)^2}$$

otteniamo prontamente dalle precedenti (13)

(16)
$$\lambda = \theta \cdot \frac{f'(x)}{R}$$
; $\mu = \theta \cdot \frac{f'(y)}{R}$; $v = \theta \cdot \frac{f'(x)}{R}$;

formole dalle quali, in conseguenza di un teorema notissimo di Geometria amalitica, veniamo a conchiudere che la direzione secondo cui opera la forza θ , anche nello stato di moto, è normale alla superficie del fluido. Ognun vede che questo teorema e cesclusivo ai fluidi, giacchè non avrebbe luogo se non si verificassero le equazioni (0), $(1\circ)$. Se ne possono dedurre altre

considerazioni sulle quali torneremo fra poco.

65. Conviene ora che ci tratteniamo a ragionare intorno alla divergenza fra le nostre deduzioni e quelle del Poisson. La nostra analisi, riconfermando la teorica Euleriana, abbraccerebbe tanto i fluidi in equilibrio che quelli in moto, tanto i liquidi come i fluidi aeriformi. Poisson invece trovò di dover aggiungere nuovi termini alle equazioni generali del moto de' fluidi: ed ecco, se io l'ho ben inteso, il filo de' suoi ragionamenti. Comincia a dire che le equazioni che già si avevano per esprimere il movimento de' fluidi, erano dedotte mediante il principio di D' Alembert da quelle dell' equilibrio, le quali suppongono il principio della pressione eguale in tutti i versi, principio riconosciuto vero sperimentalmente soltanto ne' fluidi in riposo. Prosegue e asserisce che la proprietà di premere egualmente in tutti i versi viene da un'altra proprietà che hanno i fluidi, di ricostruirsi sempre similmente a se stessi attorno di ciascun loro punto. Riflette poi giustamente che tale ricostruzione esige un po' di tempo per essere effettuata: e si trattasse anche di un intervallo brevissimo, quando il fluido è in moto non può quella ricostruzione essere ad ogni istante perfetta. Mancando la ricostruzione perfetta, manca, secondo lui, la pressione eguale in tutti i versi: quindi debbono essere in difetto nel caso del moto quelle equazioni che da un tale principio prendono origine. Ĉiterò per maggiore cautela un passo dell'Autore: (Journal de l' École Polyt. Cah. XX. pag. 95. - Annales de Physique et de Chimie, Tom. 42, pag. 170.) « Lorsque les molécules d'un fluide se déplacent, elles em-« ploient un certain temps, quelque petit qu' on le suppose, « pour parvenir autour de chaque point, à une disposition « semblable à leur arrangement primitif, et pour exercer de « nouveau une pression égale en tous sens. Pendant ce très-« court intervalle de temps, qui peut être néanmoins très-dif-« férent pour les différents fluides, la pression n'est pas né-« cessairement la même suivant toutes les directions; toutefois « il serait impossible de s' en appercevoir dans l'état d'équi-« libre qui ne s'observe qu'après que cet intervalle de temps « est écoulé. Mais, dans le cas du mouvement, la position re-« spective des molécules changeant sans cesse, on comprend « que la considération du temps dont il s'agit peut donner « lieu à une modification dans le principe de l'égalité de pres-« sion en tous sens, et dans la forme des équations différen-« tielles qui s' en déduisent. C' est ce qui arrive en effet : et « c'est a cette circonstance que sont dus les nouveaux termes « que j' ai introduits dans les équations générales du mouve-« ment des fluides, »

La risposta, giacchè l'oggetto della discussione è molto complesso, la divideremo in più parti. Essere o non essere vero che le note equazioni non avessero ai tempi di Poisson altra dimostrazione fuori di quella appoggata al principio della pressione eggale in tutti i versi, è questa una questione incidentale sulla quale, per non abbracciar troppo in una volta, ritor-neremo in altro numero. Qui mi fermerò a domandrae di dove cava il Poisson quell'altra proprieta dei fluidi, ch' egli crede fondamentale per ottener la pressione eguale in tutti i versi « de se reconstituer toujours semblablement à cux-mèmes au- « tour de chaque point » (Cah. XX. pag. 9a); per la quale anche dopo gli spostamenti delle molecole « un fluide se trouve

« constitué autour de chaque point, comme il l'était aupara-« vant.... comme un système qui reste semblable à lui-même. « et qui est seulement construit sur une plus petite ou sur « une plus grande échelle » (pag. 91). La vera definizione del fluido l'abbiamo presa più sopra dallo stesso Poisson (rileggi il passo riferito al principio di questo Capo) ed è di quel corpo in cui le molecole sono a tali distanze fra loro, che vi cessa l'azione secondaria dovuta alla figura; ma io non vedo un vincolo necessario fra questa definizione e la proprietà della ricostruzione sempre simile a se stessa intorno ad ogni punto. Prescindo dal ripetere ciò che ho dimostrato in altro luogo, cioè che una disposizione di molecole simmetrica tutt' all' intorno di ciascuna, se è possibile in un piano, è impossibile nello spazio (Vedi Giornale dell' I. R. Istituto Lombardo Tom. VI. pag. 328.) e chieggo soltanto: quand' anche le molecole in moto si allontanino fra loro più per un verso che per un altro, torna per questo in giuoco l'azione molecolare secondaria dovuta alla figura? Mainò: giacchè suppor ciò sarebbe come supporre che il moto possa solidificare qualche parte del fluido. Ma se non torna in giuoco quell'azione, abbiamo ancora tutto ciò che si esige per condurci alle equazioni (11): i ragionamenti stanno anche nella supposizione che aumentino le distanze molecolari più che non ve n'è bisogno per avere lo stato fluido: si scorge esservi per tali distanze un limite in meno, ma non in più. Si dice che nel moto non v'è tempo per la ricostruzione del fluido ad ogni istante come nel caso dell' equilibrio: sia: sono inclinato a crederlo anch'io; ma non m'importa di ciò; c'è però sempre fra le molecole almeno la distanza necessaria a costituire la fluidità, e questo basta per la verità delle nostre equazioni. L'equivoco preso dal Poisson (se mi è lecita la parola trattandosi di un si distinto Geometra) fu cagionato primieramente dall'aver compenetrate due cose le quali possono stare l'una senza l'altra: la distanza delle molecole necessaria alla cessazione della forza secondaria, e la di loro distribuzione uniforme intorno a ciascun punto; indi nell' aver

presa la seconda proprietà, che a lui parve di dover concedere ai fluidi, piuttosto che la prima a base delle sue ricerche analitiche. Invece bisogne piantar le equizioni sulla sola prima proprietà, che è una cosa indipendente da quell'aggiunta fittizia, e che è l'unica che costituisca la vera essenza dello stato fluido.

Eppure, si replicherà, coll'aggiunta di quei nuovi termini il Poisson dà o promette spiegazioni di fenomeni, le quali altrimenti non si ottengono. Dice in un luogo (pag. 2) doversi probabilmente alla differenza da lui avvertita tra lo stato di equilibrio di un fluido e quello di moto la cagione per cui nei fucili a vapore la pressione è enorme sul projettile, ed è lateralmente molto minore sulle pareti. Al qual proposito notero parermi che il fatto possa avere una facile spiegazione mediante un ragionamento molto simile a quello col quale Galileo provava dover essere la forza della percossa infinita per rapporto alla pressione (Vedi: Lezioni Accademiche del Torricelli: Lezione seconda.). Gl' impulsi sul projettile, ripetuti a capo di tempuscoli estremamente piccoli, si accumulano in un tempo che è piccolissimo ma pur finito e contiene in conseguenza un numero stragrande di quei tempuscoli: mentre gl'impulsi contrastati dalla resistenza delle pareti vengono estinti di mano in mano che si producono. Quanto ai vantaggi che l' Autore dice dover derivare dai suoi nuovi termini per le teoriche del suono e della luce (pag. 3), egli si limita ad accennarli, anzi a presagirli. Non posso quindi metterli a disamina: solo dirò che questa materia delle vibrazioni vorrebbe essere trattata a parte e molto in lungo, costituendo un ordine di fenomeni singolari espressi per mezzo di equazioni loro proprie: ho qualche speranza di potermene occupare in altra occasione.

Il Sig. Mossotti dopo il passo più sopra citato al principio del Capo, viene anch' egli a parlare di molecole tutte uniformemente distribuite le une attorno alle altre. Ne di ciò gli farò carico, avendo io stesso bisogno di maggiore indulgenza per essermi (Nella Memoria inserita nel T. XXI di questi Atti. S. VII. J lasciato indurre dai citati passi del Poisson a stabilire un principio di simmetria, e a derivarne equazioni riconosciute poscia insussistenti (Vedi il già detto al principio di questa Memoria). Entrambi avrenmo idovuto esigere dallo Sertitor francese che ci dimostrasse (giacche non è per nulla evidente) come dalla cessazione della forza secondaria scaturiise necessariamente pei fluidi la proprietà della distribuzione regolare delle molecole. Si sa per altro quanta efficacia abbia un'autorità per tanti titoli giustamente venerata, affinche è induciamo ad adottarne lo asserzioni senza far precedere l'esame voluto dall'importanza dell'arromento.

Ma è poi vero che il principio della pressione eguale in tutti i versi sia intimamente legato colla distribuzione regolare delle molecole, si che non possa sussistere l'uno senza l'altra? (Poisson, Traité de Mécanique, T. II. pag. 506,), lo ne dubito assai, e credo che qui pure siasi corso un po' troppo avanti nelle deduzioni : e ciò perchè non si sono ancora chiarite del tutto le idee intorno a quella quantità che noi chiamiamo pressione interna nei fluidi. È questo un argomento dilicato, dove è bene fare delle distinzioni, nè è dato sbrigarsi in poche parole: quindi vi tornerò sopra in un numero a parte. Intanto osserverò che un altro illustre geometra francese il Sig. Cauchy dissente anch' egli dal Poisson su questo punto apertamente, avendo scritto nei suoi primi Esercizi di matematica (Tom. III. pag. 226.) « on voit par les détails dans lesquels nous venons « d'entrer que, pour obtenir l'égalité de pression en tous sens, « dans un système des molécules qui se repoussent, on n'a « pas besoin d'admettre, come l'a fait M. Poisson, une distri-« bution particulière des molécules autour de l'une quelconque « d'entre elles, » Il che sia detto senza intendere di pronunciarmi per intero assenziente a quelle considerazioni mercè le quali il Sig. Cauchy compone egli pure le equazioni generali del moto dei corpi. Rispetto la sua maniera di vedere, ma tengo la mia, o piuttosto non la mia, ma quella connessa colla filosofia dei metodi del mio Caposcuola, come ho dichiarato fin da principio.

E qui, poiche torna in campo la questione sul modo di mettere insieme le equazioni generali del moto de' corpi, dovremo noi credere che la più volte citata opera del Poisson (Journal Polyt. Cah. XX) non possa andar soggetta ad altre osservazioni oltre le più sopra accennate? L'Autore dice (pag. 7) di non fare nella sua Memoria se non una sola ipotesi, quella di un numero estremamente grande di molecole comprese in uno spazio ancora insensibile: e questa è già molto. Ma dove dice (pag. 5 in fine) che dagli interstizi vuoti di materia ponderabile non parte alcuna forza per agire sulle molecole, quantunque conceda che in esse possano trovarsi gli imponderabili; quando ammette pel calorico (pag. 6) certe attrazioni al di fuori, e fa la forza elementare fra molecola e molecola funzione solamente della distanza; quando (e questo è notabilissimo) avanza (pag. 8) che le forze secondarie provenienti dalla figura, purchè i corpi non siano cristallizzati, debbono compensarsi e non produrre effetto; allorche (pag. 35-36) asserisce che nei corpi solidi, anche dopo un mutamento di forma, le molecole già dimoranti sopra una stessa linea retta, vi perseverano; allorche lega (pag. 61) il principio della pressione eguale in tutti i versi a quello della dilatazione o contrazione lineare eguale in tutte le direzioni; quando intende (pag. 91-92) che nei fluidi la pressione vari colle coordinate, ma resti costante tntt' all' ingiro fin dove si estende quella lunghezza ch' egli chiama l'intervallo medio; in tutti questi passi e negli altri in gran numero (pag. 13, 23, 24, 141, ec., ec.) dove si rigettano, supponendoli insensibili, parecchi elementi che riuscirebbero incomodi: in questi passi, dico, non entra egli molto d'ipotetico? Non nego che varie di tali supposizioni sono accompagnate da ragionamenti che ne dimostrano, se non la realtà. almeno la convenienza; ma non sono ragionamenti che valgano a produrre una piena persuasione, e che tanto più non accontentano, in quanto tien loro dietro un linguaggio di asseveranza . quale appena sarebbe lecito di assumere dopo le dimostrazioni più vittoriose.

66. Dissi più sopra (numº. 62) che le equazioni (11) furono ridimostrate da Lagrange partendo da un altro principio: e lo dissi appositamente, perchè ci si volle far credere ch'esse non avessero finora se non un appoggio nell'analogia, trasportando ai fluidi in moto il principio della pressione eguale in tutti i versi riconosciuto vero nei fluidi in equilibrio. Lagrange quando trattò del moto de' liquidi (M. A. T. II. pag. 287.) non assunse altra condizione fuori di quella del dovere la densità rimanere costante in qualunque ipotesi di movimento, e quando passò al moto de' fluidi elastici, si servi di quel suo principio un po' troppo astratto di cui facemmo parola al cominciare del Capo precedente. Ora ciò è ben altra cosa che ammettere il solito principio idrostatico. Per verità fu detto anche questo: fu detto che assumere la condizione della costanza della densità equivaleva ad assumere il principio della pressione eguale in tutti i versi: ma non bastava dirlo, bisognava provarlo: invece si può provare il contrario. Noi possiamo immaginare benissimo dei solidi nei quali la densità sia e debba sempre rimanere costante: eppure a tutti è noto che nei solidi non si verifica il principio della pressione eguale in tutti i versi. Che se nel moto dei solidi a densità costante non si commette errore col non tener conto della condizione anzidetta, come si fa pei fluidi, mostreremo fra poco il perche ciò avvenga. Badisi ch' io non pretendo sostenere che la definizione dei fluidi quale ci risultava dalla maniera con cui Lagrange ne scrisse i movimenti, fosse la più chiara: convengo che seguendo le idee dei moderni esposte al principio di questo Capo, abbiamo guadagnato una definizione assai migliore. Quella maniera però di considerare i fluidi era esatta: Lagrange derivò anzi da essa come corollario il principio della pressione eguale in tutti i versi: nè egli era uomo da cadere in una petizione di principio. Per maggiormente illustrare questo argomento non riuscirà discaro ch' io qui metta la dimostrazione delle equazioni generali del moto dei liquidi appoggiandola ai medesimi fondamenti che le furono dati nella Meccanica Analitica, ma però modificata in correlazione ai precedenti di questa Memoria.

La condizione dell' invariabilità della densità porta con se (rivedi l'equazione (6) numº. 9. del Capo I) l'equazione

H == costante

essendo H il sestinomio espresso nella equazione (4) numº, 9.

E appunto perche la densità deve essere invariabile in ogni ipotesi di movimento, possiamo dedurre dalla precedente l'equazione variata.

$$\delta H = 0.$$

Richiamate le cose dette ai numeri 31, 32 sulle espressioni segnate (36), (37): visto anche quanto si è praticato al num. 35., allorchè si è stabilita l'equazione generale pel moto de corpi solidi, sarà manifesto che nel caso attuale all'integrale triplicato che comprende le forze esterno.

(18)
$$\int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dx^2} \right) \delta x + ec. \right\}$$

dovremo per formare il primo membro dell'equazione generale spettante al moto de' liquidi aggiungere l' integrale triplicato

essendo A un coefficiente indeterminato.

