SU LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO

DI UNA CORDA ATTORTA E DI UNA VERGA ELASTICA

SOTTILE LEGGIERMENTE PIEGATA

MEMORIA

DEL SOCIO ATTUALE

DOTTOR GASPARE MAINARDI

Ricevuta adì 9 Maggio 1840.

SU LA BILANCIA DI TORSIONE.

Le importanti scoperte che vennero fatte mediante la bilancia di torsione da Cavendisk, da Coulomb, e più recentemente dal celebre sig. Gauss sembrano riclamare una teoria geometrica dell' importante strumento. I Fisici ammettono, che il momento della forza torcente sia proporzionato all' angolo di torsione, ed il cel. geometra di Brunswick dichiarò (*) essere verosimile che il coefficiente della ragione consti di due parti, una delle quali proporzionale al peso che tende la fune, l'altra proporzionale e al numero dei fili semplici componenti la corda composta, ed alla resistenza di cui ciascuno di quei fili è capace: ma per quanto io sappia nessuna teoria appoggia queste leggi, e dimostra quando e con quali limitazioni debbano essere adottate, onde mi parve utile consacrare queste poche pagine all' esame dell' importante argomento.

Considero una corda come un corpo costituito nella seguente maniera. Immagino un cilindro retto, di cui rappresento

(*) Sulla intensità del Magnetismo terrestre. Memoria del Sig. Gauss.

la lunghezza colla lettera A, ed il raggio della base con r: Suppongo divisa la circonferenza $2\pi r$ in un numero m di parti eguali, e descritti i circoletti che hanno i centri nei punti di divisione ed i raggi eguali alle metà delle corde sottese a ciascuna parte $\frac{2\pi r}{m}$, immagino tutte le spire le quali hanno origine nei centri di quei circoletti, ed incontrano i lati del cilindro sotto un angolo che indico con b. Fingiamo che ogni piccol circolo scorra col centro lungo la spira che lo incontra, conservando il proprio piano parallello a se stesso. Quei circoli genereranno dei piccoli cilindretti doppiamente inflessi, che noi considereremo come funi semplici costituenti la corda composta.

Un' estremità della corda venga trattenuta immobile; dall' altra estremità penda un peso che indico con P, e mediante un braccio orizzontale sporgente dall'estremità medesima si finga attorta la corda con una potenza, della quale il momento rispetto all' asse del cilindro sia indicato con F.

In virtù di queste azioni la corda assuma la forma di un tronco di cono retto: la sezione superiore sia la primitiva inalterata: la inferiore sia un cerchio di raggio $r-\rho$: l'altezza del tronco si indichi con $A+a$, essendo ρ ed a quantità estremamente piccole. Gli assi delle corde semplici siano tutt' ora configurati a foggia di spirali. La linea GM (*fig.* 1) rappresenti una spira nello stato primitivo della corda, gm la spirale conica in cui quella linea si trasforma. Siano GFPD, $fgnd$ le basi libere della corda; E, e i loro centri; $EF=r$, $ef=r-\rho$ due raggi paralleli, e siano l'arco circolare $GP=r\phi$, l' ordinata del cilindro $MP=r\phi \text{tang}.b$, l'arco $GM=\frac{r\phi}{\cos.b}$, e l' angolo di torsione, quale è compreso fra i due raggi EG, eg si rappresenti con θ.

Indicato con V il vertice del cono, che figura la fune nello stato attuale, condotto l' apotema Vnm, l' ordinata mp, poi la retta enp, sarà

$$\frac{Ve}{A+a}=\frac{r-\rho}{\rho} \text{ ossia } Ve=\frac{rA}{\rho}+\frac{(s-\rho)a-A\rho}{\rho}$$

e poichè ρ rappresenta una quantità estremamente piccola, il primo termine di quella espressione supera talmente i seguenti che potremo supporre $Ve=\frac{rA}{\rho}$ ed anche con eguale approssimazione $Ve=\frac{rA}{\rho}$. Chiamato μ l'angolo al vertice del cono avremo $\text{tang.}\mu=\frac{fe}{ev}=\frac{(r-\rho)\rho}{rA}$, per cui trascurato ρ^2 sarà $\text{tang.}\mu=\frac{\rho}{A}=\text{sen.}\mu$, e $\cos.\mu=1$. Se fingiamo la superficie conica spiegata in un piano la spira gm si distende secondo una retta, la figura $Vnmg$ si trasforma in un triangolo rettilineo, l'arco gn che rappresento con $(r-\rho)\psi$ s'incurva sulla circonferenza che ha il centro in V e per raggio Vg; onde indicato con λ l'angolo spianato gVm sarà $\lambda Vg=(r-\rho)\psi$, cioè prossimamente $\lambda=\frac{(r-\rho)\psi}{Vg}=\frac{\rho\psi}{A}$. Chiamato b l'angolo piano mgn, la risoluzione trigonometrica del triangolo rettilineo Vgm fornirà

$$\frac{Vm}{Vg}=\frac{Vf+mn}{Vf}=\frac{\cos.b}{\cos.(\lambda+b)}, \text{ ossia, } mn=Vf\frac{\cos.b-\cos.(\lambda+b)}{\cos.(\lambda+b)};$$

e siccome λ è un angolo assai piccolo, avremo prossimamente

$$mn=\frac{rA}{\rho}\cdot\frac{\lambda\text{sen.}b}{\cos.b-\lambda\text{sen.}b}=\frac{r\psi\text{tang.}b}{1-\frac{\rho\psi}{A}\text{tang.}b}$$

ed anche

$$mn=r\psi\text{tang.}b\left(1+\rho\frac{\psi\text{tang.}b}{A}\right)$$

quando della quantità piccolissima ρ si trascurino le potenze superiori alla prima.

