# CALCOLO
# DEGLI INDICI DELLE FUNZIONI

DEL SIGNOR AGOSTINO CAUCHY
MEMBRO DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI PARIGI
E DELLA SOCIETÀ REALE DI LONDRA.

Nella Memoria presentata all'Accademia di Torino il 17 Novembre 1831 ho fatto conoscere un nuovo calcolo che può essere molto utilmente impiegato nella risoluzione delle equazioni di qualunque grado. Ma nella memoria di cui trattasi, i principj di questo calcolo che io denomino calcolo degli indici delle funzioni trovansi dedotti dalla considerazione degli integrali definiti. Io mi propongo adesso di mostrare come si possano stabilire direttamente questi stessi principj senza ricorrere a formole di calcolo integrale.

Sia $u$ una funzione reale della variabile reale $x$, e tale che se si fa crescere questa variabile per gradi insensibili fra due dati limiti,

$$x = x_0, \quad x = \mathrm{X},$$

$u$ varii insensibilmente e non cangi mai di segno senza passare per zero o per l' infinito. Per un valore $a$ di $x$ compreso fra i limiti $x = x_0$, $x = \mathrm{X}$ e proprio a verificare l' equazione

$$(1) \qquad \frac{1}{u} = 0.$$

la funzione $u$ passerà divenendo infinita dal negativo al positivo, o dal positivo al negativo, oppure essa non cangerà in

modo alcuno di segno. La quantità $+1$ nel primo caso $-1$ nel secondo, zero nel terzo, sarà ciò che io chiamo l'indice della funzione $u$ per il dato valore $a$ della variabile $x$; e l'indice integrale di $u$ preso fra i limiti

$$x = x_0,\ x = X > x_0,$$

non sarà altro che la somma degli indici corrispondenti alle diverse radici dell' equazione (1) contenute fra i limiti di cui si tratta.

Io indicherò questo indice integrale con la notazione

$$I_{x_0}^{X}((u))$$

essendo qui l' uso delle parentesi doppie lo stesso che nel calcolo dei residui. Ciò posto si stabilirà facilmente la seguente proposizione.

1.° *Teorema*. Sia $u$ una funzione reale di $x$ che fra i limiti $x=x_0$, $x=X$, non cangi mai di segno senza passare per zero o per l' infinito, ed $u_0$, U li due valori di $u$ corrispondenti ai valori reali $x_0$, X della variabile X. La somma

$$(2)\qquad I_{x_0}^{X}((u)) + I_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{1}{u}\right)\right)$$

equivalerà allo zero, se le due quantità $u_0$, U sono dello stesso segno, a $+1$ se la prima essendo negativa, la seconda è positiva, a $-1$, se essendo positiva la prima è negativa la seconda.

*Dimostrazione*. Se si fa crescere $x$ per gradi insensibili dal limite $x_0$ sino al limite X, i soli valori di $x$ ai quali corrispondono degli indici di $u$, o di $\frac{1}{u}$ differenti da zero, saranno quelli per mezzo dei quali la funzione $u$ diverrà infinita can-

giando di segno, e ad un simile valore di $x$ corrisponderà sempre un indice di $u$, o di $\frac{1}{u}$ eguale a $+1$ se $x$ passa dal negativo al positivo, ed un indice di $u$ o di $\frac{1}{u}$ uguale a $-1$ se $u$ passa dal positivo al negativo. Siano ora

$$a, b, c, d \ldots\ldots$$

i valori successivi di $x$ compresi fra i limiti $x_0$, X, e pei quali la funzione $u$ diviene nulla o infinita cangiando di segno, cioè a dire in altri termini, le radici delle due equazioni

$$(3) \qquad u = 0, \quad \frac{1}{u} = 0$$

contenute fra i limiti $x_0$, X essendo queste radici disposte per ordine di grandezza. Se $u_0$ è negativa, le radici di $u$ o di $\frac{1}{u}$ corrispondenti ai valori