Considerato il valore del sestinomio H (equazione (4) mun°.0, e l' operazione già fatta al numº. '14: per arrivare a quella espressione (3a) del valore di H', non incontreremo alcuna difficoltà a capire che il prodotto ΔθH equivale alla quantità seguente

(19)
$$Al_s \frac{d\vartheta x}{da} + \Delta m_t \frac{d\vartheta x}{db} + \Delta n_t \frac{d\vartheta x}{da}$$

$$+ \Delta l_s \frac{d\vartheta y}{da} + \Delta m_s \frac{d\vartheta y}{db} + \Delta n_s \frac{d\vartheta x}{da}$$

$$+ \Delta l_s \frac{d\vartheta z}{da} + \Delta m_s \frac{d\vartheta z}{db} + \Delta n_3 \frac{d\vartheta z}{da}$$

la quale deve subire trasformazioni analoghe alle praticate, quando trattavasi dei corpi solidi, sulla quantità (11) del numº. 36. Essa pertanto deve essere messa sotto la forma seguente

$$-\left(\frac{d \cdot M_1}{da} + \frac{d \cdot An_1}{de} + \frac{d \cdot An_2}{de}\right) \delta x$$

$$-\left(\frac{d \cdot M_1}{da} + \frac{d \cdot An_2}{db} + \frac{d \cdot An_2}{de}\right) \delta y$$

$$-\left(\frac{d \cdot M_1}{da} + \frac{d \cdot An_2}{da} + \frac{d \cdot An_2}{de}\right) \delta z$$

$$+ \frac{dL}{da} + \frac{dM}{db} + \frac{dM}{de}$$

essendosi poste per brevità

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \Lambda \left(l_i \, \delta x + l_i \, \delta y + l_3 \, \delta z \right) \\ \mathbf{M} &= \Lambda \left(m_i \, \delta x + m_s \, \delta y + m_3 \, \delta z \right) \\ \mathbf{N} &= \Lambda \left(n_i \, \delta x + n_s \, \delta y + n_3 \, \delta z \right) \end{aligned}$$

Introducendo la quantità (2a) sotto il secondo segno d'integne triplicato, che va sommato e compenetrato col precedente (18), si vede come sulle tre ultime parti di detta quantità può eseguiri alenna delle integrazioni per a o per bo per c. la quale trasporta quelle parti sotto integrali duplicati. Rimane sotto l'integrale triplicato una quantità dove si debhone annullare separatamente i coefficienti totali delle tre variazioni $\partial x, \partial y, \partial z$ ivi non affette da alcuna derivazione per a, b, c. Così si ottengono le tre equazioni

$$X - \frac{d^{n}z}{dz^{n}} - \frac{d \cdot M_{t}}{da} - \frac{d \cdot Aa_{t}}{da} - \frac{d \cdot Aa_{t}}{dc} = 0$$

$$(2a) \qquad Y - \frac{d^{n}y}{dt^{n}} - \frac{d \cdot M_{t}}{da} - \frac{d \cdot Aa_{t}}{dc} = \frac{d \cdot Aa_{t}}{dc} = 0$$

$$Z - \frac{d^{n}z}{dc} - \frac{d \cdot Aa_{t}}{da} - \frac{d \cdot Aa_{t}}{da} = \frac{1}{dc} - \frac{Aa_{t}}{dc} = 0$$

Sui tre trinomj a derivate parziali in ciascuna di queste tre convien praticare le trasformazioni indicate generalmente per mezzo delle equazioni (17), (18) del numº: 37. Esse equazioni (22) allora riduconsi

$$X = \frac{d^3x}{dt^2} = \frac{1}{\Gamma} \left(\frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dy} + \frac{dP_3}{dz} \right) = 0$$

$$Y = \frac{d^3y}{dt^2} = \frac{1}{\Gamma} \left(\frac{dQ_1}{dx} + \frac{dQ_2}{dx} + \frac{dQ_3}{dx} \right) = 0$$

$$(23) \qquad Y = \frac{1}{dt^2} - \frac{1}{\Gamma} \left(\frac{dR_1}{dx} + \frac{dR_2}{dy} + \frac{dR_3}{dz} \right) = 0$$

$$Z = \frac{d^3z}{dt^2} - \frac{1}{\Gamma} \left(\frac{dR_1}{dx} + \frac{dR_2}{dy} + \frac{dR_3}{dz} \right) = 0$$

essendo

$$P_{i} = \Gamma \Lambda \left(l, \frac{dx}{da} + m_{i} \frac{dx}{db} + n_{i} \frac{dx}{dc} \right)$$

$$P_s = \Gamma \Lambda \left(l_1 \frac{dy}{da} + m_1 \frac{dy}{db} + n_1 \frac{dy}{dc} \right)$$

$$P_3 = \Gamma \Lambda \left(l_1 \frac{dz}{da} + m_1 \frac{dz}{db} + n_1 \frac{dz}{dc} \right)$$

$$Q_z = \Gamma \Lambda \left(l_s \frac{dx}{da} + m_s \frac{dx}{db} + n_s \frac{dx}{dc} \right)$$

(24)
$$Q_s = \Gamma \Lambda \left(l_s \frac{dy}{da} + m_s \frac{dy}{db} + n_s \frac{dy}{dc} \right)$$

$$Q_3 = \Gamma \Lambda \left(l_a \frac{dz}{da} + m_a \frac{dz}{db} + n_a \frac{dz}{dc} \right)$$

$$R_{\tau} = \Gamma \Lambda \left(l_3 \frac{dx}{da} + m_3 \frac{dx}{db} + n_3 \frac{dx}{dc} \right)$$

$$R_{a} = \Gamma \Lambda \left(l_{3} \frac{dy}{da} + m_{3} \frac{dy}{db} + n_{3} \frac{dy}{dc} \right)$$

$$R_{3} = \Gamma \Lambda \left(l_{3} \frac{dz}{da} + m_{3} \frac{dz}{da} + n_{3} \frac{dz}{da} \right).$$

Presentemente osservando le nove equazioni identiche (28) del numº. 14. e la (6) del numº. 9., vediamo a colpo d'occhio risultare

$$P_1 = \Lambda$$
; $P_2 = 0$; $P_3 = 0$

(25)
$$Q_1 = 0$$
; $Q_2 = \Lambda$; $Q_3 = 0$
 $R_1 = 0$; $R_2 = 0$; $R_3 = \Lambda$

e quindi le (23) mutarsi nelle (11) di questo Capo, a meno del segno della quantità Λ , che non fa difetto, essendo questa quantità stata introdotta come un coefficiente indeterminato.

Per vedere uscire anche le equazioni (13) numº. 64. spettanti ai limiti del fluido, conviene, in corrispondenza a quanto si è fatto al numº, 51., trasformare il precedente integrale triplicato (18), e l'altro simile portato dall'equazione di condizione, coll'introdurre sotto il segno il fattore HΓ che non produce alterazione per essere eguale all'unità, e quindi passare dalle integrazioni prese per a, b, c a quelle prese per x, y, z. Inoltre bisogna praticare a dirittura sulla quantità (20) prima di collocarla sotto il secondo integrale le trasformazioni precedentemente descritte. Per la prima parte di essa quantità (20) abbiamo già veduto come si riducono i trinomi coefficienti delle variazioni dx, dy, dz; gli ultimi tre termini della espressione (20), visti i valori (21), ricordato il principio esposto nelle equazioni (17), (18) del numº. 37., e richiamate novellamente le equazioni identiche (28) del numº. 14., cangiansi per via di riduzioni che si presentano da per se stesse, nel trinomio

$$\frac{1}{\Gamma} \left(\frac{d \cdot \Lambda \delta x}{dx} + \frac{d \cdot \Lambda \delta y}{dy} + \frac{d \cdot \Lambda \delta z}{dz} \right).$$

così che la quantità (20) risulta equivalente a quest' altra

$$(26) \ -\frac{\tau}{\Gamma} \left(\frac{d\Lambda}{dx} \, \delta x + \frac{d\Lambda}{dy} \, \delta y \, + \frac{d\Lambda}{dz} \, \delta z \right) + \frac{\tau}{\Gamma} \left(\frac{d \cdot \Lambda \delta x}{dx} + \frac{d \cdot \Lambda \delta y}{dy} + \frac{d \cdot \Lambda \delta z}{dz} \right).$$

Se ne faccia la sostituzione sotto l'integrale triplicato risultante dall'unione dei due che nel caso attuale costituiscono il primo membro dell' equazione generale. Annullando, come si sa doversi fare, i coefficienti totali delle $\partial x_1, \partial y_1, \partial z_2$, ritornano le solite tre equazioni come sopra; ma vi è di più la parte che si colloca sotto integrali duplicati, la quale riesce

(27)
$$fdy fdz \cdot \Lambda \delta x + fdx fdz \cdot \Lambda \delta y + fdx fdy \cdot \Lambda \delta z$$
.

Essa va trattata come la quantità (27) del numº. 51.: va cioè, mediante le trasformazioni indicate al numº. 52., ridotta ad un solo integrale duplicato che risulta

(28)
$$\int dx \int dy \cdot \Lambda \left(\delta z - \frac{dz}{dx} \delta x - \frac{dz}{dy} \delta y \right);$$

poi sommata e fusa iu un solo integrale insiome a quello della quantità segnata (28) al num". 51. Allora debbono egungliarsi separatamente a zero i coefficienti delle variazioni $\partial x_1, \partial y_2, \partial z$: il che restituisce le equazioni (43) colla sola diversità del segno per la Λ , come sopra.

Si può osservare che la precedente analisi si piega anche in fluidi clastici quando si adotta per essi l'equazione di condizione H₁ = 1, dove H₁ abbia il valore (3) del mum. 45., equazione dimostrata al principio del mum. 46. In tal caso bi-sogna prima trasformare il precedente integrale (18) delle forze in un altro preso per le p. 9, 9, 5, come si è fatto allo stesso unim. 46.

67. La dimostrazione riferita nell'antecedente numero, dopo stabilita l'equazione di condizione (17) può prendere un altro andamento che per più titoli mi giova di esporre. Primieramente mi verrò per tal modo preparando alcune formole che avranno utili applicazioni nel Capo seguente: secondariamente otterremo una mova riconferma delle fondamentali equazioni (11): in terzo luogo potrò con questo mezzo provare una proposizione più sopra semplicemente anunuziata.

Conviene premettere la ricerca di una nuova espressione pel valore del sestinomio H.

Richiaminsi le nove equazioni identiche (28) del num². 14., e le sei denominazioni (equazioni (6)) del num². 34. Di quelle nove si quadrino la prima, la quarta e la settima, indi si sommino: avremo per le (6) num². 34

 $l^{2}_{i}\,t_{i}+m^{2}_{i}\,t_{s}+n^{2}_{i}\,t_{3}+2l_{i}\,m_{i}\,t_{b}+2l_{i}\,n_{i}\,t_{5}+2m_{i}\,n_{i}\,t_{6}=\mathrm{H}^{2}.$

Quadrando invece la seconda, la quinta e l'ottava di quelle (28) num°. 14., e sommandole troveremo

 $l^{s}_{s}t_{i} + m^{s}_{s}t_{s} + n^{s}_{s}t_{5} + 2l_{s}m_{s}t_{4} + 2l_{s}n_{s}t_{5} + 2m_{s}n_{s}t_{6} = H^{s}$. E similmente dalla terza, sesta e nona

 $l^{2}_{3}t_{1}+m^{2}_{3}t_{2}+n^{2}_{3}t_{3}+2l_{3}m_{3}t_{4}+2l_{3}n_{3}t_{5}+2m_{3}n_{3}t_{6}=\mathrm{H}^{2}.$

Si sommino ancora queste equazioni che ora ci siamo formate, ed otterremo

$$3H^{2} = (l^{2}_{1} + l^{2}_{2} + l^{2}_{3}) t_{1} + 2(l_{1}m_{1} + l_{2}m_{3} + l_{3}m_{3}) t_{4}$$

$$(29) + (m^2_1 + m^2_2 + m^2_3) t_2 + 2 (l_1 n_1 + l_2 n_3 + l_3 n_3) t_5 + (n^2_1 + n^2_2 + n^2_3) t_3 + 2 (m_1 n_1 + m_2 n_3 + m_3 n_3) t_6.$$

Presentemente si noti l'equazione identica

(30)
$$(A^{\circ}+B^{\circ}+C^{\circ})(L^{\circ}+M^{\circ}+N^{\circ}) - (AL+BM+CN)^{\circ}$$

facilmente verificabile mediante lo svolgimento delle operazioni indicate nei due membri: e su questo tipo, richiamate le denominazioni (27) numº. 14., riconosceremo vere le tre equazioni

$$P_1 + P_2 + P_3 = t_1t_3 - t_6$$

 $m^2_1 + m^2_2 + m^2_3 = t_1t_3 - t_6^2$

 $n^{s}_{,}+n^{s}_{,s}+n^{s}_{,s}=t_{,}\,t_{s}-t^{s}_{,4}.$ Si noti altresì questa seconda equazione identica

$$(AM-BL)(BP-AQ) + (CL-AN)(AR-CP) + (BN-CM)(CQ-BR)$$

$$= (AP+BO+CR)(AL+BM+CN) - (A^{2}+B^{2}+C^{2})(LP+MQ+NR)$$

verificabile alla stessa maniera della (30); e su quest'altro tipo, mediante le denominazioni (27) num'. 14., ci persuaderemo della verità delle tre nuove equazioni

$$l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 = t_5 t_6 - t_3 t_4$$

(33)
$$l_1 n_1 + l_2 n_3 + l_3 n_3 = t_4 t_6 - t_2 t_5$$

 $m_1 n_1 + m_2 n_3 + m_3 n_3 = t_4 t_5 - t_1 t_6$.

Se i valori dei sei trinomi datici dalle equazioni (31), (33) si sostituiscono nella equazione (29), se ne cava dopo facili riduzioni

(34)
$$H = \sqrt{t_1 t_2 t_3 + 2t_4 t_6 t_6 - t_1 t_6^2 - t_2 t_6^2 - t_3 t_4^2}$$

cioè il sestinomio H dato per le sei quantità $t_1,t_2,$ ec., che è la nuova espressione di cui andavamo in cerca.

Quindi anche la densità Γ in virtà dell'equazione (6) num". 9, riceve un valore fatto con quelle sei quantità t_i, t_i, t_k, t_k , rizusenado eguale all'unità divisa pel precedente radicale (34). E può avere qualche significazione il mostrare un punto di ravvicinamento fra le espressioni analitiche delle densità proprie dello tre sorte di sistemi, notando che se si adottano le denomizazioni (6) del num". 34., vengono le densità pei sistemi lineare e superficiale rispottivamente eguali all'unità divisa pei radicali $\mathcal{V}_t, \mathcal{V}_t, t_k - t_i^*$ (rivedi le equazioni (16) num". 11., e (24) num", 12.).

Pertanto se prendiamo l'ottenuto valore (34) di H per adoperarlo nello svolgimento della equazione (17), troveremo che questa equazione variata, introdottovi un moltiplicatore indeterminato A, prende la forma

(35)
$$A\delta t_1 + B\delta t_2 + C\delta t_3 + D\delta t_4 + E\delta t_5 + F\delta t_6 = 0$$
 essendo

$$A = \frac{\Lambda}{\text{aff}} (t_1 t_3 - t^2_6); B = \frac{\Lambda}{\text{aff}} (t_1 t_3 - t^2_5); C = \frac{\Lambda}{\text{aff}} (t, t_s - t^2_4)$$

$$D = \frac{\Lambda}{\text{if}} (t_5 t_6 - t_3 t_4); E = \frac{\Lambda}{\text{if}} (t_4 t_6 - t_5 t_5); F = \frac{\Lambda}{\text{if}} (t_4 t_5 - t_6).$$

Ponendo il primo membro dell' equazione (35) sotto un integrale triplicato per a, b, c, e aggiungendolo all' altro integrale triplicato (18) numero precedente, avremo precisamente la stessa equazione (1c) num?, 35. che trovammo pei sistemi rigidi; quindi arriveremo alle stesse equazioni (26) num?, 38. Se non che in tal caso nelle susseguenti equazioni (27) (1e quali per le altre susseguenti (28) conducono ad asseguare i valori delle P₁, P₂, se c.) dovremo mettere per A, B, C, D, E, F i valori (36) ora trovati. Qui sta la differenza nella scrittura analitica pei due casi dei corpi rigidi e dei fluidi; nei rigidi le sei quantità A, B, C, ce. sono tutte e sei indeterminate: nei fluidi dipendono da una sola indeterminata A in forza delle precedenti equazioni (36).

L'indicata sostituzione dei valori (36) nelle (27) numº. 38. ci riduce le successive (28) di quel numero alle seguenti

Per dimostrare questo importante risultamento, conviene prima scrivere da capo i valori (36) sostituendo ai fattori binomiali le quantità trinomiali equivalenti (equazioni (31) e (33)), indi porli nelle (27) num². 33. Cominciamo dalla prima di quelle equazioni: essa diventa

$$\frac{11}{h}(1) = -(P_1 + P_2 + P_3) \left(\frac{dx}{dx}\right)^2 - 3 \left(l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3\right) \frac{dx}{dx} \frac{dx}{dx}$$

$$- \left(m^2_1 + m^2_2 + m^2_3\right) \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - 3 \left(l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3\right) \frac{dx}{dx} \frac{dx}{dx}$$

$$- \left(n^2_1 + n^2_2 + m^2_3\right) \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - 3 \left(m_1 n_2 + m_2 n_2 + m_3 n_3\right) \frac{dx}{dx} \frac{dx}{dx}$$

e può ridursi all'espressione

$$\begin{split} & \frac{H}{\Lambda}(1) = -\left(l_1 \frac{dx}{da} + m_1 \frac{dx}{db} + n_1 \frac{dx}{dc}\right)^a \\ & - \left(l_2 \frac{dx}{dx} + m_2 \frac{dx}{dx} + n_3 \frac{dx}{dz}\right)^a - \left(l_3 \frac{dx}{dz} + m_3 \frac{dx}{dx} + n_3 \frac{dx}{dc}\right)^a \end{split}$$

la quale per le (28) del num°. 14. si semplifica fino a dare (38) $(1) = -\Lambda H$.

Le due seguenti equazioni (27) num², 38. ci somministrano per le quantità (II), (III) lo stesso valore ora trovato per la (1): e a persuadercene non fa bisogno rifare il calcolo, basta sostituire, o immaginare sostituita prima la lettera y, poi la z alla x, e ricordarsi le altre equazioni identiche (28) num². Via

Venendo alla quarta delle (27) num. 38., la sostituzione come sopra dei valori delle A, B, ec. ci dà un risultato che può essere messo sotto la forma

$$\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}}\left(\mathrm{IV}\right) = -\left(l_{i}\frac{dx}{da} + m_{i}\frac{dx}{db} + n_{i}\frac{dx}{dc}\right)\left(l_{i}\frac{dy}{da} + m_{i}\frac{dy}{db} + n_{i}\frac{dy}{dc}\right)$$

$$-\left(l_{s}\frac{dx}{da}+m_{s}\frac{dx}{db}+n_{s}\frac{dx}{dc}\right)\left(l_{s}\frac{dy}{da}+m_{s}\frac{dy}{db}+n_{s}\frac{dy}{dc}\right)$$

$$-\left(l_{3}\frac{dx}{da}+m_{3}\frac{dx}{db}+n_{3}\frac{dx}{dc}\right)\left(l_{3}\frac{dy}{da}+m_{3}\frac{dy}{db}+n_{3}\frac{dy}{dc}\right)$$

dopo di che, in vista delle solite equazioni identiche (a8) num^o. 14., riconosciamo essere (IV) = c. In simil modo le ultime due di quelle equazioni ci dimostrano nulle anche le quantità (V), (VI), e per convincercene subito appoggiandoci all'ultima riduzione, basta la prima volta cambiare la lettera x colla x, e la seconda la lettera x colla x,

Sono dunque ben provate in forza delle (a8) num², 33. le precedenti equazioni (37), stanti le quali, le (a6) num², 38. ci porgono dimostrate per la terza volta le equazioni (11) di questo Capo senza ricorrere al principio della pressione egualo in tutti i versi.

Facciasi una speciale attenzione a quel passo della precedensità costante porta di dover aggiungere all'equazione generale un integrale triplicato formato col primo membro dell'equazione (35). Quando il corpo è rigido (equazione (ro) num", 35.) v'è di già nella equazione generale una quantità di questa forma, talebe l'aggiunta della quantità proveniente dalla (35) non fa che rendere binomiali i coefficienti delle variate ∂t_i , ∂t_i , ∂t_3 , ecci, e siccome i primi termini di tali binomj sono indeterminati, possono abbracciare anche i secondi, e i coefficienti tenersi monomj senza alterazione. Ecco il percibè nel moto de'corpi rigidi a densità costante (come accennai al num". 66.) si può prescindere dal considerare la condizione scritta nella equazione (17).