Riferisco la posizione del punto m agli assi ortogonali efx, edy, Vez: chiamo $x, y, z=mp$ le coordinate di m; indico con S l'arco gm, con s l'arco primitivo GM, e con δ l'angolo GEF. Siccome l'angolo $fen=\psi+\text{ang.}feg=\psi+\delta-\theta$, che

per brevità indico con τ, entro i limiti stabiliti all' approssimazione avremo

$$mp=mn.\cos.\mu=mn,\ np=mn.\text{sen}.\mu=\frac{\rho}{A}\,r\psi\text{tang}.b$$

$$ep=r-\rho+\rho\,\frac{r\psi\text{tang}.b}{A}$$

quindi

$$z=r\psi\text{tang}.b\left(1+\rho\,\frac{\psi\text{tang}.b}{A}\right)$$

$$x=\left(r-\rho+\rho\,\frac{r\psi\text{tang}.b}{A}\right)\cos.\tau,\quad y=\left(r-\rho+\rho\,\frac{r\psi\text{tang}.b}{A}\right)\text{sen}.\tau$$

ed indicate cogl' apici, secondo il metodo di Lagrange, le derivate delle funzioni x, y, z, S, s prese rispetto a ψ, avremo

$$z'=r\text{tang}.b\left(1+2\rho\,\frac{\psi\text{tang}.b}{A}\right),$$

$$x'=-(r-\rho)\text{sen}.\tau+\rho\,\frac{r\text{tang}.b}{A}\,(\cos.\tau-\psi\text{sen}.\tau)$$

$$y'=(r-\rho)\cos.\tau+\rho\,\frac{r\text{tang}.b}{A}\,(\text{sen}.\tau+\psi\cos.\tau);$$

$$x'^2+y'^2=r^2-2r\rho\left(1-\frac{r\text{tang}.b}{A}\,\psi\right)$$

$$S'^2=\frac{r^2}{\cos.^2b}-2r\rho\left(1-\frac{r\psi\text{tang}.b}{A}\cdot\frac{1+\text{sen}.^2b}{\cos.^2b}\right)$$

d' onde si cavano

$$S'=\frac{r}{\cos.b}-\rho\left(1-\frac{r\psi\text{tang}.b}{A}\cdot\frac{1+\text{sen}.^2b}{\cos.^2b}\right)\cos.b$$

$$\frac{1}{S'}=\frac{\cos.b}{r}+\frac{\rho}{r^2}\left(1-\frac{r\psi\text{tang}.b}{A}\cdot\frac{1+\text{sen}.^2b}{\cos.^2b}\right)\cos.^3b$$

$$\cos.(zS)=\frac{z'}{S'}=\left[1+\frac{\rho}{r}\left(1+\frac{r\psi\,\text{tang}.b}{A}\right)\cos.^2 b\right]\text{sen}.b\,,$$

$$\text{sen}.(zS)=\frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{S'}.$$

Essendo $Y-y=\frac{y'}{x'}(X-x)$ la equazion della projezione sul piano xy di quella retta, la quale tocca in m la spirale conica, la perpendicolare condottavi dall'origine e delle coordinate sarà data dalla funzione

$$\pm\frac{yx'-xy'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=\pm\left(r-\rho+\rho\,\frac{\psi r\,\text{tang}.b}{A}\right)\frac{x'\text{sen}.\pi-y'\cos.\pi}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

$$=\pm\left(r-\rho+\rho\,\frac{r\psi\,\text{tang}.b}{A}\right)^2\frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}.$$

Indichiamo con n il numero dei passi, che ogni spira abbraccia nel cilindro primitivo; la projezione di tutta la spira sulla base sarà eguale a $2\pi nr$; e siccome nel passaggio dal primo al secondo stato l'estremità superiore resta immobile, mentre l'inferiore si allontana dell'angolo θ dalla posizione primitiva, perciò la spirale conica si estenderà da $\psi=0$ a $\psi=2n\pi+\theta$, e la maggiore ordinata sarà

$$(1)\qquad r(2n\pi+\theta)\left[1+\rho\frac{(2n\pi+\theta)\text{tang}.b}{A}\right]\text{tang}.b=A+a.$$

Venendo ormai a considerare lo stato dinamico della corda supponiamo che un filo semplice lungo quanto l'unità di misura lineare sottoposto ad un peso p si allunghi di altrettanto: che entro i limiti delle torsioni ordinarie la reazione che esercita ogni elemento di una corda semplice sia proporzionale alla distensione che ha sofferto, e si eserciti secondo la direzione dell'elemento medesimo, cioè della retta tangente la spira. Essendo $S'.d\psi$ la lunghezza attuale dell'elemento $\frac{rd\phi}{\cos.b}=S'd\psi$, la resistenza da esso prodotta aurà per misura la

frazione $p\frac{S'd\psi-s'd\psi}{s'd\psi}=p\left(\frac{S'}{s'}-1\right)$: la sua componente verticale sarà