$$a, b, c, d \ldots\ldots$$

della variabile $x$ saranno rispettivamente

$$+1, -1, +1, -1 \ldots\ldots$$

e per conseguenza la somma di questi indici sarà equivalente a zero, o a $+1$ secondo che il loro numero sarà pari o dispari, cioè a dire in altri termini secondo che U sarà negativo o positivo. Al contrario se $x_0$ è positivo, gli indici di $u$ o di $\frac{1}{u}$ corrispondenti ai valori

$$a, b, c, d \ldots$$

della variabile $x$ saranno rispettivamente

$$-1, +1, -1, +1 \ldots\ldots$$

ed in conseguenza la somma di questi indici sarà equivalente

a zero, od a $-1$ secondo che il loro numero sarà pari o dispari vale a dire in altri termini secondo che U sarà positivo o negativo. Dunque definitivamente l' espressione (2), o la somma degli indici delle funzioni

$$u, \frac{1}{u}$$

corrispondente ai valori

$$a, b, c, d \ldots$$

della variabile $x$ sarà equivalente a $+1$, a $-1$ od a zero, secondo che la variabile $x$ passando bruscamente dal valore $x_0$ al valore X farà passare la funzione $u$ dal negativo al positivo o dal positivo al negativo, o cesserà di produrre in questa funzione un cangiamento di segno.

Supponendo che la funzione reale $u$ di $x$ non cangi mai di segno senza passar per zero o per l' infinito, noi indicheremo con la notazione

$$I((u))$$

la somma degli indici di $u$ corrispondente a tutte le radici dell' equazione (1) di modo che si avrà identicamente

$$I((u)) = I_{-\infty}^{\infty}((u)).$$

Se la funzione $u$ si riduca alla forma $\frac{k}{x}$ essendo $k$ una quantità costante si troverà

$$I\left(\left(\frac{k}{x}\right)\right) = I_{\frac{K}{((x))}} = 1$$

oppure

$$I\left(\left(\frac{k}{x}\right)\right) = I_{\frac{k}{((x))}} = -1.$$

secondo che la quantità $k$ sarà positiva o negativa. Ciò posto il Teorema 1.° sarà evidentemente compreso nella formola

$$(4)\qquad I_{x_0}^{X}((u)) + I_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{1}{u}\right)\right) = \tfrac{1}{2}\left[I\frac{U}{((x))} - I\frac{u_0}{((x))}\right].$$

Se alla funzione $u$ si sostituisca il rapporto fra due funzioni date $u$, $v$ scelte in modo che ciascuna di esse non cangi mai di segno fra i limiti $x=x_0$, $x=X$ senza passare per zero o per l'infinito, allora chiamando $u_0$, $V_0$ ed U, V i valori di queste due funzioni per $x=x_0$, e per $x=X$, si avrà in virtù della formola (4)

$$(5)\qquad I_{x_2}^{X}\left(\left(\frac{u}{v}\right)\right) + I_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right) = \tfrac{1}{2}\left[I\frac{U}{V((x))} - I\frac{u_0}{v_0((x))}\right],$$

o ciò che torna lo stesso

$$I_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{u}{v}\right)\right) + I_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right) = \tfrac{1}{2}\left[I\frac{V}{U((x))} - I\frac{v_0}{u_0((x))}\right].$$

Allorchè $u$ è algebraicamente divisibile per $v$ l'indice integrale

$$I_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{u}{v}\right)\right)$$

è evidentemente nullo, e la formola (5) dà

$$(6)\qquad I_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right) = \tfrac{1}{2}\left[I\frac{U}{V((x))} - I\frac{u_0}{v_0((x))}\right].$$

2.° *Teorema.* Se essendo $u$, $v$ due funzioni intiere di $x$, e il grado della prima eguale o superiore al grado della seconda, si chiami $a$ il quoziente ed $w$ il resto che somministra la divisione di $u$ per $v$ si avrà

$$I_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{u}{v}\right)\right) = I_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{w}{v}\right)\right)$$

qualunque siano i valori particolari di $x$ rappresentati da $x_0$, X.