68. Ho inoltre detto al numº 65. che non si hanno anidea abbastanza chiare intorno alla pressione nei fluidi.
Si suole chiamare pressione una forza interna A (x, y, z) funzione delle coordinate, quale apparisce nelle equazioni (11); si
ritiene a ragione che questa pressione, appunto perché funzione
delle coordinate, varia nelle diverse parti della massa fluida;
è ben chiaro, per esempio, che in un'acqua tranquilla la pressione verso il fondo del recipiente è maggiore che non verso
la superficie superiore del liquido. Ma se, quando si dice che
nei fluidi la pressione è eguale in tutti i versi, tiensi solamente

Tomo XXIV. P. 1.

di mira l'anzidetta forza interna, non è difficile venir condotti a deduzioni false. Sapendosi che l'azione è sempre eguale alla reazione, si può credere che la pressione con cui una molecola più bassa agisce sull'altra che le sta sopra immediatamente, uguagli quella con cui questa reagisce e avvenga lo stesso per la molecola che le sta di sotto: e così passando da molecola a molecola venire alla conseguenza assurda che la pressione sia la stessa per tutti i punti del fluido. - Per togliersi a un tale imbarazzo convien riflettere che a produrre la pressione eguale in tutti i versi concorrono eziandio le forze esterne X, Y, Z, anch' esse, generalmente parlando, variabili di punto in punto. È dal conflitto di queste colla forza interna A (x, y, z) (attuata fra le molecole, parte per forze attive molecolari, parte, ed è il più, per forze passive provenienti dall'applicazione delle forze esterne) che nasce la pressione eguale in tutti i versi: nasce una costanza di mezzo a quantità mutabili. Vuolsi pertanto sapere perchè incontriamo qui oscurità di idee? è perchè la stessa parola non ha sempre un significato egualmente determinato. Spesso chiamiamo pressione la forza interna A (x, y, z) senza badare alle forze esterne: invece quando enunciamo il principio della pressione eguale in tutti i versi, sottointendiamo che la pressione oltre la forza interna A comprenda in certe direzioni anche le forze esterne: nel primo caso la parola non esprime che una parte di ciò che esprime nel secondo caso. Vi ha di più: a produrre l'oscurità d'idee di cui dicemmo. contribuisce forse maggiormente un cambiamento sottinteso che si fa nel concetto della pressione A, la quale è riguardata talvolta come forza di prima specie, talvolta come di seconda specie (rivedi i numeri 18, 19, 20, 21.). Finchè la consideriamo come una forza interna che agisce su tutte le molecole della massa fluida, essa è della stessa natura delle X, Y, Z, è cioè forza di prima specie, di quelle che vanno moltiplicate per o3; quando invece parliamo della pressione eguale in tutti i versi, essa si cambia in una forza di seconda specie, di quelle che vanno moltiplicate per σ2. Infatti il concetto è che pel punto

(x, y, z) facendo passare in qualunque verso una superficie, ivi la forza proveniente dall'azione del fluido è perpendicolare a tal superficie, e sempre la stessa comunque si volti la superficie che passa per quel punto. Si esamini bene anche ciò che facciamo quando vogliamo stabilire sperimentalmente il principio idrostatico di cui parliamo, e si vedrà che per pressione intendiamo sempre una forza applicata ad una superficie, e trasmessa poi ad una massa estesa secondo tutte e tre le dimensioni. Ciò premesso, assumendo un linguaggio simile all'usato dai nostri maggiori, possiamo ragionare così. Nell'equilibrio una molecola preme quella che le è contigua secondo l'asse delle x colla forza esterna σ3 X più colla pressione σ3 A, e detta molecola contigua reagisce sulla prima colla $\sigma^* \left(\Lambda + \sigma \frac{d\Lambda}{dx} + \text{ec.} \right)$, aumentando la A per l'aumento molecolare che prende la x. Queste due pressioni opposte dovendo essere eguali, ci somministrano un' equazione dove, eliminato nei due membri il termine comune σ°Λ, poi fatta la divisione per σ³, e trascurati i termini ulteriori si vede risultare la $X = \frac{d\Lambda}{dx}$. Allo stesso modo si pro-

vano le altre due $Y = \frac{d\Lambda}{dr}$, $Z = \frac{d\Lambda}{dz}$, cioè le equazioni (11) pel caso dell' equilibrio e della densità costante: nelle quali è bena exvertire che la Λ ripiglia adesso il concetto di forza di prima specie: passaggio pari ad altri che si effettuano solo mentalmente, senza che di solito vi si presti attenzione. Ecce poi (in conformità a quanto si è detto più sopra) che se badiamo alla sola Λ , dimenticando le forze esterne, non vi è egnaglianza di pressione, giacchè la prima molecola agisce sulla seconda mediante la $\sigma^*\Lambda$, e la seconda reagisce colla $\sigma^*\Lambda + \sigma^* \frac{d\Lambda}{dz}$; l'eguaglianza è ristabilita perche alla $\sigma^*\Lambda$ della prima molecola va aggiunta la forza esterna σ^*X . L'eguaglianza di pressione intesa a questo modo, può, per quanto mi sembra, sostenersi e un tal poco concepirsi anche nel moto. Si sa che in tal caso la forza esterna σ^*X & e surrogata dal binomio $\sigma^*(X - \frac{d^*x}{dx})$

nel quale la differenza dei due termini può diventare assai piccola per le grandi accelerazioni; ma dove il fluido si accelera di più, pare che le molecole debbano essere più discoste fra loro (s' intromettano poi o non s' intromettano altre molecole) e quindi minore debba essere anche la forza interna che dipende dalla distanza molecolare. Che che ne sia però di ciò. riteniamo che le equazioni (11) sono stabilite indipendentemente dal principio controverso, e che in esse la A venne introdotta per processo analitico, senza bisogno d'idee intorbidate da que' salti e da quelle tacite convenzioni che qui sopra abbiamo cercato di notare e descrivere. E ciò perchè si è potuto evincere che il costituente della fluidità non istà già (giova il ripeterlo) nella disposizione regolare delle molecole intorno ciascuna, ma in una particolare condizione cui vengono ridotte le forze interne per la cessazione di quella parte di azione che è dovuta alla figura delle molecole.

69. A questo punto io credo di aver raggiunto lo scopo che mi car proposto e che ni cario fin dal principio della presente Memoria, quello di sostenere contro egni tentativo d'imovazione la teorica Euleriana del moto de fluidi contenuta nelle equazioni ((1), aggiuntavi la quarta detta della continuità. La quale apologia a me particolarmente importava, avendo io assunta detta teorica a base delle mie ricerche in idrodinamica. Non mi starò qui a ripetere ciò che forma il soggetto di quelle Memorie che ricordai sal fine del preambolo di questa; darò soltanto un' idea del principio generale mediante il quale la trattazione delle quattro equazioni sumentovate viene ad essere giovata del soccorso di altre equazioni, che quantunque desunte da considerazioni particolari alle superficie conterminanti il fluido, si dimostrano dover valere auche nell'interno della massa fluida.

Nella seconda di dette Memorie provai dapprima che quando il moto è permanente, e a due sole coordinate, cioè in un piano, tutte le molecole del liquido vanno per trajettorie che sono curve di una stessa famiglia, rappresentate tutte da un'unica equazione

(39) a = f(x, y);

e che non diversificano fra loro se non a motivo del parametro a il quale, costante in ciascuna trajettoria, varia dall' una all'altra. La stessa conseguenza può dedursi più in generale. anche per quando il moto non è permanente, dalla equazione (9) Capo I. della Memoria prima (Memorie dell' I. R. Istituto Lombardo. Vol. 1º. pag. 222.) dove il secondo membro essendo una costante per riguardo al tempo, la quale muta per diversi luoghi della massa, ha la stessa idea della precedente a: e siccome il primo membro è funzione delle x, y, t, che rimane la medesima per tutti i punti del fluido, quella equazione è insomma l'equazione generale delle trajettorie, come la poc'anzi scritta (39). Vi è solamente la differenza del provarsi a questo modo che anche quando vi è il tempo esplicito, le trajettorie variano soltanto pel mutare di una costante in una equazione che tutte le comprende, come quando il moto è permanente. Osservazione quest' ultima fatta dopo la pubblicazione delle ricordate Memorie, e che parmi importante.

Avendo una equazione come la precedente (39), ove è isolata la costante che muta di trajettoria in trajettoria, col derivarla totalmente pel tempo (operazione che fa sparire quella costante), si cava l'importantissima conseguenza che l'equazione derivate.

(40) f'(x)u + f'(y)v = 0,

nella quale âlle u, v s' intendano sostituiti i loro valori generici u(x,y), v(x,y), devo verificarsi anche considerando x, y fix di loro indipendenti. Se così non fosse, se ne potrebbe dedurre y in funzione di x senza la costante a, il che ripugna alla natura della questione. Quindi l'Ottenuta equazione (4o) si verifica per tutti i punti della massa, come le altre della teorica Euleriana, e piò ad esse associarsi per facilitare la ricerca delle funzioni incognite di x, y cui sono eguali le velocità u, v. Ciò è appunto che mi riusci di fare nel caso del moto permanente e nella supposizione che, quando il liquido è chiuso da

pareti, venga da una parete di forma nota assegnata l'equazione generale delle trajettorie: e quando il liquido è superiormente libero, tale equazione generale siaci somministrata egua-

gliando ad una costante la pressione $\Lambda(x, y)$.

Analoghe considerazioni hanno lnogo pel moto a tre coordinate, riuscendo iñ tal caso due le equizioni come la (2) spettanti alla trajettoria generica. Dette equazioni possono anche riguardarsi come due equazioni di superficie percorse da vel filudi formati di tante trajettorie: e cosi veniamo a sapere che a due sole famiglie si riducono tali superficie. Anche qui derivando totalmente pel tempo si ottengono dine equazioni si-mili alla precedente (40), che con ragionamenti della stessa indole si provano sussistenti per tutti i punti dell'interno della massa, e possono associarsi alle quattro della teorica generale per la ricerca delle tre velocità u, v, a. La determinazione di tali velocità mi riusci nel caso del moto permanente anche libero, con supposizioni corrispondenti alle già espresse pel moto a due coordinate.

7c. Che dovremo in ultimo dire della legge della permanenza delle molecole de' liquidi alle pareti o alle superficie libere durante il movimento? Scrissi già (Giornale dell' I. R. Isturo Lombardo, T. 6°. pag. 324.) che una tal legge potea provarsi vera quando il moto è permanente. Pel caso generale io non asserii che non sussistesse (come taluno mi fece dire), notai solo che più nor valeva la recata dimostrazione: il che è ben diverso, potendo molte cose esser vere, quantunque non per anco dimostrate. Ora, ben considerate il teorema del num. 64, inclino a credere che l'anzidetta permanenza si estenda ad altri casi. È manifesto che noi possiamo astrarre col pensiero dalla massa fluida in moto la parte di fluido sovrainombente a qualunque dei veli formati di tante trajettorie, di cui sopra dicemmo, e considerare il moto della sola porzione di fluido

sottostante a tal superficie; allora la prima porzione di fluido entra in considerazione unicamente come quella che fa una pressione sul fluido che scorre al di sotto. Vedemmo che una tal pressione è perpendicolare alla trajettoria in ogni punto: dunque una pressione perpendicolare ad una trajettoria in ogni punto non disturba lo scorrimento delle molecole in essa. Ma in quali condizioni sono le molecole del fluido alle pareti ed alle superficie libere? sono appunto sotto pressioni che si esercitano (e l'abbiamo dimostrato) perpendicolarmente a quelle superficie conterminanti il fluido: potranno dunque scorrere lungo tali superficie. Ben è vero che qui si inverte una proposizione; la proposizione provata è: data una trajettoria, la pressione esercitata dal fluido sovraincombente è normale alla curva in ogni punto; la proposizione che si vuole insimuare è: data una pressione che si esercita normalmente ad un velo o ad una linea fluida, in un tal velo, in una tal linea può esistere una trajettoria. Ora una tal trajettoria può anche non esistere, come vediamo nell'equilibrio: ed ecco il perchè nella mia Memoria ho creduto di dover ammettere che qualche volta il fluido non lambisce la parete solida, ma si crea esso stesso la sponda o il fondo sul quale scorrere, depositandosi una porzione di fluido che rimane ferma o prende movimenti staccati dal moto della massa principale.

Si fanno due obbjezioni alla legge della permanenza delle a disamina. Colla prima si dice: melle correnti la superficie li bere alle volte si allarga, alle volte si retringe: se la densità del líquido ivi come dappertutto deve rimanere costante, bisogna che quando la superficie si allarga, accorrano nuove molecole, e quando si restringe, alcune di quelle che vi si trovano, vadano sotto. Anche l'accelerazione maggiore in qualche luogo della superficie, minore in qualche altro, non può conciliare colla densità costante sonza molecole che sopraggiungano nel primo caso e partano nel secondo.—La risposta a tutte queste difficolta parmi debba cerearia nel primo concetto che ci siamo formati al num". 7., e che abbiamo richiamato in varj altri luoghi, circa al potersi trascurare terraini moltiplicati per la distanza molecole σ, in confronto di quelli che non hanno

un tal fattore. Se termini come questi possono senza errore essere trascurati, possono essere senza errore anche aggiunti positivamente o negativamente. Io tengo quindi per fermo che sia lecito considerare come esistenti alla superficie, non proprio solamente le molecole componenti il primo velo fluido, ma anche quelle di veli sottoposti a distanze equivalenti ad una, due, più volte l'intervallo molecolare σ, non però preso un tal numero di volte da rendere dette distanze finite e sensibili. Infatti le equazioni del moto per questi veli sottoposti non differiscono da quelle pel moto del primo velo, se non perchè le x, y, z spettanti al detto velo supremo hanno aumenti positivi o negativi con quel fattore piccolissimo σ: svolgansi in serie i termini componenti tali equazioni secondo le potenze dei detti aumenti, e trascurando (come è già ammesso) tutta la parte moltiplicata per σ, le equazioni figureranno come appartenenti al primo velo, mentre in verità appartengono a veli sottoposti. Ritenute come spettanti alla superficie suprema anche molecole che ne stanno al di sotto per distanze non finite, possiamo disporre di uno spessore quale ci abbisogna a fine di cavarne o di ritirarvi le molecole di cui parlasi nelle addotte difficoltà o in altre simili. Così la densità superficiale, se vuolsi considerare fra le mòlecole costituenti il solo velo rigorosamente supremo, può non essere costante: sarà costante come risultato a produrre il quale entrano anche molecole appartenenti a veli sottoposti. Così le molecole in una trajettoria possono diradarsi. il che anzi io ho provato avvenire in casi di moto conosciuto (Vedi la prima delle Memorie sopracitate ai numeri 7, 21), e nondimeno la densità essere costante, supplendo negl' intervalli molecole prese da trajettorie contigue. - Rapporto alle densità lineare e superficiale, ho eseguito un lungo calcolo del quale risparmierò la pena ai miei lettori, esponendone solo storicamente il risultato. Noi conosciamo le espressioni di queste densità (Capo I. numeri 11, 12.) e le equazioni della continuità che ne sono conseguenze (ivi numº. 15.). Se tali densità rimanessero esattamente costanti, potremmo mettere a profitto

le corrispondenti equazioni della continuità, come si fa dell'atra (34) num". 14., e così cavare nuove equazioni che si verificherebbero ai limiti del liquido. L' ho fatto: e mi è risultato che contemplando anche si fatte equazioni, le trajettorie verrebbero rettilinee: prova manifesta che quelle densità considerate in una sola linea geometrica, o in una sola superficie matematica, non sono costanti.

La seconda obbiezione è la seguente. Lagrange pel primo (Mª. Aª. T. H. pag. 298.) e poi altri hanno riconosciuto che nell' efflusso dell' acqua da vasi che si vuotano, si danno dei casi nei quali è manifesto che la legge della permanenza delle molecole alle pareti od alle superficie libere non può assolutamente aver luogo. Ne qui s' intendono spostamenti non finiti, della natura di quelli di cui più sopra abbiamo fatto parola, e che debbonsi riguardare come nulli; s'intendono spostamenti finiti e apprezzabili anche dai nostri sensi. La mia maniera di vedere relativamente a tale difficoltà, dopo molto pensarvi è ora quale passo ad esporla. Il fluido nei casi anzidetti si sottrae all'enunciatà legge, perchè il suo movimento si sottrae all'analisi fin qui trattata: la questione appartiene ad una Meccanica la quale non è per anco scritta. Di fatti in tutta la Meccanica Analitica di Lagrange e in questa stessa Memoria si suppone sempre che la massa in moto rimanga costante. Eppure si possono immaginare problemi di moto a massa variabile. Tale sarebbe quello in cui si proponesse di determinare il moto di una vallanga, nella quale la massa è sempre crescente: tale l'altro ove si prendesse a esaminare il moto di un gomitolo di filo di cui fosse trattenuto un capo, e che quindi a motivo dello svolgersi del filo, si muoverebbe con massa sempre decrescente. Si fatte ricerche sembrano a prima giunta piuttosto di curiosità, che di vantaggio; ma nel moto de' liquidi si presentano spontaneamente questioni dello stesso genere. Nell'efflusso dell'acqua da vasi che si vuotano, siccome le considerazioni si restringono al fluido ancora contenuto nel vaso. vedesi che si ha di mira un moto nel quale la massa è variabile

Tomo XXIV. P.te I.

e continuamente decrescente. Nel caso di una corrente accresciuta continuamente da acque di scolo affluenti dalle sponde, la massa invece sarebbe variabile per aumento. Non è che io creda i problemi di tal natura invincibili dalla potenza del calcolo: credo anzi che vi si possano assoggettare: negli integrali definiti componenti le equazioni generali scritte nel Capo II. di questa Memoria, i limiti invece di essere costanti, saranno variabili e funzioni del tempo. Intanto però questa Meccanica non è ancor fatta: e così cessendo le cose, non parmi filosofico muovere difficoltà contro la Meccanica ordinaria, desumendole da questioni che sono, fonori del suo dominio.

CAPO VI.

Del movimento di un corpo qualunque giusta le idee de' moderni intorno alle azioni molecolari.