$$(e)'_1=p\left(\frac{S'}{s'}-1\right)\cos.(Sz)=p\left(\frac{S'}{s'}-1\right)\frac{z'}{S'}=p\left[\frac{z'}{s'}-\cos.(Sz)\right]$$

ed il momento di quella forza rispetto all' asse del cono sarà

$$(f)=p\left(\frac{S'}{s'}-1\right)\frac{\text{sen.}(Sz)}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\left(r-\rho+\rho\,\frac{r\psi\text{tang.}b}{A}\right)^2$$

$$=p\left(r-\rho+\rho\,\frac{r\psi\text{tang.}b}{A}\right)^2\left(\frac{1}{s'}-\frac{1}{S'}\right)$$

e poichè $z'=r\text{tang.}b\left(1+2\rho\frac{\psi\text{tang.}b}{A}\right)$, ne segue

$$(f)=r\left(\frac{rz'}{\text{tang.}b}-2r\rho\right)\left(\frac{1}{s'}-\frac{1}{S'}\right)=\frac{r}{\text{tang.}b}(e)-2pr\rho\left(\frac{1}{s'}-\frac{1}{S'}\right)$$

e ciò entro i limiti dell' approssimazione stabilita.

Dobbiamo ora integrare le funzioni (e) ed (f) rispetto all' angolo ψ, estendere le somme fra i limiti $\psi=0$, $\psi=2n\pi+\theta$, ed i loro prodotti per il numero m eguagliarli rispettivamente alle potenze P ed F, con cui quelle resistenze devono equilibrarsi.

Ma per conseguire l' intento ci è d' uopo determinare quale relazione sussista fra gli angoli ψ e φ, e non avendo dati dai quali desumere questa notizia, sapendosi unicamente che l' angolo $\theta+\varphi-\psi$ formato dalle due rette EP, ep, è nullo allorquando $z=A+a$, è eguale a θ se $z=0$; si annulla sempre con θ qualunque sia z; e diminuisce al crescere della z: quindi per semplicità dell' ipotesi, e seguendo l' autorità dei Geometri (*), quell' angolo $\theta+\varphi-\psi$, che chiamo Δ, lo porremo $\Delta=\frac{\theta}{A+a}(A+a-z)$. Fingiamo per brevità

(*) Navier. Rèsumè des leçons ecc. 1826, pag. 71.

$r\,\text{tang}.b=a$, $\frac{r}{A}\,\text{tang}.^2b=\gamma$, $2n\pi+\theta=\xi$ per cui $z=a\psi+\rho\gamma\psi^2$,

$$s'=\frac{r}{\cos.b}(1+\Delta')=\frac{r}{\cos.b}\left(1-\frac{\theta z'}{A+a}\right)=\frac{r}{\cos.b}\left(1-a\theta\frac{A-a}{A^2}-2\rho\frac{\theta\rho}{A}\psi\right)$$

trascurando i prodotti di a, ρ e le potenze superiori alla prima. Avremo ancora

$$\frac{1}{S'}=\frac{\cos.b}{r}\left(\frac{A+a}{A+a-a\theta-2\rho\theta\psi}\right)=\frac{\cos.b}{r}\left[\frac{A}{A-a\theta}+\theta\frac{2A\rho\gamma\psi-aa}{(A-a\theta)^2}\right]$$

$$\frac{z'}{S'}=\frac{\cos.b}{r}\left[\frac{Aa}{A-a\theta}+\frac{2A^2\rho\gamma\psi-aa^2\theta}{(A-a\theta)^2}\right]$$

$$\int_0^\xi\frac{d\psi}{S'}=\xi\frac{\cos.b}{r}\left[\frac{A}{A-a\theta}+\theta\frac{A\rho\gamma\xi-aa}{(A-a\theta)^2}\right]$$

$$\int_0^\xi\frac{z'}{S'}d\psi=\xi\frac{\cos.b}{r}\left[\frac{Aa}{A-a\theta}+\frac{A^2\rho\gamma\xi-aa^2\theta}{(A-a\theta)^2}\right]$$

$$\int_0^\xi\cos.(Sz).d\psi=\xi\left[1+\frac{\rho}{r}\left(1+\frac{r\xi\,\text{tang}.b}{2A}\right)\cos.^2b\right]\text{sen}.b$$

$$\int_0^\xi\frac{1}{S'}d\psi=\xi\frac{\cos.b}{r}+\frac{\rho\xi}{r^2}\left(1-\frac{r\psi\,\text{tang}.b}{A}\cdot\frac{1+\text{sen}.^2b}{\cos.^2b}\right)\cos.^3b$$

e per conseguenza

$$\int_0^\xi(e).d\psi=p\xi\frac{\cos.b}{r}\left[\frac{Aa}{A-a\theta}+\frac{A^2\rho\gamma\xi-aa^2\theta}{(A-a\theta)^2}\right]$$

$$-p\,\xi\,\text{sen}.b\left[1+\frac{\rho}{r}\left(1+\frac{r\xi\,\text{tang}.b}{2A}\right)\cos.^2b\right]$$

$$\int_0^\xi(f)\,d\psi=\frac{r}{\text{tang}.b}\int_0^\xi(e)d\psi+2\rho p\xi\left(\cos.b-\frac{A\cos.b}{A-a\theta}\right).$$

