Fig. 1.

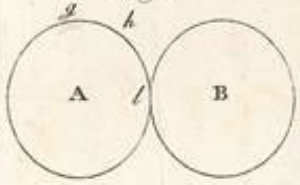


Fig. 2.

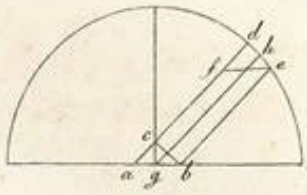


Fig. 3.

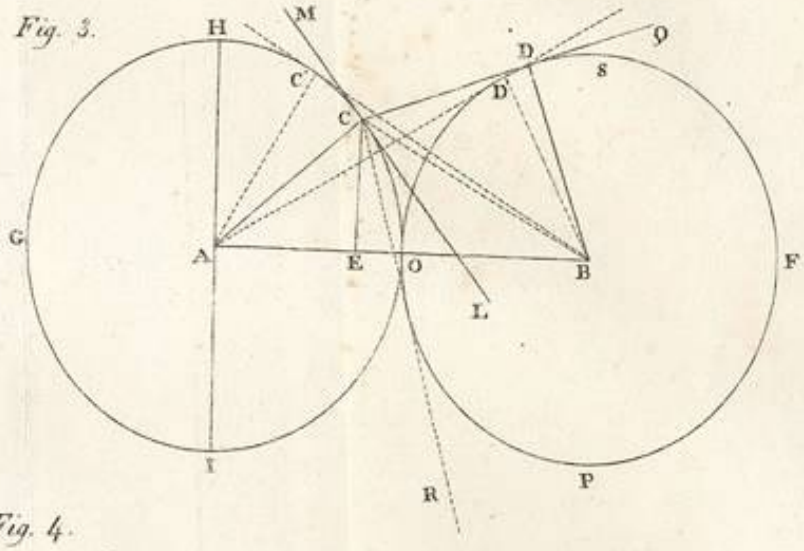


Fig. 4.

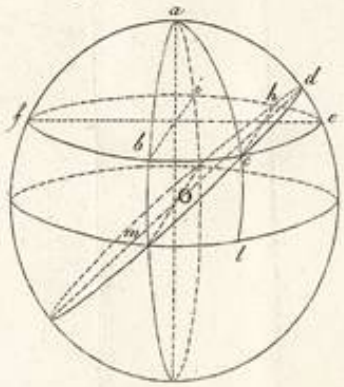


Fig. 5.

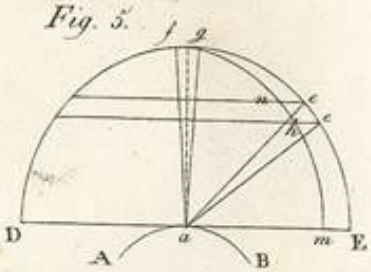


Fig. 6.

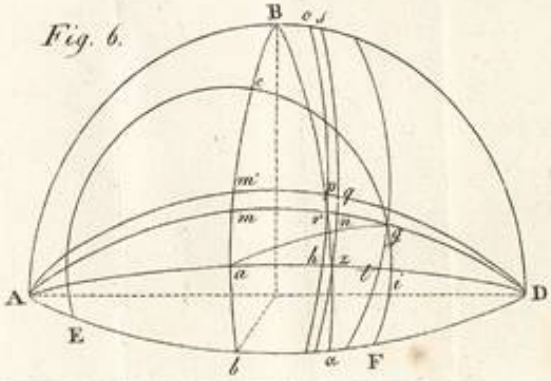
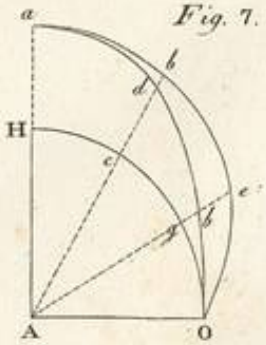


Fig. 7.



SOPRA
L'ANALISI LINEARE
PER LA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI DI I.° GRADO

MEMORIA I.

DEL SOCIO PROF. GIUSEPPE BIANCHI

Ricevuta adì 3. *Gennajo* 1839.

1. Quanto più riesce all'Analisi di raccogliere, stringer e racchiudere in poche verità o principj le varie parti e dottrine della Matematica, tanto più questa Scienza ne acquista di unità o coordinazione, di generalità o ampiezza, e di utilità o applicazione agli usi. Un siffatto intento è stato per molta parte con profondi studi conseguito dai moderni Analisti negli oggetti e nelle trattazioni del calcolo superiore; ma nei rami inferiori di questo, sebbene più facili ad esaminarsi, rimane tuttora a desiderarsi per avventura quà e là una maggiore connessione e generalità di cose, che comprenda ogni maniera di casi e questioni relative, e che inoltre faccia conoscere il legame o il passaggio dalle elementari alle teoriche dell'Algebra le più elevate. Mi è sembrato quindi opera non perduta l'occuparmi di uno degli argomenti più ovvj e semplici, qual è l'analisi lineare, nel quale io non so aver altri mostrato, come da una sola proposizione derivino tutte le indagini e determinazioni particolari spettanti ai problemi di 1.° grado. E tal è il soggetto che io mi propongo di cominciar a svolgere nella presente Memoria.

2. Indichiamo un numero m d'incognite diverse con x_0, x_1, x_2, ec., x_{m-1}; e siano esse vincolate fra loro con m equazioni lineari, come segue

$$(1)\ldots\ldots\begin{cases} a_0 x_0 + b_0 x_1 + c_0 x_2 + \ldots\ldots + r_0 x_{m-1} = s_0 \\ a_1 x_0 + b_1 x_1 + c_1 x_2 + \ldots\ldots + r_1 x_{m-1} = s_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} x_0 + b_{m-1} x_1 + c_{m-1} x_2 + \text{ec. ec.} + r_{m-1} x_{m-1} = s_{m-1} \end{cases}$$

Io dico ricavarsi da queste equazioni

$$(2)\ldots x_0 = \frac{A}{V};\ x_1 = \frac{B}{V};\ x_2 = \frac{C}{V};\ \text{ec. ec. } x_{m-1} = \frac{R}{V};$$

ove con A, B, C. . . . R, V s' intendano altrettante intere e determinate funzioni dei coefficienti a_0, b_0, ec. s_0, a_1 b_1 ec. s_1 ec. ec. a_{m-1}, b_{m-1} ec. s_{m-1}.

Supponiam infatti che questa proprietà si adempia e sussista nel caso di un numero $m-1$ di simili equazioni e di altrettante incognite. Dalle (1) eliminando la x_0 si hanno le seguenti di numero $m-1$

$$\begin{array}{l} (a_1 b_0 - a_0 b_1) x_1 + (a_1 c_0 - a_0 c_1) x_2 + \text{ec.} + (a_1 r_0 - a_0 r_1) x_{m-1} = a_1 s_0 - a_0 s_1 \\ \vdots \\ (a_{m-1} b_0 - a_0 b_{m-1}) x_1 + (a_{m-1} c_0 - a_0 c_{m-1}) x_2 + \text{ec.} + (a_{m-1} r_0 - a_0 r_{m-1}) x_{m-1} \\ \qquad\qquad = a_{m-1} s_0 - a_0 s_{m-1}. \end{array}$$

E proseguendo in queste l' eliminazione, se ne traggan dunque per ipotesi i valori

$$x_1 = \frac{B}{V};\ x_2 = \frac{C}{V};\ \text{ec. ec. } x_{m-1} = \frac{R}{V}.$$

Sostituiti questi nella prima delle (1), e posto per brevità

$$S = b_0 B + c_0 C + \text{ec. ec.} + r_0 R$$

si ottiene

$$a_0 x_0 + \frac{S}{V} = s_0 \text{ ; onde } x_0 = \frac{s_0 V - S}{a_0 V}.$$

Ora dal modo, secondo il quale si è formato V ed S, è facile il dedurre che sì l' una che l'altra di queste quantità risulta moltiplicata e divisibile quindi esattamente per a_0. Fatto perciò $\frac{s_0 V - S}{a_0} = A$, ne viene $x_0 = \frac{A}{V}$, ove A e V sono ciascuna funzioni intere dei coefficienti delle (1). Ma tali pure si sono supposte B, C, ec. R: dunque l' enunciata proprietà si adempie altresì per m equazioni ed incognite: cosicchè sussistendo essa, come può verificarsi, nel caso di due equazioni, sussisterà quindi anche nel caso di tre, quindi anche per quattro, e infine per un qualunque numero m di equazioni lineari e d' incognite. In questo semplice teorema tutta si racchiude l' analisi lineare, ed io mi accingo a svilupparnela.

3. Poichè dalla scambievole permutazione degli a nei coefficienti b per le equazioni (1) la x_0 cangiasi nella x_1 e questa in quella, corrispondentemente A dovrà cangiarsi in B e B in A, senza riguardo al segno. Avvertasi però che il comune denominatore V è una funzione di tutti i coefficienti a, b, ec., r la quale nella scambievole permutazione di due qualunque fra essi non mutandosi di assoluta quantità, mutasi nondimeno di segno, come tosto si scorge per due equazioni ed incognite: appartiene cioè V a quelle che l' illustre analista Cauchy denomina funzioni *alternate*, anzi ha la forma della più semplice di esse qual è $a - b$. In conseguenza di che, ritenuto nelle (2) che V abbia sempre lo stesso valore positivo, sotto l' indicata permutazione scambievole A si cangerà propriamente in $-$B e B in $-$A. Oltre a ciò avendosi identicamente

$$s_0 V = a_0 A + b_0 B + c_0 C + \text{ec.} + r_0 R$$

se ne deduce

$$(3) \qquad V = \frac{a_0 A + b_0 B + c_0 C + \text{ec.} + r_0 R}{s_0}$$

E quì si osservi che, dipendentemente dal modo praticato in formarlo, il denominatore V non contiene alcuno dei termini s_0, s_1, ec. s_{m-1}; cosicchè tai termini contenendosi in ciascuno dei numeratori A, B, C ec. R, nella funzione $a_0 A + b_0 B +$ ec. $+ r_0 R$ dovranno elidersi da sè i termini affetti da s_1, s_2 ec., s_{m-1} e solo vi resterà, come fattore dell'intera quantità, s_0. Quanto infine ai numeratori A, B, ec. R, scorgesi facilmente che ciascun d'essi cangiasi in V, senza mutazione di segno, solo dal permutarsi li s_0, s_1, s_2, ec. s_{m-1} in una specie dei coefficienti a_0, b_0, ec. r_0; e che nell'inversa permutazione V cangerebbesi rispettivamente in uno di quelli. E per esempio V si cangerà in A, sostituendo nel primo s_0, s_1, ec. s_{m-1} in luogo rispettivamente di a_0, a_1, ec. a_{m-1}; oppure in B, surrogando s_0, s_1, ec. s_{m-1} a b_0, b_1, ec. b_{m-1}; e così via discorrendo.

4. Date pertanto le m equazioni lineari colle m incognite diverse x_0, x_1 ec. x_{m-1}; fino a che i noti coefficienti a_0, b_0 ec. r_0, s_0; a_1 ec. ec. non avranno particolari valori e saranno affatto indipendenti fra loro, si otterrà sempre dall'eliminazione ciascuna incognita, e sussisteranno le (2), in cui A, B, C, ec. R, V sono quantità generali bensì o algebriche, ma pienamente determinate. Sotto questa condizione e in questo punto di vista ci si offre generalmente e propriamente l'analisi dei problemi determinati di 1.° grado. Ma quando pure si abbiano m incognite e altrettante equazioni diverse di 1.° grado fra esse, dipendentemente dai particolari valori dei coefficienti numerici e dalle relazioni che ne risultano, può accadere uno de' seguenti casi: 1.° che i rapporti $\frac{A}{V}$, $\frac{B}{V}$, ec. conservino

ciascuno un valor finito e determinato, nel qual caso l'analisi e il problema saranno bensì determinati, ma particolarmente: 2.° che una o più delle quantità A, B, ec., R diventi nulla; e allora insieme annullandosi una o più delle incognite, e rimanendo lo stesso numero m di equazioni, quindi maggiore di quello delle altre incognite, per queste l'analisi e il problema sarà piucchè determinato. Perciò inversamente un problema piucchè determinato può riguardarsi in generale come un caso di analisi determinata, ove fra m incognite un numero m' di esse abbia per ciascuna il valore zero; e perchè in particolare la soluzione sia possibile e tutte le m equazioni fra le $m-m'$ incognite siano soddisfatte, e non si contraddicano a vicenda, è necessario che fra i coefficienti a_0, b_0 ec. r_0, s_0, a_1 ec. ec. sussistano le m' relazioni $A=0$, $B=0$, ec. ec: 3.° che A, B, C, ec., R conservando tutte e ciascuna un valor finito, si trovi invece $V=0$; nel qual caso ciascuna delle incognite ha la forma $\frac{A}{0}$, e significa l'impossibilità del problema per tutte le incognite a un tempo. E tale è l'espressione della quantità immaginaria semplice o di primo grado; vale a dir essa è costituita nella forma che appellasi dell'infinito, la quale offre in sè l'assurdo e la contraddizione di un rapporto che non può come tale sussistere; poichè non può aversi relazione calcolabile se non fra cose della medesima natura; ed essendo A di una data specie qualunque, astratta o concreta, lo zero non è di alcuna specie, nè concreta nè astratta: 4.° che insieme a $V=0$, si abbia $A=0$, $B=0$, ec., onde ciascuna delle incognite prenda la forma $\frac{0}{0}$; e dovranno prenderla tutte a un tempo; affinchè per una delle A, B, ec. R che non fosse $=0$, il problema non sia impossibile, come nel caso 3.° precedente. E in questo caso di tutte le incognite eguali ciascuna a $\frac{0}{0}$ si ha propriamente e generalmente a rivolgere l'analisi indeterminata dei

problemi lineari. Quindi l' analisi indeterminata è anch' essa un caso particolare dell' analisi determinata; e così, pei problemi di 1.° grado, tutto si riduce a considerar un numero di equazioni eguale a quello delle incognite, coll' unica distinzione, dal determinato generale agli altri casi, che i coefficienti numerici delle m equazioni sieno fra loro indipendenti, oppure vincolati da relazioni particolari. Ora veniamo allo sviluppo dell' analisi lineare nei differenti casi avvertiti, limitandoci colla Memoria presente alla parte dei problemi determinati e piucchè determinati.