Si è detto sul principio del Capo IV. esservi due maniere per mettere a calcolo nella equazione generale del moto di un qualunque corpo l'effetto dei vincoli fra le sue molecole prodotti dalle forze interne. Una maniera era quella di esprimere tali effetti per mezzo di equazioni di condizione, e quindi per mezzo della terza parte dell'equazione generalissima (1) del numº. 16.: a questa ci siamo attenuti nei due Capitoli precedenti. L'altra era di contemplare, giusta le idee de' moderni, le azioni molecolari servendoci della seconda parte dell'equazione (1) summentovata, ove si comprendono tutti i termini introdotti da forze interne attive: di questa farò ora qualche parola. Ciò tanto più volentieri in quanto vedremo che le due maniere conducono ai medesimi risultamenti per quella parte della soluzione che è la più importante e fondamentale (accordo che al certo riesce molto confortante): e per qualche altra parte si illuminano e si completano a vicenda, si che diventa facile nell'una ciò che è complicato e difficile nell'altra. 71. Richiamando quanto si è detto ai numeri 31, 32. per far vedere come nel caso dei sistemi a tre dimensioni la prima parte dell'equazione generale (1) numº. 16., dovuta alle forze esterne, si modifichi ad essere rappresentata come segue:

(i)
$$\int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^3x}{dt^3} \right) \delta x + ec. \right\} ;$$

vediamo ora come si modifichi la seconda parte Sm, m_1 $K \delta \rho$, che è quella che adesso vogliamo considerare, abbandonante la parte terza, se non fosse per seguitare a ritenervi espressi termini portati da forze applicate soltanto a superficie, a linee, a punti, ma non estensibili a tutta la massa.

Questa parte, supponendo che fra ciascuna coppia di molecole siavi sempre una forza interna K, quando il numero dei punti è n, messa in disteso, si presenta così:

$$m_1 m_2 K_{1,1} \delta \rho_{1,2} + m_1 m_3 K_{1,3} \delta \rho_{1,3} + + m_1 m_n K_{1,n} \delta \rho_{1,n}$$

$$+ m_{n} m_{3} K_{n,3} \delta \rho_{n,3} + \dots + m_{n} m_{n} K_{n,n} \delta \rho_{n,n}$$

 $+ m_{n-1}m_n K_{n-1}, {}_n \delta \rho_{n-1}, {}_n$

essendo in generale

(3)
$$\rho_{i,j} = \sqrt{(x_j - x_i)^* + (y_j - y_i)^* + (z_j - z_i)^*}$$

E può osservarsi che le successive linee orizzontali di essa, le quali scemano successivamente di un termine, possono ridursi tutte a un numero n di termini, scrivendo invece della (2) la quantità

$$\begin{split} & & \frac{1}{2} m_1 m_1 K_{1,1}, \delta \rho_{1,1} + \frac{1}{2} m_1 m_2 K_{1,1}, \delta \rho_{1,1} + \ldots + \frac{1}{2} m_1 m_n K_{1,1}, \delta \rho_{1,1}, \\ & + \frac{1}{2} m_2 m_1 K_{2,1}, \delta \rho_{2,1} + \frac{1}{2} m_2 m_2 K_{2,1}, \delta \rho_{2,1} + \ldots + \frac{1}{2} m_2 m_n K_{2,1}, \delta \rho_{2,1}, \end{split}$$

$$\begin{array}{l} + \frac{1}{2} m_i m_i K_{i,1}, \delta \rho_{i,1} + \frac{1}{2} m_i m_2 K_{i,2}, \delta \rho_{i,3} + + m_i m_n K_{i,n} \delta \rho_{i,n} \\ \vdots \\ + \frac{1}{2} m_i m_i K_{i,1} \delta \rho_{i,1} + \frac{1}{2} m_i m_i K_{i,2} \delta \rho_{i,3} + + \frac{1}{2} m_i m_n K_{i,n} \delta \rho_{i,n} \end{array}$$

Per riconoscere l'eguaglianza delle due quantità (a), (4), basta osservare che in questa seconda i termini contenenti le variate

$$\delta \rho_{1,1}, \ \delta \rho_{2,2}, \ldots, \ \delta \rho_{1,1}, \ldots, \ \delta \rho_{n,n}$$

sono introdotti solo per una regolarità di progressione negli indici, ma è come se non vi fossero, essendo zero i radicali $\rho_1, \dots, \rho_s, \dots, \rho_s, \dots$ e le loro variate, come risulta manifesto in forza dell' espressione generica (3). Di poi che i restanti termini possono compenetrarsi a due a due: così i du

 $\frac{1}{4}m_*m_*K_{*,*}, \delta\rho_{*,*} + \frac{1}{4}m_*m_*K_{*,*}, \delta\rho_{*,*}$ equivalgono al solo $m_*m_*K_{*,*}, \delta\rho_{*,*}$. Infatti è chiaro per la (3) che $\hat{\rho}_{*,*}$, eguaglia $\hat{\rho}_{*,*,*}$: e che inoltre $K_{*,*}$, eguaglia $k_{*,*,*}$, oltrecche risulta dal principio che l'azione è sempre eguale alla reazione, si farà anche più perspicio per ciò che fra poco soggiungeremo intorno al modo con cui debb' essere intesa la composizione generica della forza interna K. Per simil guisa i due termini $\frac{1}{2}m_*m_*K_{*,*}, \delta\rho_{*,*,*} + \frac{1}{2}m_*m_*K_{*,*}, \delta\rho_{*,*,*}$ si uniranno in un solo $m_*m_*K_{*,*}, \delta\rho_{*,*,*}$; e così via via. Dopo le quali osservazioni e facile persuadersi che la quantità (4) si contra enella (3).

Una qualunque delle serie orizzontali componenti la quantità (4) può compendiarsi per mezzo di una sommatoria, tripla. Per convincercene bisogna richiamare l'idea della precedente disposizione delle molecole colle coordinate 'ai, b. c, rappresentandoci funzioni di esse le coordinate della molecola generica m;:

- (5) $x_i = x(a, b, c)$; $y_i = y(a, b, c)$; $z_i = z(a, b, c)$. Rappresentiamoci altresi composte come segue
- (6) z; =x(a-f, b-g, c+b); y, =y(a-f, b-g, c+b); z; =x(a-f, b-g, c+b); le coordinate x, y, y, z, dell' altra molecola qualunque m_f; ha quale (tenuta fissa la m_t) passi successivamente a significare tutte le altre molecole della massa; e intendiamo che questi valori analitici (6) tengano dietro al mutarsi della m_f col cambiarsi in essi le f, g, k, tenute ferme le a, b, c. Questo si fa come se immaginassimo nello stato precedente ideale tirati per la molecola m_f presa come origine tre movi assi paralleli a

quelli delle a,b,c, e chiamassimo f,g,k le coordinate di una molecola qualunque relativamente a detti nuovi assi. Ora convien ricordare quello che si è detto al num². 31., quando si trattava della prima parte della equazione generale, sul modo d'immaginarsi distributti gli n punti del sistema secondo indicazioni relative ai tre assi, che conducono a dare all'aggregato degli n termini una disposizione di serie tripla: e non si incontrerà difficoltà a capire che l'(i) esima delle serie orizzontali componenti la quantità (4) può compendiarsi per mezzo dell'integrale finito triplicato

(7)
$$\Sigma \Delta f \Sigma \Delta g \Sigma \Delta k \cdot I m_i m_i K \partial \rho$$
,

avendo \(\rho \) (equazioni (3), (5), (6)) il valore dato dall' equazione

(8)
$$\rho^* = [x(a+f,b+g,c+k) - x(a,b,c)]^* + [y(a+f,b+g,c+k) - y(a,b,c)]^* + [z(a+f,b+g,c+k) - z(a,b,c)]^*.$$

I limiti delle precedenti integrazioni finite dipenderanno, come si è detto al num". 31., dalle superficie conterminanti il corpo nello stato antecedente al reale. L'espressione (?) poi si adatterà a rappresentare la prima, la seconda, l'(a) esima delle serie orizzontali componenti la quantità (4), mutando in essa le coordinate a_i, b_i, c della molecola generica m_i , dando cicè loro i valori opportuni affinchè essa diventi successivamente la molecola m_i, m_i, \dots, m_s ; è siccome sono pure di numero n quelle serie orizzontali (come i termini di ciascuna di esse), la somma delle somme ci verrà data dall'integrale finito sestupio

(9)
$$\Sigma \Delta a \Sigma \Delta b \Sigma \Delta c \Sigma \Delta f \Sigma \Delta g \Sigma \Delta k \cdot \frac{1}{2} m_i m_j K \delta \rho$$
.

Rammentiamoci il già detto nelle ultime linee del num^e. 21., circa al dare il valore σ^i alla lettera m esprimente la masa della molecola generica: e siccome nell'integrale precedente vi è il prodotto di due simili m_s ci si farà manifesto doversi mettere al luogo di esso l'espressione $\sigma^i \cdot \sigma^i$. Richiamato altresi it eorema analitico seritto nella equazione (r_j^i) del num^e. 26,

teorema del quale si ripete qui sei volte l'applicazione, ci troveremo disposti ad ammettere che il precedente integrale sestuplo finito si tramuta nell'integrale sestuplo continuo

(10) fda fdb fdc fdf fdg fdk. ½ Κδρ

coll'aggiunta di altri termini che poi debbonsi trascurare. In esso i limiti delle integrazioni per f_i , g_i , k dipenderanno dalle superficie conterminanti il corpo nello stato antecedente, ed anche dalla posizione della molecola m_i tenuta costante, cioè dalle variabili a_i , b_i , c_i , che dopo le tre prime fanno poi anch' esse il loro giro.

72. Fermiamoci ora in qualche considerazione relativa alla forza interna K attuata fra molecola e molecola, tanto per attrazioni o repulsioni, che avrebbero agito anche indipendentemente da forze esterne applicate, quanto in virtù di queste stesse forze esterne. Il farla, come sulle prime suggerisce, funzione K(p) della sola distanza molecolare, non è ammissibile se non nel caso in cui il corpo sia fluido, cessando allora la parte di azione dovuta alla figura delle molecole. In generale (rileggasi l'esposto al numº, 54.) quando è in giuoco anche l'azione dovuta alla figura, debbono entrarvi quei coseni a., a., a., a., ec. che fissano le direzioni degli spigoli od assi delle due molecole relativamente ai tre assi ortogonali, coseni i cui valori cambiandosi da molecola a molecola, debbono, generalmente parlando, risultare funzioni delle corrispondenti coordinate. Sarebbe difficile asseguare come avranno poi ad esser fatte tali funzioni (e basta a questo fine il solo immaginare che quelle direzioni siano normali a superficie curve di natura varia per diversi corpi ed incognita): ed oltre il non sapere l'interna fattura di queste funzioni, non si sa come entrino a comporre la K. In conseguenza la K, se vuolsene il concetto più generale, deve essere detta funzione delle sei coordinate, i cui valori sono espressi nelle equazioni (5), (6): nè possiamo presumere di esprimerne la composizione, solo ci è dato argomentare ch' essa sarà simmetrica relativamente alle dette sei

variabili, prese di tre in tre: cioè che cambiando le x1, y1, z1 nelle zi, ri, zi, e queste nelle prime, restera la medesima. Ciò perche si sa (non essendovi la ragione del contrario) che la metà di K esprime l'azione della molecola m, sulla m., e l'altra metà di K l'azione reciproca: si possono intendere cambiate le veci fra le due molecole, e nondimeno i valori analitici debbono rimanere i medesimi: osservazione che ci porta a conchiudere l'enunciata proprietà nella espressione analitica, come accennammo anche in un luogo del numº, precedente. L'inassegnabilità della funzione K (x, y, z, x, x, y, z) può evincersi anche con altri argomenti che mi permetto di preterire: solamente notero come eziandio da questo lato spicchi la superiorità dei metodi che abbiamo alle mani: con essi si può tirare innanzi con sicurezza non ostante un'ignoranza che non è vincibile. Faremo un'altra osservazione intorno alla piccolezza di questa forza molecolare K, ricordandoci di quanto abbiamo detto in proposito sulla fine del numº, 22. Corrispondentemente alle cose esposte nel numº. 18. e seguenti, essa deve riguardarsi una forza elementare di si inoltrata tenuità, che raccogliendone sopra un solo punto tante quante vi vengono da tutte le molecole della massa, si ha per risultante una forza ancora piccolissima dell'ordine di quelle \(\sigma^3\) X, \(\sigma^3\) Y, \(\sigma^3\) Z considerate al numº. 18. A questo concetto risponde ottimamente l'impiccolimento procurato dal fattore o6, quale vedemmo risultare nell'integrale sestuplo (9) a motivo del prodotto m, m; delle due masse elementari.

Conseguenza del fin qui detto si è che sommando i due integrali (1), (10), e ponendo tal somma in luogo delle due prime parti dell'equazione generale (1) num⁶, 16), ci formeremo l'equazione che comprende tutta la meccanica molecolare. Prima però noteremo che giova fare per comodo

 $\Lambda = \frac{1}{4} \frac{3}{4}$

denominazione mediante la quale potremo introdurre la quantità $\Lambda\delta\rho^*$ invece di $\frac{1}{2}$ K $\delta\rho$ nell'integrale sestuplo (40); e che

di questo integrale aestuplo è bene staccare la parte d'integrale triplicato relativa alle variabili f_s g, k, sottoponendo a illo stesso segno d'integrale triplicato per a,b,c che abbraccia la prima parte dell'equizione: il che manifestamente è permesso. Per tal modo l'anzidetta equazione generale si riduce.

intendendo (come ho acceniato ala princípio del numº, 7t.) compresa nella 20 tutta la parte che potesse essere introdotta da forze applicate a superficie, a linee, a punti determinati, ed anche da condizioni particolari che obbligassero alcuni punti a restare sopra qualche curva o superficie data. Questa (12) sta invece della (1) del numº, 46., o della (12) del numº. 46., e si vede come sia ora diversamente espressa (essendo eguale il rimanente) la parte introdotta dalle azioni reciproche fra le molecole, che cola abbiamo contemplato per mezzo di equazioni di condizione sussistenti per tutto il corpo.

73. Ciò che rimane a fare all'oggetto di dedurre utili conseguenze dall'equazione (12) è semplicemente un processo di calcolo. Richiamata l'equazione (8), si vede, svolgendo in serie le funzioni sotto le parentesi, come si abbia

$$\begin{split} & p^2 = \left(f \frac{ds}{ds} + g \frac{ds}{ds} + k \frac{ds}{ds} + f \frac{c^2}{2} \frac{e^2}{s^2} + cc. \right)^2 \\ & + \left(f \frac{dr}{ds} + g \frac{dr}{ds} + k \frac{dr}{ds} + f \frac{c^2}{2c^2} + cc. \right)^2 \\ & + \left(f \frac{ds}{ds} + g \frac{dr}{ds} + k \frac{dr}{ds} + \frac{c^2}{2c^2} + cc. \right)^2 \end{split}$$

ed effettuando i quadrati e riunendo i termini che banno coefficienti eguali:

(13)
$$\rho^{3} = f^{3}t_{1} + g^{3}t_{2} + k^{3}t_{3} + 2fgt_{4} + 2fkt_{6} + 2gkt_{6}$$
$$+ f^{4}T_{1} + 2f^{3}gT_{2} + 2f^{3}kT_{3} + fg^{3}T_{4} + ec.$$

nella quale espressione le t, t, t, t, t, t, t, t, significano sci trinomi che ci sono già familiari, avendo adottate tali denominazioni fino dalle equazioni (6) del num. 34; e T., T,; T,; T, T, T, e, ce. all' infinito, significano trinomi della stessa natura fatti con derivate di ordine sempre più elevato. In tutti questi trinomi gli ultimi due termini sono sempre simili al primo, non differendone se non per avere le lettere y, z in luogo della x. Quelli in cui entrano le derivate seconde sono di due sorte. Ve ne hanno di fatti con derivate prime e seconde: sono in numero di 18, cioè i seguenti:

20

 $\frac{dx}{d\theta}\frac{d^3x}{d\theta^2} + \frac{dy}{d\theta}\frac{d^3y}{d\theta^2} + \frac{dz}{d\theta}\frac{dz}{d\theta^2} + \frac{dz}{d\theta}\frac{dz}{d\theta^2}.$ Vengono poi i trinomj fatti con sole derivate seconde, e sono in numero di 21., cioè i seguenti:

$$\begin{pmatrix} \partial_{x}^{2} \gamma_{0} + (\frac{\partial^{2}}{\partial x})^{2} + (\frac{\partial^{2}}{\partial x})^{2} \\ (\frac{\partial^{2}}{\partial x})^{2} + (\frac{\partial^{2}}{\partial x})^{2} + (\frac{\partial^{2}}{\partial x})^{2} \\ (\frac{\partial^{2}}{\partial x})^{2} + (\frac{\partial^{2}}{\partial x})^{2} + (\frac{\partial^{2}}{\partial x})^{2} \\ (\frac{\partial^{2}}{\partial x})^{2} + (\frac{\partial^{2}}{\partial x})^{2} + (\frac{\partial^{2}}{\partial x})^{2} \\ (\frac{\partial^{2}}{\partial x})^{2} + (\frac{\partial^{2}}{\partial x})^{2} + (\frac{\partial^{2}}{\partial x})^{2} \\ (\frac{\partial^{2}}{\partial x})^{2} + (\frac{\partial^{2}}{\partial x})^{2} + (\frac{\partial^{2}}{\partial x})^{2} \\ (\frac{\partial^{2}}{\partial x})^{2} + (\frac{\partial^{2}}{\partial x})^{2} + (\frac{\partial^{2}}{\partial x})^{2} \\ (\frac{\partial^{2}}{\partial x})^{2} + (\frac{\partial^{2}}{\partial x})^{2} + (\frac{\partial^{2}}{\partial x})^{2} + (\frac{\partial^{2}}{\partial x})^{2} \\ (\frac{\partial^{2}}{\partial x})^{2} + \frac{\partial^{2}}{\partial x} + \frac{$$

I trinomi colle derivate di terz' ordine sone di tre sorte: ve ne hanno di quelli composti di derivate prime e terze, e se ne contano in numero di 30: di quelli fatti di derivate seconde terze, e sono in numero di 60: e di quelli che non contengono se non derivate terze, e raggiungono il numero di 55. Non li scrivo, potendo facilmente ognuno che sia dotato della necessaria pazienza costruirseli da se, come pure quelli con derivate di ordine più elevato.