Siccome la equazione (1) sviluppata in serie rispetto alle quantità a, ρ piccolissime, fornisce

$$\alpha\xi = A + a - r\xi,\ \gamma r\xi^2 = A + 2a - 2\xi,$$

$$\cos.b = \frac{r\xi}{\sqrt{A^2+r^2\xi^2}}\left[1 - \frac{A(a-\rho\xi)}{\sqrt{A^2+r^2\xi^2}}\right];\ \text{sen}.b = \frac{1}{\sqrt{A^2+r^2\xi^2}}\left[A + \frac{r^2\xi^2(a-\rho\xi)}{A^2+r^2\xi^2}\right],$$

$$\frac{1}{A-a\theta} = \frac{\xi}{A(\xi-\theta)}\left[1 + \theta\,\frac{a-\rho\xi}{A(\xi-\theta)}\right]$$

quindi saranno

$$\int_0^\xi (e)d\psi = Ap\xi\left(\frac{\cos.b}{\xi-\theta} - \frac{1}{\sqrt{A^2+r^2\xi^2}}\right) + ap\xi\left[\frac{\cos.b}{\xi-\theta} - \frac{r^2\xi^2}{(A^2+r^2\xi^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

(2)

$$+ ap\xi\left[\frac{\xi(A-r\xi)\cos.b}{(\xi-\theta)^2} + \frac{(3A-2r\xi)r\xi^2}{2(A^2+r^2\xi^2)^{\frac{3}{2}}}\right] = \frac{P}{m}$$

$$\int_0^\xi (f)\,d\psi = \frac{r^2}{a}\int(e)d\psi + 2p\rho\xi^2\left[\frac{r}{\sqrt{A^2+r^2\xi^2}} - \frac{\cos.b}{\xi-\theta}\right],$$

ossia

(3) $$\frac{Pr^2\xi}{Am} - ap\frac{r^2\xi^2}{A}\left(\frac{\cos.b}{\xi-\theta} - \frac{1}{\sqrt{A^2+r^2\xi^2}}\right) + \rho^2\frac{\rho\xi^2}{A}\left[\frac{(r\xi-A)\cos.b}{\xi-\theta}\right.$$

$$\left. + \frac{r(2A-r\xi)}{\sqrt{A^2+r^2\xi^2}}\right] = \frac{F}{m}.$$

Queste equazioni (2) (3) nelle ipotesi ammesse, e fra i limiti dell' approssimazione cui ci siamo arrestati, contengono la soluzione del problema: sembra però che d' ordinario la variazione ρ sia estremamente piccola rispetto ad α, nel qual caso trascurando la prima a fronte di questa, ponendo per brevità $2n\pi = w$, ed osservando che $\cos.b = \frac{\xi-\theta}{\sqrt{A^2+r^2(\xi-\theta)^2}}$, $\xi = w+\theta$, dalle equazioni (2) (3) caveremo

(4) $$\frac{P}{m} = Ap(w+\theta)\left[\frac{1}{\sqrt{A^2+r^2w^2}} - \frac{1}{\sqrt{A^2+r^2(w+\theta)^2}}\right]$$

$$+ ap(w+\theta)\left[\frac{1}{\sqrt{A^2+r^2w^2}} - \frac{r^2(w+\theta)^2}{[A^2+r^2(w+\theta)^2]^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$(5)\quad \frac{F}{m}=\frac{r^2P}{Am}(w+\theta)-p\frac{ar^2}{A}(w+\theta)^2\left[\frac{1}{\sqrt{A^2+r^2w^2}}-\frac{1}{\sqrt{A^2+r^2(w+\theta)^2}}\right].$$

I fisici impiegano la bilancia di torsione, affine di conoscere l'energia dello sforzo F desumendolo dalla grandezza dell'angolo θ. (*) A questo intento potremo valerci delle formole (4) (5) eliminando da esse la quantità a difficile a misurarsi, e desumendo il valore di F in funzione delle altre grandezze, A, r, w, θ..., che si determinano facilmente. Ma quel valore di F involge l'angolo θ in molti termini e sotto forme diverse, e non corrisponde all'ipotesi comunemente ammessa. Se però supponiamo il θ piccolo così che sviluppate quelle espressioni in serie rispetto a θ, si possano trascurare le potenze superiori alla prima, da quelle formole desumeremo le seguenti

$$(6)\quad P=\frac{mp}{(A^2+r^2w^2)^{\frac{3}{2}}}\left[Ar^2w^2+a\left(A^2+\theta\,\frac{A^4-A^2r^2w^2+r^4w^2}{A^2+r^2w^2}\right)\right]$$

$$F=\frac{r^2P}{A}(w+\theta)-\frac{mapar^4w^2}{A(A^2+r^2w^2)^{\frac{3}{2}}},$$

dalle quali eliminata la a, e trascurate le potenze di θ maggiori della prima, si desume

$$(7)\quad F=\frac{r^2w}{A}P+\theta\,\frac{r^2}{A^3}\left[P\left(A^2-r^2w^2\right)+mp\,\frac{Ar^4w^4}{(A^2+r^2w^2)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Esaminando ormai questa formola rileviamo, che non è la F proporzionale a θ, come, si suppone dai fisici, da che il primo termine di quella espressione non può essere trascurato a fronte del secondo moltiplicato per P. Vediamo per essa formola confermata la legge presentita dal celebre Sig. Gauss; cioè che il coefficiente dell'angolo di torsione θ consta di due

(*) Poisson. Traité de Mecanique. Tome 1, pag. 483. An. 1833.

parti delle quali una è porporzionale al peso P che tende la fune; l'altra proporzionale al numero m dei fili, ed al parametro p, che misura la tenacità de' fili semplici. Rileviamo per ultimo che uno sforzo minore di $\frac{r'\varpi}{A}$ P non varrebbe a torcere menomamente la fune.