§ I.

Analisi lineare determinata.

5. Tutta l' arte del calcolo per la determinazione di m incognite da m equazioni di 1.° grado, a coefficienti sciolti e indipendenti fra loro, consiste, per l' eliminazione e per le cose premesse, nella formazione di una solamente fra le quantità A, B, ec., R: perocchè trovata una di queste, se ne deduce di seguito ciascun' altra mediante la rispettiva e vicendevole permutazione di alcuni dei coefficienti a_0, b_0, ec. r_0, a_1, ec. fra loro, cangiato il segno a calcolo finito, e se ne ha dipoi V per la (3), ovvero dalla permutazione reciproca degli a negli s per la sola A, o dei b negli s per la sola B, o analogamente per ciascun' altra (num. 3.). Posto ciò ed eliminata dalle (1) la x_0, nelle $m-1$ equazioni che ne derivano indichiamo per brevità i coefficienti di esse con b^a_0, c^a_0, d^a_0, ec. s^a_0, b^a_1, ec.; onde abbiasi

$$\begin{array}{l}
\overset{a}{b}_{0}\, x_{1} + \overset{a}{c}_{0}\, x_{2} + \overset{a}{d}_{0}\, x_{3} + \text{ecc.} + \overset{a}{r}_{0}\, x_{m-1} = \overset{a}{s}_{0} \\
\overset{a}{b}_{1}\, x_{1} + \overset{a}{c}_{1}\, x_{2} + \overset{a}{d}_{1}\, x_{3} + \text{ecc.} + \overset{a}{r}_{1}\, x_{m-1} = \overset{a}{s}_{1} \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\overset{a}{b}_{m-2}\, x_{1} + \overset{a}{c}_{m-2}\, x_{2} + \overset{a}{d}_{m-2}\, x_{3} + \text{ec.} + \overset{a}{r}_{m-2}\, x_{m-1} = \overset{a}{s}_{m-2}.
\end{array}$$

Del pari eliminando x_1 dalle precedenti $m-1$, e chiamando $\overset{b}{c}_0$, $\overset{b}{d}_0$, ec. $\overset{b}{s}_0$, $\overset{b}{c}_1$ ec. ec. i nuovi coefficienti delle risultanti $m-2$ equazioni, si avrà

$$\begin{array}{l}
\overset{b}{c}_{0}\, x_{2} + \overset{b}{d}_{0}\, x_{3} + \text{ec.} + \overset{b}{r}_{0}\, x_{m-1} = \overset{b}{s}_{0} \\
\overset{b}{c}_{1}\, x_{2} + \overset{b}{d}_{1}\, x_{3} + \text{ec.} + \overset{b}{r}_{1}\, x_{m-1} = \overset{b}{s}_{1} \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\overset{b}{c}_{m-3}\, x_{2} + \overset{b}{d}_{m-3}\, x_{3} + \text{ec.} + \overset{b}{r}_{m-3}\, x_{m-1} = \overset{b}{s}_{m-3}.
\end{array}$$

E così proseguendo a eliminar successivamente le incognite, e indicando i coefficienti successivi con $\overset{c}{d}_0$, ec., $\overset{c}{s}_0$, $\overset{c}{d}_1$ ec; $\overset{d}{e}_0$, ec. $\overset{d}{s}_0$, $\overset{d}{e}_1$, ec. ec., si arriverà infine all' equazione

$$\overset{q}{r}_{0}\, x_{m-1} = \overset{q}{s}_{0}:$$

quindi sarà

$$\text{(4)} \qquad R = \overset{q}{s}_{0}; \quad V = \overset{q}{r}_{0}$$

e le m incognite ne verranno tutte determinate. Non trattasi

dunque più se non di formare coi coefficienti primitivi a_0, b_0, ec. s_0, a_1, ec. ecc. il valore di $\overset{q}{s}_0$.

6. Per meglio conoscere la composizione del valor precedente di R, osserviamo quella dei successivi termini $\overset{a}{s}_{m-2}$, $\overset{b}{s}_{m-3}$, ec. ec. Si ha pertanto, dopo le sostituzioni e riduzioni opportune,

$$\overset{a}{s}_{m-2} = a_{m-1} s_0 - s_{m-1} a_0;$$

$$\overset{b}{s}_{m-3} = (a_1 \overset{a}{b}_{m-2} - a_{m-1} \overset{a}{b}_0) s_0 - (s_1 \overset{a}{b}_{m-2} - s_{m-1} \overset{a}{b}_0) a_0;$$

$$\overset{c}{s}_{m-4} = (a_1 \overset{a}{b}_1 \overset{b}{c}_{m-3} - a_1 \overset{a}{b}_{m-2} \overset{b}{c}_0 - a_2 \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_{m-3} + a_{m-1} \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_0) s_0$$

$$-(s_1 \overset{a}{b}_1 \overset{b}{c}_{m-3} - s_1 \overset{a}{b}_{m-2} \overset{b}{c}_0 - s_2 \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_{m-3} + s_{m-1} \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_0) a_0;$$

$$\overset{d}{s}_{m-5} = \left\{ \begin{array}{l} a_1 \overset{a}{b}_1 \overset{b}{c}_1 \overset{c}{d}_{m-4} - a_1 \overset{a}{b}_1 \overset{b}{c}_{m-3} \overset{c}{d}_0 - a_1 \overset{a}{b}_2 \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_{m-4} \\ + a_1 \overset{a}{b}_{m-2} \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_0 - a_2 \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_1 \overset{c}{d}_{m-4} + a_2 \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_{m-3} \overset{c}{d}_0 \\ + a_3 \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_{m-4} - a_{m-1} \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_0 \end{array} \right\} s_0$$

(5) . . . . .

$$- \left\{ \begin{array}{l} s_1 \overset{a}{b}_1 \overset{b}{c}_1 \overset{c}{d}_{m-4} - s_1 \overset{a}{b}_1 \overset{b}{c}_{m-3} \overset{c}{d}_0 - s_1 \overset{a}{b}_2 \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_{m-4} \\ + s_1 \overset{a}{b}_{m-2} \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_0 - s_2 \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_1 \overset{c}{d}_{m-4} + s_2 \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_{m-3} \overset{c}{d}_0 \\ + s_3 \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_{m-4} - s_{m-1} \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_0 \end{array} \right\} a_0;$$

$$
\overset{e}{s}_{m-6} = \left(\begin{array}{l}
a_1 \overset{a}{b}_1 \overset{b}{c}_1 \overset{c}{d}_1 \overset{d}{e}_{m-5} - a_1 \overset{a}{b}_1 \overset{b}{c}_1 \overset{c}{d}_{m-4} \overset{d}{e}_0 - a_1 \overset{a}{b}_1 \overset{b}{c}_2 \overset{c}{d}_0 \overset{d}{e}_{m-5} \\
+ a_1 \overset{a}{b}_1 \overset{b}{c}_{m-3} \overset{c}{d}_0 \overset{d}{e}_0 - a_1 \overset{a}{b}_2 \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_1 \overset{d}{e}_{m-5} + a_1 \overset{a}{b}_2 \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_{m-4} \overset{d}{e}_0 \\
+ a_1 \overset{a}{b}_3 \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_0 \overset{d}{e}_{m-5} - a_1 \overset{a}{b}_{m-2} \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_0 \overset{d}{e}_0 - a_2 \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_1 \overset{c}{d}_1 \overset{d}{e}_{m-5}
\end{array} \right)
$$

$$
\left(\begin{array}{l}
+ a_2 \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_1 \overset{c}{d}_{m-4} \overset{d}{e}_0 + a_2 \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_2 \overset{c}{d}_0 \overset{d}{e}_{m-5} - a_2 \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_{m-3} \overset{c}{d}_0 \overset{d}{e}_0 \\
+ a_3 \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_1 \overset{d}{e}_{m-5} - a_3 \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_{m-4} \overset{d}{e}_0 - a_4 \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_0 \overset{d}{e}_{m-5} \\
+ a_{m-1} \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_0 \overset{d}{e}_0
\end{array} \right) s_0
$$

$$
- \left(\begin{array}{l}
s_1 \overset{a}{b}_1 \overset{b}{c}_1 \overset{c}{d}_1 \overset{d}{e}_{m-5} - s_1 \overset{a}{b}_1 \overset{b}{c}_1 \overset{c}{d}_{m-4} \overset{d}{e}_0 - s_1 \overset{a}{b}_1 \overset{b}{c}_2 \overset{c}{d}_0 \overset{d}{e}_{m-5} \\
+ s_1 \overset{a}{b}_1 \overset{b}{c}_{m-3} \overset{c}{d}_0 \overset{d}{e}_0 - s_1 \overset{a}{b}_2 \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_1 \overset{d}{e}_{m-5} + s_1 \overset{a}{b}_2 \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_{m-4} \overset{d}{e}_0 \\
+ s_1 \overset{a}{b}_3 \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_0 \overset{d}{e}_{m-5} - s_1 \overset{a}{b}_{m-2} \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_0 \overset{d}{e}_0 - s_2 \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_1 \overset{c}{d}_1 \overset{d}{e}_{m-5}
\end{array} \right)
$$

$$
\left(\begin{array}{l}
+ s_2 \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_1 \overset{c}{d}_{m-4} \overset{d}{e}_0 + s_2 \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_2 \overset{c}{d}_0 \overset{d}{e}_{m-5} - s_2 \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_{m-3} \overset{c}{d}_0 \overset{d}{e}_0 \\
+ s_3 \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_1 \overset{d}{e}_{m-5} - s_3 \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_{m-4} \overset{d}{e}_0 - s_4 \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_0 \overset{d}{e}_{m-5} \\
+ s_{m-1} \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_0 \overset{d}{e}_0
\end{array} \right) a_0 ;
$$

e così di seguito. Si concepisce tosto come derivino e si compongano similmente le une dalle altre le funzioni $\overset{a}{s}$, $\overset{b}{s}$, $\overset{c}{s}$, $\overset{d}{s}$, $\overset{e}{s}$ ec., e ordinando l'ultimo sviluppo quì esposto secondo

i coefficienti s ed a, facilmente se ne ravviserebbe la formazione successiva nel numero, nei segni e nella singola specie dei termini, ciascun de' quali è di m dimensioni nella funzione $\overset{q}{\underset{0}{s}} = \mathrm{R}$. Più semplicemente però e più presto si scorge la formazione medesima nel modo che segue.

