DI UN CELEBRE TEOREMA DI ABEL, E JACOBI

DIMOSTRAZIONE DIRETTA

DEL PROFESSORE

GASPARE MAINARDI

Ricevuta adì 30 *Luglio* 1844.

L'oggetto del presente articolo è dichiarato nel paragrafo, che qui trascrivo da una classica Memoria del celebre Signor Jacobi: « Novimus olim Ill. Lagrange in commentationibus « Accad. Taurinensis, ab ipsa aequatione differentiali

$$\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4)}}+\frac{dy}{\sqrt{(a+by+cy^2+dy^3+ey^4)}}=0$$

« inter duas variabiles profectum per methodos directas in« tegrationis ad ipsum ejus integrale completum algebraicum « ascendisse, atque ita methodo nova ac singulari demonstra« visse theorema Eulerianum, quod ei tantam ipsius Euleri « excitavit admirationem. Ita etiam operae pretium fore cre« dimus, duarum aequationum differentialium inter tres va« riabiles

$$\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+x^5)}}+\frac{dy}{\sqrt{(a+by+cy^2+dy^3+ey^4+y^5)}}$$
$$+\frac{dz}{\sqrt{(a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+z^5)}}=0;$$

$$\frac{xdx}{\sqrt{(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+x^5)}}+\frac{ydy}{\sqrt{(a+by+cy^2+dy^3+ey^4+y^5)}}$$
$$+\frac{zdz}{\sqrt{(a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+z^5)}}=0$$

« dua integralia completa algebraica per methodos directas « integrationis investigare, atque ita nova nec minus singulari « demonstratione theorema Abelianum adornare » (1).

(1) Journal für die mathematik von R. L. Crelle IX Band. Seite 403.

Ignorando, che altri si occupasse dell' argomento, offro in questo articolo la integrazione diretta di quelle equazioni.

Suppongo $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+x^5=X$, ed indico con Y, Z i due polinomj che si hanno cambiando nella funzione X la variabile x in y e z. Le equazioni ad integrare saranno le seguenti

$$(a)\quad \frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{Y}}+\frac{dz}{\sqrt{Z}}=0,\quad \frac{xdx}{\sqrt{X}}+\frac{ydy}{\sqrt{Y}}+\frac{zdz}{\sqrt{Z}}=0.$$

A tale oggetto supponiamo

$$(1)\quad \frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{dt}{(y-x)(x-z)},\quad \frac{dy}{\sqrt{Y}}=\frac{dt}{(x-y)(y-z)},\quad \frac{dz}{\sqrt{Z}}=\frac{dt}{(x-z)(z-y)}$$

essendo t una nuova variabile: e fattane sostituzione nelle equazioni (a) avremo

$$\frac{1}{(y-x)(x-z)}+\frac{1}{(x-y)(y-z)}+\frac{1}{(x-z)(z-y)}=0$$

$$\frac{x}{(y-x)(x-z)}+\frac{y}{(x-y)(y-z)}+\frac{z}{(x-z)(z-y)}=0$$

le quali sappiamo essere soddisfatte identicamente.

Dalle equazioni (1) intanto derivano le seguenti

$$(2)\quad d(x+y+z)=\left\{\frac{\sqrt{X}}{(y-x)(x-z)}+\frac{\sqrt{Y}}{(x-y)(y-z)}+\frac{\sqrt{Z}}{(x-z)(z-y)}\right\}dt,$$

$$(y+z)dx+(x+z)dy+(y+x)dz=d(xy+yz+zx)=$$

$$\left\{\frac{(y+z)\sqrt{X}}{(y-x)(x-z)}+\frac{(z+x)\sqrt{Y}}{(x-y)(y-z)}+\frac{(x+y)\sqrt{Z}}{(x-z)(z-y)}\right\}dt$$

ove i coefficienti del differenziale dt devono essere funzioni di questa variabile. Posto quindi

$$\frac{\sqrt{X}}{(y-x)(x-z)}+\frac{\sqrt{Y}}{(x-y)(y-z)}+\frac{\sqrt{Z}}{(x-z)(z-y)}=p$$

Differenziata questa equazione, ed eliminati i differenziali dx, dy, dz per mezzo delle equazioni (1), si ottiene

$$(3)\quad dp=\frac{dt}{2(x-y)^3(y-z)^3(z-x)^3}\times$$

$$\left[\begin{array}{l}[(y-z)^2X'+(z-x)^2Y'+(x-y)^2Z']\,(x-y)(y-z)(z-x)\\ -2\,[(y+z-2x)(y-z)^3X+(x+z-2y)(z-x)^3Y+(x+y-2z)(x-y)^3Z.]\end{array}\right]$$

ove X', Y', Z' rappresentano i coefficienti differenziali delle funzioni X, Y, Z rispetto alle loro variabili x, y, z. Siccome poi

$$X=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+x^5,\ X'=b+2cx+3dx^2+4ex^3+5x^4:$$