SU L'EQUILIBRIO DI UNA VERGA ELASTICA.

Il problema che considero non sembra potersi altrimenti sottoporre a calcolo se non mediante i principj della Meccanica molecolare; dai quali principj appunto Galileo, Leibnitz, Eulero e Bernulli ne desumevano la risoluzione in alcuni casi particolari. La difficoltà che presenta la questione ha origine dal bisogno di rappresentare debitamente le resistenze che oppongono le molecole della verga rimosse dalla loro posizion naturale; la qual difficoltà non può superarsi coll' ingegnoso metodo esposto da Lagrange nella quarta lezione della parte prima della Meccanica analitica, come ha dimostrato il celebre sig. Poisson (*); nè considerando quelle resistenze siccome pressioni o trazioni sofferte dagli estremi degli elementi differenziali della estensione che si considera, come ha osservato il Sig. Cisa de Gresy. (**) Nè vale poi all'uopo rappresentare le resistenze con soli simboli, da che nei casi concreti non sapremmo utilizzare le formole analitiche se non riprendendo su altre tracce la risoluzion del problema.

Il saggio di calcolo che offro di presente è desunto dalle dottrine della meccanica molecolare; quindi implica delle supposizioni, le quali in varj casi non saranno ammissibili; ma le nostre formole particolarizzate concordano con quelle di Eulero e Bernulli; e potremo forse per esse rilevare, che alcune conseguenze ammesse devono essere ricevute con qualche limitazione.

(*) Poisson Mem. de l'Institut de France. T. 12. An. 1814.
(**) Memorie della Reale Accad. di Torino per l' anno 1818.

Suppongo che una verga omogenea e libera venga rimossa dalla sua posizion naturale da forze applicate a tutti o ad alcuni punti della medesima, e che questo fisico cambiamento non alteri in veruna parte la continuità della materia, per cui i punti i quali in origine erano contigui fra loro lo siano anche dippoi; sebbene ognuno possa essere trasportato a distanza finita dalla posizion primitiva. Considerando la verga nello stato iniziale, nell'interno di essa immagino una linea, qual sarebbe l'asse di figura nel caso di una verga cilindrica o prismatica. Sia C (*Fig.* 2) un punto di quella linea, Cz la tangente, Cx la direzione del raggio osculatore, Cy normale alle rette Cx, Cz: sia s la lunghezza dell'arco compreso fra il punto C, ed un altro punto arbitrario. ABCD rappresenti una sezione normale all'asse, M un punto di essa determinato dalla retta GM$=r$, e dall'angolo MC$y=\omega$. Sia Mm=Cc=S' parallella all'asse Cz; Cc' rappresenti un arco di cerchio posto nel piano xCy, col centro nella retta Cy, ed il raggio della lunghezza ρ: Sia Cc'—C$c=\dot{\xi}$: fingo che l'arco Mm' appartenga ad un circolo parallello a Cc', compreso fra i piani normali all'arco Cc' negli estremi di esso: suppongo

$$\frac{Mm'-Mm}{Cc'-Cc}=\frac{\rho-CP}{\rho}, \text{ per cui } Mm'=\dot{s}+\left(1-\frac{r\,\text{sen.}\omega}{\rho}\right)\dot{\xi}$$

Si conduca l'ordinata $m'p'$, si formi l'angolo $p'Cp''=\theta$, quindi si tracci $m''p''$ eguale e parallella ad $m'p'$. Saranno

$$p'q'=MP=r\cos.\omega,$$

$$m'p'=(\rho-r\,\text{sen.}\omega)\text{sen.}\frac{Mm'}{\rho-r\,\text{sen.}\omega}=\dot{s}+\left(1-\frac{r}{\rho}\,\text{sen.}\omega\right)\dot{\xi}$$

supponendo $\dot{s}$, $\dot{\xi}$ estremamente piccole, sviluppando la funzione trigonometrica sostituendo al seno l'arco che vi corrisponde, e trascurando i prodotti e le potenze delle quantità $\dot{s}$, $\dot{\xi}$. Avremo poi le coordinate $m''p''=m'p'$, $p''q''$, Cq'' del punto m'' per mezzo delle equazioni seguenti

$$Cq''=Cp'.\text{sen.}(ACp'+\theta)=Cq'+\theta.p'q'=r(\text{sen.}\omega+\theta\cos.\omega),$$

$$p''q''=Cp'.\cos.(ACp'+\theta)=r(\cos.\omega-\theta\,\text{sen.}\omega),$$

$$m''p''=m'p'=\dot{s}+\left(1-\frac{r}{\rho}\,\text{sen.}\omega\right)\dot{\xi}$$

dalle quali eliminando r ed ω si trae

$$Cq''-\theta.p''q''+\frac{\rho(1+\theta^2)}{\xi}.\,m''q''=\frac{\rho(\dot{\xi}+\dot{s})(1+\theta^2)}{\xi}$$

che appartiene ad una superficie piana.