Adoperando poi l'equazione (13) per dedurne il valore della variata $\delta \rho^{s}$, è chiaro che la caratteristica δ dovrà applicarsi unicamente ai trinomi dei quali si e fin qui discorso, talche si abbia

(16)
$$\begin{split} \delta \rho^{s} = & f^{s} \delta t_{i} + g^{s} \delta t_{s} + k^{s} \delta t_{3} + 2 f g \delta t_{4} + 2 f k \delta t_{5} + 2 g k \delta t_{6} \\ & + f^{3} \delta T_{i} + 2 f^{3} g \delta T_{i} + 2 f^{3} k \delta T_{3} + f g^{3} \delta T_{i} + \text{ec.} \end{split}$$

Infatti i coefficienti f^{-}_{s} , g^{+}_{s} , k_{s} , afg_{s} ce. riescono sempre i medesimi in qualunque ipotesi di composizione delle x_{s} , x_{s} per le a,b,c, e non possono quindi essere affetti da quella operazione che ha appunto unicamento di mira i cambiamenti di forma di tali funzioni. Viceversa, moltiplicando la precedente equazione (16) per Λ e poi integrando per f_{s} , g_{s} , all'intento di dedurne il valore da darsi al quarto termine sotto l' integrale triplicato dell'equazione (12), una si fatta operazione s'appende soltanto alle quantità Λf^{+}_{s} , Λg^{+}_{s} , ec., le-variate δt_{s} , δt

Dopo di ciò si fa palese la verità dell'equazione

(17)
$$f df f dg f dk, \Lambda \delta \rho^{z} =$$

$$(1) \delta t_{1} + (2) \delta t_{3} + (3) \delta t_{5} + (4) \delta t_{4} + (5) \delta t_{5} + (6) \delta t_{6}$$

$$+ (7) \delta T_{1} + (3) \delta T_{2} + (9) \delta T_{3} + (4) \delta T_{4} + \text{cc.}$$

dove i coefficienti (1), (a), ec. indicati per mezzo di numeri fra parentesi, debbono considerarsi altrettante funzioni delle a, b, c quali risulterebbero dagli integrali summentovati dopo esegnite e definite le integrazioni. Ecco qual sarebbe la quantità equivalente da introdursi nella equazione (ta) al luogo del quarto termine sotto l'interreli etribicato.

74. Una proposizione unova, a cni prego il lettore a porre molta attenzione, è che tutti i trinomj T., T., T., ec. all'infinito, che entrano nella precedente equazione (17), si possono esprimere per mezzo dei soli primi sei ℓ_e , ℓ_s , ℓ_s , ℓ_s , ℓ_s , ℓ_s , ℓ_s , et delle loro derivate per d_s , ℓ_s di utti glio ordini. Io venti so sopetto di questa verità analitica a motivo della necessaria corrispondenza che ci dovea essere tra i risultamenti a cui conduce la via tracciata in questo Capo, e quelli ottenuti per la via che abbiamo seguita nei Capitoli III e IV. Ho poi verificata l'enunciata proprietà per 30 termini della precedente

serie (17), oltre i primi sei, cioè per tutti i trinom' scritti nelle riunioni (14), e (15), dopo di che mi sono abbandonato all'analogia: la qual cosa o presto o tardi è inevitabile, giacchè trattandosi di una serie infinita è impossibile percorrerla tutta. Ora dirò come ho fatto l'asseriale verificazione, e l'importanza delle conclusioni scuserà le lungaggini nei calcol; a quali, dalla prolissità in fuori, non presentano alcuna difficoltà.

Avendo sott' occhio i valori delle t_1 , t_2 , t_3 , t_4 , t_5 , t_6 (.equazioni (6) num⁶. 34.) si riconosce subito che i primi nove trinomi della riunione (14) hanno rispettivamente i valori:

Si trova in appresso (e può verificarsi colla sostituzione dei valori noti) che i trinomi decimo, undecimo, tredicesimo, quindicesimo, diciasettesimo, diciottesimo equivalgono rispettivamente ai seguenti binomi:

E che i trinomi dodicesimo, quattordicesimo, sedicesimo hanno rispettivamente questi altri valori:

$$\frac{1}{2}\frac{dt_4}{dc} + \frac{1}{2}\frac{dt_5}{db} - \frac{1}{2}\frac{dt_6}{da}\;;\;\; \frac{1}{2}\frac{dt_4}{dc} - \frac{1}{2}\frac{dt_5}{db} + \frac{1}{2}\frac{dt_6}{da}\;;\; - \frac{1}{2}\frac{dt_4}{dc} + \frac{1}{2}\frac{dt_5}{db} + \frac{1}{2}\frac{dt_6}{da}\;.$$

Per tal modo l'asserita proposizione è provata relativamente ai primi 18 trinomj.

Ora immaginiamo formate 18 equazioni aventi nei primi membri i trinomi della riunione (14) presi uno per volta, e nei secondi i rispettivi valori ch'ora abbiamo dimostrato essere ad essi eguali. Di tali equazioni si comincino a considerare la prima, la decima, e la tredicesima, si moltiplichino ocdinatamente per I_s , m_s , n_s , indi si somulno: si moltiplichino da capo similmente per I_s , m_s , n_s , e si somulno: si moltiplichino nuovamente da capo per I_s , m_s , n_s , e si somulno: avendo sott' occhio le nove equazioni del num". 14, segnate (3d), giungeremo a trovare a parte i valori delle tre derivate di second' ordine $\frac{\pi}{d\sigma^2}$, $\frac{\pi}{d\sigma^2}$. Collo Stosso andamento segliendo opportunamente fra le anzi descritte 18 equazioni, determineremo i valori delle altre derivate di second' ordine e di otterremo :

$$\begin{array}{lll} \text{all } \frac{\partial^{2}x}{\partial a^{2}} = I, \, \frac{\partial I_{1}}{\partial a} + m_{1} \left(2 \, \frac{\partial I_{2}}{\partial a} - \frac{\partial I_{1}}{\partial b} \right) + n_{1} \left(2 \, \frac{\partial I_{2}}{\partial a} - \frac{\partial I_{2}}{\partial c} \right) \\ \text{all } \frac{\partial^{2}y}{\partial a^{2}} = I, \, \frac{\partial I_{1}}{\partial a} + m_{2} \left(2 \, \frac{\partial I_{2}}{\partial a} - \frac{\partial I_{1}}{\partial b} \right) + n_{3} \left(2 \, \frac{\partial I_{3}}{\partial a} - \frac{\partial I_{2}}{\partial c} \right) \\ \text{all } \frac{\partial^{2}x}{\partial a^{2}} = I_{3} \, \frac{\partial I_{3}}{\partial a} + m_{3} \left(2 \, \frac{\partial I_{3}}{\partial a} - \frac{\partial I_{1}}{\partial b} \right) + n_{3} \left(2 \, \frac{\partial I_{3}}{\partial a} - \frac{\partial I_{1}}{\partial c} \right) \\ \text{all } \frac{\partial^{2}x}{\partial a^{2}} = I_{3} \left(2 \, \frac{\partial I_{3}}{\partial a} - \frac{\partial I_{3}}{\partial a} \right) + m_{3} \, \frac{\partial I_{3}}{\partial a} + n_{4} \left(2 \, \frac{\partial I_{3}}{\partial a} - \frac{\partial I_{3}}{\partial c} \right) \\ \text{all } \frac{\partial^{2}x}{\partial a^{2}} = I_{3} \left(2 \, \frac{\partial I_{3}}{\partial a} - \frac{\partial I_{3}}{\partial a} \right) + m_{3} \, \frac{\partial I_{3}}{\partial b} + n_{3} \left(2 \, \frac{\partial I_{3}}{\partial a} - \frac{\partial I_{3}}{\partial c} \right) \\ \text{all } \frac{\partial^{2}x}{\partial a^{2}} = I_{3} \left(2 \, \frac{\partial I_{3}}{\partial a} - \frac{\partial I_{3}}{\partial a} \right) + m_{3} \, \frac{\partial I_{3}}{\partial b} + n_{3} \left(2 \, \frac{\partial I_{3}}{\partial a} - \frac{\partial I_{3}}{\partial a} \right) + n_{3} \, \frac{\partial I_{3}}{\partial a} \\ \text{all } \frac{\partial^{2}x}{\partial a^{2}} = I_{3} \left(2 \, \frac{\partial I_{3}}{\partial a} - \frac{\partial I_{3}}{\partial a} \right) + m_{3} \left(2 \, \frac{\partial I_{3}}{\partial a} - \frac{\partial I_{3}}{\partial a} \right) + n_{3} \, \frac{\partial I_{3}}{\partial a} \\ \text{all } \frac{\partial^{2}x}{\partial a^{2}} = I_{3} \left(2 \, \frac{\partial I_{3}}{\partial a} - \frac{\partial I_{3}}{\partial a} \right) + m_{3} \left(2 \, \frac{\partial I_{3}}{\partial a} - \frac{\partial I_{3}}{\partial a} \right) + n_{3} \, \frac{\partial I_{3}}{\partial a} \\ \text{all } \frac{\partial^{2}x}{\partial a^{2}} = I_{3} \left(2 \, \frac{\partial I_{3}}{\partial a} - \frac{\partial I_{3}}{\partial a} \right) + m_{3} \left(2 \, \frac{\partial I_{3}}{\partial a} - \frac{\partial I_{3}}{\partial a} \right) + n_{3} \, \frac{\partial I_{3}}{\partial a} \\ \text{all } \frac{\partial^{2}x}{\partial a^{2}} = I_{3} \left(2 \, \frac{\partial I_{3}}{\partial a} - \frac{\partial I_{3}}{\partial a} \right) + m_{3} \left(2 \, \frac{\partial I_{3}}{\partial a} - \frac{\partial I_{3}}{\partial a} \right) + n_{3} \, \frac{\partial I_{3}}{\partial a} \\ \text{all } \frac{\partial^{2}x}{\partial a^{2}} = I_{3} \left(2 \, \frac{\partial I_{3}}{\partial a} - \frac{\partial I_{3}}{\partial a} \right) + m_{3} \, \frac{\partial I_{3}}{\partial a} \\ \text{all } \frac{\partial^{2}x}{\partial a^{2}} = I_{3} \left(2 \, \frac{\partial I_{3}}{\partial a} - \frac{\partial I_{3}}{\partial a} \right) + m_{3} \, \frac{\partial I_{3}}{\partial a} \\ \text{all } \frac{\partial^{2}x}{\partial a^{2}} = I_{3} \left(2 \, \frac{\partial I_{3}}{\partial a} - \frac{\partial I_{3}}{\partial a} \right) + m_{3} \, \frac{\partial I_{3}}{\partial a} \\ \text{all } \frac{\partial^{2}x}{\partial a^{2}} = I_{3} \left(2 \, \frac{\partial I_{3}}{\partial a} - \frac{\partial I_{3}}{\partial a} \right) + \frac{\partial I_{3}}{\partial a} \\ \text{all }$$

all
$$\frac{d^2r}{dxdx} = l_1 \frac{dr}{dx} + m_1 \left(\frac{dt}{dx} + \frac{dr}{dx} - \frac{dr}{dx} \right) + m_1 \frac{dr}{dx}$$
all $\frac{d^2r}{dxdx} = l_2 \frac{dr}{dx} + m_3 \left(\frac{dr}{dx} + \frac{dr}{dx} - \frac{dr}{dx} \right) + m_3 \frac{dr}{dx}$
all $\frac{d^2r}{dxdx} = l_1 \left(\frac{dr}{dx} + \frac{dr}{dx} - \frac{dr}{dx} \right) + m_3 \frac{dr}{dx}$
all $\frac{d^2r}{dxdx} = l_1 \left(\frac{dr}{dx} + \frac{dr}{dx} - \frac{dr}{dx} \right) + m_1 \frac{dr}{dx} + n_2 \frac{dr}{dx}$
all $\frac{d^2r}{dxdx} = l_1 \left(\frac{dr}{dx} + \frac{dr}{dx} - \frac{dr}{dx} \right) + m_2 \frac{dr}{dx} + n_3 \frac{dr}{dx}$
all $\frac{d^2r}{dx} = l_1 \left(\frac{dr}{dx} + \frac{dr}{dx} - \frac{dr}{dx} \right) + m_3 \frac{dr}{dx} + n_3 \frac{dr}{dx}$

Presentemente col mezzo di questi valori cerchiamo quelli dei trinomi della riunione (15). Richiamando le equazioni (31), (33), (34), (34), 67, vedremo che tali valori risultano unicamente fatti delle t_1, t_2, \ldots, t_b e delle loro derivate prime, che è appunto ciò che volevamo provare. Per esempio il valore del primo trinomio

$$\left(\frac{d^3x}{dz^3}\right)^3 + \left(\frac{d^3y}{dz^3}\right)^3 + \left(\frac{d^3z}{dz^3}\right)^3$$

ci viene eguale ad una frazione il cui numeratore è

$$\begin{split} & \left(\ell_1 \ell_2 \cdots \ell_k \right) \left(\frac{dt_1}{dt_2} \right)^2 + \left(\ell_1 \ell_2 \cdots \ell_k^2 \right) \left(2 \frac{dt_1}{dt_2} - \frac{dt_1}{dt_2} \right)^2 + \left(\ell_1 \ell_2 \cdots \ell_k^2 \right) \left(2 \frac{dt_2}{dt_2} - \frac{dt_2}{dt_2} \right)^2 \\ & + 2 \left(\ell_1 \ell_4 \cdots \ell_k \ell_k \right) \frac{dt_1}{dt_1} \left(2 \frac{dt_2}{dt_2} - \frac{dt_2}{dt_2} \right) + 2 \left(\ell_k \ell_k \cdots \ell_k \ell_k \right) \frac{dt_1}{dt_1} \left(2 \frac{dt_1}{dt_2} - \frac{dt_2}{dt_2} \right) \\ & + 2 \left(\ell_1 \ell_1 \cdots \ell_k \ell_k \right) \left(2 \frac{dt_2}{dt_2} - \frac{dt_2}{dt_2} \right) \left(2 \frac{dt_2}{dt_2} - \frac{dt_2}{dt_2} \right) \end{split}$$

e il denominatore la quantità

$$4(t, t_*t_3 + 2t_4t_5t_6 - t_1t_6 - t_*t_5 - t_3t_4).$$

Formati a un di presso allo stesso modo si trovano i valori degli altri venti trinomi della riunione (15): non si è dunque esagerato dicendo essere 39. i trinomi sui quali la proprietà analitica è stata in atto verificata.

75. Ammessa la proposizione del numº, precedente si rende manifesto che l'equazione (17) può prendere quest'altra forma

(18)
$$f df f dg f dk \cdot \Lambda \delta \rho^{s} =$$
(a) $\delta t_{i} + (\beta) \delta t_{s} + (\gamma) \delta t_{3} + \dots + (\epsilon) \frac{\delta dt_{s}}{da} + (\zeta) \frac{\delta dt_{s}}{db} + (\eta) \frac{\delta dt_{s}}{dc}$

$$+(5)\frac{3d^{3}}{da}+\dots+(\lambda)\frac{3d^{3}}{da^{3}}+(\mu)\frac{3d^{3}t_{1}}{da^{3}}+\dots+(\xi)\frac{3d^{3}t_{3}}{da^{3}}+(0)\frac{3d^{3}t_{3}}{da^{3}}+ec.$$

nella quale i coefficienti (a), (β) (ε) (λ)ec. sono quantità fatte dei coefficienti (1), (2) (7), (8) della equazione (17), dei sei trinomi t, t, t6, e delle derivate di questi trinomj per a, b, c dei diversi ordini. Le variate poi $\delta t_1, \, \delta t_2 \, \ldots \, e$ le variate delle loro derivate di tutti gli ordini $\frac{\delta dt_i}{da}$, $\frac{\delta dt_i}{db}$, ec. non entrano nella (18) se non linearmente all'infinito. Ora è un principio fondamentale nel calcolo delle variazioni (e ne abbiamo fatto uso anche in questa Memoria al numº. 36. e altrove) che una scrie come la precedente ove sono lineari le variate di alcune quantità e le variate delle loro derivate per variabili semplici a, b, c, può sempre trasformarsi in una espressione che contenga quelle quantità non affette da alcun segno di derivazione, coll'aggiunta di altri termini i quali sono derivate esatte relativamente all'una o all' altra o alla terza delle variabili semplici. In conseguenza di tal principio all'equazione (18) può darsi l'espressione che segue

$$f df f dg f dk \cdot \Lambda \delta \rho^* =$$

$$A \delta t_t + B \delta t_s + C \delta t_s + D \delta t_t + E \delta t_b + F \delta t_b$$

$$+ \frac{d\Lambda}{dx} + \frac{d\Theta}{\partial t} + \frac{d\Gamma}{dx} \cdot \delta$$

I valori dei sei coefficienti A, B, (G, D, E, F) sono serie fatte coi coefficienti (a), (β) , (γ) , ... (c), (C), ... (λ) , e.c. (d)l' equatione (18) de vi entrano linearmente a segni alternati, e affetti da derivazioni di ordine sempre più elevato più che or indiriamo nei termini di esse serie: le quantità Δ , (O, T) sono serie della stessa forma della proposta a trasformarsi, nella quale i coefficienti delle variate hanno una composizione

simile a quella che abbiamo descritta pei sei coefficienti A, B. C. D. E. F.

Introdotta la quantità che forma il secondo membro della equazione (19) invece di quella del primo sotto l'integrale triplicato della equazione (12), si fa a tutti aperto che sugli ultimi tre termini di essa può eseguirsi alcuna delle integrazioni, e che per conseguenza tali termini non fanno che somministrare quantità le quali passano ai limiti. Ciò che rimane sotto l' integrale triplicato è il solo sestinomio in tutto simile a quello già usato nell'equazione (10) numº. 35. pei sistemi rigidi. Pertanto dopo un tal punto di confronto sarà pure perfettamente eguale l'andamento analitico da tenersi in questo luogo a quello tenuto colà fino al ritrovamento delle equazioni (26), (29) del numº. 38., e verrà dimostrata l'estensione delle dette equazioni ad ogni sorta di corpi non rigidi, siccome si è accennato sul finire del numº. 38. Sarà anche visibile la coincidenza dei risultamenti cogli espressi nelle equazioni (23) del numº. 50. sussistenti per qualunque sorta di sistemi, e dimostrate nel Capo IV. mercè quelle coordinate intermedie p, q, r, la di cui considerazione, attenendoci alla maniera esposta in questo Capo, non fa più bisogno.

non la più bisogno.