7. Pongasi

$$\mathrm{R} = \mathrm{X}^{a}_{0}\, s_{0} - \mathrm{Y}^{s}_{0}\, a_{0} \tag{6}$$

indicando con X^{a}_{0} la funzione degli a e con Y^{s}_{0} la funzione degli s nel valore di R. Con $\mathrm{X}^{(a,s)}_{0}$ rappresentisi la X^{a}_{0}, ove siano permutati gli a negli s, e del pari con $\mathrm{Y}^{(s,a)}_{0}$ la funzione Y^{s}_{0} permutando in essa gli s negli a rispettivamente. Si ha

$$\mathrm{X}^{(a,s)}_{0} = \mathrm{Y}^{s}_{0}, \quad \text{ovvero} \quad \mathrm{Y}^{(s,a)}_{0} = \mathrm{X}^{a}_{0}. \tag{7}$$

Pongasi ancora.... $\overset{a}{\mathrm{X}}_{0} = \mathrm{X}^{b^a}_{1}\, a_{1} - \mathrm{Y}^{a}_{1}\, \overset{a}{b}_{0}$, ove $\mathrm{X}^{b^a}_{1}$ indica una funzione di $\overset{a}{b}_{1}$, $\overset{a}{b}_{2}$, ec., $\overset{a}{b}_{m-2}$, e Y^{a}_{1} una funzione di a_{2}, a_{3}, ec, a_{m-1}; e sia quì pure $\mathrm{X}^{(b^a_1, a_2)}_{1}$ la funzione $\mathrm{X}^{b^a}_{1}$ permutati entro essa $\overset{a}{b}_{1}$ in a_{2}, $\overset{a}{b}_{2}$ in a_{3}, ec., $\overset{a}{b}_{m-2}$ in a_{m-1}, e $\mathrm{Y}^{(a_2, b^a_1)}_{1}$ la funzione Y^{a}_{1} nella quale si permuti a_{2} in $\overset{a}{b}_{1}$, a_{3} in $\overset{a}{b}_{2}$, ec., a_{m-1} in $\overset{a}{b}_{m-2}$. Si avrà

$$\mathrm{X}^{(b^a_1, a_2)}_{1} = \mathrm{Y}^{a}_{1}, \quad \text{ovvero} \quad \mathrm{Y}^{(a_2, b^a_1)}_{1} = \mathrm{X}^{b^a}_{1}.$$

Facciasi di nuovo.... $\mathrm{X}^{b^a}_{1} = \mathrm{X}^{c^b}_{2}\, \overset{a}{b}_{1} - \mathrm{Y}^{b^a}_{2}\, \overset{b}{c}_{0}$, intendendo per $\mathrm{X}^{c^b}_{2}$ una

1.ª

Citrus Aurantium foetifera

2.ª

Dettagli del Citrus foetifera

funzione di $\overset{b}{c}_1$, $\overset{b}{c}_2$, ec. $\overset{b}{c}_{m-3}$ e per $\overset{b^a}{Y}_2$ una funzione di $\overset{a}{b}_2$, $\overset{a}{b}_3$, ec. $\overset{a}{b}_{m-2}$; e sia $\overset{(c^b_1, b^a_2)}{X}_2$ la funzione $\overset{c^b}{X}_2$ allorchè in essa cangiasi $\overset{b}{c}_1$ in $\overset{a}{b}_2$, $\overset{b}{c}_2$ in $\overset{a}{b}_3$ ec. $\overset{b}{c}_{m-3}$ in $\overset{a}{b}_{m-2}$, significata l' inversa operazione in $\overset{b^a}{Y}_2$ con $\overset{(b^a_2, c^b_1)}{Y}_2$. Sarà

$$\overset{(c^b_1, b^a_2)}{X}_2 = \overset{b^a}{Y}_2, \quad \text{ovvero} \quad \overset{(b^a_2, c^b_1)}{Y}_2 = \overset{c^b}{X}_2.$$

Parimente posto $\overset{c^b}{X}_2 = \overset{d^c}{X}_3 \overset{b}{c}_1 - \overset{c^b}{Y}_3 \overset{c}{d}_0$, colle simili permutazioni si ottiene

$$\overset{(d^c_1, c^b_2)}{X}_3 = \overset{c^b}{Y}_3, \quad \text{ovvero} \quad \overset{(c^b_2, d^c_1)}{Y}_3 = \overset{d^c}{X}_3.$$

E similmente fatto $\overset{d^c}{X}_3 = \overset{e^d}{X}_4 \overset{c}{d}_1 - \overset{d^c}{Y}_4 \overset{d}{e}_0$, si ha

$$\overset{(e^d_1, d^c_2)}{X}_4 = \overset{d^c}{Y}_4, \quad \text{ovvero} \quad \overset{(d^c_2, e^d_1)}{Y}_4 = \overset{e^d}{X}_4;$$

e così di seguito. Pertanto, sostituendo le poste funzioni successivamente nella (6), avremo

$$(8)\quad R = X_0^a s_0 - Y_0^s a_0 = X_0^a s_0 - X_0^{(a,s)} a_0$$

$$= \left(X_1^{b^a} a_1 - Y_1^a b_0^a\right) s_0 - X_0^{(a,s)} a_0 = \left(X_1^{b^c} a_1 - X_1^{(b_1^a, a_2)} b_0^a\right) s_0 - X_0^{(a,s)} a_0$$

$$= \left(\left(X_2^{c^b} b_1^a - Y_2^{b^a} c_0^b\right) a_1 - X_1^{(b_1^a, a_2)} b_0^a\right) s_0 - X_0^{(a,s)} a_0$$

$$= \left(\left(X_2^{c^b} b_1^a - X_2^{(c_1^b, b_2^a)} c_0^b\right) a_1 - X_1^{(b_1^a, a_2)} b_0^a\right) s_0 - X_0^{(a,s)} a_0$$

$$= \left(\left(\left(X_3^{d^c} c_1^b - Y_3^{c^b} d_0^c\right) b_1^a - X_2^{(c_1^b, b_2^a)} c_0^b\right) a_1 - X_1^{(b_1^a, a_2)} b_0^a\right) s_0 - X_0^{(a,s)} a_0$$

$$= \left(\left(\left(X_3^{d^c} c_1^b - X_3^{(d_1^c, c_2^b)} d_0^c\right) b_1^a - X_2^{(c_1^b, b_2^a)} c_0^b\right) a_1 - X_1^{(b_1^a, a_2)} b_0^a\right) s_0 - X_0^{(a,s)} a_0$$

$$= \left(\left(\left(\left(X_4^{e^d} d_1^c - X_4^{(e_1^d, d_2^c)} e_0^d\right) c_1^b - X_3^{(d_1^c, c_2^b)} d_0^c\right) b_1^a - X_2^{(c_1^b, b_2^a)} c_0^b\right) a_1 - X_1^{(b_1^a, a_2)} b_0^a\right) s_0 - X_0^{(a,s)} a_0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$= \left(\ldots\left(\left(\left(X_{m-2}^{q^p} p_1^n - X_{m-2}^{(q_1^p, p_2^n)} q_0^p\right) n_1^l - X_{m-3}^{(q_1^p, n_2^l)} p_0^n\right) l_1^i - \text{ec.}\right) s_0 - X_0^{(a,s)} a_0 = s_0^q.$$

8. È manifesta di quì la legge, onde formasi s_0^q ossia R.

Imperocchè risalendo al primo dall' ultimo precedente valore di R, si ha tosto e semplicemente

$$(9) \qquad X^{q^p}_{m-2} = q^p_1; \quad X^{(q^p_1, p^n_2)}_{m-2} = p^n_2$$

e poscia facilmente si troverà

$$X^{(p^n_1, n^l_2)}_{m-3} = n^l_2 q^p_1 - n^l_3 q^p_0;$$

$$X^{(n^l_2, l^i_2)}_{m-4} = (l^i_2 p^n_1 - l^i_3 p^n_0) q^p_1 - (l^i_2 p^n_2 - l^i_4 p^n_0) q^p_0;$$

$$X^{(l^i_1, i^k_2)}_{m-5} = \left[(i^k_2 n^l_1 - i^k_3 n^l_0) p^n_1 - (i^k_2 n^l_2 - i^k_4 n^l_0) p^n_0\right] q^p_1$$

$$- \left[(i^k_2 n^l_1 - i^k_3 n^l_0) p^n_2 - (i^k_2 n^l_3 - i^k_5 n^l_0) p^n_0\right] q^p_0;$$

e così di mano in mano, fino a $X^{(b^a_1, a_2)}_1$, supposto che i coefficienti dell' incognite nell' equazione (1) s' indichino per ordine, dall'ultimo al primo, colle lettere r, q, p, n, l, i, k ec. Se pongasi ad esempio $m = 6$, si avrà

$$(10) \qquad R = \left(\left(\left(\left(X^{e^d}_4 d^c_1 - X^{(e^d_1, d^c_2)}_4 e^d_0\right) c^b_1 - \text{ec.}\right) s^c_0 - X^{(a,1)}_0 a^e_0 = s^e_0\right.$$

e colle sostituzioni successive di e^d_1 per $X^{e^d}_4$, di d^c_2 per $X^{(e^d_1, d^c_2)}_4$ ec., se ne ricaverà il valore (5) di s_{m-6} antecedentemente sviluppato e in cui facciasi $m = 6$. E quì osserviamo che il primo elemento, a così dire, di R e del valore dell' incognita x_{m-1}, è la quantità q^p_1, risultandone da immediata e semplice per-

mutazione il secondo $\overset{n}{p}_2$, e con regolare andamento i termini o elementi consecutivi. Ma la proprietà essenziale o caratteristica della soluzione di un problema lineare determinato si è la forma stessa $Xs_0 - Ya_0$ di R, e consiste nella derivazione per semplice permutazione di Y da X, di una metà dei termini di X dall'altra, e così via discorrendo; lo che però è naturale conseguenza del metodo usato di eliminazione.

9. Resta che determiniamo i valori delle quantità compendiate $\overset{a}{b}$, $\overset{b}{c}$, $\overset{c}{d}$, ec., espressi pei coefficienti a_0, b_0, c_0, ec., r_0, a_1 ec. ec. dell' equazioni (1). Osserviamo perciò che si ha dall' eliminazione

$$\overset{a}{b}_0 = a_1 b_0 - b_1 a_0; \qquad \overset{b}{c}_0 = \overset{a}{c}_0 \overset{a}{b}_1 - \overset{a}{b}_0 \overset{a}{c}_1;$$

$$\overset{a}{b}_1 = a_2 b_0 - b_2 a_0; \qquad \overset{b}{c}_1 = \overset{a}{c}_0 \overset{a}{b}_2 - \overset{a}{b}_0 \overset{a}{c}_2;$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\overset{a}{b}_{m-2} = a_{m-1} b_0 - b_{m-1} a_0; \qquad \overset{b}{c}_{m-3} = \overset{a}{c}_0 \overset{a}{b}_{m-2} - \overset{a}{b}_0 \overset{a}{c}_{m-2};$$

$$\overset{c}{d}_0 = \overset{b}{d}_0 \overset{b}{c}_1 - \overset{b}{c}_0 \overset{b}{d}_1; \text{ ec.}$$

$$\overset{c}{d}_1 = \overset{b}{d}_0 \overset{b}{c}_2 - \overset{b}{c}_0 \overset{b}{d}_2; \text{ ec.}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\overset{c}{d}_{m-4} = \overset{b}{d}_0 \overset{b}{c}_{m-3} - \overset{b}{c}_0 \overset{b}{d}_{m-3}; \text{ ec.}$$

e osserviamo pure che dalle $\overset{a}{b}_0$, $\overset{a}{b}_1$, ec. si deducono rispettivamente le $\overset{a}{c}_0$, $\overset{a}{c}_1$, ec., permutando nelle prime b in c; e parimente le $\overset{b}{d}_0$, $\overset{b}{d}_1$ ec. derivano dalle $\overset{b}{c}_0$, $\overset{b}{c}_1$ ec. permutando in

queste le c in d, e così di seguito. Quindi tutto il problema si risolve nella forma e nel valore delle funzioni $\overset{a}{b}_0$, $\overset{a}{b}_1$, ec. Pongasi per brevità

$$\overset{a}{b}_0 = a_1 b_0 - b_1 a_0 = (a, b)$$

$$\overset{a}{c}_0 = a_1 c_0 - c_1 a_0 = (a, c)$$

$$\overset{b}{c}_0 = b_1 c_0 - c_1 b_0 = (b, c)$$

ec. ec.

Si ha da queste relazioni

$$(11) \qquad (a, b) = -(b, a); \quad (b, c) = -(c, b); \text{ ec.}$$

ed inoltre fra otto coefficienti a_0, b_0, c_0, d_0, a_1, ec. sussistono le formole di semplificazione o riduzione

$$(12) \qquad \begin{aligned} (a,b)(c,d) + (b,c)(a,d) &= (a,c)(b,d) \\ (b,a)(c,d) + (c,b)(a,d) &= (c,a)(b,d) \\ (a,b)(d,c) + (b,c)(d,a) &= (a,c)(d,b) \\ (b,a)(d,c) + (c,b)(d,a) &= (c,a)(d,b) \\ (b,a)(d,c) + (b,c)(a,d) &= (a,c)(b,d) \\ (a,b)(c,d) + (c,b)(d,a) &= (a,c)(b,d) \end{aligned}$$

delle quali avverandosi identicamente o per se la prima, le altre ne vengono per le (11). Similmente per abbreviazione pongasi

$$(c,d)b_2 - (b,d)c_2 + (b,c)d_2 = (b,c,d)$$

(13)

$$(c,d)a_2 - (a,d)c_2 + (a,c)d_2 = (a,c,d)$$

ec. ec. ec. ec.

le quali potrebbero anche scriversi con segni tutti positivi nel modo seguente

$$(c,d)b_2 + (d,b)c_2 + (b,c)d_2 = (b,c,d)$$

$$(c,d)a_2 + (d,a)c_2 + (a,c)d_2 = (a,c,d)$$

ec. ec. ec. ec.

ove nel 1.° membro ciascun termine deriva dal precedente con ordine e concatenazione costante di lettere; ma torna più comodo attenersi ai segni alternati e alla forma delle (13). In quest' ultima posizione di quantità si effettuano pure le seguenti permutazioni e relazioni

(14) $+(b,c,d) = +(c,d,b) = +(d,b,c) = -(d,c,b) = -(b,d,c) = -(c,b.d)$

ec. ec. ec. ec. ec.

e si vedrà essere ancora

$$(a,c,d)(b,c,e) - (a,c,e)(b,c,d) = +(a,b,c)(c,d,e)$$

(15) $$(a,b,e)(b,c,d) - (a,b,d)(b,c,e) = +(a,b,c)(e,d,b)$$

$$(a,b,e)(a,c,d) - (a,b,d)(a,c,e) = -(a,b,c)(a,d,e)$$

ec. ec. ec.

delle quali una sussistendo e avverandosi per sè, le altre ne derivan per le (14). Più oltre si faccia

$$(c,d,e)b_3-(b,d,e)c_3+(b,c,e)d_3-(b,c,d)e_3=(b,c,d,e)$$

(16)

$$(c,d,e)a_3-(a,d,e)c_3+(a,c,e)d_3-(a,c,d)e_3=(a,c,d\cdot e)$$

ec. ec. ec. ec.