Nel cambiamento fisico della verga l'asse venendo deformato, supporremo che il punto C sia trasferito nel luogo C', il quale rispetto a tre assi ortogonali assunti ad arbitrio, venga determinato dalle coordinate x, y, z. Supposto poi, che la sezione ABC, e con essa i punti m'' ec., vengano trasportati in A'B'C'D', per cui gli assi Cx, Cy, Cz coincidano con $C'x'$, $C'y'$, $C'z'$ fingeremo che nella posizione forzata della verga un punto qualunque M della sezione ABC venga ad occupare quel luogo in cui si trasferisce m'': quasi che lo spostamento di M dai punti circostanti potesse attribuirsi ad uno stiramento $Mm=\dot{s}$ secondo la direzione della tangente; ad una rotazione intorno ad un asse parallello a Cy, il quale incontra l'asse Cx alla distanza ρ dall'origine C; e finalmente ad una seconda rotazione intorno all'asse Cz misurata dall'angolo θ.

L'azione molecolare, che eserciteranno i puuti m'' ec. nel nuovo stato dipenderà dalla loro tendenza a riprendere la posizione primitiva M ec. sul piano A'B'C'; epperò supposta irrigidita la verga intercetta fra il piano dei punti m''ec. ed una estremità, le forze tutte applicate a questo solido dovranno comporsi in equilibrio colle suddette azioni molecolari.

Sia la retta $Mm''=\tau$: supponiamo la tendenza di m'' verso M proporzionale a τ, ed indichiamola con $A\tau$: non già perchè tale si supponga la legge di natura, ma perchè quella qualunque siasi funzione dello spostamento τ che rappresenta la

forza, si potrà sviluppare in serie a potenze intere positive di τ, e trascureremo quei termini della serie che contengono potenze superiori alla prima. (*) Avremo quindi

$$\cos.(\tau.x)=\frac{Cq''-CP}{\tau}=\frac{\theta r\cos.\omega}{\tau},\ \cos.(\tau.y)=\frac{\theta.r\mathrm{sen}.\omega}{\tau};$$

$$\cos.(\tau.z)=\frac{m''p''}{\tau}=\frac{\dot{s}}{\tau}+\left(1-\frac{r}{\rho}\mathrm{sen}.\omega\right)\frac{\dot{\xi}}{\tau};$$

le componenti della forza $A\tau$ saranno
secondo il prolungamento dell' asse $Cx=A.\theta.r\cos.\omega$;
secondo quello di $Cy=A.\theta.r\mathrm{sen}.\omega$, (1)
secondo il prolungamento di $Cz=A(\dot{s}+\dot{\xi})-A\frac{r}{\rho}\dot{\xi}\mathrm{sen}.\omega$.

I momenti della medesima forza saranno rispetto all' asse
Cz da x verso $y=A\theta r(MP.\cos.\omega+CP\mathrm{sen}.\omega)=A\theta r^2$,

rispetto a Cy da x verso $z=A\left[(\dot{s}+\dot{\xi})-\dot{\xi}\frac{r}{\rho}\mathrm{sen}.\omega\right]r\mathrm{sen}.\omega$, (2)

rispetto a Cx da z verso $y=A\left[(\dot{s}+\dot{\xi})-\dot{\xi}\frac{r}{\rho}\mathrm{sen}.\omega\right]r\cos.\omega$.

Rappresentiamo con a, b, c i coseni degli angoli che la retta Cx' forma cogli assi coordinati, cui si suppone riferita la verga nella seconda posizione: con a_1, b_1, c_1 i coseni che corrispondono a Cy': con a_2, b_2, c_2 quelli che riguardano Cz'. Immagino nella verga primitiva una nuova sezione normale al proprio asse, ne indico l'area con Δ; con t la lunghezza dell' asse compresa fra quella sezione ed un punto arbitrario, con l la sua lunghezza totale. Fingo l' area Δ piccola così che le forze attualmente applicate ai varj punti di essa possano fin-

(*) Seguendo i principj della Meccanica molecolare, dietro le tracce dei chiar. sig. Poisson e Cauchy, facilmente si tratta il problema con maggiore generalità, ma non ho voluto recare quì un calcolo, la cui prolissità non è compensata dall' importanza dei risultati.

gersi raccolte nell' asse, per cui supposte X, Y, Z le coordinate di quel punto considerato nella posizione forzata; P, Q, R le componenti secondo gli assi coordinati della potenza ivi applicata, saranno

$$(3)\quad \int_s^l (aP+bQ+cR)\Delta dt = L\,;\ \int_s^l (a_1P+b_1Q+c_1R)\Delta dt = M\,,$$
$$\int_s^l (a_2P+b_2Q+c_2R)\Delta dt = N$$

le somme delle forze paralelle agli assi $C'x'$, $C'y'$, $C'z'$ agenti su tutta la verga, e

$$\int_s^l \Big[a_2[Q(Z-z)-R(Y-y)]+b_2[R(X-x)-P(Z-z)]$$
$$+c_2[P(Y-y)-Q(X-x)]\Big]\Delta dt = T$$

$$(4)\quad \int_s^l \Big[a_1[Q(Z-z)-R(Y-y)]+b_1[R(X-x)-P(Z-z)]$$
$$+c_1P(Y-y)-Q(X-x)]\Big]\Delta dt = U$$
$$\int_s^l \Big[a[Q(Z-z)-R(Y-y)]+b[R(X-x)-P(Z-z)]$$
$$+c[P(Y-y)-Q(X-x)]\Big]\Delta dt = V$$

rappresenteranno le somme dei momenti di quelle forze rispetto ai medesimi assi $C'x'$, $C'y'$, $C'z'$.