indicato con r un numero intero qualunque, e supposti

$$(x-y)(y-z)(z-x)=\rho$$

$$(4)\quad [(y-z)^2x^r+(z-x)^2y^r+(x-y)^2z^r]\rho=Q_r$$

$$(y+z-2x)(y-z)^3x^r+(x+z-2y)(z-x)^3y^r+(x+y-2z)(x-y)^3z^r=P_r=$$

$$=\rho\left(\frac{(x-y)^2z^r-(y-z)^2x^r}{z-x}+\frac{(z-x)^2y^r-(x-y)^2z^r}{y-z}+\frac{(y-z)^2x^r-(z-x)^2y^r}{x-y}\right)$$

avremo

$$dp=\frac{dt}{2\rho^3}\left(\rho(bQ_0+2cQ_1+3dQ_2+4eQ_3+5Q_4)-2(aP_0+bP_1+cP_2+dP_3+eP_4+P_5)\right).$$

Ma le formole (4) sviluppate, e ridotte debitamente forniscono

$$(5)\quad P_0=0,\ P_1=\tfrac{1}{2}\rho Q_0,\ P_2=\rho Q_1,\ P_3=\tfrac{1}{2}\rho Q_2,\ P_4=2\rho Q_3,$$
$$P_5=\tfrac{1}{2}\rho Q_4-\tfrac{1}{2}\rho^3,\ P_6=3\rho Q_5-(x+y+z)\rho^3$$

per cui si ottiene $\qquad dp=\frac{1}{2}\,dt.$

La prima equazione (2) si riduce alla seguente

$$d(x+y+z)=2p.dp$$

da cui, indicata con A una costante arbitraria, si desume l' integrale completo

$$(b)\quad p^2=\left(\frac{\sqrt{X}}{(y-x)(x-z)}+\frac{\sqrt{Y}}{(x-y)(y-z)}+\frac{\sqrt{Z}}{(x-z)(z-y)}\right)^2=A+x+y+z.$$

Prendendo ora a considerare la seconda equazione (2) poniamo

$$\frac{(y+z)\sqrt{X}}{(y-x)(x-z)}+\frac{(z+x)\sqrt{Y}}{(x-y)(y-z)}+\frac{(x+y)\sqrt{Z}}{(x-z)(z-y)}=q$$

Differenziata questa formola rispetto a t, ed eliminati i differenziali dx, dy, dz mediante le equazioni (1) avremo

$$\frac{dq}{dt}=\frac{1}{2\rho^3}\ \times$$

$$\left[\begin{array}{l}[(y+z)(y-z)^2X'+(z+x)(z-x)^2Y'+(x+y)(x-y)^2Z']\rho\\ -2[(y+z)(y+z-2x)(y-z)^3X+(z+x)(z+x-2y)(z-x)^3Y+(x+y)(x+y-2z)(x-y)^3Z]\end{array}\right]$$

$$+\frac{\sqrt{XY}}{(y-x)^2(x-z)(z-y)}+\frac{\sqrt{XZ}}{(x-z)^2(z-y)(y-x)}+\frac{\sqrt{YZ}}{(z-y)^2(y-z)(z-x)},$$

e siccome dalla equazione (b) si hanno

$$y+z=p^2-A-x,\ x+z=p^2-A-y,\ x+y=p^2-A-z$$

così sarà

$$(6)\qquad \frac{dq}{dt}=\frac{p^2-A}{2\rho^3}\times$$

$$\left[\begin{array}{l}[(y-z)^2X'+(z-x)^2Y'+(x-y)^2Z']\rho\\ -2[(y+z-2x)(y-z)^3X+(z+x-2y)(z-x)^3Y+(x+y-2z)(x-y)^3Z]\end{array}\right]$$

$$-\frac{1}{2\rho^3}\left[\begin{array}{l}[(y-z)^2xX+(z-x)^2yY+(x-y)^2zZ]\rho\\ -2[(y+z-2x)(y-z)^3xX+(z+x-2y)(z-x)^3yY+(x+y-2z)(x-y)^3zZ]\end{array}\right]$$

$$+\tfrac{1}{2}p^2-\tfrac{1}{2}\left(\frac{X}{(y-x)^2(x-z)^2}+\frac{Y}{(x-y)^2(y-z)^2}+\frac{Z}{(x-z)^2(z-y)^2}\right)$$

In questa equazione, il coefficiente di p^2-A è quello stesso di dt nella equazione (3), epperò si riduce all' unità. Il coefficiente di $\frac{1}{2\rho^3}$ nel secondo termine non è altro se non se

$$\begin{aligned}&(PQ_1+2cQ_2+3dQ_3+4eQ_4+5Q_5)\rho-2(aP_1+bP_2+cP_3+dP_4+eP_5+P_6)\\ &=-(aQ_0+bQ_1+cQ_2+dQ_3+eQ_4+Q_5+2p^3(x+y+z+\tfrac{1}{2}e)\\ &=-[(y-z)^2X+(z-x)^2Y+(x-y)^2Z]\rho+2\rho^3(x+y+z+\tfrac{1}{2}e)\end{aligned}$$