Similmente

(17) $$(c,d,e,f)b_4-(b,d,e,f)c_4+(b,c,e,f)d_4-(b,c,d,f)e_4+(b,c,d,e)f_4 =(b,c,d,e,f)$$

e così successivamente; adempiendosi poi anche nelle (16), (17), ec. proprietà o relazioni analoghe alle (11) e (12), (14), e (15).

10. Si ha ora e si trova dalle premesse considerazioni e formole

$$a_{m-1}=a_{m-1}$$

$$b^a_{m-2}=b_0\,a_{m-1}-b_{m-1}\,a_0$$

$$c^b_{m-3}=[(b,c)a_{m-1}-(a,c)b_{m-1}+(a,b)c_{m-1}]\,a_0$$

(18) $$d^c_{m-4}=[(b,c,d)a_{m-1}-(a,c,d)b_{m-1}+(a,b,d)c_{m-1} -(a,b,c)d_{m-1}](a,b)a^2_0$$

$$e^d_{m-5}=[(b,c,d,e,)a_{m-1}-(a,c,d,e)b_{m-1}+(a,b,d,e)c_{m-1} -(a,b,c,e)d_{m-1}+(a,b,c,d)e_{m-1}](a,b,c)(a,b)^2a^4_0\,.$$

ec. ec. ec.

È manifesta la formazione progressiva o la legge di questi valori che possono continuarsi fin all' ultimo coefficiente r delle incognite nelle date equazioni. Riguardo ai valori b^a_0, b^a_1, ec.

$\overset{b}{c}_0$, $\overset{b}{c}_1$, ec., essi contengonsi nei precedenti (18), in questi bastando porre, in luogo di m rispettivamente, gl' indici 1, 2, 3 ec., e avvertendo che nei secondi membri non si cangiano fuorchè a_{m-1}, b_{m-1}, c_{m-1} ec.; onde sarà per esempio

$$\overset{d}{e}_0=[(b,c,d,e)a_4-(a,c,d,e)b_4+(a,b,d,e)c_4-(a,b,c,e)d_4$$

$$+(a,b,c,d)e_4](a,b,c,)(a,b)^2a_0^4=(a,b,c,d,e)(a,b,c)(a,b)^2a_0^4.$$

Quindi ancora, essendo r_0, q_0, p_0, n_0, l_0 ec. gli ultimi coefficienti delle incognite, avremo

$$\overset{q}{r}_0=[(b,c,d,\text{ec.},r)a_{m-1}-(a,c,d,\text{ec.},r)b_{m-1}+\text{ec.}\ldots$$

$$(19)\quad \pm(a,b,c,\text{ec.}q)r_{m-1}](a,b,c,\ldots p)(a,b,c,\ldots l)^2\ldots(a,b)^{2^{m-4}}a_0^{2^{m-3}}$$

$$=(a,b,c,\ldots r)(a,b,c,\ldots p)(a,b,c,\ldots l)^2(\ldots(a,b)^{2^{m-4}}a_0^{2^{m-3}}$$

valendo nello sviluppo del primo fattore di $\overset{q}{r}_0$ il segno $+$ dell' ultimo termine per m dispari e il $-$ per m pari e non ammettendo le potenze negative del 2 nei fattori susseguenti. Così abbiam eziandio immediatamente ottenuto il valore di V, denominator comune delle incognite, attesa la (4).

11. Trovati i valori di R e V, formiam ora quelli di A, B, ec. Q; onde ne sia esplicitamente determinata ciascuna incognita, e ciò (come si disse num. 3) mediante le reciproche permutazioni dei coefficienti a_0, b_0, ec. A tal uopo richiamiamo il valore (8) di R; ed essendo indifferente che la prima incognita dell' equazioni (1) a sinistra sia piuttosto la x_0 che una delle altre x_1, x_2, ec., supponiam che prima diventi successivamente la x_1, la x_2 ec. Ritenuto nel resto l'ordine delle

precedenti operazioni si avrà

$$
\begin{aligned}
R &= X_0^a s_0 - X_0^{(a,s)} a_0 \\
&= X_1^b s_0 - X_1^{(b,s)} b_0 \\
(20) \qquad &= X_2^c s_0 - X_2^{(c,s)} c_0 \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
&= X_{m-2}^q s_0 - X_{m-2}^{(q,s)} q_0
\end{aligned}
$$

denotando con X_1^b, X_2^c, ec. X_{m-2}^q quello che diviene X_0^a col permutar successivamente a_0 in b_0, in c_0, ec., in q_0 e inversamente. Dagli $m-1$ valori di R, permutando in essi ciascuna successivamente delle a_0, b_0, ec. q_0 in r_0, ciascuna delle a_1, b_1, ec. q_1 in r_1, ec. e viceversa, risulteranno i valori di $-A$, $-B$, ec. $-Q$; onde sarà

$$
\begin{aligned}
A &= -X_0^r s_0 + X_0^{(r,s)} r_0 \\
B &= -X_1^r s_0 + X_1^{(r,s)} r_0 \\
(21) \qquad C &= -X_2^r s_0 + X_2^{(r,s)} r_0 \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
Q &= -X_{m-2}^r s_0 + X_{m-2}^{(r,s)} r_0 \\
R &= +X_0^a s_0 - X_0^{(a,s)} a_0 .
\end{aligned}
$$

Ora essendo $Vs_0 = Aa_0 + Bb_0 + Cc_0 + \text{ec.} + Rr_0$, e i termini s non contenendosi nè in V, nè in alcuna delle funzioni X^r_0, X^r_1, ec., X^a_0, dovrà identicamente sussistere l' equazione

$$(22)\quad X^{(r,s)}_0 a_0 + X^{(r,s)}_1 b_0 + X^{(r,s)}_2 c_0 + \text{ec.} + X^{(r,s)}_{m-2} q_0 - X^{(a,s)}_0 a_0 = 0$$

e resterà più semplicemente

$$(23)\quad V = X^a_0 r_0 - (X^r_0 a_0 + X^r_1 b_0 + X^r_2 c_0 + \text{ec.} + X^r_{m-2} q_0),$$

altra espressione del valore di V che in fondo è la stessa delle (3), (4) e (19), e riuscir deve una funzione alternata dei coefficienti a_0, b_0, ec. r_0, a_1, ec.

12. Nel fin quì esposto e nelle precedenti formole tutta si raccoglie la generalità e lo sviluppo dell'Analisi lineare determinata; poichè, senza ammettere particolari valori e relazioni dei termini s_0, s_1 ec. e dei coefficienti a_0, b_0, ec. r_0, a_1 ec. delle incognite, uguali in numero alle equazioni (1), abbiam trovato ed espresso il valore di ciascuna incognita. Niuno, ch' io sappia, degli Autori e Trattati di Algebra elementare, offre tale generalità e sviluppo sino a formarne il valor esplicito dell' una o dell' altra di m incognite dedotto da m equazioni di 1.° grado. Il Cramer aveva bensì ravvisata nell' equazioni lineari a qualunque numero d'incognite la regola generale per formar il valore di ciascuna d'esse coi dati loro coefficienti, e stabilì ben anche le avvertenze circa i segni dei termini che costituiscono il numeratore e il denominatore di quella; ma egli non fondò questa regola che su la semplice induzione, dall' osservare cioè la forma del valor delle incognite nel caso che il numero m sia di due o tre

soltanto (*). Per la risoluzione di simili equazioni Eulero segue il metodo di eliminazione che dicesi di *confronto*, e consiste nell'uguagliar fra loro successivamente i valori di una stessa incognita ricavati dall'equazioni diverse; ma sebbene un tal metodo possa praticarsi, qualunque sia il numero delle incognite, ove nondimeno sia questo maggiore di tre, avverte il medesimo Eulero che l'usar di quello esiggerebbe calcoli grandemente prolissi, e propone perciò di ricorrere ne' casi particolari ad artificj e mezzi di abbreviamento, de' quali egli era sì fecondo ed elegante inventore (**). Non trascura il Ruffini di spiegar il metodo di eliminazione e giovasi all' uopo degli apici per facilitare colle permutazioni la deduzione del valore di un' incognita da quello di un' altra; su di che anzi egli aggiunge una regola pratica per formar immediatamente il valore di ciascuna incognita, risparmiandosene il processo e la fatica dell'eliminazione: ma questa regola eziandio diviene assai complicata e brigosa oltre il numero tre delle incognite, onde l'Autore si limitò a indicarla nei primi casi di due e di tre incognite (***). Frattanto l'esimio Geometra Cauchy, cui tanto deve l'analisi moderna in ogni parte, dalla più elementare alla più trascendente, ha proposto e dimostrato un metodo elegantissimo, col quale il valore di una qualunque delle m incognite dell' equazioni (1) formasi per un semplice cangiamento di algoritmo, e senza bisogno alcuno di eliminazione. Il qual metodo per avventura non essendo a tutti noto, io mi reco a pregio di qui riferirlo brevemente.

13. Si consideri la più semplice delle funzioni alternate in riguardo ai numeri a, b, c, ec., r e chiamata Π tale funzione, sia perciò

$$24)\quad \Pi=(b,a)(c-a)(c-b)\ldots\ldots\times(q-a)(q-b)(q-c)\ldots(q-r).$$

(*) V. Introdution à l'analyse des lignes courbes. Appendice. Note 1.re pag. 658.

(**) Elemens d'Algèbre, par Euler, trad. de l'Allemand. T. I. §. 615.

(***) Ruffini. Algebra elementare. pag. 97.

Eseguito il prodotto del 2.° membro, se ne ha un polinomio, ciascun termine del quale ha la forma $a^{0} b^{1} c^{2} \ldots q^{m-2} r^{m-1}$; variando però ne' diversi termini l' esponente di ciascuna lettera fra o ed $m-1$, e distruggendosi a due a due i termini per la permutazione reciproca di due lettere in uno di essi e non nell' altro. Se ora gli esponenti si cangino in apici, ovvero in indici situati al basso di ciascuna lettera, e si chiami Δ quello che allora diviene la funzione Π, sarà Δ un aggregato di termini della forma $a_0 b_1 c_2 \ldots r_{m-1}$, che avrà le stesse proprietà di Π relativamente alla permutazione delle lettere. E vorrà dire, per natura delle funzioni alternate, che se in tutti i termini della Δ permutasi una delle lettere in un' altra senza vicendevolmente permutarvi questa in quella, necessariamente ne verrà $\Delta = 0$. Facciasi

$$(25) \qquad \Delta = A_0 a_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \text{ec.} + A_{m-1} a_{m-1}$$

e quindi

$$A_0 b_0 + A_1 b_1 + A_2 b_2 + \text{ec.} + A_{m-1} b_{m-1} = 0$$

$$(26) \qquad A_0 c_0 + A_1 c_1 + A_2 c_2 + \text{ec.} + A_{m-1} c_{m-1} = 0$$

$$\vdots$$

$$A_0 r_0 + A_1 r_1 + A_2 r_2 + \text{ec.} + A_{m-1} r_{m-1} = 0$$

ognuna delle quali sussiste identicamente. Ora moltiplicata la prima delle (1) per A_0, la seconda per A_1, ec., l' ultima per A_{m-1}, e sommando insieme tutti i prodotti, in conseguenza delle (25) e (26) si ottiene

$$\Delta x_0 = A_0 s_0 + A_1 s_1 + \text{ec.} + A_{m-1} s_{m-1},$$

e perciò

$$(27) \qquad x_0 = \frac{A_0 s_0 + A_1 s_1 + \text{ec.} + A_{m-1} s_{m-1}}{\Delta}$$

ove il numeratore non è altro che Δ, cangiati in questo soltanto gli a negli s, come indica la (25). Poichè dunque si ha Δ, effettuando il prodotto (24), e a prodotto eseguito sostituendo gl' indici $0, 1, 2, \ldots m-1$ agli esponenti della stessa cifra, potrà il valore di x_0 rappresentarsi come segue:

$$(28) \qquad x_0 = \frac{(b-s)(c-s)(c-b)\ldots(q-s)(q-b)(q-c)\ldots(q-r)}{(b-a)(c-a)(c-b)\ldots(q-a)(q-b)(q-c)\ldots(q-r)}$$

e questo chiama il Cauchy un valor simbolico dell'incognita, non sussistendo esso difatti se non colle accennate condizioni (*). E dopo ciò sarà facile il persuadersi che la funzione Δ secondo il Cauchy non è altro che il comune denominatore delle incognite avvertito da Cramer e la quantità V semplificata della mia soluzione: se non che formar dovendosi questa Δ o V dall' aggregato dei termini, di numero $1.2.3\ldots.m$, secondo tutte le situazioni degl'indici $0, 1, 2\ldots, m-1$ in uno di essi, come $a_0\, b_1\, c_2 \ldots r_{m-1}$, e di più richiedendosi una speciale avvertenza sul segno di ciascun termine, mi sembra che nell'effettiva e pratica soluzione dei problemi tornar possa più spedita ed esente da sbagli la composizione del valor delle incognite nel modo per me dichiarato. Proponiamocene ad esempio la risoluzione di sei equazioni che richiederebbe di calcolar nel polinomio Δ settecento e venti termini; il qual esempio potrà servire in Astronomia nel caso che abbiansi, per opposizioni osservate, le sei equazioni lineari fra le cercate correzioni agli elementi elittici di un pianeta.