*Dimostrazione.* In fatti nell'ipotesi ammessa si avrà qualunque sia $x$,

$$(7) \qquad \frac{u}{v} = a + \frac{w}{v}$$

e in conseguenza i rapporti

$$\frac{u}{v}, \frac{w}{v}$$

la cui differenza $a$ resterà sempre finita al tempo stesso che la variabile $x$ divenisse simultaneamente infinita per certi valori di $x$ proprii a verificar l' equazione

$$(8) \qquad v = 0.$$

Sia $a$ uno di questi valori. Quando $x$ differirà pochissimo da $a$, li due rapporti

$$\frac{u}{v}, \frac{w}{v}$$

offrendo valori numerici considerabilissimi, superiori a quelli di $a$, saranno necessariamente quantità dello stesso segno. Dunque per $x=a$ l' indice del rapporto $\frac{u}{v}$ sarà equivalente all' indice del rapporto $\frac{w}{v}$, e sussistendo questo rapporto per tutte le radici dell' equazione (8) strascinerà seco la formola (7).

Dalla formola (7) congiunta alla (5) si ricava

$$(9) \qquad I_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right) = \tfrac{1}{2}\left[I\frac{U}{V((x))} - I\frac{u_0}{v_0((x))}\right] - I_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{w}{v}\right)\right).$$

In virtù di questa ultima equazione la determinazione dell' indice integrale di uua frazione razionale $\frac{v}{u}$ fra limiti dati,

può essere ridotto alla determinazione dell'indice integrale di un' altra frazione razionale $\frac{w}{v}$ il numeratore e denominator della quale siano polinomj di minori gradi. D' altronde una induzion simile applicar puossi non solamente alla nuova frazione $\frac{w}{v}$, ma ancora a tutte le frazioni che se ne dedurranno successivamente, e che si formeranno dividendo l' uno per l' altro due avanzi consecutivi ottenuti nella ricerca del massimo comun divisore di due polinomj $u$ ed $v$. Ora siccome il penultimo avanzo sarà esattamente divisibile per l' ultimo cioè a dire, per il massimo comun divisore, la formola (6) farà conoscere l' indice dell' ultima frazione, dal quale si dedurranno immediatamente gli indici di tutte le altre. Così puossi con l' ajuto delle formole (6) e (9) determinar l' indice di qualunque frazion razionale. Del resto si può abbreviar sovente il calcolo con l' ajuto delle considerazioni seguenti.

Se essendo $u$ una funzione intiera della variabile $x$, si dica $\varphi$ l' aumento di $u$ corrispondente all'aumento $\omega$ della variabile $x$, la somma $u+\varphi$ potrà essere rappresentata da un polinomio ordinato secondo le potenze ascendenti di $\omega$, o della forma

$$(10) \qquad u+\omega u'+\frac{\omega^2}{1.2}u''+\frac{\omega^3}{1.2.3}u'''+\text{ec.}$$

e in questo polinomio i coefficienti di

$$\omega,\ \frac{\omega^2}{1.2},\ \frac{\omega^3}{1.2.3}\ \text{ec.}$$

cioè

$$u,\ u',\ u'',\ \text{ec.}$$

saranno nuove funzioni di $x$ che si chiamano derivate della funzione $u$, non essendo la derivata $u'$ del primo ordine che il limite verso cui converge il rapporto

$$(11) \qquad \frac{\varphi}{\omega}=u'+\frac{\omega}{1.2}u'+\frac{\omega^2}{1.2.3}u'''+\text{ec.}$$

mentre che $\omega$ si accosta indefinitamente a zero e la derivata $u^{(n)}$ dell' ordine $n$ essendo il coefficiente di $\frac{\omega^n}{1.2.3.\ldots.n}$ nel polinomio (10).