e ciò in forza delle equazioni (5): l' ultimo termine della equazione (6) è uguale a

$$-\frac{1}{2\rho^2}\left((y-z)^2X+(z-x)^2Y+(x-y)^2Z\right)$$

per cui quella equazione si riduce alla seguente

$$\frac{dq}{dt}=\frac{3}{2}p^2-A-(x+y+z+\tfrac{1}{2}e)=\frac{1}{2}(p^2+e)$$

ossia

$$dq=(p^2+e)\,dp$$

e finalmente, indicata con B una costante indeterminata, avremo integrando

$$(c)\qquad q=(\tfrac{1}{3}p^2+e)p+B=[\tfrac{1}{3}(x+y+z+A)+e]\sqrt{x+y+z+A}+B$$

che è il secondo integrale cercato.

Dalla equazione (3) col soccorso della (c) desumeremo un' altra formola integrale, conseguente, ma che è meno semplice di quelle superiormente ottenute.

Il medesimo processo di calcolo si applica pure alle equazioni simultanee generali che il sommo Jacobi desumeva dal celebre Teorema Abeliano: ma finora non ho potuto ridurre le formole di trasformazione analoghe alle (5) a forme regolari: il chè spero di esporre in altra Memoria, nella quale indicherò varie formole integrabili singolari, siccome è la seguente

$$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt[m]{\left[1+mx+\frac{m(2m-1)}{1.2}x^2+\ldots\ldots+\frac{m(2m-1)(3m-2)\ldots\ldots(nm-(m-1))}{1.2\ldots\ldots n}x^n\right]}}$$

$$=\frac{1.2\ldots\ldots n}{(2m-1)(3m-2)\ldots(m(n+1)-n)}\left(x-\frac{1}{m-1}\right)\times$$

$$\left[1+mx+\ldots\ldots+\frac{m(2m-1)\ldots(nm-(m-1))}{1.2\ldots\ldots n}x^n\right]^{\frac{m-1}{m}}$$

Sull' Idrodinamica

Note del Prof. Gaspare Mainardi.

Sono tuttora controverse fra gli idraulici le opinioni sulla possibilità del moto lineare (1), e sulla permanenza delle molecole liquide alle superficie solide che le rattengono (2). Nelle note seguenti, *ammessi i principj assunti a fondamento della teoria idraulica*, dimostro che le molecole fluide aderenti alle pareti non possono abbandonarle; e che una massa liquida possa scorrere con moto lineare in un condotto di forma determinata.

1. Immagino una massa liquida in attuale movimento, riferita a tre assi ortogonali: indico con x, y, z le coordinate di un punto dello spazio assai vicino ad una parete solida, che rattiene il liquido; con Δx, Δy, Δz i prolungamenti di quelle coordinate fino all' incontro della parete: con u, v, w le velocità secondo le rette x, y, z della molecola liquida che occupa quel punto alla fine di un tempo t. Considero il te-

(1) Il Dalembert (Trattato dei fluidi. N°. 1770 pag. 101. Opuscoli matematici T. VIII, pag. 75) giudica verosimile il moto lineare. Lagrange (Meccan. Analit. Tomo II, pag. 323) lo ammette unicamente in un tubo esilissimo. Non ostante ciò pressochè tutte le opere d' idraulica teorica si aggirano senza limitazione intorno quella mal fondata dottrina.

(2) Meccanica Analitica T. II, pag. 319. Trattato di meccanica di Poisson. 2.ª ediz. pag. 681. Sig. Cauchy. Memoria premiata dalla R. Accad. di Parigi. T. I. 1827.

traedro, di cui gli spigoli sono le rette estremamente piccole Δx, Δy, Δz, ed ha la faccia ipotenusale nella superficie solida. Nel tempuscolo Δt seguente al t, movendosi il liquido si intramettono nel tetraedro per le faccie paralelle ai piani coordinati, volumi i quali differiscono dai prodotti

$$\tfrac{1}{2}\Delta y.\Delta z.\Delta t.u,\ \tfrac{1}{2}\Delta x.\Delta z.\Delta t.v,\ \tfrac{1}{2}\Delta x.\Delta y.\Delta t.w$$

di quantità del terzo ordine rispetto a Δx, Δy, Δz.

Supponendo, per speditezza di calcoli, il liquido incompressibile, siccome le molecole che potrebbero abbandonare la faccia ipotenusale per farsi strada nell' interno del tetraedro, o viceversa, se non hanno attraversata una delle facce già considerate, rimangono ad occuparne la capacità, perciò dovrà essere

$$(1)\qquad \Delta t\,[\,u.\Delta y.\Delta z+v.\Delta x.\Delta z.+w.\Delta x.\Delta y\,]+\theta=0$$

essendo θ una quantità del terzo ordine rispetto a Δx, Δy, Δz.