14. Siano dunque le equazioni proposte

(*) V. Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique 1.re partie. Ch. III. pag. 77....81, et la Note IV pag. 521.

sale, ma nel quarto dì non ebbi reazione alcalina di sorte alcuna, e così ne' successivi sino al ventesimo quarto giorno, in cui al primo tuffarsi della carta arrossata apparve incontanente la tinta azzurra. Questa differenza di tempo occorso ne' due sali diversi per avere lo stesso effetto ci palesa che l' energia dell' azione chimica adoperata dalla calce anidra nel carbonato sodico anidro sta a quella della calce verso il carbonato potassico:: 6: 1. E siccome il carbonato sodico vuole dodici giorni per darci il coloramento citrino della soluzione, così qualora l' azione chimica dal cominciamento dell' esperienza sino al termine di produrre la reazione alcalina, e da questo sino alla generazione del color citrino avesse proceduto di pari passo, avremmo dovuto avere, nello sperimento col sale potassico, l' apparizione del color citrino dopo 72 giorni dal suo cominciamento, ma in contrario ci venne veduto soli 16 giorni dopo la reazione alcalina, che vale a dire 40 giorni dopo che l' esperienza fu instituita. Questo fatto adunque dimostra che quell' azione chimica ch' è nulla, od al tutto impercettibile all' atto della mescolanza e che viene appresso manifestandosi con procedimento lentissimo, subitochè perviene a tanto di energia da rendersi chiaramente visibile, allora va innanzi con forza assai maggiore e più vigorosa. Questo fatto si può accertare anche in altro modo sì nel sale potassico che nel sodico, tenendo conto, cioè, della quantità di alcali puro contenuto nella soluzione alcoolica al momento ch' essa ci dà la reazione alcalina e paragonandola poscia alla quantità contenuta nella soluzione citrina.

Tutta questa differenza di azione notata, che adopera la calce anidra nei due sali, non potendo dipendere, come abbiamo accennato precedentemente, dalla differente affinità, onde l' acido carbonico è rattenuto dai due alcali, essa dee perciò venire da altra qualità specifica di ciascuno di essi, e potrebbe essere l' opposta affinità che palesano per l' acqua messi a contatto dell' aria ambiente. Io sono certamente lontano dal presumere di poter qui render ragione di qual maniera

$$a_0 x_0 + b_0 x_1 + c_0 x_2 + d_0 x_3 + e_0 x_4 + f_0 x_5 = s_0$$
$$a_1 x_0 + b_1 x_1 + c_1 x_2 + d_1 x_3 + e_1 x_4 + f_1 x_5 = s_1$$
$$a_2 x_0 + b_2 x_1 + c_2 x_2 + d_2 x_3 + e_2 x_4 + f_2 x_5 = s_2$$
$$a_3 x_0 + b_3 x_1 + c_3 x_2 + d_3 x_3 + e_3 x_4 + f_3 x_5 = s_3$$
$$a_4 x_0 + b_4 x_1 + c_4 x_2 + d_4 x_3 + e_4 x_4 + f_4 x_5 = s_4$$
$$a_5 x_0 + b_5 x_1 + c_5 x_2 + d_5 x_3 + e_5 x_4 + f_5 x_5 = s_5$$

Prepariamo le quantità come segue

$$(a,b) = a_1 b_0 - a_0 b_1$$
$$(a,c) = a_1 c_0 - a_0 c_1$$
$$(a,d) = a_1 d_0 - a_0 d_1$$
$$(a,e) = a_1 e_0 - a_0 e_1$$
$$(a,f) = a_1 f_0 - a_0 f_1$$
$$(b,c) = b_1 c_0 - b_0 c_1$$
$$(b,d) = b_1 d_0 - b_0 d_1$$
$$(b,e) = b_1 e_0 - b_0 e_1 \tag{29}$$
$$(b,f) = b_1 f_0 - b_0 f_1$$
$$(c,d) = c_1 d_0 - c_0 d_1$$
$$(c,e) = c_1 e_0 - c_0 e_1$$
$$(c,f) = c_1 f_0 - c_0 f_1$$
$$(d,e) = d_1 e_0 - d_0 e_1$$
$$(d.f) = d_1 f_0 - d_0 f_1$$
$$(e,f) = e_1 f_0 - e_0 f_1$$

$$(a,b,c) = (b,c)a_2 - (a,c)b_2 + (a,b)c_2$$

$$(a,b,d) = (b,d)a_2 - (a,d)b_2 + (a,b)d_2$$

$$(a,b,e) = (b,e)a_2 - (a,e)b_2 + (a,b)e_2$$

$$(a,b,f) = (b,f)a_2 - (a,f)b_2 + (a,b)f_2$$

$$(a,c,d) = (c,d)a_2 - (a,d)c_2 + (a,c)d_2$$

$$(a,c,e) = (c,e)a_2 - (a,e)c_2 + (a,c)e_2$$

$$(a,c,f) = (c,f)a_2 - (a,f)c_2 + (a,c)f_2$$

$$(a,d,e) = (d,e)a_2 - (a,e)d_2 + (a,d)e_2$$

$$(a,d,f) = (d,f)a_2 - (a,f)d_2 + (a,d)f_2$$

(30) $$(a,e,f) = (e,f)a_2 - (a,f)e_2 + (a,e)f_2$$

$$(b,c,d) = (c,d)b_2 - (b,d)c_2 + (b,c)d_2$$

$$(b,c,e) = (c,e)b_2 - (b,e)c_2 + (b,c)e_2$$

$$(b,c,f) = (c,f)b_2 - (b,f)c_2 + (b,c)f_2$$

$$(b,d,e) = (d,e)b_2 - (b,e)d_2 + (b,d)e_2$$

$$(b,d,f) = (d,f)b_2 - (b,f)d_2 + (b,d)f_2$$

$$(b,e,f) = (e,f)b_2 - (b,f)e_2 + (b,e)f_2$$

$$(c,d,e) = (d,e)c_2 - (c,e)d_2 + (c,d)e_2$$

$$(c,d,f) = (d,f)c_2 - (c,f)d_2 + (c,d)f_2$$

$$(c,e,f) = (e,f)c_2 - (c,f)e_2 + (c,e)f_2$$

$$(d,e,f) = (e,f)d_2 - (d,f)e_2 + (d,e)f_2$$

$$(a,b,c,d)=(b,c,d)a_3-(a,c,d)b_3+(a,b,d)c_3-(a,b,c)d_3$$

$$(a,b,c,e)=(b,c,e)a_3-(a,c,e)b_3+(a,b,e)c_3-(a,b,c)e_3$$

$$(a,b,c,f)=(b,c,f)a_3-(a,c,f)b_3+(a,b,f)c_3-(a,b,c)f_3$$

$$(a,b,d,e)=(b,d,e)a_3-(a,d,e)b_3+(a,b,e)d_3-(a,b,d)e_3$$

$$(a,b,d,f)=(b,d,f)a_3-(a,d,f)b_3+(a,b,f)d_3-(a,b,d)f_3$$

$$(a,b,e,f)=(b,e,f)a_3-(a,e,f)b_3+(a,b,f)e_3-(a,b,e)f_3$$

$$(a,c,d,e)=(c,d,e)a_3-(a,d,e)c_3+(a,c,e)d_3-(a,c,d)e_3$$

$$(31)\quad (a,c,d,f)=(c,d,f)a_3-(a,d,f)c_3+(a,c,f)d_3-(a,c,d)f_3$$

$$(a,c,e,f)=(c,e,f)a_3-(a,e,f)c_3+(a,c,f)e_3-(a,c,e)f_3$$

$$(a,d,e,f)=(d,e,f)a_3-(a,e,f)d_3+(a,d,f)e_3-(a,d,e)f_3$$

$$(b,c,d,e)=(c,d,e)b_3-(b,d,e)c_3+(b,c,e)d_3-(b,c,d)e_3$$

$$(b,c,d,f)=(c,d,f)b_3-(b,d,f)c_3+(b,c,f)d_3-(b,c,d)f_3$$

$$(b,c,e,f)=(c,e,f)b_3-(b,e,f)c_3+(b,c,f)e_3-(b,c,e)f_3$$

$$(b,d,e,f)=(d,e,f)b_3-(b,e,f)d_3+(b,d,f)e_3-(b,d,e)f_3$$

$$(c,d,e,f)=(d,e,f)c_3-(c,e,f)d_3+(c,d,f)e_3-(c,d,e)f_3$$

$$(a,b,c,d,e) = (b,c,d,e)a_4 - (a,c,d,e)b_4 + (a,b,d,e)c_4 - (a,b,c,e)d_4 + (a,b,c,d)e_4$$

$$(a,b,c,d,f) = (b,c,d,f)a_4 - (a,c,d,f)b_4 + (a,b,d,f)c_4 - (a,b,c,f)d_4 + (a,b,c,d)f_4$$

$$(a,b,c,e,f) = (b,c,e,f)a_4 - (a,c,e,f)b_4 + (a,b,e,f)c_4 - (a,b,c,f)e_4 + (a,b,c,e)f_4$$

(32) $$(a,b,d,e,f) = (b,d,e,f)a_4 - (a,d,e,f)b_4 + (a,b,e,f)d_4 - (a,b,d,f)e_4 + (a,b,d,e)f_4$$

$$(a,c,d,ef) = (c,d,e,f)a_4 - (a,d,e,f)c_4 + (a,c,e,f)d_4 - (a,c,d,f)e_4 + (a,c,d,e)f_4$$

$$(b,c,d,e,f) = (c,d,e,f)b_4 - (b,d,e,f)c_4 + (b,c,e,f)d_4 - (b,c,d,f)e_4 + (b,c,d,e)f_4 .$$

Con questi valori si otterrà

(33)
$$b^a_0 = a_1 b_0 - a_0 b_1$$
$$b^a_1 = a_2 b_0 - a_0 b_2$$
$$b^a_2 = a_3 b_0 - a_0 b_3$$
$$b^a_3 = a_4 b_0 - a_0 b_4$$
$$b^a_4 = a_5 b_0 - a_0 b_5$$

$$
(34)\quad
\begin{aligned}
c_0^b &= [(b,c)a_2 - (a,c)b_2 + (a,b)c_2]\,a_0 \\
c_1^b &= [(b,c)a_3 - (a,c)b_3 + (a,b)c_3]\,a_0 \\
c_2^b &= [(b,c)a_4 - (a,c)b_4 + (a,b)c_4]\,a_0 \\
c_3^b &= [(b,c)a_5 - (a,c)b_5 + (a,b)c_5]\,a_0
\end{aligned}
$$

$$
(36)\quad
\begin{aligned}
d_0^c &= [(b,c,d)a_3 - (a,c,d)b_3 + (a,b,d)c_3 - (a,b,c)d_3](a,b)a_0^2 \\
d_1^c &= [(b,c,d)a_4 - (a,c,d)b_4 + (a,b,d)c_4 - (a,b,c)d_4](a,b)a_0^2 \\
d_2^c &= [(b,c,d)a_5 - (a,c,d)b_5 + (a,b,d)c_5 - (a,b,c)d_5](a,b)a_0^2
\end{aligned}
$$

$$
(36)\quad
\begin{aligned}
e_0^d &= [(b,c,d,e)a_4 - (a,c,d,e)b_4 + (a,b,d,e)c_4 - (a,b,c,e)d_4 \\
&\qquad + (a,b,c,d)e_4](a,b,c)(a,b)^2 a_0^4 \\
e_1^d &= [(b,c,d,e)a_5 - (a,c,d,e)b_5 + (a,b,d,e)c_5 - (a,b,c,e)d_5 \\
&\qquad + (a,b,c,d)e_5](a,b,c)(a,b)^2 a_0^4
\end{aligned}
$$

e finalmente

$$
(37)\quad
\begin{aligned}
f_0^e &= [(b,c,d,e,f)a_5 - (a,c,d,e,f)b_5 + (a,b,d,e,f)c_5 - (a,b,c,e,f)d_5 \\
&\qquad + (a,b,c,d,f)e_5 - (a,b,c,d,e)f_5](a,b,c,d)(a,b,c)^2(a,b)^4 a_0^8 \\
&= (a,b,c,d,e,f)(a,b,c,d)(a,b,c)^2(a,b)^4 a_0^8 = \mathrm{V}.
\end{aligned}
$$