Se si supponga per fissare le idee

$$(12)\quad u = k_0 x^m + k_1 x^{m-1} + k_2 x^{m-2} + \ldots + k_{m-2} x^2 + k_{m-1} x + k_m,$$

essendo $k_0, k_1, k_2 \ldots\ldots k_{m-2}, k_{m-1}, k_m$ quantità costanti, si troverà

$$(13)\quad u + \varphi = k_0 (x+\omega)^m + k_1 (x+\omega)^{m-1} + k_2 (x+\omega)^{m-2} + \ldots$$
$$+ k_{m-2} (x+\omega)^2 + k_{m-1} (x+\omega) + k_m,$$

e perciò

$$(14)\quad \begin{cases} u' = m k_0 x^{m-1} + (m-1) k_1 x^{m-2} + \ldots + 2 k_{m-2} x + k_{m-1} \\ u'' = (m-1) m k_0 x^{m-2} + (m-1)(m-2) k_1 x^{m-3} + \ldots + 1.2 k_{m-2} \\ \quad \text{ecc.} \end{cases}$$

Ora risulta dalle formole (14). 1.° Che si otterrà la derivata del primo ordine $u'$ moltiplicando ciascun termine della funzione $u$ per l' esponente di $x$ in quel termine e diminuendo questo medesimo esponente di una unità: 2.° che per ottenere le derivate di $u$ dei diversi ordini, basta formare successivamente diverse funzioni, ciascuna delle quali sia la derivata della precedente, essendo la prima la derivata di $u$.

Imaginiamo ora che il grado della funzione intiera $u$ essendo eguale o maggiore di $m$, $u$ svanisca per un dato valore $a$ della variabile $x$, e che $u^{(m)}$ sia allora il primo termine della serie

$$(15)\quad u,\ u',\ u'',\ \ldots\ u^{(m)},\ u^{(m+1)}\ \text{ec.}\ldots$$

che non si riduce a zero. Se si chiamino

$$A_m,\ A_{m+1},\ A_{m+2},\ \text{ec.}\ldots.$$

i valori delle funzioni

$$\frac{u_m}{1.2\ldots m},\ \frac{u_{m+1}}{1.2\ldots m(m+1)},\ \frac{u_{m+2}}{1.2\ldots m(m+1)(m+2)},\ \text{ec.}$$

per $x=a$, il valore di $u$ corrispondente a

$$x=a+\omega \tag{16}$$

sarà

$$A_m\omega^m+A_{m+1}\omega^{m+1}+A_{m+2}\omega^{m+2}+\text{ec.}\ldots;$$

in conseguenza l' equazione (16) porterà la seguente

$$u=A_m\omega^m+A_{m+1}\omega^{m+1}+A_{m+2}\omega^{m+2}+\text{ec.}\ldots \tag{17}$$

per modo che si avrà identicamente

$$u=A_m(x-a)^m+A_{m+1}(x-a)^{m+1}+A_{m+2}(x-a)^{m+2}+\ldots$$

o ciò che torna lo stesso

$$u=(x-a)^m[A_m+A_{m+1}(x-a)+A_{m+2}(x-a)^2+\ldots]. \tag{18}$$

Allora l' equazione (19) potendo esser decomposta in due altre

$$(x-a)^m=0,\ \text{ed}\ A_m+A_{m+1}(x-a)+A_{m+2}(x-a)^2+\ldots=0$$

dovrà considerarsi che ammetta $m$ radici uguali delle quali $a$ sarà il valor comune. Aggiungasi che per dei valori di $x$ prossimi ad $a$ il rapporto

(20) $$\frac{u}{(x-a)^m}$$

sarà in forza della formola (18) una quantità finita ma diversa dallo zero affetta dello stesso segno di $A_m$; in conseguenza del segno stesso di $u^{(m)}$. Ciò posto si dimostrerà facilmente la proposizione seguente.