Indichiamo ora con ω l' area della faccia ipotenusale del tetraedro, con p, q, r le coordinate secondo gli assi x, y, z di un suo punto: supponiamo $1+\left(\frac{dr}{dp}\right)^2+\left(\frac{dr}{dq}\right)^2=\frac{1}{M^2}$, ove $\frac{dr}{dp}$, $\frac{dr}{dq}$ rappresentano i coefficienti differenziali parziali di r funzione di p, q dipendentemente dalla natura della superficie ω: siccome le differenze

$$\tfrac{1}{2}\Delta y.\Delta z-\omega\left(\frac{dr}{dp}\right)M,\ \tfrac{1}{2}\Delta x.\Delta z-\omega\frac{dr}{dq}M,\ \tfrac{1}{2}\Delta x.\Delta y-\omega M$$

sono quantità del terzo ordine rispetto a Δx, Δy, Δz; e le differenze

$$p-x,\ q-y,\ r-z$$

lo sono del primo ordine; perciò attesa la indeterminazione di quegli incrementi Δx, Δy, Δz e di Δt, la equazione (1) fornirà la seguente

$$(2)\qquad \frac{dr}{dp}u\,(p,q,r,t)+\frac{dr}{dq}v\,(p,q,r,t)+w\,(p,q,r,t)=0$$

ove $u\,(p,q,r,t)$ rappresenta il valore di $u\,(x,y,z,t)$ corrispondente ad $x=p$, $y=q$, $z=r$; e quella equazione dimostra, che qualunque molecola aderente ad una superficie, non essendo animata da velocità normale alla superficie medesima, deve scorrere perpetuamente lungo di essa.

2°. Per raggiungere lo scopo che ho di mira colla maggior speditezza di calcoli, considero una lamina liquida piana verticale, il cui piano sia determinato dall'asse Ox orizzontale, e dal verticale Oy (Fig. 1ª). Supposta quella lamina mossa dalla propria gravità, sia OAN la linea percorsa da una molecola N, HM quella descritta da un' altra M. Sia $NM=\phi$ normale alla curva OAN, l' arco $OAN=\rho$, ω l' angolo della retta ϕ coll' asse Ox, e le coordinate

$$OQ=p,\quad NQ=r,\quad MP=z,\quad OP=x$$

per cui

$$x=p+\phi\cos\omega,\quad z=r-\phi\,\mathrm{sen}\,\omega,\quad \frac{dr}{d\rho}=\cos\omega,\quad \frac{dp}{d\rho}=\mathrm{sen}\,\omega.$$

Indicate con u, w le velocità di M secondo le direzioni Ox, Oy, e con ρ', ϕ'.... i coefficienti differenziali di ρ, ϕ... rispetto al tempo, saranno $u=x'=\left(1-\phi\frac{d\omega}{d\rho}\right)\rho'\mathrm{sen}\omega+\phi'\cos\omega$, $w=z'=\left(1-\phi\frac{d\omega}{d\rho}\right)\rho'\mathrm{sen}\,\omega-\phi'\,\mathrm{sen}\,\omega$, e le velocità di M nella direzione NMM' e perpendicolare ad essa

$$u\cos\omega-w\,\mathrm{sen}\,\omega=\phi',\quad u\,\mathrm{sen}\,\omega+w\cos\omega=\left(1-\phi\frac{d\omega}{d\rho}\right)\rho'$$

Siccome

$$\frac{dx}{d\phi}=\cos\omega,\quad \frac{dz}{d\phi}=-\mathrm{sen}\,\omega,\quad \frac{dz}{d\rho}=\left(1-\phi\frac{d\omega}{d\rho}\right)\cos\omega,\quad \frac{dx}{d\rho}=\left(1-\phi\frac{d\omega}{d\rho}\right)\mathrm{sen}\,\omega$$

$$\left(\frac{dx}{d\rho}\cdot\frac{dz}{d\phi}-\frac{dx}{d\phi}\cdot\frac{dz}{d\rho}\right)\frac{du}{dx}=\frac{du}{d\rho}\cdot\frac{dz}{d\phi}-\frac{du}{d\phi}\cdot\frac{dz}{d\rho}$$

$$\left(\frac{dx}{d\rho}\cdot\frac{dz}{d\phi}-\frac{dx}{d\phi}\cdot\frac{dz}{d\rho}\right)\frac{dw}{dz}=\frac{dw}{d\phi}\cdot\frac{dx}{d\rho}-\frac{dw}{d\rho}\cdot\frac{dx}{d\phi}$$

$$\frac{dw}{d\rho}\cdot\frac{dx}{d\phi}-\frac{du}{d\rho}\cdot\frac{dz}{d\phi}=\left(1-\phi\frac{d\omega}{d\rho}\right)\frac{d\rho'}{d\rho}-\left(\phi\frac{d^2\omega}{d\rho^2}\rho'+\frac{d\omega}{d\rho}\phi'\right)$$

$$\frac{du}{d\phi}\cdot\frac{dz}{d\rho}-\frac{dw}{d\phi}\cdot\frac{dx}{d\rho}=\left(1-\phi\frac{d\omega}{d\rho}\right)\frac{d\phi'}{d\phi}.$$

Supposte per brevità

$$\left(1-\phi\frac{d\omega}{d\rho}\right)\frac{d\rho'}{dt}-\left(2\phi'\frac{d\omega}{d\rho}+\phi\frac{d^2\omega}{d\rho^2}\rho'\right)\rho'=\delta,\quad \left(1-\phi\frac{d\omega}{d\rho}\right)\frac{d\omega}{d\rho}\rho'^2+\frac{d\phi'}{dt}=\Lambda$$

Sono $u'=\delta\,\mathrm{sen}\,\omega+\Lambda\cos\omega$, $w'=\delta\cos\omega-\Lambda\,\mathrm{sen}\,\omega$.