Dalla quale, permutando gli f negli s, ricavasi

$$s_0^e = [(b,c,d,e,s)a_5 - (a,c,d,e,s)b_5 + (a,b,d,e,s)c_5 - (a,b,c,e,s)d_5$$

$$(38) \qquad + (a,b,c,d,s)e_5 - (a,b,c,d,e)s_5](a,b,c,d)(a,b,c)^2(a,b)^4 a_0^8$$

$$= (a,b,c,d,e,s)(a,b,c,d)(a,b,c)^2(a,b)^4 a_0^8 = \mathrm{F},$$

onde

$$(39) \qquad x_5 = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{V}} = \frac{(a,b,c,d,e,s)}{(a,b,c,d,e,f)}.$$

Per la scomparsa del comune fattore $(a,b,c,d)(a,b,c)^2(a,b)^4 a_0^8$ il valore così ottenuto di x_5 è ridotto algebraicamente a' minimi termini; e perciò nelle applicazioni particolari o numeriche gioverà sempre di anteporlo al risultamento dell'eliminazione ordinaria, quando il numero delle incognite sia maggiore di tre. Dal medesimo valore, mediante le reciproche permutazioni di f in e, in d, ec., in a, si ricaveranno quelli delle altre incognite x_4, x_3, ec., e, ponendo attenzione ai segni, si troverà facilmente in questo modo

$$x_4 = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{V}} = -\frac{(a,b,c,d,f,s)}{(a,b,c,d,e,f)}; \quad x_3 = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{V}} = \frac{(a,b,c,e,f,s)}{(a,b,c,d,e,f)};$$

$$(40) \qquad x_2 = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = -\frac{(a,b,d,e,f,s)}{(a,b,c,d,e,f)}; \quad x_1 = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{V}} = \frac{(a,c,d,e,f,s)}{(a,b,c,d,e,f)};$$

$$x_0 = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}} = -\frac{(b,c,d,e,f,s)}{(a,b,c,d,e,f)}.$$

15. È chiara di presente la regola e operazione più semplice da seguirsi per comporre i cercati valori (39) e (40). Nascono questi e si formano come viene indicato dalle (37) e (38), le quali derivano e si compongono successivamente dalle (29), (30), (31) e (32). Si comincierà quindi il calcolo dalle quindici formole (29), che sono il fondamento delle altre, e ciascuna delle quali entra quattro volte nelle (30), corrispon-

dentemente per esempio ai prodotti della (a,b) per c_2, d_2, e_2, f_2. Ciascuna similmente delle (30) ripetesi tre volte nelle (31), corrispondentemente ai prodotti di una, come (a,b,c), per ognuno dei coefficienti d_3, e_3, f_3. E del pari ciascuna delle (31) si ripete due volte nelle (32), contemplandosi in queste i due prodotti di (a,b,c) per e_4, f_4. Da tutto ciò si riconosce il modo per giungere speditamente alla formazione e al valore delle sei incognite. Il numero dei termini da calcolarsi nelle (29), (30), (31) e (32) è in tutto di cent'ottanta, val a dire la quarta parte di quello che richiederebbesi per comporre distintamente ciascuno dei prodotti $a_0 b_1 c_2 d_3 e_4 f_5$ costituenti la nostra V, o la Δ del Cauchy.

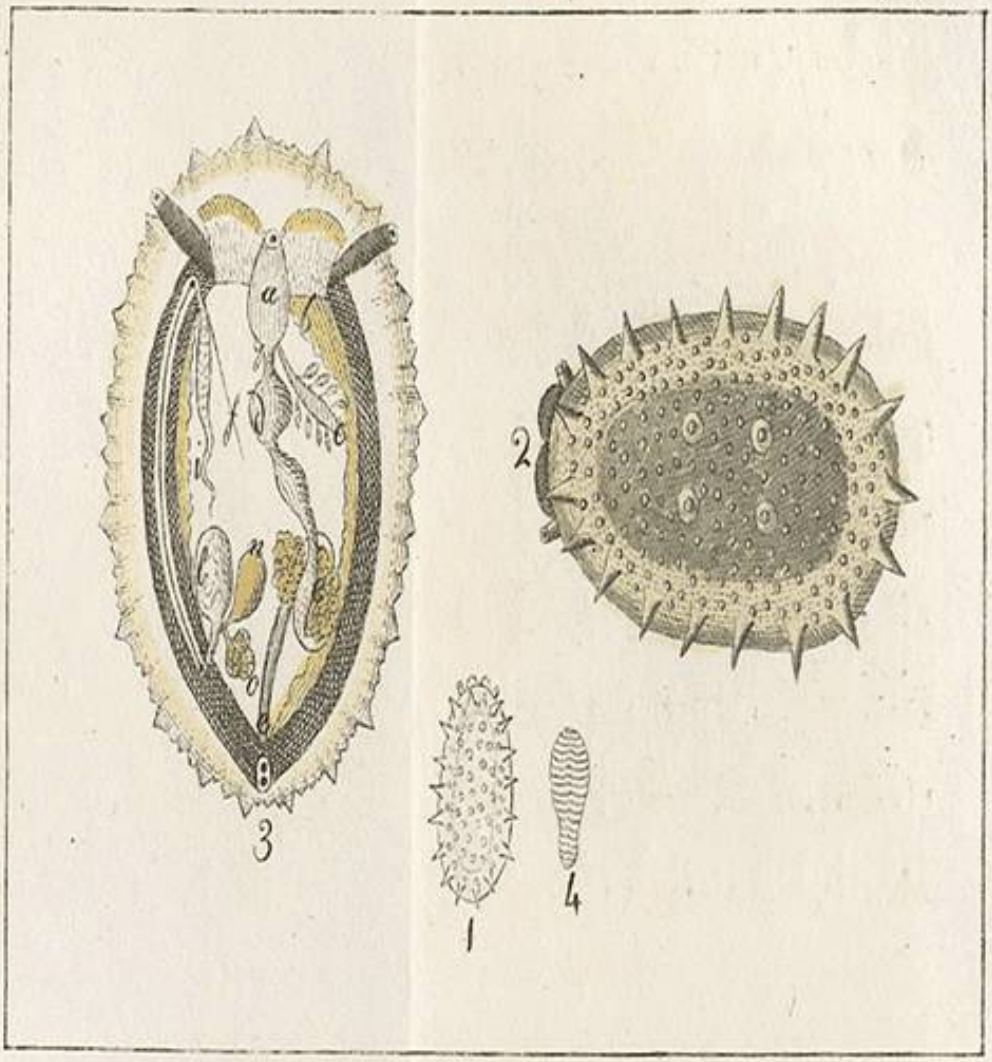
16. Concludiamo dalle precedenti considerazioni che in generale si ha il valore delle m incognite dell' equazioni (1) espresso per le formule

$$x_{m-1} = \frac{(a,b,c,\text{ec.}q,s)}{(a,b,c,\text{ec.}q,r)}; \quad x_{m-2} = -\frac{(a,b,c,\text{ec.}p,r,s)}{(a,b,c.\text{ec.}q,r)}; \text{ ec. ec.}$$

$$x_0 = \pm \frac{(b,c,\text{ec.}q,r,s)}{(a,b,c,\text{ec.}q,r)}$$

valendo nell' ultima il segno $+$ per m dispari e il $-$ per m pari. Questa forma o rappresentazione parmi la più semplice che possa darsi, non occorrendo che di scrivere i coefficienti coll' ordine alfabetico progressivo; e lo sviluppo di tal forma, sino ad averne il valor esplicito e determinato di ciascuna incognita, procede sempre a un modo, nè richiede altre avvertenze fuorchè di conservar i segni alternativamente $+$ e $-$ ai termini successivi, e di scendere gradatamente dagl' indici più elevati agl' inferiori. Nel caso per esempio di tre sole incognite x_0, x_1, x_2, ritenuti i coefficienti a, b, c, s come sopra, si ha

$$x_2 = \frac{(a,b,s)}{(a,b,c)}; \quad x_1 = -\frac{(a,c,s)}{(a,b,c)}; \quad x_0 = \frac{(b,c,s)}{(a,b,c)}$$


a
2
3
1
4

e sviluppando

$$x_2 = \frac{(b,s)a_2 - (a,s)b_2 + (a,b)s_2}{(b,c)a_2 - (a,c)b_2 + (a,b)c_2}$$

$$x_1 = -\frac{(c,s)a_2 - (a,s)c_2 + (b,c)s_2}{(b,c)a_2 - (a,c)b_2 + (a,b)c_2}$$

$$x_0 = \frac{(c,s)b_2 - (b,s)c_2 + (b,c)s_2}{(b,c)a_2 - (a;c)b_2 + (a,b)c_2}$$

e in fine

$$x_2 = \frac{(b_1 s_0 - b_0 s_1)a_2 - (a_1 s_0 - a_0 s_1)b_2 + (a_1 b_0 - a_0 b_1)s_2}{(b_1 c_0 - b_0 c_1)a_2 - (a_1 c_0 - a_0 c_1)b_2 + (a_1 b_0 - a_0 b_1)c_2}$$

$$x_1 = -\frac{(c_1 s_0 - c_0 s_1)a_2 - (a_1 s_0 - a_0 s_1)c_2 + (b_1 c_0 - b_0 c_1)s_2}{(b_1 c_0 - b_0 c_1)a_2 - (a_1 c_0 - a_0 c_1)b_2 + (a_1 b_0 - a_0 b_1)c_2}$$

$$x_0 = \frac{(c_1 s_0 - c_0 s_1)b_2 - (b_1 s_0 - b_0 s_1)c_2 + (b_1 c_0 - b_0 c_1)s_2}{(b_1 c_0 - b_0 c_1)a_2 - (a_1 c_0 - a_0 c_1)b_2 + (a_1 b_0 - a_0 b_1)c_2}.$$

Questi ultimi sono i precisi valori che si trovano mediante l' eliminazione; ma essi ci sono quì scaturiti da una forma e proprietà che è generale.

17. Tale è dunque la soluzione generale, completa ed esplicita dei problemi lineari determinati. Per un solo caso particolare supponiamo i coefficienti di una delle incognite uguali rispettivamente al termine noto dell' equazioni (1); e sia per esempio

$$r_0 = s_0;\quad r_1 = s_1;\quad r_2 = s_2;\ \text{ec.}\ r_{m-1} = s_{m-1}.$$

Ne viene di conseguenza (num. 7.)

$$X_0^r = X_0^{(r,s)};\quad X_1^r = X_1^{(r,s)};\quad X_2^r = X_2^{(r,s)};\ \text{ec. ec.}$$

Richiamate quindi le (21), (22) e (23), da esse tosto si deduce V=R, e ciascuno degli altri numeratori A, B, C, ec., Q eguale a zero; per lo che sarà

$$x_{m-1} = 1 \quad \text{e} \quad x_0 = x_1 = x_2 \ldots = x_{m-2} = 0.$$

E già, dall' essere in questo caso $x_{m-1} = 1$, si conchiuderebbe anche altramente dover annullarsi ciascuna delle altre incognite; poichè le equazioni (1) riducendosi pel supposto alle

$$a_0 x_0 + b_0 x_1 + c_0 x_2 + \text{ecc.} + q_0 x_{m-2} = 0$$

$$a_1 x_0 + b_1 x_1 + c_1 x_2 + \text{ecc.} + q_1 x_{m-2} = 0$$

$$\text{ec.} \qquad \text{ec.} \qquad \text{ec.} \qquad \text{ec.}$$

queste non posson sussistere per valori liberi e qualunque siano dei coefficienti a_0, b_0, ec., a meno che non sia $x_0 = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; ec. Divise dunque le equazioni (1), ciascuna rispettivamente pel suo termine noto, e riuscendone qualunque ogni rapporto $\frac{a_0}{s_0}$, $\frac{b_0}{s_0}$, ec., si ha la proprietà che le equazioni

$$a'_0 x_0 + b'_0 x_1 + c'_0 x_2 + \text{ec.} + x_{m-1} = 1$$

$$a'_1 x_0 + b'_1 x_1 + c'_1 x_2 + \text{ec.} + x_{m-1} = 1$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a'_{m-1} x_0 + b'_{m-1} x_1 + c'_{m-1} x_2 + \text{ec.} + x_{m-1} = 1$$

riduconsi necessariamente alla sola $x_{m-1} = 1$.

§. II.

Analisi lineare piucchè determinata.