3.° *Teorema*. Siano $u$, $v$ due funzioni reali ed intiere di $x$, e supponiamo che le due equazioni

(19) $$u = 0$$

(20) $$v = 0$$

offrano, la prima $m$ radici, la seconda $n$ radici eguali e reali di cui sia $a$ il valor comune, l' indice della funzione

(21) $$\frac{v}{u}$$

corrispondente ad $x=a$ sarà zero, se la differenza $m-n$ è pari o negativa. Ma se questa differenza è dispari e positiva, l'indice suddetto sarà $+1$, o $-1$ secondo che il valore del rapporto

(22) $$\frac{v^{(n)}}{u^{(m)}}$$

corrispondenti ad $x=a$ sarà positivo o negativo.

*Dimostrazione*. Nella ipotesi ammessa se si attribuisce ad $x$ un valore prossimo quant' è possibile ad $a$, le due frazioni

(23) $$\frac{u}{(x-a)^m}, \frac{v}{(x-a)^n}$$

acquisteranno valori finiti ma differenti da zero, il primo dei quali sarà una quantità affetta dello stesso segno che $u^{(m)}$, e il secondo una quantità affetta dello stesso segno $v^{(n)}$. In

conseguenza il quoziente che si ottiene dividendo la seconda frazione per la prima cioè

$$\frac{v}{u}(x-a)^{m-n}$$

sarà per dei valori di $x$ infinitamente vicini ad $a$ una quantità finita, ma differente da zero ed affetta dal segno stesso che il rapporto

$$\frac{v^{(n)}}{u^{(m)}}.$$

Dunque allora il valore di

$$\frac{v}{u}$$

sarà infinitamente piccolo, finito, o infinitamente grande mentre sia tale il prodotto

$$(24) \qquad \frac{v^{(n)}}{u^{(m)}} \cdot \frac{1}{(x-a)^{m-n}}.$$

Ora se la differenza $x-a$ cambia di segno passando per zero, il prodotto (24) non potrà cambiar di segno passando per l' infinito, se non quando la differenza $m-n$ sarà dispari e positiva, e in questo caso il prodotto (24) passerà dal negativo al positivo, o dal positivo al negativo, secondo che il valore del rapporto

$$\frac{v^{(n)}}{u^{(m)}}$$

corrispondente ad $x=a$ sarà positivo o negativo. Dunque l'indice della funzione (21) svanirà se la differenza $m-n$ è pari o negativa, e quest' indice diverrà $+1$, oppur $-1$, allorchè la differenza $m-n$ sarà dispari e positiva, secondo che il rapporto $\frac{v^{(n)}}{u^{(m)}}$ diverrà positivo o negativo per $x=a$.

*Corollario.* Se $a$ è una radice semplice della equazione (19) senza essere radice della equazione (18), l' indice della funzione

$$\frac{v}{u}$$

corrispondente ad $x=a$, sarà $+1$ oppur $-1$, secondochè il rapporto

$$\frac{v}{u'}$$

acquisterà per $x=a$ un valor positivo, o negativo.

Allorchè $u$ e $v$ rappresentando funzioni reali ed intiere di $x$, la forma della funzione $u$ è tale che si possano determinar facilmente le radici di $u=0$ contenute fra i limili $x_0$ X, il Teorema (4) somministra il mezzo di calcolare immediatamente l' indice corrispondente a ciascuna di queste radici e per conseguenza l' indice integrale

$$I_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right).$$

Nel caso contrario si può ricorrendo alla formola (9) sostituire alla frazione $\frac{v}{u}$ una frazione $\frac{w}{u}$ e continuare così finchè si arrivi ad una nuova frazione, l'indice integrale della quale fra i limiti $x_0$, X possa essere determinato facilmente con l' ajuto del Teorema (4). Si può ancora proseguire il calcolo sino alla frazione che ha per numeratore il più gran comun divisore dei due polinomii $u$, $v$, frazione l' indice della quale sarà immediatamente determinato dalla formola (6), ed allora si dedurrà senza fatica dalla formola (9) il teorema seguente.