Indicata poi con P la pressione sofferta dalla molecola liquida M, preso per unità il peso specifico del fluido omogeneo, le equazioni idrodinamiche note

$$\frac{du}{dx}+\frac{dw}{dz}=0,\quad \frac{dP}{dx}+u'=0,\quad \frac{dP}{dz}+w'-g=0$$

si trasformeranno nelle seguenti

$$(1)\qquad \left(1-\varphi\frac{d\omega}{d\rho}\right)\left(\frac{d\rho'}{d\rho}+\frac{d\varphi'}{d\varphi}\right)-\left(\varphi\frac{d^2\omega}{d\rho^2}\rho'+\frac{d\omega}{d\rho}\varphi'\right)=0$$

$$\frac{dP}{d\rho}=g\frac{dz}{d\rho}-\left(u'\frac{dx}{d\rho}+w'\frac{dz}{d\rho}\right),\qquad \frac{dP}{d\varphi}=g\frac{dz}{d\varphi}-\left(u'\frac{dx}{d\varphi}+w'\frac{dz}{d\varphi}\right),$$

ossiano

$$(2)\qquad \frac{dP}{d\rho}=\left(1-\varphi\frac{d\omega}{d\rho}\right)\left(g\cos\omega-\delta\right),\qquad \frac{dP}{d\varphi}=-g\,\mathrm{sen}\,\omega-\Lambda.$$

Se la velocità che sollecita i punti della retta NMM' ad allontanarsi da essa, cioè la funzione $\left(1-\varphi\frac{d\omega}{d\rho}\right)\rho'$ è indipendente dalla variabile φ, siccome esige il moto lineare, la equazione (1) ossia

$$\frac{d}{d\rho}\left[\left(1-\varphi\frac{d\omega}{d\rho}\right)\rho'\right]+\frac{d\varphi'}{d\varphi}-\frac{d(\varphi\varphi')}{d\varphi}\frac{d\omega}{d\rho}=0$$

integrata rispetto a φ fornisce

$$(3)\qquad \varphi\frac{d}{d\rho}\left[\left(1-\varphi\frac{d\omega}{d\rho}\right)\rho'\right]+\varphi'\left[1-\varphi\frac{d\omega}{d\rho}\right]=0$$

senza introdurvi costante, da che per le molecole obbligate alla linea OAN sono contemporaneamente $\varphi=0$, $\varphi'=0$. Se la lamina liquida fosse limitata da una linea rigida $H'M'$, supposto per essa $NM'=\psi$ funzione nota di ρ, siccome $\psi'=\frac{d\psi}{d\rho}\rho'$, la equazione (3) riportata ai punti, che scorrono lungo quella linea $H'M'$ sarà

$$\psi\frac{d}{d\rho}\left[\left(1-\psi\frac{d\omega}{d\rho}\right)\rho'\right]+\left[\left(1-\psi\frac{d\omega}{d\rho}\right)\rho'\right]\frac{d\psi}{d\rho}=0$$

la quale integrata rispetto a ρ conduce alla equazione di Castelli

$$(4)\qquad \psi\left(1-\psi\frac{d\omega}{d\rho}\right)\rho'=\mu(t)$$

essendo μ una funzione indeterminata del tempo.

Poniamo $1-\phi\frac{d\omega}{d\rho}=\theta$, $\theta\rho'=F(\rho,t)$ funzione indipendente da ϕ:

$$\frac{dF}{d\rho}=F_{,}\,;\quad \frac{d\omega}{d\rho}=\omega_{,}\,;$$

e dalle equazioni (2), (3) avremo $\phi'=-\frac{\phi}{\theta}F_{,}$

$$\frac{dP}{d\rho}=g\,\theta\cos\omega-\theta^2\frac{d\rho'}{dt}-2\frac{\phi\omega_{,}}{\theta}FF_{,}+\frac{\phi F^2}{\theta}\omega_{,,}\,,\quad \frac{dP}{d\phi}=-g\,\mathrm{sen}\,\omega-\frac{\omega_{,}}{\theta}F^2-\frac{d\phi'}{dt}$$

e siccome

$$\theta'=\frac{\phi\omega_{,}}{\theta}F_{,}-\frac{F\phi}{\theta}\omega_{,,}$$

$$\frac{d\rho'}{dt}=\frac{FF_{,}}{\theta^2}+\frac{F'}{\theta}-\frac{FF_{,}}{\theta^3}\phi\omega_{,}+\frac{F^2}{\theta^3}\phi\omega_{,,}\,,$$