76. L'analisi precedente apre l'adito a molte utili riflessioni. Primieramente farò parola di quelle che valgono a piomamente dissipare le dubbiezze cui ci siamo provati a rispondere al num². 63., rimettendoci per maggiore spiegazione a
quanto avremmo poi detto in questo luoge. Partendo dallo stato
di antecedente disposizione ideale delle molecole colle coordimate aβ, 8c, e venendo a quello della disposizione reale, intendasi questo secondo espresso relativamente a due diverse terne
di assi ortogonali, delle p, q, r, e delle z, y, z. Per l'espressione dello stato reale mediante le p, q, r, non abbiamo a far
altro che copiare l'analisi precedente scrivendo dappertutto p, q, r
dove sono scritte le z, y, z. C na volendo passare dalle coordinate p, q, r alle x, y, z, osserveremo che pel caso del fluido,
siccome si è detto al num² - q, z, la forza interna K, ovvero Λ

Tomo XXIV. P.te I.

è funzione unicamente della distanza molecolare o; e se ben si considera la fattura dei coefficienti (1), (2), (3) dell' equazione (17), quella dei coefficienti (α), (β), (γ).... dell' equazione (18), e in fine quella dei sei coefficienti A. B. C. D. E, F dell'equazione (19), verremo facilmente a persuaderci che quest' ultime sei quantità, nel primo riferimento agli assi delle p, q, r, non contengono tali p, q, r se non in quanto sono contenute nel radicale ρ (equazione (8)), e nei sei trinomi t_i , t, t6, avendo scritto dappertutto p, q, r in luogo di x, v, z. Pertanto le sei quantità A. B. C. D. E. F godranno della proprietà analitica già tanto discussa, del cangiarsi mediante la sostituzione dei valori (31) numº. 40. in quantità egualmente fatte colle x, y, z, sparita ogni traccia delle nove quantità angolari a,, B,, 7,, a, ec., quando si fatta proprietà si verifichi nel radicale ρ, e in ciascuno de' sei trinomi t., t. . . . , tε. Ora qui non si ha a far altro che eseguir le operazioni, e resteremo convinti che la cosa è appunto come si è detto, rammentate le equazioni fra le quantità angolari registrate al numº, 33, Ecco uno dei risultamenti in vista dei quali dicemmo in prevenzione al cominciare del presente Capo, che le due maniere per mettere a calcolo i vincoli interni fra le molecole si illustravano a vicenda.

Viceversa, l'andamento tenuto nel Capo IV, remde possibile la trattazione delle quantità ai limiti che col metodo atstuale riuscirebbe intralciatissima. Vedemuno colà (num², 5x.) come la quantità ai limiti è fatta delle stesse sei quantità seprimenti l'effetto delle forze interne, che entrano nelle tre equazioni estensibili a tutta la massa: qui invece verrebbe complicata per l'intervento di quelle altre quantità A, θ, τ che compajono negli ultimi termini dell' equazione (19). Convien dire che tutta la parte introdotta da tali termini nelle quantità ai limiti, v'interviene solo apparentemente: ne questo fatto analtico è senza un riscontro nel calcolo delle variazioni. Nelle questioni del calcolo delle variazioni riferibili a formole integrali definite triplicate, se avendo un' equazione di condizione L = 0, se ne prendono le equazioni derivate

$$\frac{d\mathbf{L}}{da} = 0$$
, $\frac{d\mathbf{L}}{db} = 0$, $\frac{d\mathbf{L}}{dc} = 0$; $\frac{d^{2}\mathbf{L}}{da^{2}} = 0$, ec.

di qualunque ordine, e si trattano come fossero tante move equazioni di condizione, moltiplicandone le variate per coefficienti indeterminati, introducendo i prodotti nell' equazione del massimo o del minimo sotto il segno integrale, e praticandovi le solite trasformazioni, si viene ad aggiungere (alla quantità che vi sarebbe stata se non avessimo fatto il di più che si è detto) una quantità della stessa natura del trinomio che termina l'equazione (19). In tal caso si capisce che la comparsa di mover quantità ai limiti non può essere che apparente, giacchè le equazioni derivate anzidette non hanno significato che non fosse già espresso dalla sola L = o.

Però l'annullarsi di quella quantità ai limiti, non essendo qui un risultato di equazioni di condizione adoperate più che non sia d'uopo, ma una necessaria conseguenza del confronto dei due metodi, potrebbe essere un mezzo che ci mettesse sulla traccia di nuove verità, ci conducesse, per esempio, a investigazioni più intime sulla natura dell'azione molecolare. Mi limito a un semplice cenno: ma a proposito dell'azione molecolare non posso tralasciare di notar cosa che parmi di non lieve momento. Il lettore si sarà accorto che nell'analisi precedente per venire alle conclusioni più importanti, cioè alle equazioni che sussistono per tutti i punti della massa, non fanno più bisogno le ipotesi ammesse dai Geometri moderni, e da me stesso nel C. V. della Memoria inserita nel Tomo XXI di questi Atti. Si è detto che l'azione molecolare deve essere sensibile per distanze insensibili, e insensibile per distanze sensibili: ciò sarà forse vero, ma sia quel ch' esser si voglia, si può prescindere, per l'oggetto nostro, da tale supposizione: gli integrali per le variabili f, g, k nelle equazioni (17), (18), (19) possono considerarsi estesi fino ai limiti del corpo, e non solamente per tratti piccolissimi, il che non è senza un certo sforzo.

Terminerò il capitolo immaginandomi un' obbjezione. Taluno potrebbe dirmi; avete qui calcolate le azioni interne fra molecola e molecola, e sta bene: ma perchè non avete fatto o stesso anche nel Capo IV. dove lasciaste fuori tutta la seconda parte dell'equazione generale (1) num". 16? quella omisisione può toglier fede allo deduzioni ottenute con que' procedimenti nalitici. Rispondo: non ho allora tenuto conto delle azioni interne fra molecola e molecola, perchè vi suppliva la considerazione delle sei equazioni di condizione ivi trattate: il farlo sarebbe stato un doppio. Anche mentre si effettua il moto de' corpi rigidi hanno certamente luogo azioni fra molecole e molecole, eppure ognuno che conosca lo spirito della Meccanica mallitica, si sarà persuaso che tutte vennero contemplate nelle sei equazioni (8) del num". 34, estensibili a tutti i punti: anzi se poten nascergli dubbio, era che si fosse fatto di troppo collo stabilire tali equazioni in numero di sei, di modo che ci furono necessarie le considerazioni poste al numero 3a,

Lo stesso deve dirsi nel caso generale delle equazioni di condizione (14) del numº. 47., anch' esse sussistenti per tutti i punti della massa: il contemplarle e calcolarle equivaleva al valutare tutte le forze interne, quantunque non sia perspicuo come questo avvenga. Ad alcuni può sotto alcuni riguardi parere più convincente il metodo tenuto in questo Capo, perchè ci permette il farci qualche immagine intorno al modo d'agire delle forze molecolari: eppure io reputo che i meglio pensanti daranno la preferenza al metodo del Capo IV., metodo diretto e più potente, perchè appoggiato a quel principio geometrico della posizione arbitraria degli assi rimpetto al sistema, che ci servirà anche nel Capo seguente, e che contiene la ragione di tante verità meccaniche. Vedo altresì possibile seguendo il filo de' ragionamenti esposti nel Capo IV. spiegare il vero senso di quel altro principio lagrangiano, che al cominciare dello stesso Capo chiamammo troppo astratto, fissarne l'estensione e il modo sicuro di usarne. Una tale spiegazione però non sarebbe forse di molta utilità, il che asserisco perchè parmi che tutti i vantaggi ai quali mirava Lagrange col mettere quel principio, si ottengano più direttamente e naturalmente tenendo l'andamento descritto nel medesimo Capo IV.

CAPO VII.

Del moto e dell'equilibrio di un corpo qualunque, ridotto
ad essere un sistema lineare o superficiale.

Fu rimproverato in particolar modo ai metodi della M.A.

di Lagrange di essere insufficienti per varie questioni che riguardano curve o superficie elastiche. Entro io quindi a trattare del moto e dell'equilibrio de'sistemi lineari e superficiali. toccandone almeno le generalità, con tanto più di gusto in quanto farò vedere che lungi dal venir meno que' metodi nel presente caso, spiegano essi qui forse meglio che altrove tutta la loro ampiezza e magnificenza. Sia pure che le soluzioni date nella M. A. di alcuni di sì fatti problemi non riescano abbastanza generali per comprenderne altri contemplati di poi: ripeterò quel che dissi altrove: Lagrange non potea far tutto; egli per altro ci diede in mano metodi che, a saperli ben intendere ed applicare, valgono in questioni di questo genere per rispondere alle già fatte domande, e per prevenir le future. Anzi non solo è possibile con tali metodi affrontare nel caso presente qualunque ricerca, ma lo è in due diverse maniere, in corrispondenza con quanto sponemmo pei sistemi a tre dimensioni nei Capi IV. e VI. Delle due maniere mi atterrò io qui alla prima, a quella cioè che riduce ad equazioni di condizione l'espressione dei vincoli interni fra le molecole: e per l'altra mi limiterò ad assicurare il lettore di averla seguita fino ad un certo punto, e di aver trovato una perfetta corrispondenza nei risultamenti. Se di questa qui non riporto l'analisi, ciò faccio per due ragioni: la prima per non passare ogni segno di discrezione in servirmi dello spazio concessomi nel volume sociale: la seconda perchè, dopo aver visto l'andamento tenuto nel Capo precedente, lo studioso potrà non difficilmente fabbricarsi da se una tale analisi, la quale riesce meno complicata della riferita nel luogo citato.

77. Dissi di avere scelto per trattare le presenti questioni quella maniera che riduce tutto al maneggio di equazioni di condizione come nel Capo IV. Ragione della preferenza fi il procurarmi diue muove occasioni per mettere in evidenza la ficcondità di quel principio di cui già vedemmo varie applicazioni, e che consiste nello serivere analticamente l'arbitrio in ui siamo relativamente alla collocazione degli assi a cui riferirei il sistema. Esso ci condusse nel Capo IV. alle equazioni generali: da esso (come accemammo al numº. 6c.) dipende la vera spiegazione del principio delle velocità virtuali, e di quelli della conservazione del moto del centro di gravità, e delle arce: per esso (come si è notato sul fine del numº. 6c.) si potrebbe adattare l'analisi data da Lagrange (il che adesso non fa più bisogno) anche al moto de' fluidi elastici; ora il medesimo ci fornirà le equazioni di condizione che si verificamo

per ogni punto nei sistemi lineari e superficiali.

È cosa degna di molta considerazione quel verificarsi delle equazioni (14) numº, 47, per ogni sistema a tre dimensioni costante o mutabile, in equilibrio o in moto: notammo come esse vengano dall'aver collocato tre assi ortogonali rimpetto a tre altri, facendo sparire le quantità angolari dalle equazioni che ne esprimono le relazioni, e riducendole ad equazioni fra derivate parziali che per la loro generalità equivalgono esse sole a tutte le equazioni finite senza numero che si otterrebbero variando i valori di quelle quantità angolari. Ebbene: lo stesso può farsi anche pei sistemi lineari e superficiali; si possono trovare a riscontro delle equazioni (14) numº. 47. equazioni cui debbano sempre soddisfare le derivate delle variabili esprimenti le coordinate di qualunque curva o superficie, mobile, flessibile, contrattile, ec.; e ciò unicamente in virtù dell'arbitrio nella collocazione degli assi rimpetto al sistema, arbitrio cui si dà per tal modo un' espressione analitica. Tali equazioni sono le equazioni di condizione le quali, quando le curve o superficie si considerano fatte di molecole, esprimono i vincoli interni fra queste, e danno presa ai metodi della Meccanica analitica: interessa trovarle.

78. Sia una eurva qualunque riferita a tre assi ortogonali delle p,q,r per mezzo di due equazioni

(1)
$$q = \phi(p); r = \psi(p).$$

Nel caso di curve fatte di molecole conviene, come si è detto nel Capo I. num⁸. 11. riguardare le p,q,r siccome funzioni di una variabile semplice a relativa allo stato precedente, ed anche del tempo t

(2)
$$p = p(a,t); q = q(a,t); r = r(a,t);$$

allora le equazioni (1) vogliono essere intese come le due che risultano dall'eliminazione della a fra queste tre, talchè quelle (1) possono contenere anche il t esplicito alla p, e confuso colle costanti.

Riferiamo ora la stessa curva ad altri tre assi delle x, y, z comunque posti rimpetto ai primi: avremo fra le une e le altre coordinate le equazioni (1) del numº. 33., che qui giova replicare

(3)
$$x = f + \alpha_1 p + \beta_1 q + \gamma_1 r$$

$$y = g + \alpha_2 p + \beta_2 q + \gamma_2 r$$

$$z = h + \alpha_2 p + \beta_3 q + \gamma_2 r$$

ec.

Le dodici quantità f, g, h, a,, ec. restano costanti passando da uno ad altro punto del sistema, cosicchè anche le x_1 , y, as si potranno considerare direttamente funzioni dell'unica variabile semplice p. Deriviamo pertanto le riferite equazioni per la p, o indicando tali derivate con apici, avremo

$$\begin{aligned} x' &= a_1 + \beta_1 q' + \gamma_1 r'; \ y' &= a_2 + \beta_2 q' + \gamma_2 r'; \ z' &= a_3 + \beta_2 q' + \gamma_2 r' \\ x'' &= \beta_1 q'' + \gamma_1 r''; \ y'' &= \beta_2 q'' + \gamma_1 r''; \ z'' &= \beta_2 q'' + \gamma_2 r'' \\ x''' &= \beta_1 q''' + \gamma_1 r''; \ y''' &= \beta_2 q'' + \gamma_2 r''; \ z''' &= \beta_2 q''' + \gamma_2 r'' \\ x''' &= \beta_1 q''' + \gamma_1 r''; \ y''' &= \beta_2 q'' + \gamma_2 r''; \ z''' &= \beta_3 q'' + \gamma_2 r'' \end{aligned}$$

Poniamo altresi per comodo le seguenti denominazioni

$$k = x'^5 + y'^5 + z'^5$$
; $l = x''^5 + y''^5 + z''^5$
 $m = x''^5 + y''^5 + z''^5$; $n = x^{375} + y^{375} + z^{375}$; eq.

Quadrando tutte le equazioni (4) e sommandole a tre a tre come stanno nelle linee orizzontali, troveremo (rammentate le equazioni del num². 33. fra le quantità angolari₂ e le precedenti denominazioni (5))

(6)
$$k = 1 + q'^s + r'^s; \quad l = q''^s + r''^s$$

 $m = q''^s + r''^s; \quad n = q^{ivs} + r^{ivs}; \quad c.$

Si vede manifestamente il procedere di tali equazioni. Queste non contengono più le quantità angolari, ma però ci presentana anoca le derivate delle q., relativamente alla p, mentre si vorrebbero equazioni fra le sole derivate delle x, y, z per la p. A conseguire l'intento bisogna combinare le (6) colle loro derivate per rapporto a p. che sono

- (7) k'=2q'q''+2r'r''; l'=2q''q'''+2r''r'''; m'=2q'''q'''+2r''' rev.; ec.
- (8) k'' 2l = 2q'q''' + 2r'r'''; $l' 2m = 2q''q^{vv} + 2r''r^{vv}$; ec.
- (9) $k''' 3l' = 2q' q^{vv} + 2r' r^{vv}$; ec.

può ottenere una non oltrepassando le equazioni che contengono le derivate terze q"', r"': ecco in qual maniera. Si prendano la seconda delle (7) e la prima delle (8) e se ne cavino i valori delle «", r"': troveremo

$$q''' = \frac{q''(k'' - al) - r'l'}{a(q'r'' - q''r')}; \quad r''' = \frac{q'l' - q''(k'' - al)}{a(q'r'' - q''r')}$$

Quadriamo queste due equazioni e sommiamole: richiamando le equazioni (6), e la prima delle (7) per le opportune sostituzioni, otterremo

$$4m(q'r''-q''r')^* = l(k''-2l)^* - kl(k''-2l) + (k-1)l^*.$$

Ora sommiamo questa colla seguente

$$4m (q' q'' + r' r'')^{\circ} = mk'^{\circ}$$

che è la prima delle (7) quadrata e moltiplicata per m; osservando essere

$$(q'r'' - q''r')^s + (q'q'' + r'r'')^s = (q'^s + r'^s)(q''^s + r''^s)$$
 giungiamo all'equazione desiderata che è

(1c) 4m(k-1) l = l(k'-2l) - k'l(k'-2l) + (k-1) l² + mk'².
Qui si può, sostituiti i valori (5), cercar di dare all' equazione una forma elegante, la quale però non gioverebbe al nostro fine, come apparirà dal progresso.

Ecco una equazione fra le sole derivate delle x, y, z, la quele (cosa notabile) si verifica per qualunque curva, e ne vedemmo più sopra la ragione. Il più è, che di tali equazioni se ne possono trovare altre simili quante se ne vogliono seguendo l'indicato processo di eliminazione. La prima di quelle che risultano dalla eliminazione delle q^{w}, x^{n} è

(11)
$$4n(k-1)l = l(k''-3l)^s + (k-1)(l'-2m)^s - k'(k''-3l)(l'-2m) + k'^s n.$$

Non mi fermo a descrivere l'operazione, e nemmeno a dare le equazioni che seguono, perchè, come fra poco si farà chiaro,

*Tomo XXIV. P.** L. 22

a noi non importa molto il conoscere l'attualità di talli equazioni, ci basta sapere la loro esistenza. Sono poi di parere, visto quello che ha detto Lagrange per le curve rigide (M. A. Tom. L pag. 161.), che dopo un certo numero tali equazioni non saranno più che una combinazione dello precedenti, il che non è necessario chiarire. Si fatte equazioni (10), (11) e seguenti stanno a riscontro delle (14) num. 47, poi sistemi a tre dimensioni.