4.° *Teorema.* Siano

$$(25) \qquad u,\ v,\ \rho,\ \varsigma \ldots \chi,\ \omega$$

una serie di funzioni intiere di $x$ scelte per modo, che di

tre termini consecutivi della serie (25) il terzo sia sempre uguale all' avanzo della divisione del primo per il secondo; essendo preso questo avanzo con segno contrario, $-\rho=\omega$ sarà il resto della divisione di $u$ per $v$; $\pm\omega$ sarà il più gran comun divisore algebraico dei polinomj $u$, $v$ e per determinar l' indice della frazione

$$\frac{v}{u}$$

fra i limiti $x=x_0$, $x=X$, basterà confrontare due a due sotto il rapporto dei segni i termini che si seguono immediatamente nella serie (25), supponendo che si attribuisca alla variabile $x$ prima il valore $x_0$, secondo, il valore X, e che poscia si contino le variazioni di segno e le permanenze di segno che offrirà la serie (25) in ciascuna di queste due ipotesi. Se si chiami $\mu$ il numero delle variazioni di segno che si cambieranno in permanenze, e $\nu$ il numero delle permanenze che si cambieranno in variazioni nel passaggio della prima ipotesi alla seconda, l' indice della frazione

$$\frac{v}{u}$$

preso fra i limiti $x=x_0$, $x=X$ sarà equivalente alla differenza fra i due numeri $\mu$, e $\nu$, per modo che si avrà

$$(26)\qquad I_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right)=\mu-\nu.$$

Se alla frazione $\frac{v}{u}$ si sostituisca la seguente

$$\frac{u'}{u}$$

e se si supponga sempre che essendo $a$ radice dell'equazione

$$u=0$$

$u^{(m)}$ sia il primo termine della serie

$$u, u', u'' \ldots \ldots u^{(m)}, u^{(m+1)} \text{ ec...}$$

che non svanisca quando $x=a$, le due equazioni

$$(19) \qquad u=0, \qquad (27) \qquad u'=0$$

ammetteranno la prima $m$ radici, la seconda $m-1$ radici uguali ad $a$, e siccome la derivata dell' ordine $m$ di $u$ sarà al tempo stesso la derivata dell' ordine $m-1$ di $u'$, si concluderà in forza del teorema 3.° che l' indice di $\frac{u'}{u}$ si riduce all' unità per ciascun valore reale di $x$ capace di verificare l'equazione $u=0$. In conseguenza se si dica N il numero delle radici reali ma disuguali di $u=0$ contenute fra i limiti $x=x_0$, $x=\mathrm{X}$ si avrà

$$(28) \qquad \mathrm{N}=I_{x_0}^{\mathrm{X}}\left(\left(\frac{u'}{u}\right)\right).$$

Se si voglia ottenere il numero totale delle radici reali dell' equazione (19), basterà collocare nella formola (28) $x_0=-\infty$, $\mathrm{X}=\infty$, od anche semplicemente

$$x_0=-\mathrm{R}, \quad \mathrm{X}=\mathrm{R}$$

rappresentando R un numero superiore ai moduli di tutte le radici. Si potrà dunque con l' ajuto della formola (28) determinare il numero delle radici reali di un' equazione, o più generalmente il numero di quelle fra queste radici che trovansi comprese entro dati limiti. Aggiungiamo che se più radici siano contenute fra li due limiti $x_0$, X, si potrà fra questi due limiti frapporre un terzo valore di $x$ equivalente alla loro media aritmetica $\frac{x_0+\mathrm{X}}{2}$, e determinare il numero delle radici

comprese, 1.° fra $x=x_0$ ed $x=\frac{x_0+X}{2}$; 2.° fra $x=\frac{x_0+X}{2}$ ed $x=X$, in conseguenza fra due nuovi limiti la differenza dei quali sarà la metà della differenza dei due primi. Ora continuando in questo modo a restringere i limiti fra i quali si contengono le radici reali, si finirà per ottenere una serie di valori di $x$ crescenti. e scelti in modo che due termini consecutivi non comprendano mai fra loro più di una radice reale di $x$ atta a verificare l' equazione data