$$\frac{d\phi'}{dt}=-\frac{F\phi}{\theta^2}F_{,,}-\frac{\phi}{\theta}F'_{,}+\frac{\phi}{\theta^2}F^2_{,}+\frac{\phi^2}{\theta^3}\omega_{,}F^2_{,}-\frac{F\phi^2}{\theta^3}F_{,}\omega_{,,}\,;$$

quindi ne vengono

$$\frac{dP}{d\rho}=\theta\,g\cos\omega-\theta F'-FF_{,}-\frac{\phi}{\theta}FF_{,}\omega_{,}$$

$$(5)\quad \frac{dP}{d\phi}=-g\,\mathrm{sen}\,\omega-\frac{F^2}{\theta}\omega_{,}+\frac{\phi}{\theta}F'_{,}+\frac{F\phi^2}{\theta^3}F_{,}\omega_{,,}+\frac{F\phi}{\theta^2}F_{,,}-\frac{\phi^2F^2}{\theta^3}\omega_{,}-\frac{\phi}{\theta^2}F^2_{,}\,;$$

differenziate queste equazioni, la prima rispetto a ϕ, rispetto a ρ la seconda, ed eguagliati i valori della funzione $\frac{d^2P}{d\rho.d\phi}$, moltiplicata la equazione risultante per θ^4, e postovi $\phi=\frac{1-\theta}{\omega_{,}}$ si ottiene

$$(6)\quad -\theta^4\omega_{,}^4F'+\theta^2(1-\theta)^2\omega_{,}\omega_{,,}F'_{,}+\theta^3(1-\theta)F'_{,,}\omega_{,}^2-\theta^3\omega_{,}^3(F^2\omega_{,})_{,}+$$
$$3(1-\theta)^3F_{,}\omega_{,,}(F\omega_{,,}-F_{,}\omega_{,})$$
$$+\theta^2(1-\theta)\omega_{,}^2(\omega_{,}^2FF_{,}-F^2\omega_{,}\omega_{,,}+FF_{,,,}+F_{,}F_{,,})+$$
$$\theta(1-\theta)^2\omega_{,}(FF_{,}\omega_{,,,}+3FF_{,,}\omega_{,,}-2F_{,}F_{,,}\omega_{,}-2F_{,}^2\omega_{,,})=0$$

la quale, per essere F ed ω indipendenti dalla variabile ϕ, deve sussistere per qualunque valore di θ; cosicchè sarà nullo il coefficiente di ogni potenza di quella variabile.

Il termine che non contiene θ fornisce $\omega_{,,} F_{,}(\omega_{,,} F - \omega_{,} F_{,}) = 0$, cioè $F_{,} = 0$; ovvero $\omega_{,,} F - \omega_{,} F_{,} = 0$, vale a dire $F = \omega_{,} A$, essendo A funzione solo del tempo. Se $F_{,} = 0$, il coefficiente di θ^4 darà $\omega_{,} F' = 0$, e non cercando il caso in cui $\omega_{,} = 0$, nel quale la equazione (6) non esige ulteriori condizioni, supposto $F' = 0$ avremo ancora dalla stessa equazione (6) $\omega_{,} \omega_{,,} = 0$ epperò $\omega_{,,} = 0$: Se fingiamo $F = \omega_{,} A$, i coefficienti di θ^4 e θ lineare ci danno le equazioni

$$A'(\omega^2_{,,} - \omega_{,} \omega_{,,,} - \omega^4_{,}) = 0, \qquad \omega_{,,}(\omega_{,} \omega_{,,,} - \omega^2_{,,}) = 0$$

cosicchè fatto $\omega_{,} \omega_{,,,} - \omega^2_{,,} = 0$ ne segue $A' = 0$, quindi $F' = 0$: e supposto $\omega_{,,} = 0$ troviamo di nuovo $F' = 0$, $F_{,} = 0$.

Dunque il moto lineare è possibile unicamente quando sia $\omega_{,} = 0$ oppure $\omega_{,,} = 0$, epperò gli strati rettilinei devono essere perpendicolari ad una retta, ovvero ad una circonferenza (1).

Supponiamo costantemente $\omega = a$, e dalle equazioni (5) caveremo

$$\theta = 1, \rho' = F(\rho, t), \phi' = -\phi F_{,}, \qquad \frac{dP}{d\rho} = g \cos a - F' - FF_{,},$$

$$\frac{dP}{d\phi} = -g \operatorname{sen} a + \phi (F_{,}' + FF_{,,} - F_{,}^2)$$