18. Abbiansi m equazioni, $m-m'$ incognite. Queste determinate da un numero $m-m'$ di quelle, se gli ottenuti valori delle incognite sostituiti nelle restanti m' equazioni le rendano identicamente soddisfatte, il problema sarà possibile e risoluto: in caso diverso il problema è assurdo e impossibile. Quindi, o un numero m' di condizioni del problema piucchè determinato risulta identico alle altre $m-m'$ condizioni, e perciò inutile, o le m' condizioni contraddicono alle $m-m'$, e il problema è assurdo. Tal è il comune ragionamento su la natura e risoluzione dei problemi piucchè determinati di 1.° grado, e in sè il discorso è giustissimo. Ma quali sono i criterj analitici e le generali formole da considerarsi per riconoscere se sussista l' uno o l'altro dei due casi, l'inutilità o l'assurdità di alcune condizioni. Ecco ciò che a mio avviso deriva e può dedursi ancora dall' analisi precedente, onde l' analisi lineare piucchè determinata immediatamente congiungesi a quella dei problemi determinati, anzi è in essa compresa come suo caso particolare.

19. Siano in prima le incognite di numero $m-1$, ed m le equazioni. Ritenute per questo e pei seguenti casi le equazioni (1), potremo in esse considerare che una delle m incognite, per esempio la x_{m-1}, sia $=0$. In conseguenza di ciò li m coefficienti della x_{m-1}, cioè r_0, r_1, ec., r_{m-1} restano quantità indeterminate, o piuttosto arbitrarie. Ma gli altri coefficienti non sono più affatto indipendenti fra loro, come nell' analisi determinata; perocchè avendosi $R=0$, per questa relazione uno di tali coefficienti diviene funzione degli altri. E si avverta pure che li r non entrano per nulla, dipendentemente dall' eliminazione, in R. Ora se dall' equazione $R=0$ prendasi il valore di un coefficiente, per esempio di s_{m-1}, e si sostituisca in A, B, C, ec. Q, dopo tale sostituzione tutti gli

altri coefficienti che restano in A, B, ec., Q saranno fra loro indipendenti, e i valori delle incognite x_{m-2}, x_{m-3}, ec., x_0 si troveranno reali e soddisfatti, come in un problema lineare determinato. Pertanto richiamato dalla (19) il valore di r_0^q, ossia di V, che cangiasi in quello di R colla permutazione di r in s, ed ommesso il fattor comune di R e V, si ha

$$R=(a,b,c,d,\text{ec.},q,s)$$
$$=(b,c,d,\text{ec.},q,s)a_{m-1}-(a,c,d,\text{ec.}q,s)b_{m-1}+\text{ec.}\pm(a,b,c,d,\text{ec.}q)s_{m-1}=0$$

perciò

$$(41)\qquad s_{m-1}=\frac{(b,c,d,\text{ec.}q,s)a_{m-1}-(a,c,d,\text{ec.}q,s)b_{m-1}+\text{ec.}}{\mp(a,b,c,\text{ec.}q)}.$$

Questo è il valore da sostituire in ciascuna delle seguenti

$$(42)\qquad \begin{aligned} Q &= -(a,b,c,\text{ ec. } p,r,s)\\ P &= +(a,b,c,\text{ ec. } n,q,r,s)\\ &\vdots \qquad\qquad \vdots\\ A &= \pm(b,c,\text{ ec. } n,p,q,r,s)\end{aligned}$$

valendo sempre il segno superiore per m dispari e l'inferiore per m pari. Nel denominatore V non avviene alcun cambiamento, non contenendosi in esso li s; ma tanto in esso, come in ciascuno dei numeratori Q, P, ec., A abbiamo le arbitrarie quantità, m di numero, r_0, r_1, ec. r_{m-1} le quali gioveranno a semplificar le espressioni. Pongasi a cagion d'esempio $=0$ ciascuno delli r_0, r_1 ec., uno eccettuato; mentre se tutti fossero nulli, l'incognita x_{m-1}, che si è supposta $=0$, potrebb'esser qualunque, distruggendosi non pertanto i termini $r_0 x_{m-1}$, $r_1 x_{m-1}$, ec. $r_{m-1} x_{m-1}$; e quindi pongasi $r_{m-1}=1$. Se ora si osserva che tutti i termini dello svolgimento di Q, P, ec., A e di V contenendo uno delli r debbon per ipotesi

annullarsi, meno quelli moltiplicati per r_{m-1}, si vedrà facilmente risultarne

$$\begin{aligned} Q' &= \pm(a,b,c,\text{ec}.p,s) \\ P' &= \mp(a,b,c,\text{ec}.n,q,s) \\ &\vdots \\ A' &= \mp(b,c,\text{ec}.n,p,q,s) \\ V' &= \mp(a,b,c,\text{ec}.,p,q) \end{aligned}$$

col segno superiore per m dispari: o è quanto dire si avrà

$$\begin{aligned} Q' &= \pm[(b,c,\text{ec}.p,s)a_{m-2} - (a,c,\text{ec}.p,s)b_{m-2} + \text{ec}. \\ &\quad \mp(a,b,c,\text{ec}.p)s_{m-2}] \\ (43) \qquad P' &= \mp[(b,c,\text{ec}.n,q,s)a_{m-2} - (a,c,\text{ec}.n,q,s)b_{m-2} + \text{ec}. \\ &\quad \mp(a,b,\text{ec}.n,q)s_{m-2}] \\ &\vdots \\ A' &= \mp[(c,\text{ec}.n,p,q,s)b_{m-2} - (b,\text{ec}.n,p,q,s)c_{m-2} + \text{ec}. \\ &\quad \mp(b,c,\text{ec}.n,p,q)s_{m-2}] \\ V' &= \mp[(b,c,\text{ec}.q)a_{m-2} - (a,c,\text{ec}.q)b_{m-2} + \text{ec}. \\ &\quad \mp(a,b,c,\text{ec}.p)q_{m-2}] \end{aligned}$$

e quindi

$$x_{m-2} = \frac{Q'}{A'}\,;\ x_{m-3} = \frac{P'}{V'},\ \text{ec.};\ x_0 = \frac{A'}{V'}.$$

Nè è difficile il vedere che i valori (43) sono tali, quali si avrebbero per eliminazione dalle prime date e di numero $m-1$ equazioni; e sussistendo con essi la (41) il problema ne verrà

sciolto e non ripugnante colla emmesima equazion data. Ma i valori (42) di Q, P, ec, A, che racchiudon s_{m-1} ed i coefficienti r_0, r_1, ec. r_{m-1}, sono perciò appunto più generali degli ultimi.

20. Siano m di numero le equazioni ed $m-2$ le incognite. Oltre la x_{m-1} si potrà supporre anche la $x_{m-2}=0$. Quindi per le R=0, Q=0 sarà

$$(b,c,\text{ec}.q,s)a_{m-1}-(a,c,\text{ec}.q,s)b_{m-1}+\text{ec.}\pm(a,b,c,\text{ec}.q)s_{m-1}=0$$

$$(b,c,\text{ec}.p,r,s)a_{m-1}-(a,c,\text{ec}.p,r,s)b_{m-1}+\text{ec.}\pm(a,b,c,\text{ec}.p,r)s_{m-1}=0$$

per mezzo delle quali determineremo tosto due coefficienti, per esempio s_{m-1}, r_{m-1}, ed avremo

$$s_{m-1}=\frac{(b,c,\text{ec}.q,s)a_{m-1}-(a,c,\text{ec}.q,s)b_{m-1}+\text{ec.}}{\mp(a,b,c,\text{ec}.q)}$$

$$r_{m-1}=\frac{(b,c,\text{ec}.p,r,s)a_{m-1}-(a,c,\text{ec}.p,r,s)b_{m-1}+\text{ec.}\pm(a,b,c,\text{ec}.p,r)s_{m-1}}{\pm(a,b,c,\text{ec}.p,s)}$$

ove nella seconda si ponga il valore di s_{m-1} tratto dalla prima. E più semplicemente, avendo fatta =0 ciascuna delle arbitrarie r_0, r_1, ec; r_{m-2} e la $r_{m-1}=1$, si ricaverà s_{m-2} dalla Q'=0 e si avrà

$$(44)\qquad s_{m-2}=\frac{(b,c,\text{ec}.p,s)a_{m-2}-(a,c,\text{ec}.p,s)b_{m-2}+\text{ec.}}{\pm(a,b,c,\text{ec}.p)}.$$

Fatta =0 anche ciascuna delle arbitrarie q_0, q_1, ec. q_{m-3} e la $q_{m-2}=1$ se ne dedurrà

$$
\begin{aligned}
&P''=\pm(a,b,c,\text{ec}.n,s)=\pm[(b,c,\text{ec}.n,s)a_{m-3}-(a,c,\text{ec}.n,s)b_{m-3}+\text{ec}.\\
&\qquad\qquad\pm(a,b,c,\text{ec}.n)s_{m-3}]\\
&N''=\mp(a,b,c,\text{ec}.l,p,s)=\mp[(b,c,\text{ec}.p,s)a_{m-3}-(a,c,\text{ec}.p,s)b_{m-3}+\text{ec}.\\
&\qquad\qquad\pm(a,b,c,\text{ec}.p)s_{m-3}]\\
(45)\quad &\vdots\\
&A''=\pm(b,c,\text{ec}.n,p,s)=\pm[(c,\text{ec}.n,p,s)b_{m-3}-(b,\text{ec}.n,p,s)c_{m-3}+\text{ec}.\\
&\qquad\qquad\pm(b,c,\text{ec}.p)s_{m-3}]\\
&V''=\pm(a,b,c,\text{ec}.p)=\pm[(b,c,\text{ec}.p)a_{m-3}-(a,c,\text{ec}.p)b_{m-3}+\text{ec}.\\
&\qquad\qquad\pm(a,b,c,\text{ec}.n)p_{m-3}]
\end{aligned}
$$

e saranno le incognite

$$x_{m-3}=\frac{P''}{V''};\ x_{m-4}=\frac{N''}{V''};\ \text{ec.}\ x_0=\frac{A''}{V''}.$$

Similmente per m equazioni ed $m-3$ incognite, avendosi ancora $x_{m-3}=0$, si dedurrà dalla $P''=0$.

$$(46)\qquad s_{m-3}=\frac{(b,c,\text{ec}.n,s)a_{m-3}-(a,c,\text{ec}.n,s)b_{m-3}+\text{ec}.}{\mp(a,b,c,\text{ec}.n)}$$

onde fatto ciascuno dei p_0, p_1, p_2, ec. p_{m-4} eguale a zero e $p_{m-3}=1$, si avrà

$$
(47)\quad
\begin{aligned}
N''' &= \pm(a,b,c,\text{ec}.l,s) = \pm[(b,c,\text{ec}\,l,s)a_{m-4} - (a,c,\text{ec}.l,s)b_{m-4} + \text{ec.} \\
&\qquad \mp(a,b,\text{ec}.l)s_{m-4}] \\
&\vdots \\
A''' &= \mp(b,c,\text{ec}.n,s) = \mp[(c,\text{ec}.n,s)b_{m-4} - (b,\text{ec}.n,s)c_{m-4} + \text{ec.} \\
&\qquad \mp(b,c,\text{ec}.n)s_{m-4}] \\
V''' &= \mp(a,b,c,\text{ec}.n) = \mp[(b,c,\text{ec}.n)a_{m-4} - (a,c,\text{ec}.n)b_{m-4} + \text{ec.} \\
&\qquad \mp(a,b,\text{ec}.l)n_{m-4}]
\end{aligned}
$$

$$x_{m-4} = \frac{N'''}{V'''};\ \text{ec.}\ x_0 = \frac{A'''}{V'''}.$$

Ed estendendo il discorso ad m equazioni ed $m-m'$ incognite, se ne determineranno i valori di s_{m-1}, s_{m-2}, ec. $s_{m-m'}$; e si otterranno come sopra i numeratori e il denominator comune delle $m-m'$ incognite, i quali già non sono che i valori di esse dedotti dalle prime date $m-m'$ equazioni e che, sostituiti nelle restanti m' equazioni, debbon soddisfare al dato valore dei coefficienti s_{m-1}, s_{m-2}, ec. $s_{m-m'}$, non indipendenti fra loro come tutti gli altri.