Se si volesse ottenere il numero delle radici positive dell'equazione (19), basterebbe fare $x_0=0$ ed $X=\infty$, oppure $X=R$ nella formola (28) che sarebbe così ridotta alla

$$N=I_0^{\infty}\left(\left(\frac{u'}{u}\right)\right), \tag{29}$$

oppure

$$N=I_0^{R}\left(\left(\frac{u'}{u}\right)\right). \tag{30}$$

Se si dicano $u_0$, $u'_0$ ed V, V' i valori delle due frazioni, $u$, $u'$, per $x=0$, $x=X$, si ricaverà dalla formola (28) unita alla formola (9)

$$N=\tfrac{1}{2}\left[I\frac{V}{V'((x))}-I\frac{u_0}{u'_0((x))}\right]-I_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{u}{u'}\right)\right). \tag{31}$$

Nel caso particolare in cui si suppone $x_0=0$, $X=\infty$ il rapporto

$$\frac{V}{V'}$$

acquista un valor infinito ma positivo e si ha in conseguenza

$$I\frac{V}{V'((x))}=1.$$

Allora anche $u_0$, $u'_0$ non essendo altra cosa che il termine

costante e il coefficiente della prima potenza di $x$ nella funzione $u$; l' indice

$$I_{\frac{u_0}{u'_0((x))}}$$

sarà equivalente a $+1$ od a $-1$, secondo che il sistema dei due ultimi termini di $u$ offra una permanenza od una variazione di segno.

Finalmente l' espressione

$$-I_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{u}{u'}\right)\right)$$

ridotta a

$$-I_{0}^{\infty}\left(\left(\frac{u}{u'}\right)\right)$$

non potrà superare il numero delle radici reali della equazione (27). Ciò posto si dedurrà immediatamente dalla formola (31) la proposizione seguente.

5.° *Teorema.* Il numero delle radici positive della equazione $u=0$ non potrà superare che d' una unità il numero delle radici positive della equazione derivata $u'=0$, e nel caso soltanto in cui il sistema dei due ultimi termini della funzione $u$ offra una variazione di segno.

*Corollario.* Si proverà parimente che il numero delle radici della equazione derivata di prim'ordine $u'=0$ non può superare che di una unità il numero delle radici positive della equazione derivata di secondo ordine $u''=0$, e nel solo caso in cui il sistema dei due ultimi termini di $u'$, e in conseguenza il sistema dei due termini che precedono l' ultimo in $u$ offra una variazione di segno. Dunque il numero delle radici positive di $u=0$ supererà di una o di due unità al più il numero delle radici positive di $u''=0$, e nel caso soltanto in cui il sistema dei tre ultimi termini di $u$ offrirà una o due variazioni di segno. Continuando così si finirà per stabilire la regola dei segni di Cartesio compresa nel teorema di cui ecco l' enunziato.

6.° *Teorema.* Il numero delle radici positive di una equazione $u=0$ nella quale $u$ indica una funzione intiera di $x$, non può superare il numero delle variazioni di segno, che si ottengono confrontando due a due i termini che si succedono immediatamente nella funzione $u$. Il numero delle radici negative non può superare il numero delle permanenze di segno somministrate dal medesimo processo.