Quest' ultima equazione integrata rispetto a ϕ fornisce $P = -g \phi \operatorname{sen} a + \frac{1}{2} \phi^2 (F_{,}' + FF_{,,} - F_{,}^2) + f(\rho, t)$; essendo $f(\rho, t)$ la costante rispetto a ϕ richiesta dalla integrazione. Quindi

$$\frac{dP}{d\rho} = g \cos a - F' - FF_{,} = \tfrac{1}{2} \phi^2 (F_{,}' + FF_{,,} - F_{,}^2)_{,} + \frac{df}{d\rho}$$

e poichè questa equazione deve essere identica, e la variabile ϕ si trova unicamente esplicita, è forza che sia

$$(7) \qquad F_{,}' + FF_{,,} - F_{,}^2 = \pi(t)$$

essendo $\pi(t)$ una funzione indeterminata del tempo. Quindi

$$(8) \qquad \frac{df}{d\rho} = g \cos a - F' - FF_{,}, \qquad P = -g \phi \operatorname{sen} a + \tfrac{1}{2} \phi^2 . \pi(t) + f(\rho, t).$$

Alla equazione (7) dobbiamo aggiungere quella di Castelli (4) cioè $\psi \rho_{,} = \mu$, per cui posto $\frac{1}{\psi} = \tau(\rho)$, sarà

(1) Lagrange. Memorie della R. Accademia di Torino. 1784.

$\rho' = F(\rho, t) = \mu(t) . \tau(\rho)$, e la equazione (7) si riduce alla seguente

$$(9) \qquad \tau\tau_{,,} - \tau_{,}^2 + A\tau_{,} = B, \qquad \text{ove } A = \frac{\mu'}{\mu^2}, \quad B = \frac{\pi}{\mu^2}$$

Fingiamo ancora che la superficie libera debba essere piana ed orizzontale, e che ivi sia la pressione costante

$$P = \tfrac{1}{2}\phi^2\pi + f(\rho, t) - g\phi . \operatorname{sen} a = \rho$$

per cui $a = 0$, $\pi = 0$; quindi $B = 0$, $\tau\tau_{,,} - \tau_{,}^2 + A\tau_{,} = 0$ la quale ammette le soluzioni $\tau = -\frac{A}{C} + De^{C\rho}$, $\tau = C\rho + D$, $\tau = D$: essendo C, D le costanti rispetto a ρ introdotte dalla integrazione. Dunque le linee rigide fra le quali discende la lamina ponno essere unicamente quelle rappresentate dalle equazioni

$$\psi = \frac{1}{A}, \quad \psi(C\rho + D) = 1, \quad \psi\left(-\frac{A}{C} + De^{C\rho}\right) = 1$$

cioè una retta verticale, un' iperbòle conica, ovvero una logaritmica.

Per ultimare, semplificando i nostri calcoli, fingiamo il moto ridotto a permanenza, e $\tau = -\frac{A}{C} + De^{C\rho}$. Affinchè $\rho' = \mu(t) . \tau\rho$ sia indipendente dal tempo deve essere $A = \frac{\mu'}{\mu^2} = 0$, quindi

$$\rho' = F = \mu De^{C\rho}, \quad \psi = \frac{1}{D} \; e^{-C\rho}, \quad \phi' = -\mu DC\phi e^{C\rho},$$

$$\frac{df}{d\rho} = g - FF_{,}, \quad P = f = g\rho - \tfrac{1}{2}F^2 + E.$$

Seguendo ormai il movimento di una molecola le cui coordinate iniziali siano $\rho = 0$, $\phi = \beta$, integrate rispetto al tempo, le equazioni

$$\frac{\phi'}{\phi} = -C\rho', \qquad \rho' = -\mu De^{C\rho}$$

avremo per quella molecola

$$-C\rho = \log(1 - \mu DC.t), \qquad \phi = \beta e^{-C\rho} = \beta(1 - \mu DCt),$$

$$\phi' = -\mu DC\beta, \qquad \rho' = \frac{\mu D}{1 - \mu DCt}$$

cosicchè la medesima descrive una logaritmica che volge la convessità all' asse della lamina, e la velocità orizzontale costante è diretta contro l' asse.

Supposto che la lamina trattenuta fra due logaritmiche simetriche $\tau = \pm D e^{C\rho}$ affluisca da una luce cui corrispondono $\rho = a$, $\varphi = \pm b$. Se ove $\rho = 0$, $\varphi = \pm c$, avremo

$$D = \frac{1}{c}, \quad e^{Ca} = \frac{c}{b}, \quad C = \frac{1}{a} \log \frac{c}{b}$$

e dovendo essere alle sezioni estreme $P = p$, quindi

$$E = p + \tfrac{1}{2}\mu^2 D^2 = p - ag + \tfrac{1}{2}\mu^2 D^2 e^{2Ca},$$

le velocità verticali alla superficie libera, ed alla luce saranno rispettivamente

$$\mu D = \sqrt{\left(\frac{2ag}{e^{2Ca} - 1}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2gab^2}{c^2 - b^2}\right)}, \quad \mu D e^{Ca} = \sqrt{\left(\frac{2gac^2}{c^2 - b^2}\right)}$$

il che concorda con quanto è dato dalla teoria comune del moto lineare *medio* (1).