79. Presentemente si richiami il già detto al numº 28. pei sistemi lineari, e si capirà che, analogamente alla equazione

(1) numº. *44., potremo esprimere per

(12)
$$\int da \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \partial x + \text{ec.} \right\} + \int da \cdot G + \Omega = 0$$

l'equazione generale meccanica in relazione con tali sistemi, intendendo significato dall' integrale f Aa. G il complesso dei termini portati dalle equazioni di condizione a noi meognite nelle quali fossere espressi i vincoli esistemi fira le molecole. Conviene nella equazione precedente trasformare gli integrali in modo che siano presi per la p di cui le x, y, z si considerano funzioni prima che per la a.

Dalla equazione (14) numº. 11. per la quale ottenemmo l'espressione della densità in tali sistemi, caviamo

(13)
$$\Gamma \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \cdot \frac{dx}{da}} = 1.$$

Riflettiamo essere $\frac{dx}{da} = \frac{dx}{dp} \frac{dp}{da}$, e ponendo per abbreviare

(14)
$$V = \Gamma \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^a + \left(\frac{dz}{dx}\right)^a} \cdot \frac{dz}{dp}$$

la precedente equazione si cambierà nella

(15)
$$\frac{dp}{dz} \nabla = 1$$
.

Ora se sotto i due integrali dell'equazione (12) introduciamo il fattore $\frac{dp}{dq}$ V, non produciamo alterazione, essendo tal fattore, come provammo, eguale all'unità. Allora quegli integrali ci appajono subito trasformabili in altri per p, e passiamo ad avere l'equazione generale espressa come segue

(16)
$$fdp \cdot \nabla \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dx^2} \right) \delta x + \text{ec.} \right\} + fdp \cdot \nabla G + \Omega = 0;$$

dove debbono intendersi tutte le quantità ridotte funzioni di p_i , soppressa per ora la considerazione dell' ulteriore composizione della p in a. Avendo l'equazione generale sotto l'esposta non consoevamo le equazioni di condizione espresse fra le z_i , $y_i \ge e$ la a, adesso ci diventa noto, sapendo dal numero predente (equazioni (ro), (ri), ec.) quali sono le equazioni di condizione espresse fra le z_i , $y_i \ge e$ la p. Non abbiamo pertanto a fra altro che sostituire sotto il detto secondo segno integrale i primi membri delle variate delle equazioni (ro), (11), ec. ri dotte a zero, moltiplicati per coefficienti indeterminati studiamo tali quantità. Se poniamo mente a quella introdotta dalla prima equazione (ro), essa è della forma

(17) (1)
$$\delta k + (2) \delta k' + (3) \delta k'' + (4) \delta l + (5) \delta l' + (6) \delta m$$
,

cioè lineare per rapporto alle variate $\partial k_i \, \partial k_i' \, \partial k_i' \, \partial k_i$ ec.; dicasi lo stesso delle quantità introdotte dalle variate della equazione (11) e seguenti. La somma di tali quantità, per quante si prendano equazioni di condizione, è ancora una quantità della stessa forma (17), accrescendovi le variate delle derivate, cioè aggiungendovi termini contenenti linearmente le $\partial k_i^{\mu} \, \partial k_i^{\mu} \, \dots \, \partial \ell'$, ec. Ecco poi un' osservazione che abbrevia le operazioni. In così fatta somma si possono ommettere tutti i termini contenenti le variate delle derivate $k_i \, k_i^{\mu} \, \dots \, k_i^{\nu} \, \dots \, k_i^{\nu} \, e.$: e di vero tali termini, come i seguenti dell'espressione (17);

tan termini, come i seguenti den espressione (1/), $(2) \delta k'$, $(3) \delta k'$, $(5) \delta k'$, attese le note trasformazioni per le quali diventano

(a)
$$\partial k' = -(a)' \partial k + [(a) \partial k]'$$

(18) (3) $\partial k'' = (3)'' \partial k - [(3)'' \partial k - (3) \partial k']$
(5) $\partial \ell = -(5)' \partial \ell + [(5) \partial \ell]';$ ec.

si provano equivalenti a binomi dove primamente ricompajono le variate $\delta k,~\delta l,$ ec. non affette da derivazioni e già esistenti

in altri termini della quantità (17), coi quali si compenetrano questi novivi ciò che resta forma complessivamente una quantità derivata castta relativamente alla p_s che introdotta sotto il secondo segno integrale dell'equazione (16), passa si limiti e si fonde coll'ultimo termine Ω di quella equazione. Gosì si fa palese che termini come i precedenti (16) non vengono ad influire sulle equazioni estensibili a tutti i punti del sistema. L'osservazione si troverà molto simile a quella per la quale el Capo precedente num", 75. concludemo la non influenza degli ultimi termini dell'equazione (19) pel ritrovamento delle tre ernazioni che coincidevano colle (30) del num", 38.

Dopo gli addotti ragionamenti è piano l'inferirne che alla equazione generale (16) pei sistemi lineari può darsi la forma

$$fdp \cdot V \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\}$$

$$+ fdp \cdot \left(\lambda \delta k + \mu \delta l + v \delta m + \rho \delta n + cc. \right) + \Omega = 0 ;$$
(19)

dove sotto il secondo segno integrale appariscono le variate delle sole quantità k, l, m, n, e.e. equivalenti, per le equazioni $\{5\}$, a trinomi noti che possono continuarsi a piacere. Tali variate sono moltiplicate per fattori k, k, k, p, n, ... che riterremo fra di loro indipendenti, essendo coefficienti raccolti da tante equazioni variate, ciascuna delle quali porta un moltiplicatore indeterminato. Veramente se il numero dei trinonij k, k, m, n, q. fosse maggiore di quello delle equazioni (ro), (1), e.e., essendo le indeterminate introdotte dal metodo de' moltiplicatori tante quante le equazioni, alcuno dei coefficienti k, k, n, p, n. ... dipendenti fino al numero che eguaglia quello delle equazioni irreducibili le une alle altre.

80. Rimane a sostituire nell' equazione (19) alle quantità k, L, m, n, ec. i loro valori scritti nelle equazioni (5). Qui conviene primieramente porre attenzione all'equazione

$$\lambda \partial k + \mu \partial l + v \partial m + \rho \partial n + \text{ec.} =$$

$$2\lambda \left(x' \partial x' + y' \partial y' + z' \partial z' \right)$$

(20)
+
$$2\mu (x'' \delta x'' + y'' \delta y'' + z'' \delta z'')$$

+ $2\nu (x''' \delta x''' + y''' \delta y''' + z''' \delta z''') + ec.;$

poi osservare che sui termini componenti il secondo membro si debbono nuovamente operare le solite trasformazioni, giacchè in essi le variazioni ∂x , ∂y , ∂z sono affette da derivazioni. Essendo identicamente

$$2\lambda x' \partial x' = -(2\lambda x')' \partial x + (2\lambda x' \partial x)'$$

$$(21) \quad 2\mu x'' \partial x'' = (2\mu x'')' \partial x - [(2\mu x'')' \partial x - 2\mu x'' \partial x']'$$

$$2\nu x''' \partial x'' = -(2\nu x'')'' \partial x + [(2\nu x'')' \partial x - (2\nu x''') \partial x' + 2\nu x''' \partial x'']$$

e simili equazioni avendo luogo pei termini che contengono le derivate delle y, s, sarà facile riconoscere quale risulti dopo le trasformazioni la prima parte del secondo membro della (ac), cui si dà una forma trinomiale raccogliendo i coefficienti totali

trasformazioni la prima parte del secondo membro della (a_2) , cui si dà una forma trinomiale raccogliculo i coefficienti totali delle ∂z , ∂y , ∂z : la seconda parte costituisce una derivata esata che, quando viene introdotta sotto il segno integrale, produce un nuovo versamento di quantità ai limiti. Riuniti pertanto i due integrali della equazione (19) in un solo, procedendo col solito metodo conseguiremo le tre equazioni

(22)
$$V\left(X - \frac{d^3x}{dr^2}\right) - \frac{dP}{dp} = 0$$

$$V\left(Y - \frac{d^3y}{dr^2}\right) - \frac{dQ}{dp} = 0$$

$$V\left(Z - \frac{d^3z}{dr^2}\right) - \frac{dR}{dp} = 0$$

essendosi poste per abbreviare

$$P = 2\lambda x' - (2\mu x'')' + (2\nu x''')'' - ec.$$

(23)
$$Q = 2\lambda y' - (2\mu y'')' + (2\nu y'')'' - ec.$$

$$R = 2\lambda z' - (2\mu z'')' + (2\nu z''')'' - ec.$$

Dalle equazioni (22) può farsi sparire ogni vestigio apparente della p. Essendo per qualunque funzione $\mathbf L$ di x che poi è funzione di p,

$$\frac{dL}{dp} = \frac{dL}{dx} \frac{dx}{dp},$$

richiamato per V il suo valore dato dalla equazione (14), si può dividere per $\frac{dx}{da}$, e le (22) diventano

$$\Gamma \sqrt{1 + \left(\frac{d^2y}{dx}\right)^4 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^4} \left(X - \frac{d^2x}{dx^2}\right) = \frac{d^2}{dx}$$
(a5)
$$\Gamma \sqrt{1 + \left(\frac{d^2y}{dx}\right)^4 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^4} \left(Y - \frac{d^2x}{dx^2}\right) = \frac{d^2x}{dx}$$

$$\Gamma \sqrt{1 + \left(\frac{d^2y}{dx}\right)^4 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^4} \left(Z - \frac{d^2x}{dx}\right) = \frac{d^2x}{dx}$$

dove non sono in evidenza se non le variabili x, y, z: ma le P, Q, R hanno i valori (23).

81. Giova mandar via la p anche dai valori (23) delle P, Q, R: giacchè (parlando în generale per tutte le tre sorte di sistemi continui) le coordinate p, q, r, intermedie fra le a, b, c e le x, y, z dei dne stati antecedente e reale, fanno bensi un gran ginoco, essendo quelle che ci somministrano le equazioni di condizione, ma non vengono opportune quando si vogliono applicare le formole alla risoluzione dei problemi. A tal fine osserviamo che ponendo

(26)
$$\varepsilon = 2\lambda$$
; $\mathfrak{I} = -2\mu'$; $\tau = 2\nu'' - 2\mu$; ec. le (23) si riducono più semplicemente

(27)
$$P = \varepsilon z' + \beta z'' + \tau z''' + cc.$$

$$Q = \varepsilon y' + \delta y'' + \tau y''' + cc.$$

$$R = \varepsilon z' + 2z'' + \tau z''' + cc.$$

Indichiamo per pochi momenti con apici al piede le derivate per la a dello stato antecedente: avremo, fatta $\omega=\frac{dp}{da}$,

$$x' = \frac{x_i}{\sigma}; \quad x'' = \frac{\sigma x_i - \sigma_i x_i}{\sigma^3}$$

$$x''' = \frac{\sigma^2 x_{ii} - 3\sigma \sigma_i x_i - (3\sigma_i^2 - \sigma \sigma_i) x_i}{\sigma^3}; \quad \text{ec.}$$

e analoghi saranno i valori per le y', y", y"', z', z'', z''', di modo che adottando quest'altre denominazioni

$$A = \frac{1}{\sigma} \varepsilon - \frac{\sigma_0}{\sigma^2} S + \frac{3\sigma_0 - \omega \sigma_0}{\sigma^2} \varepsilon - ec.$$

$$B = \frac{1}{\sigma^2} S - \frac{3\sigma_0}{\sigma^2} \varepsilon + ec.$$

$$C = \frac{1}{\sigma^2} \varepsilon - ec.$$

$$ec.$$

le (27) assumeranno le forme

$$P = A \frac{dz}{da} + B \frac{d^{3}z}{da^{2}} + C \frac{d^{3}z}{da^{2}} + ec.$$

$$Q = A \frac{dy}{da} + B \frac{d^{3}y}{da^{2}} + C \frac{d^{3}y}{da^{3}} + ec.$$

$$R = A \frac{dz}{da} + B \frac{d^{2}z}{da^{2}} + C \frac{d^{3}z}{da^{3}} + ec.$$

dove per significare le derivate rispetto alla a ho rimessa, invece degli apici al piede, la notazione ordinaria. Si noti che i coefficienti A, B, C, ec. i quali hanno assorbito tutto quanto restava di contenente ancora la p nelle sue derivate per la possone essere direttamente considerati siccome coefficienti indeterminati : essi infatti sono tanti quante le ε , S, τ , ec., e queste tante quante le λ , ρ_s , τ_s , ec., e

Se poi vogliamo che nelle equazioni generali compajamo soltanto derivate prese per la α dello stato antecedente, e pel tempo (il che appunto si richiede per trattare alcune questioni) conseguiremo facilmente l'intento moltiplicando le (a5) per $\frac{d^2}{d^2}$. Osservisi allora (equazione (13)) che il coefficiente comune ai primi membri eguaglia l'unità: si ponga altresi mente che N essendo una funzione qualunque della x funzione di a, è sempre $\frac{d^2}{d^2 n} = \frac{d^2}{d^2 n} \frac{d^2}{d^2 n} \frac{d^2}{d^2 n}$ e que fequazioni ci diventeranno

(3c)
$$X - \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dP}{da}$$
; $Y - \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dQ}{da}$; $Z - \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dR}{da}$

nelle quali le P. O. R. hanno i valori (20).

Volta un' occhiata alle denominazioni introdotte per abbreviazione di scrittura col mezzo delle equazioni (26), (28), capiremo facilmente che i valori delle P, Q, R espressi nelle (29) si riducono ai soli primi termini, se dei trinomi scritti nelle equazioni (5) riteniamo solamente il primo, il che equivale a considerar nelle curve quella sola forza interna che appellasi tensione. Messi a profitto anche i seguenti termini delle (20), non ci sarebbe per niente malagevole il dedurre dalle precedenti equazioni quelle conseguenze che Lagrange (M. A. Tom. I. pag. 152.), Binet (Journal de l' École Polyt. T. X. pag. 418.) e Bordoni (Memorie della Società Italiana T. XIX. pag, 1,) hanno ricavate dalla considerazione delle forze agenti sugli angoli di contingenza e di torsione, come eziandio le altre cose scritte di poi; ma questo non è lo scopo ch' io mi sono prefisso, non volendo qui (e lo feci intendere fin da principio) entrare nei particolari delle varie questioni, ma provare soltanto come esse tutte siano abbracciate dal metodo lagrangiano.

82. Lo stesso verrò ora facendo in ordine ai sistemi su-perficiali. In questo caso, delle p, g, r visibili nelle equazioni (3), le prime due si hanno a riguardare come variabili fra di loro indipendenti, e la r va considerata funzione di esse. Esprimeremo con aplici in alto le derivate per la p, e con aplici a

basso le derivate per la q.

Incominciamo a dedurre dalle (3) le seguenti serie di equazioni $x' = a_1 + \gamma_1 \dot{r}'; \quad y' = a_2 + \gamma_3 \dot{r}'; \quad \dot{z}' = a_3 + \gamma_3 \dot{r}'$

Qui pure adottando nuove lettere in luogo di trinomi come segue $k = x'^5 + y'^5 + z'^5 \qquad n = x''x + y''y + z''z$

$$h \equiv x^2 + y^2 + z^2$$
 $i = x'^2 + y'^2 + z'^2$

(3a)
$$h = x_i^s + y_i^s + z_i^s \qquad j = x_i^s + y_i^s + z_i^s i = x_i^s x_i^s + y_i^s y_i^s + z_i^s z_i^s f = x_i^s x_i^s + y_i^s y_i^s + z_i^s z_i^s$$

$$l = x''^2 + y''^2 + z''^2$$
 $g = x_u x'_1 + y_u y'_1 + z_u z'_1$
 $m = x^2 + y^2 + z^2$ ec. ec.

ci sarà facile, a motivo delle tanto usate equazioni fra le quantità angolari registrate al numº. 33., dedurre dalle (31) le seguenti

$$k = 1 + r'^*; \quad h = 1 + r_i^*; \quad i = r'r_i$$

(33)
$$l = r''^*$$
 ; $j = r'_i^*$; $m = r_n^*$
 $f = r''r'$; $g = r', r_n$; $n = r'', r_n$; ec.

le quali corrispondono alle (6) pel caso de' sistemi lineari, cioe non contengono più le quantità angolari, ma sono ancora ingombre dalle derivate della r per le p, q. Le equazioni che si cercano fra le sole derivate delle x, y, x, per le p, q, si ricavano a colpo d'occhio dalle precedenti e sono

(34)
$$(k-1)(k-1) = i^*; lj = f^*; lm = n^*; jm = g^*$$

 $k' = 4(k-1)l; k' = 4(k-1)j; h' = 4(k-1)j; h' = 4(k-1)m; ec.$

Queste stanno a riscontro delle (1c), (11), ec. mm², 78. e delle (14) num², 47., vale a dire si verificano per qualunque superficie atteso l'arbitrio nella posizione degli assi ai quali è riferita. Anche di esse diremo che dopo un certo numero non saramo più probabilmente se non combinazioni delle antecedenti. Esse sono le equazioni di condizione che, quando la superficie è fatta di molecole, esprimono i vincoli interni e si prestano onde possiamo serivere mediante il metodo lagrangiano le equazioni del moto e dell'equilibrio di qualunque sistema superficiale.