Moltiplicate ora le funzioni (1), (2) per l'elemento $rdrd\omega$ dell' area ABCD, poi integrate rispetto ad r ed ω, ed estesi gli integrali a tutta quell' area, avremo finalmente le equazioni di equilibrio

$$A.\theta\int\int r^2\cos.\omega.dr.d\omega = L\,,\quad A\theta.\int\int r^2\text{sen}.\omega dr.d\omega = M$$

$$A(\dot{s}+\dot{\xi})\int\int rdrd\omega - \frac{A\dot{\xi}}{\rho}\int\int r^2\text{sen}.\omega.dr.d\omega = N$$
$$A\theta.\int\int r^3dr.d\omega = T$$

$$A(\dot{s}+\dot{\xi})\int\int r^2\cos.\omega dr.d\omega - \frac{A\dot{\xi}}{\rho}\int\int r^3\text{sen}.\omega\cos.\omega.dr.d\omega = U$$
$$A(\dot{s}+\dot{\xi})\int\int r^2\text{sen}.\omega dr.d\omega - \frac{A\dot{\xi}}{\rho}\int\int r^3\text{sen}.^2\omega.d\omega = V.$$

Eseguite le integrazioni rispetto ad r, e supposti per brevità

$$A\theta=\tau,\ A(\dot{s}+\dot{\xi})=t,\ A\dot{\xi}=\mu$$

avremo

$$\tau\int r^3\cos.\omega d\omega=3L,\ \tau\int r^3\text{sen}.\omega.d\omega=3M$$

$$3t\int r^2 d\omega-2\frac{\mu}{\rho}\int r^3\text{sen}.\omega.d\omega=6N$$

(5) $$\tau\int r^4 d\omega=4T$$

$$\tfrac{1}{3}t\int r^3\cos.\omega.d\omega-\frac{\mu}{4\rho}\int r^4\text{sen}.\omega.\cos.\omega.d\omega=U$$

$$\tfrac{1}{3}t\int r^3\text{sen}.\omega.d\omega-\frac{\mu}{4\rho}\int r^4\text{sen}.^3\omega.d\omega=V,$$

le quali equazioni offrono la risoluzione del problema. Diffatti eliminate le incognite μ, t, τ ne desumeremo tre equazioni contenenti x, y, z: i coseni a, b, c ec. che in forza delle supposizioni fatte si riferiscono alla tangente ed al raggio osculatore l'asse della verga nella nuova posizione, sono funzioni note di x, y, z e delle loro derivate rispetto ad s: gli integrali (3), (4) si tolgono dalle equazioni mediante la differenziazione rispetto ad s, e si riducono a funzioni di P, Q, R, Δ epperò di x, y, z e di s: così chè eliminate μ, t, τ dalle equazioni (5) le risultanti basteranno a determinare x, y, z in funzione di s: le stesse equazioni (5) forniranno poi i valori di μ, t, τ, per mezzo dei quali conosceremo il sito che ogni punto M di qualsivoglia sezione ABC verrà ad occupare nella verga rimossa dalla primitiva posizione.

Se il corpo che si considera fosse cilindrico, per cui la r non dipenda da ω, essendo

$$\int_0^{2\pi}\text{sen}.\omega.d\omega=\int_0^{2\pi}\cos.\omega.d\omega=0$$

$$\int_0^{2\pi}\text{sen}.\omega\cos.\omega.d\omega=0,\ \int_0^{2\pi}\text{sen}.^2\omega.d\omega=\pi$$