21. Ma per abbracciare la massima generalità e per includere nei valori delle incognite li m' coefficienti che dipendono dagli altri, poniamo per brevità

$$
(48)\quad
\begin{aligned}
&\pm(a,b,c,\text{ec}\,q) = \alpha_0;\ \mp(a,b,c,\text{ec}.p,s) = \beta_0;\ \pm(a,b,c,\text{ec}.n,q,s) = \gamma_0; \\
&\mp(a,b,c,\text{ec}.p,r) = \alpha_1;\ \pm(a,b,c,\text{ec}.p,s) = \beta_1;\ \mp(a,b,c,\text{ec}.n,r,s) = \gamma_1; \\
&\pm(a,b,c,\text{ec}.n,q,r) = \alpha_2;\ \mp(a,b,c,\text{ec}.n,q,s) = \beta_2;\ \mp(a,b,c,\text{ec}.n,r,s) = \gamma_2;\ \text{ec.} \\
&\vdots \\
&\mp(b,c,\text{ec}.q,r) = \alpha_{m-2};\ \pm(b,c,d,\text{ec}.q,s) = \beta_{m-2}\ \mp(b,c,d,\text{ec}.p,r,s) = \gamma_{m-2};
\end{aligned}
$$

In conseguenza di ciò avremo

$$
(49)\quad
\begin{array}{l}
R = a_0\ s_{m-1} + \beta_0\ q_{m-1} + \gamma_0\ p_{m-1} + \text{ec.} + \rho_0\ a_{m-1} \\
Q = a_1\ s_{m-1} + \beta_1\ r_{m-1} + \gamma_1\ p_{m-1} + \text{ec.} + \rho_1\ a_{m-1} \\
P = a_2\ s_{m-1} + \beta_2\ r_{m-1} + \gamma_2\ q_{m-1} + \text{ec.} + \rho_2\ a_{m-1} \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
B = a_{m-2}\ s_{m-1} + \beta_{m-2}\ r_{m-1} + \gamma_{m-2}\ q_{m-1} + \text{ec.} + \rho_{m-2}\ a_{m-1}
\end{array}
$$

ove i coefficienti di s_{m-1}, q_{m-1}, ec. a_{m-1} non sono tutti sciolti fra loro; ma si ha $\beta_1 = -\beta_0$; $\beta_2 = -\gamma_0$; $\gamma_2 = -\gamma_1$; ec. Essendo pertanto m di numero le equazioni (1) ed $m-m'$ le incognite, potremo supporre $= 0$ ciascuna delle m' ultime incognite nelle m equazioni, ossia potrà farsi $x_{m-1} = x_{m-2} \ldots = x_{m-m'} = 0$: cosicchè avrassi $R = Q = P \ldots = 0$, e quindi le (49) porgeranno un numero m' di equazioni per determinar un egual numero di coefficienti s_{m-1}, r_{m-1}, q_{m-1}, ec. Indicate perciò con $-\sigma_0$, $-\sigma_1$, $-\sigma_2$, ec. $-\sigma_{m'-1}$ le somme dei termini che nelle (49) non contengono alcuna delle m' quantità s_{m-1}, r_{m-1}, ec. si avranno le seguenti equazioni

$$
(50)\quad
\begin{array}{l}
a_0\ s_{m-1} + \beta_0\ q_{m-1} + \gamma_0\ p_{m-1} + \text{ec.} = \sigma_0 \\
a_1\ s_{m-1} + \beta_1\ r_{m-1} + \gamma_1\ p_{m-1} + \text{ec.} = \sigma_1 \\
a_2\ s_{m-1} + \beta_2\ r_{m-1} + \gamma_2\ q_{m-1} + \text{ec.} = \sigma_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{m'-1}\ s_{m-1} + \beta_{m'-1}\ r_{m-1} + \gamma_{m'-1}\ q_{m-1} + \text{ec.} = \sigma_{m'-1}
\end{array}
$$

e se ne ricaverà

$$(51)\qquad s_{m-1}=\frac{A_0}{V_0};\ r_{m-1}=\frac{B_0}{V_0};\ q_{m-1}=\frac{C_0}{V_0}\ \text{ec.}$$

Li quali valori di s_{m-1}, r_{m-1}, ec., sostituiti nei numeratori e nel denominator comune V delle $m-m'$ incognite, le renderanno di necessità soddisfatte e sussistenti, generalmente parlando.

22. Le equazioni (50) sono un caso speciale di analisi lineare determinata; poichè in ognuna di esse manca una delle ricercate quantità r_{m-1}, q_{m-1}, ec. e la sola s_{m-1} ritrovasi in tutte. Per ottener in questo caso col nostro metodo sopra esposto i valori di A_0, B_0, ec. V_0 delle (51), scriviamo le (50) come segue

$$(52)\qquad \begin{array}{llllll}
\alpha_0 & s_{m-1}+\beta'_0 & r_{m-1}+\gamma'_0 & q_{m-1}+\delta'_0 & p_{m-1}+\text{ec.}=\sigma_0 \\
\alpha_1 & s_{m-1}+\beta_1 & r_{m-1}+\gamma'_1 & q_{m-1}+\delta'_1 & p_{m-1}+\text{ec.}=\sigma_1 \\
\alpha_2 & s_{m-1}+\beta_2 & r_{m-1}+\gamma_2 & q_{m-1}+\delta'_2 & p_{m-1}+\text{ec.}=\sigma_2 \\
\alpha_3 & s_{m-1}+\beta_3 & r_{m-1}+\gamma_0 & q_{m-1}+\delta'_0 & p_{m-1}+\text{ec.}=\sigma_3 \\
 & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\alpha_{m'-1} & s_{m-1}+\beta_{m'-1} & r_{m-1}+\gamma_{m'-1} & q_{m-1}+\delta_{m'-1} & p_{m-1}+\text{ec.}=\sigma_{m'-1}
\end{array}$$

dalle quali viene

$$(53)\qquad \begin{array}{l}
V_0=(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\text{ec.}) \\
A_0=\pm(\beta,\gamma,\delta,\text{ec.}\sigma) \\
B_0=\mp(\alpha,\gamma,\delta,\ \text{ec.}\sigma) \\
C_0=\pm(\alpha,\beta,\delta,\text{ec.}\sigma) \\
\text{ec.}\qquad\qquad \text{ec.}
\end{array}$$

col segno superiore o inferiore, secondo che m' è dispari o pari. Convien però avvertire che negli sviluppi delle (53) debbon mettersi le quantità segnate d'accento $\beta'_0, \gamma'_0, \delta'_0$, ec. γ'_1, δ'_1, ec. δ'_2, ec. e che a sviluppo compiuto deve farsi $\beta'_0 = \gamma'_1 = \delta'_2 \ldots$ $\ldots = 0$; $\gamma'_0 = \beta_0$; $\delta'_0 = \gamma_0$; ec. $\delta'_1 = \gamma_1$; e così di seguito, con regolarità manifesta.

23. Ora, per un esempio, sussistano le sei equazioni del num. 14, ma colle sole tre incognite x_0, x_1, x_2; e sarà questo come il supporre nelle equazioni stesse $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Avendosi quindi $F = E = D = 0$, dai valori di queste quantità recati nel detto numero si trae, per determinar s_5, f_5, e_5

$$
\begin{aligned}
&\alpha_0 = -(a,b,c,d,e);\ \beta_0 = +(a,b,c,d,s);\ \gamma_0 = -(a,b,c,e,s);\ \text{ec.}\\
(54)\quad &\alpha_1 = +(a,b,c,d,f);\ \beta_1 = -(a,b,c,d,s);\ \gamma_1 = +(a,b,c,f,s);\ \text{ec.}\\
&\alpha_2 = -(a,b,c,e,f);\ \beta_2 = +(a,b,c,e,s);\ \gamma_2 = -(a,b,c,f,s);\ \text{ec.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_0 = -(b,c,d,e,s)a_5 + (a,c,d,e,s)b_5 - (a,b,d,e,s)c_5 + (a,b,c,e,s)d_5\\
(55)\quad &\sigma_1 = (b,c,d,f,s)a_5 - (a,c,d,f,s)b_5 + (a,b,d,f,s)c_5 - (a,b,c,f,s)d_5\\
&\sigma_2 = -(b,c,e,f,s)a_5 + (a,c,e,f,s)b_5 - (a,b,e,f,s)c_5
\end{aligned}
$$

Formate perciò le tre equazioni

$$
(56)\qquad
\begin{aligned}
\alpha_0 s_5 + \beta'_0 f_5 + \gamma'_0 e_5 &= \sigma_0\\
\alpha_1 s_5 + \beta_1 f_5 + \gamma'_1 e_5 &= \sigma_1\\
\alpha_2 s_5 + \beta_2 f_5 + \gamma_2 e_5 &= \sigma_2
\end{aligned}
$$

si avrà da esse

$$e_5 = \frac{C_0}{V_0} = \frac{(\alpha,\beta,\sigma)}{(\alpha,\beta,\gamma)}$$

(57) $$f_5 = \frac{B_0}{V_0} = -\frac{(\alpha,\gamma,\sigma)}{(\alpha,\beta,\gamma)}$$

$$s_5 = \frac{A_0}{V_0} = \frac{(\beta,\gamma,\sigma)}{(\alpha,\beta,\gamma)}.$$

E sviluppando, col porre infine $\beta'_0 = 0$; $\gamma'_0 = \beta_0$; $\gamma'_1 = 0$, si troverà

$$V_0 = (\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2)\beta_0 - \alpha_0 \beta_1 \gamma_2$$

$$A_0 = (\sigma_2 \beta_1 - \sigma_1 \beta_2)\beta_2 - \sigma_0 \beta_1 \gamma_2$$

(58) $$B_0 = (\alpha_2 \sigma_1 - \alpha_1 \sigma_2)\beta_0 + (\alpha_1 \sigma_0 - \alpha_0 \sigma_1)\gamma_2$$

$$C_0 = (\alpha_2 \sigma_0 - \alpha_0 \sigma_2)\beta_1 - (\alpha_1 \sigma_0 - \alpha_0 \sigma_1)\beta_2.$$

Dipoi sostituiti questi valori di e_5, f_5, s_5 negli sviluppi di A, B, C, V del num. 14, ne risulteranno le tre incognite

$$x_0 = \frac{A}{V}; \; x_1 = \frac{B}{V}; \; x_2 = \frac{C}{V},$$

determinate da tutte insieme le date sei equazioni lineari; e i coefficienti di esse, che compongono A, B, C, V, tutti saranno indipendenti fra loro, come nel caso del problema lineare determinato e generale. Inoltre di questi coefficienti sedici sono totalmente arbitrarj, e sono essi f_0, f_1, ec. f_4, e_0, e_1 ec. e_4, d_0, d_1 ec. d_5. E generalmente essendo m di numero le equazioni, $m-m'$ le incognite, nei valori di queste formati col metodo precedente si avrà un numero $m'(m-1)+1$ di coefficienti da determinarsi a piacere.

24. Pertanto nei problemi lineari più che determinati, affinchè generalmente sussistano e non ripugnino insieme le m condizioni o equazioni fra le $m-m'$ incognite, è duopo che il termine noto s_{m-1} sia tale da soddisfare la prima delle (51), eguale cioè alla funzione degli altri termini e coefficienti indicata da $\frac{A_0}{V_0}$; e inoltre che opportunamente si assegni il valore ad un numero $m'-1$ dei coefficienti arbitrarj, introdotti dal considerar nulle m' incognite nelle m equazioni, e val a dire che si prendano r_{m-1}, q_{m-1}, ec. tali da soddisfarne le (51) susseguenti. Dopo di che nei valori delle $m-m'$ incognite effettive del problema resteranno ancora le quantità o i coefficienti arbitrarj in numero di $m'(m-1)+1$. Queste condizioni soddisfatte, potrebbe accadere che la soluzione o il problema fosse tuttavia non trattabile e assurdo; ma ciò avverrebbe particolarmente e in conseguenza dei valori speciali numerici attribuiti ai termini e coefficienti noti dell'equazioni, qualora ne risultasse eguale a zero l' una o l' altra delle quantità V e V_0; il qual caso verrà in appresso esaminato. In riguardo poi alle condizioni o equazioni del problema più che determinato che sono dette superflue o inutili, quando non ripugnano colle altre, e che realmente non servono che a confermar i valori delle incognite tratti dalle ultime, tutto cio è vero finchè si considerano e distinguonsi le quantità del problema in date e incognite; nel qual caso tornerebbe anche svantaggiosamente o vanamente complicato il metodo precedente di formar il valore di ciascuna incognita, traendolo da tutte insieme le equazioni proposte, come di necessità deve farsi nei problemi determinati. Ma se le quantità si distinguano e si considerino altre variabili, ed altre costanti, e si ricerchi di esprimere quelle per queste, allora nelle applicazioni dell' analisi più che determinata è di molta importanza il tener conto di tutte le equazioni e di farle tutte concorrere nel valore di ogni variabile. Imperocchè le costanti es-

sendo somministrate dalle osservazioni, e riuscendo perciò alterate o affette dai piccioli errori probabili dell' osservatore e degli strumenti, coll'aumentare il numero delle osservazioni, e quindi anche quello delle equazioni di condizione impiegate nel calcolo di ciascuna variabile, diminuisce l'error probabile finale del risultamento. Quindi ancora in tal caso le costanti arbitrarie, che abbiam riconosciute nella generale soluzione del problema lineare più che determinato, possono per avventura utilmente adoperarsi all'oggetto di scemar l'influenza degli errori primitivi e proprj delle osservazioni nelle quantità calcolate che ne derivano, come a tal fine giova la correzione o il metodo de' minimi quadrati. Riserbandoci ad altra occasione di entrar in queste indagini ulteriori, proseguiremo in una seconda Memoria lo sviluppo dell'Analisi lineare dietro i principj nella presente dichiarati.