83. Passeremo ad assegnare le dette equazioni, richiamando il già esposto al numº. 3o.: nè ci sarà difficile il persuaderci Tomo XXIV. P.º I.

che in corrispondenza della equazione (1) numº. 44., e della (1a) numº. 79. l'equazione generale meccanica assumerà presentemente l'espressione

(35)
$$\int da \int db \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \text{ec.} \right\} + \int da \int db \cdot G + \Omega = 0.$$

Questa pure va trasformata analogamente a quanto si è praticato nei citati luoghi. Qui gli integrali debbono comparire prespre le p, q di cui le x, y, z si hanno a considerare funzioni prima che delle a, b. Con tale intendimento, in virtù delle equazioni (ac), (aa) del numº. 1a. ci prepareremo l'equazione seguente

(36)
$$\Gamma \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dz}\right)^a + \left(\frac{dz}{dz}\right)^a} \left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\right) = 1$$

dove Γ è la densità superficiale nel punto (x,y,z). Osserviamo che per essere x,y,z funzioni di p,q,r e queste di a,b, abbiamo

$$\tfrac{dx}{da}\tfrac{dy}{db} - \tfrac{dx}{db}\tfrac{dy}{da} = \left(\tfrac{dx}{dp}\tfrac{dy}{dq} - \tfrac{dx}{dq}\tfrac{dy}{dp} \right) \left(\tfrac{dp}{da}\tfrac{dq}{db} - \tfrac{dp}{db}\tfrac{dq}{da} \right);$$

risultamento della stessa natura di quello più generale discorsa al num". 45., e che facilmente si verifica sostituendo a $\frac{\delta c}{dz}$, $\frac{\delta d}{dz}$ i valori equivalenti $\frac{\delta c}{dz}$, $\frac{\delta d}{dz}$, i due simili alle derivate $\frac{\delta d}{dz}$, $\frac{\delta d}{dz}$. Pertanto la precedente equazione (36), avendo posto per amore di brevità

(37)
$$U = \Gamma \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^a + \left(\frac{dz}{dy}\right)^a} \left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq} - \frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp}\right)$$
 diventa

$$\left(\frac{dp}{da}\frac{dq}{db} - \frac{dp}{db}\frac{dq}{da}\right)U = 1$$
;

e questa ci fa vedere che non produrremo alcuna alterazione e introdurremo il primo membro di essa come fattore delle quantità sottoposte ai due segni integrali dell'equazione (35). Allora essi, in forza del noto e più volte usato teorema, si riduccon prontamente ad integrali per le p, q, ed otteniamo

(38)
$$fdp fdq . U \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + ec. \right\} + fdp fdq . UG + \Omega = 0$$

nella quale tutte le quantità si devono ora riguardare funzioni delle $p,\,q$, dissimulata l'ulterior composizione delle $p,\,q$ in $a,\,b$.

Il secondo termine dell'ultima equazione contiene tutta la per tutti i punti del sistema, equazioni di condizione sussistenti per tutti i punti del sistema, equazioni che ci sono note quando sono espresse fra le $x, y, z \in lo p, q, e$ sono le (34). La quantità sottoposta a quel secondo segno d'integrale duplicato, avendo moltiplicato le variate delle equazioni (34) per altrettante indeterminate, e poi sommate secondo il mettodo, risulta della forma

(39)
$$\lambda \partial k + \mu \partial h + v \partial i + (i) \partial l + (2) \partial j + (3) \partial m + (4) \partial f + (5) \partial n + (6) \partial g + ec.$$

dove possiamo ommettere i termini contenenti le variate δk_s , δh_s , δh_s , ec. quando non cerchiamo se non le equazioni che si verificano per tutti i punti del sistema. La ragione è affatto simile alla già esposta al num". 79, cioè che tali termini dopo le solite trasformazioni o ci presentano quantità che si compenetrano colle già notate, o quantità che essendo derivate essatte per p_s o per q, passano ai limiti.

Proseguendo, e sostituendo nella espressione (39) alle k, h, i, ec. i valori scritti nelle (32), essa diventa

$$2\lambda \left(x'\partial x' + y'\partial y' + z'\partial z'\right)$$

$$(40) + 2\mu \left(x_1\partial x_1 + y_1\partial y_1 + z_1\partial z_1\right)$$

$$+ v\left(x_1\partial x' + y_1\partial y' + z_1\partial z' + x'\partial x_1 + y'\partial y_1 + z'\partial z_1\right)$$

$$+ c.$$

sulla quale conviene praticare le note trasformazioni per ridurla alla forma

(41)
$$(1) \partial x + (11) \partial y + (11) \partial z + \frac{d\Delta}{dp} + \frac{d\Theta}{dq} + \frac{d^{*}\Upsilon}{dp \, dq}.$$

(40)

I processi conosciuti ci guidano a trovare

$$\begin{split} (1) &= -\left(2 \lambda x' + v x_{j}\right)' + \left[2 (1) x'' + (4) x'_{j} + (5) x_{ii}\right]'' \\ &- \left(2 (\nu x_{j} + v x')_{i} + \left[(4) x'' + 4 (a) x'_{j} + (6) x_{ii}\right]'_{i} + \text{ec.} \\ &+ \left[(5) x'' + (6) x'_{i} + 4 (3) x_{ii}\right]_{ii} \end{split}$$

e per le (II), (III) valori che non differiscono dal precedente se non per esservi dappertutto la lettera y, o la z in luogo della x. Se poi si adottano per compendio le denominazioni

 $L_i = a\lambda x' + \pi x_i - [a(1)x'' + (4)x'_i + (5)x_{ij}]' - \frac{1}{2}[(4)x'' + a(a)x'_i + (6)x_{ij}]_i + ec.$ $M_1 = a\mu x_i + vx' - \frac{1}{3} [(4)x' + 2(a)x'_i + (6)x_{ii}]' - [(5)x'' + (6)x'_i + 2(3)x_{ii}]_i + ec.$ $L_a = a\lambda y' + ry$, $- [a(x)y'' + (4)y'_+ + (5)y_+]' - \frac{1}{2}[(4)y'' + a(a)y'_+ + (6)y_+]$, + ec. $M_s = a\mu y_i + \nu y' - \frac{1}{4}[(4)y'' + a(a)y'_i + (6)y_{ii}]' - [(5)y'' + (6)y'_i + a(3)y_{ii}]_i + ec.$

 $L_3 = a\lambda z' + az_i - [a(1)z'' + (4)z'_i + (5)z_{ij}]' - \frac{1}{2}[(4)z'' + a(a)z'_i + (6)z_{ij}]_i + ec.$ $M_3 = a\mu z_1 + az' - \frac{1}{2} [(4)z'' + a(2)z'_1 + (6)z_{ij}]' - [(5)z'' + (6)z'_1 + a(3)z_{ij}]_1 + ec.$

si scorge che i valori delle (I), (II), (III) assumono le espressioni $(I) = -\frac{dL_1}{d\rho} - \frac{dM_1}{d\rho}; (II) = -\frac{dL_2}{d\rho} - \frac{dM_2}{d\rho}; (III) = -\frac{dL_3}{d\rho} - \frac{dM_3}{d\rho}$

dove a significare le derivate per la p o per la q ho tornato a far uso della notazione più comune.

Siccome poi, giusta il metodo, collocata la quantità (41) sotto il secondo segno integrale della (38), debbonsi riunire i due integrali, ed eguagliare a zero i coefficienti totali delle variazioni dx, dy, dz, ci risulteranno le tre equazioni

$$U\left(X - \frac{d^{n_F}}{dt^{n}}\right) = \frac{dL_1}{dp} + \frac{dM_1}{dq}$$

$$U\left(Y - \frac{d^{n_F}}{dt^{n}}\right) = \frac{dL_2}{dp} + \frac{dM_3}{dq}$$

$$U\left(Z - \frac{d^{n_F}}{dt^{n}}\right) = \frac{dL_3}{dq} + \frac{dM_3}{dq}$$

Resta a far sparire da queste le derivate prese per le p, q, cambiandole in altre prese per le x, y delle quali si considera funzione la terza coordinata z.

84. A questo fine è necessario premettere la dimostrazione di un principio puramente analitico. Le x,y essendo funzioni delle p,q, e viceversa essendo lecito considerare le p,q funzioni delle x,y

(44)
$$p = p(x, y); q = q(x, y);$$

due quantità qualunque L, M funzioni delle p, q, si potranno aver per tali in quanto prima lo sono delle x, y. Di qui le due equazioni

$$\frac{dL}{dp} = \frac{dL}{dx} x' + \frac{dL}{dy} y'; \quad \frac{dM}{dq} = \frac{dM}{dx} x_i + \frac{dM}{dy} y_i$$

(45)
$$\frac{d\mathbf{L}}{dp} = \frac{1}{a} \left(\frac{d\mathbf{L}}{dx}, ox' + \frac{d\mathbf{L}}{dy}, oy' \right); \frac{d\mathbf{M}}{dq} = \frac{1}{a} \left(\frac{d\mathbf{M}}{dx}, ox_i + \frac{d\mathbf{M}}{dy}, oy' \right);$$

e alla quantità φ , che può essere qualunque, daremo il valore

$$o = \frac{\iota}{x' \gamma_i - \gamma' x_i}.$$

Ora vogliamo provare identiche le due equazioni

$$\frac{d \cdot ox'}{dx} + \frac{d \cdot oy'}{dy} = o; \quad \frac{d \cdot ox_i}{dx} + \frac{d \cdot oy_i}{dy} = o,$$

dove i quattro prodotti $\alpha x'$, $\alpha y'$, αx , αy_i , si considerano funzioni di x, y, supponendosi che eseguite le derivazioni indicate dal loro modo di essere, siansi rimessi al luogo delle p, q i valori (44). Abbiamo le due equazioni

$$x = x [p(x, y), q(x, y)]; y = y [p(x, y), q(x, y)]$$

che sono identiche perche s' intendono formate, avendo nelle espressioni delle x,y per le p,q risostituito alle p,q i valori (44). Esse, derivate per le x,y, ci porgono le quattro

$$\begin{aligned}
 & (x) = x' p'(x) + x_1 q'(x); & (x) = y' p'(x) + y_1 q'(x) \\
 & (x) = x' p'(x) + x_2 q'(x); & (x) = y' p'(x) + y_2 q'(x).
 \end{aligned}$$

Ricaviamo da queste i valori delle quattro incognite $x', x_j, y', y_i;$ posta per brevità

(48)
$$D = p'(x) q'(y) - q'(x) p'(y),$$

li troveremo facilmente espressi come segue

(49)
$$x' = \frac{q'(y)}{D}; x_i = -\frac{p'(y)}{D}; y' = -\frac{q'(x)}{D}; y_i = \frac{p'(x)}{D}.$$

Tali valori riducono quello di o scritto nella (46), avendo sott' occhio la (48), o = D: dopo di che le stesse equazioni (49) ci danno

$$ox' = q'(y); \quad oy' = -q'(x); \quad ox_i = -p'(y); \quad oy_i = p'(x).$$

Questi risultati dimostrano le equazioni (47) così prontamente che basta la sola ispezione.

Moltiplichiamo le equazioni (47) rispettivamente per L, M e aggiungiamone i primi membri ai secondi delle (45), il che non vi porta alterazione perchè aggiungiamo quantità nulle. Potremo compenetrare i quadrinomi risultanti e scrivere

$$\begin{array}{l} \frac{d\,\mathrm{L}}{dp} \,=\, \frac{\imath}{o} \,\cdot\, \frac{d\,\mathrm{Lo}x'}{dx} \,+\, \frac{\imath}{o} \,\cdot\, \frac{d\,\mathrm{Lo}y'}{dy} \\ \\ \frac{d\,\mathrm{M}}{dx} \,=\, \frac{\imath}{o} \,\cdot\, \frac{d\,\mathrm{Me}x_i}{dx} \,+\, \frac{\imath}{o} \,\cdot\, \frac{d\,\mathrm{Me}y_i}{dx} \,, \end{array}$$

le quali equazioni sommate ci porgono

(5c)
$$\frac{dL}{dp} + \frac{dM}{dq} = \frac{1}{b} \cdot \frac{d \cdot o \left(Lx' + Mx_i\right)}{dx} + \frac{1}{b} \cdot \frac{d \cdot o \left(Ly' + My_i\right)}{dy}.$$

Questa è l'equazione contenente il principio analitico col quale trasformare i secondi membri delle (43).

Richiamato dalla (37) il valore di U, facciamo l'osservazione che l'ultimo fattor binomiale di esso eguaglia 1, come si scorge per l'equazione (46), restituita alle derivate parziali la notazione ordinaria. Potremo pertanto dividere dappertutto per questa quantità 1, dopo la quale operazione se scriviamo

R in luogo del radicale $\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dz}\right)^a+\left(\frac{dz}{dz}\right)^a}$ che si adopera per lo spianamento delle superficie, ci si renderà manifesto come le equazioni (43) si mutino nelle seguenti

$$\Gamma R \left(X - \frac{d^3 x}{dt^3} \right) = \frac{d \cdot o \left(L_1 x' + M_1 x_i \right)}{dx} + \frac{d \cdot o \left(L_1 y' + M_1 y_i \right)}{dy}$$

(51)
$$\Gamma R \left(Y - \frac{d^3y}{dt^2}\right) = \frac{d \cdot \theta \left(L_1x^2 + M_1x_2\right)}{dx} + \frac{d \cdot \theta \left(L_1y^2 + M_1y_2\right)}{dy}$$

 $\Gamma R \left(Z - \frac{d^2x}{dt^2}\right) = \frac{d \cdot \theta \left(L_1x^2 + M_1x_2\right)}{dx} + \frac{d \cdot \theta \left(L_1y^2 + M_1y_2\right)}{dy}$

ove le derivate parziali sono adesso per le x, y. Compajono però ancora delle derivate per p, q nelle quantità sottoposte ai segni differenziali, e queste bisognerà farle sparire cercando di compenetrare nei coefficienti indeterminati gli elementi antitici dove intervengono, presso a poco come si e fatto al num. $^{\circ}$ 8 t, e non lasciando in evidenza se non derivate relative alle a_s h dello stato antecedente, o alle x, x della stato antecedonte, o alle x, x della stato antecedonte, o alle x, x dello stato antecedonte, o alle x, x dello stato antecedonte, o alle x, x dello stato antecedonte, o alle x, x della stato x.

85. Noi qui ci limiteremo a ritenere nei valori di L₁, M₁, ec. (equazioni (42)) i soli termini colle derivate prime x̄_s, x̄_s, ȳ, x̄_s, z̄_s, ed anche malgrado una tanta limitazione arriveremo a risultati molto generali. Assumendo soltanto binomiali quei valori, e rissovenendoci che abbiamo

$$z' = \frac{dz}{dx} x' + \frac{dz}{dy} y'; \quad z_i = \frac{dz}{dx} x_i + \frac{dz}{dy} y_i,$$

troveremo dopo facili riduzioni che, poste le

$$A = o \left(2\lambda x'^{2} + 2vx'x + 2\mu x^{2} \right)$$

(52)
$$B = \sigma \left(2\lambda y'^* + 2vy'y_i + 2\mu y_i^* \right)$$

$$C = \sigma \left(2\lambda x'y' + v(x'y + x'y') + 2\mu x'y' \right)$$

i secondi membri delle (51) si modificano così da risultarne le tre

$$\Gamma R \left(X - \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = \frac{dA}{dx} + \frac{dC}{dy}$$

(53)
$$\Gamma R \left(\bar{Y} - \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = \frac{dC}{dx} + \frac{dB}{dy}$$

$$\Gamma R \left(Z - \frac{d^2z}{dr^2} \right) = \frac{d \cdot \left(A \frac{dz}{dz} + C \frac{dz}{dy} \right)}{dx} + \frac{d \cdot \left(C \frac{dz}{dx} + B \frac{dz}{dy} \right)}{dy}$$

In esse potremo riguardare a dirittura le A, B, C come le tre indeterminate funzioni delle x, y introdotte dal metodo, giacchè sono tre del pari che le indeterminate λ, ν, μ. Queste (53) coincidono, quanto alla forma, colle trovate dai moderni Geometri seguendo le viste loro proprie (Cauchy. Exercices des Mathématiques. T. III, pag. 246.); ma il metodo lagrangiano ci scopre ben altro orizzonte pel caso che nelle equazioni (42) tenessimo conto dei termini seguenti: ecco materia per ulteriori studi.

Noteremo che facendo dipendere nelle (53) le A, B, C da un' unica indeterminata 2 nel modo seguente

$$A = \lambda \left(i + \left(\frac{dz}{dy}\right)^a\right); \quad C = -\lambda \frac{dz}{dx} \frac{dz}{dy}; \quad B = \lambda \left(i + \left(\frac{dz}{dx}\right)^a\right)$$

esse si possono facilmente ridurre a quelle date da Lagrange per le superficie elastiche in due luoghi della M. A. Tom. I. pag. 103, 140.

Non mi estenderò più oltre, giacchè spero di avere raggiunto lo scopo propostomi sul principio di quest'ultimo Capo. Terminerò con riflessioni generali analoghe ad altre sparse qua e là nel decorso della Memoria. Dopo che Lagrange ha ridotto tutte le questioni della Meccanica razionale al calcolo delle variazioni, volere persistere a farne senza, è un imitare coloro i quali per le ricerche di alta geometria, piuttosto che correre a volo giovandosi di formole prese dal calcolo differenziale e integrale, si ostinano ad andar pedestri col sussidio de' metodi sintetici. Così procedendo si fa poco, e s'incontra grave pericolo di far male. Conviene persuadersi che le dimostrazioni sempre più ammettono qualche sospetto di errore, quanto maggiore è il tratto nel quale sono appoggiate al semplice ragionamento: chè la portata intuitiva della nostra ragione è assai limitata, e facilmente c' inganniamo appena gli elementi della questione crescono a notabil numero e si complicano fra di loro. Abbiamo bisogno di metodi potenti i quali essendo come l'espressione simultanea e compendiosa di molti principi, operano col valore di tutti, e non con quello di uno per volta, che è quanto avviene d'ordinario nel ragionamento logico: di metodi che ridotti a processi determinati e immutabili, non ci lasciano forviare. Anche usando mezzi così fatti la nostra ragione mantiene i suoi diritti, in quanto ne riconosce veri i fondamenti, e giuste le applicazioni: sebbene non le sia il più delle volte concesso conseguire un' intrinseca evidenza relativamente alle conseguenze a cui arriva. È per tal modo che nella ricerca della verità facciamo quei grandi viaggi, ai quali il ragionamento diretto è affatto insufficiente, tornandoci esso poi vantaggioso quando, giunti a certe mete, vogliamo estendere il beneficio delle ottenute cognizioni. Uno appunto fra i più poderosi degli indicati mezzi è il calcolo delle variazioni per la meccanica. Già vedemmo nella precedente Memoria copia di risultati che se ne deducono, e toccammo di molte teoriche che potrebbero rannodarsi alle varie parti di essa. Eppure io sento profondamente che anche tutto il presente lavoro è ben lungi dall' esaurire la fecondità dei metodi lagrangiani : credo poter assicurare che con questi stessi metodi si percorrono a passi di conquista le varie parti della fisica matematica. Ho già in pronto altro non breve scritto in continuazione dell' attuale, e nutro desiderio di poter produrre anche ulteriori prove di fatto dell' esposta asserzione: ma qualunque sia per essere il termine a cui riusciranno le mie fatiche, tengo per fermo che il tempo farà ragione alle parole colle quali diedi cominciamento a questa Memoria.

FINE DELLA PRESENTE MEMORIA.