Dalla equazione $\varphi = \beta e^{-C\rho}$ si ha $\frac{d\varphi}{d\rho} = -C\beta e^{-C\rho}$, epperò alla luce ove $\rho = a - \beta$: $\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{e^{Ca}}{C} = \frac{ac}{b(\log c - \log b)}$, le direzioni del moto di tutte le molecole concorrono verso quel punto dell' asse, cui corrisponde l' ordinata

$$\rho = a\left(1 + \frac{c}{b \log \frac{c}{b}}\right).$$

Se ogni molecola affluente si sciogliesse dalle altre per cadere libera, indicata con A una di esse (Fig. 2ª), con AH la direzione del suo movimento, con OPH l' asse della lamina prolungato, con OQA l' orizzontale in cui si trova la luce, e finalmente con AMK la parabola che verrebbe descritta da quella molecola A; condotte le coordinate MP, MQ parallele ad OA, OH, chiamata v la velocità verticale d' afflusso, avremo le equazioni

(1) Venturoli, Elementi di Meccanica. Vol. 2°, pag. 64, 3ª edizione.

$$AQ = t.v.\operatorname{tang} i, \quad OP = tv + \tfrac{1}{2}gt^2, \quad \frac{d\phi}{d\rho} = \operatorname{tang} i = -C\beta.e^{-Ca}$$

$$MP = OA - vt \operatorname{tang} i,$$

dalle quali fatto $MP=0$, desumiamo $AO=vt\operatorname{tang} i$: e siccome $AO=\beta e^{-Ca}$, $AO.\cot i = -\frac{1}{C}$, concludiamo che tutte quelle parabole convengono nello stesso punto dell'asse OHK determinato dall' ascissa $OK = \frac{g}{2v^2C^2} - \frac{1}{C}$.

Dalla nostra analisi è provata la possibilità del moto lineare in una massa a dimensioni finite, qual sarebbe un cilindro liquido avente per sezione retta la lamina superiormente considerata. Emerge ancora l'origine della vena contratta: la probabilità che si formi un nodo nel getto affluente, e la variabilità della contrazione all' abbassarsi del livello superiore: le quali leggi naturali nessuna teoria aveva finora direttamente confermate.

Notiamo per ultimo, che non è $P=p+g\rho$, come si suppone generalmente, a meno che sia $D=0$ epperò $\psi=\frac{1}{A}$: ed il binomio $\rho'.d\rho+\phi'.d\phi=\mu D(d\rho-C\phi\, d\phi)e^{C\rho}$ non è un differenziale esatto.

Fig. 1.

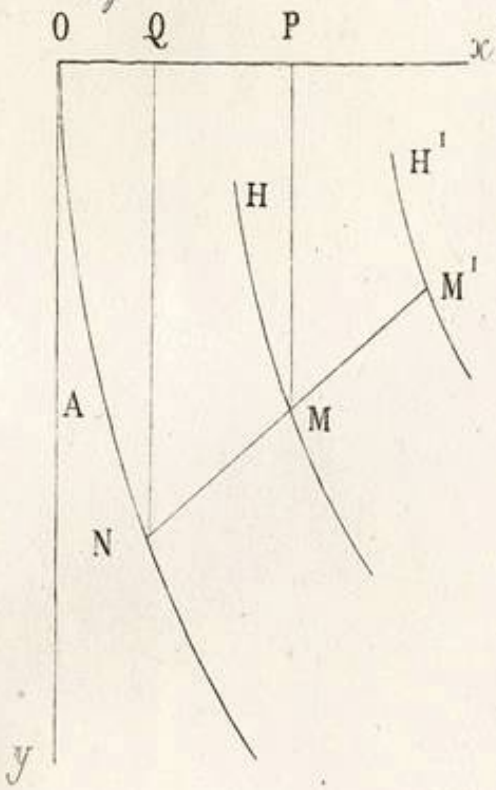
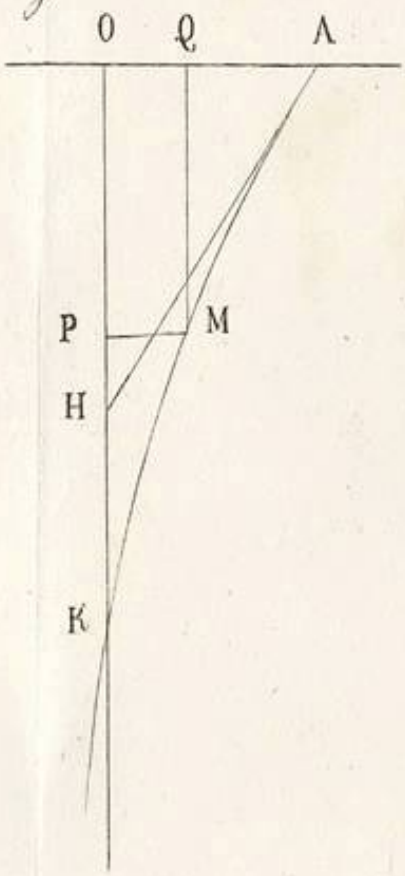
Fig. 2.