*Nota.* Dopo di aver stabilito, come più sopra si è spiegato, la prima parte del Teorema 6.° basterà per dedurne la seconda parte sostituire $-x$ ad $x$. Osserviamo ancora che se nella funzione $u$ li coefficienti di più potenze della variabile $x$ si riducono a zero, basterà perchè cessino di svanire, sostituire $x \pm \varepsilon$, indicando con $\varepsilon$ un numero infinitamente piccolo. In questa maniera si assicura facilmente che nella applicazione del teorema di Cartesio si può lasciar di tener conto dei termini che scompariscono.

Se nel teorema 3.° si sostituisca alla funzione $\frac{v}{u}$

$$\frac{u'x}{u}$$

e se si faccia al tempo stesso $x_0 = -\infty$, $X = \infty$ si troverà

$$N - K = -I_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{u}{u'x}\right)\right). \tag{32}$$

La formola (32) si accorda con un teorema, con l'ajuto del quale io per il primo ho dimostrato che per una equazione di qualunque grado, si possono trovare funzioni razionali dei coefficienti, i segni delle quali facciano conoscere il numero delle radici reali positive, e il numero delle radici reali negative.

Se si combina, la formola (32) col teorema 4.° si otterrà quest' altro teorema dovuto al Sig. Carlo Sturm.

7.° *Teorema.* Sia

$$u,\ u',\ \sigma,\ \varsigma \ldots \psi,\ \omega \tag{33}$$

una serie di funzioni intiere di $x$ scelte per modo che di tre termini consecutivi della serie (33) il terzo sia sempre eguale, astrazione fatta dai segni, all'avanzo della divisione algebraica del primo per il secondo, ma affetto di un segno contrario al segno di questo avanzo; $\pm\omega$ sarà il più gran divisor comune algebraico dei due polinomii $u$, $u'$, ed il numero delle permanenze di segni che offriranno i termini della serie (33) presi consecutivamente e confrontati due a due, non potrà che crescere per dei valori crescenti di $x$. Ora l'aumento che riceverà il numero di cui trattasi nel passaggio da un limite dato $x=x_0$, ad un limite più considerevole $x=X$ sarà precisamente il numero delle radici disuguali di $u=0$ contenute fra questi limiti.

*Nota.* Si possono senza inconveniente sostituire agli avanzi delle divisioni successivamente operate i prodotti di questi avanzi moltiplicati per numeri intieri qualunque; il che permette di far scomparire li divisori numerici nei polinomii $\sigma, \varsigma \ldots \psi, \omega$, allorchè i coefficienti delle diverse potenze di $x$ nella funzione $u$ saranno numeri iutieri.

Appoggiandosi ai principii quì sopra esposti si potrebbe anche estendere il calcolo degli indici alla determinazione delle radici immaginarie delle equazioni, come pure alla soluzione delle equazioni simultanee, e dimostrare in particolare la seguente proposizione.

8.° *Teorema.* Siano $f(x,y)$, $F(x, y)$ due funzioni di $x$, $y$, che rimangano continue tra i limiti $x=x_0$, $x=X$, $y=y_0$, $y=Y$. Chiamiamo $\varphi(x,y)$, $\Phi(x,y)$ le derivate di queste funzioni relativamente ad $x$, e $\chi(x,y)$, $\chi(x,y)$ le loro derivate relativamente ad $y$. Finalmente sia N il numero dei differenti sistemi dei valori di $x, y$ proprii a verificare le equazioni simultanee $f(x,y)=0$, $F(x,y)=0$, e compresi fra i limiti qui sopra enunciati. Si avrà

$$N=\tfrac{1}{2}[I_{x_0}^{X}((\Psi(x,Y)))-I_{x_0}^{X}((\Psi(x,y_0)))-I_{y_0}^{Y}((\Psi((X,y)))$$

$$+I_{y_0}^{Y}((\Psi(x_0,y)))]$$

supponendo

$$\Psi(x,y)=\frac{\Phi(x,y)\chi(x,y)-\phi(x,y)\chi(x,y)}{F(x,y)}(fx,y).$$

*Torino il 15 Giugno 1833.*

FINE.