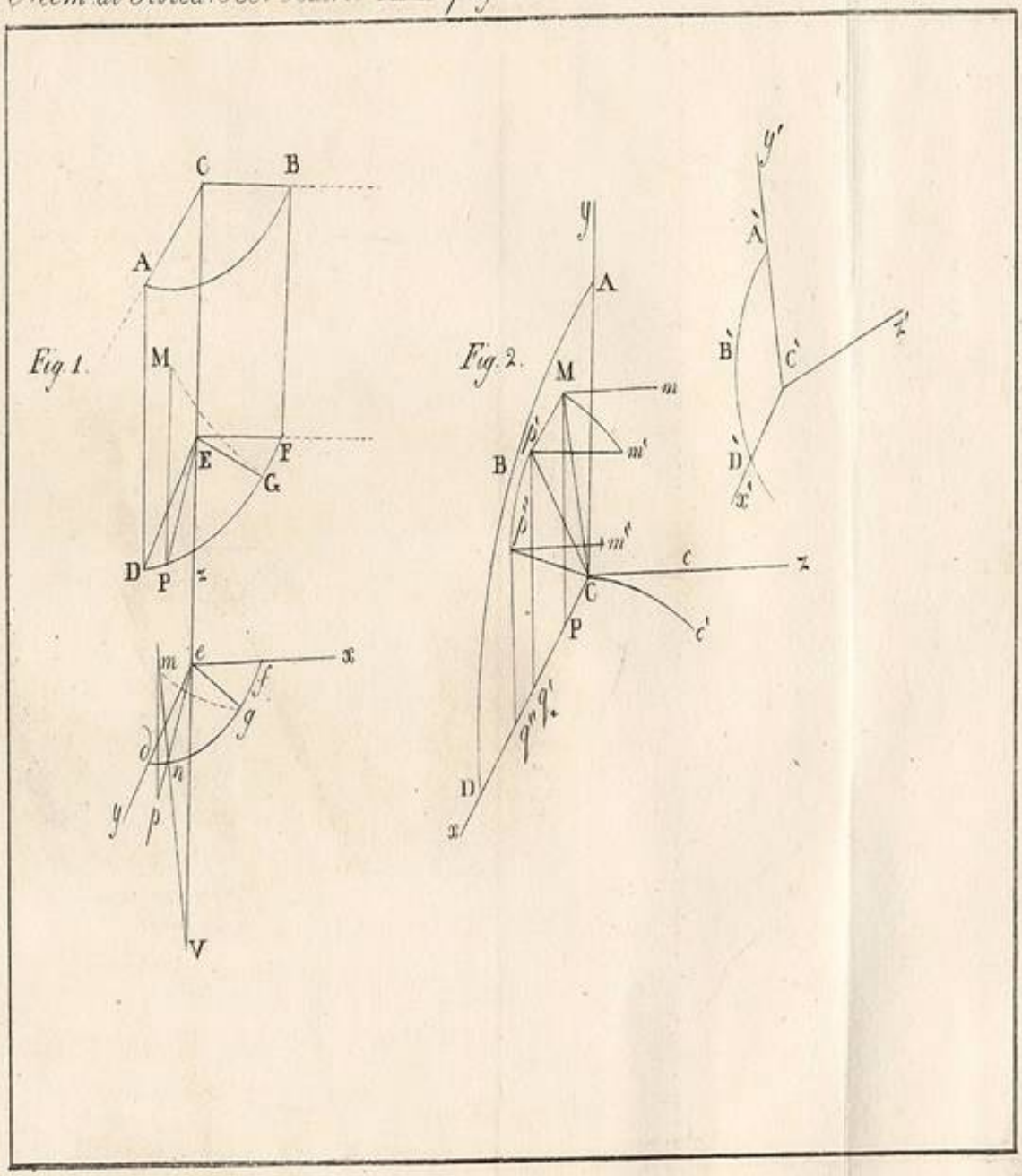
Fig. 1.
C
B
A
M
E
F
G
D
P
z
m
e
x
f
g
o
n
y
p
V
Fig. 2.
y
A
M
m
B
p'
m'
p''
m''
c
z
C
P
c'
D
x
y'
A'
B'
C'
z'
D'
x'

le equazioni (5) forniranno le seguenti:

$$(6)\quad L=0,\ M=0,\ \pi r^3 t=N,\ \tfrac{1}{2}\pi r^4 t=T,\ U=0,\ -\frac{\mu}{4\rho}\pi r^4=V$$

le quali concordano pienamente coi risultamenti già ottenuti da Bernulli e da Eulero. (*) Ma la terza delle equazioni (5) dimostra che generalmente la funzione N non è proporzionale all' area $\int r^3 d\omega$, ed al parametro τ. Dalla quarta equazione raccogliamo essere T proporzionale al $\int r^4 d\omega$. Siccome poi le derivate rispetto ad s delle funzioni

$$\int_s^l [Q(Z-z)-R(Y-y)]\Delta dt,\ \int_s^l [R(X-x)-P(Z-z)]\Delta dt,$$
$$\int_s^l [P(Y-y)-Q(X-x)]\Delta dt,$$

sono

$$\int_s^l (Rb_2-Qc_2)\Delta dt,\ \int_s^l (Pc_2-Ra_2)\Delta dt,\ \int_s^l (Qa_2-Pb_2)\Delta dt,$$

le quali moltiplicate rispettivamente per a_2, b_2, c_2 danno una somma eguale a zero; quindi dalle (5) desumeremo la seguente equazione

$$\frac{1}{4}\frac{d}{ds}(\tau\int r^4 d\omega)+[\tfrac{t}{3}\int r^3\cos.\omega.d\omega-\frac{\mu}{4\rho}\int r^4\text{sen}.\omega.\cos.\omega.d\omega]\times$$
$$\frac{a_2 da_1+b_2 db_1+c_2 dc_1}{ds}+[\tfrac{t}{3}\int r^3\text{sen}.\omega.d\omega-\frac{\mu}{4\rho}\int r^4\text{sen}.^2\omega.d\omega]$$
$$\times\frac{a_2 da+b_2 db+c_2 dc}{ds}=0$$

la quale dimostra che non può essere $d(\tau\int r^4 d\omega)=0$ (**) a meno che siano

$$\tfrac{1}{3}t\int r^3\cos.\omega.d\omega-\frac{\mu}{4\rho}\int r^4\text{sen}.\omega\cos.\omega.d\omega=0,$$
$$\tfrac{1}{3}t\int r^3\text{sen}.\omega.d\omega-\frac{\mu}{4\rho}\int r^4\text{sen}.^2\omega.d\omega=0,$$

oppure $a_2 da_1+b_2 .db_1+c_2 .dc_1=0$, $a_2 .da+b_2 .db+c_2 .dc_2=0$, nel qual caso l' asse della verga è una linea retta.

(*) Acta Academ. Petropolit. An. 1778. — Navier luogo citato.
(**) Poisson. Correspondance de l'ecole roy. Polit. T. 3.