NUOVA ANALISI

PER TUTTE LE QUESTIONI

DELLA

MECCANICA MOLECOLARE

DEL SIGNOR DOTTORE DON GABRIO PIOLA

Ricevuta adì 21. *Marzo* 1835.

I Geometri del secolo scorso e del principio del presente trattarono le questioni più generali intorno al moto ed all'equilibrio dei corpi, e a tale oggetto crearono metodi di cui la Meccanica analitica, e la Meccanica celeste segnarono l'eccellenza. Ma quei metodi supponevano nei corpi la materia continua: almeno così fu scritto da un vivente celebratissimo Geometra (*): però considerando che in natura la distribuzione della materia è spesso discontinua, si cercò dai più moderni Autori di rifare l'analisi del moto dei corpi, avvicinandola alla realtà delle cose. Si guadagnarono alcuni nuovi teoremi, ma si perdette gran parte dei vantaggi e delle bellezze di un'analisi elaborata con lungo studio dai nostri maestri; ciò principalmente distaccando la meccanica dal calcolo delle variazioni cui era stata ridotta da Lagrange mediante una delle più ammirabili concezioni che onorino l'umano intelletto.

Al punto in cui siamo: mostrare come si sostenga ancora in gran parte l'analisi di D'Alembert, di Eulero e di Lagrange supponendo coi moderni la materia discontinua: conservare il tesoro di scienza trasmessoci dai nostri predecessori, e nondi-

(*) Mémoires de l'Institut de France T. VIII. pag. 400.

meno progredire coi lumi del nostro secolo: ecco il mio tentativo.

Rifondendo l'analisi della meccanica molecolare mediante metodi rigorosi, mi è occorso di trovar confermati alcuni di quei teoremi dei quali sopra ho parlato: il che potrà forse conciliare a' miei calcoli l'attenzione degl' inventori de' medesimi teoremi; ma nelle applicazioni mi si sono anche presentate tali novità, che se tutte sono vere, varie teoriche di meccanica e di fisica matematica vanno a subire un cambiamento. Do in questa Memoria l'analisi generale, e la sola applicazione per cui si trovano le formole generali dell'idraulica. Sospendo la pubblicazione di altre applicazioni interessanti che contengono un maggior numero di innovazioni. Se il voto de' Geometri sarà favorevole a questa mia ardita impresa, mi farò coraggio a produrre anche il resto del mio lavoro.

§. I.°

Principio generale per l' applicazione del calcolo alle questioni relative al moto ed all' equilibrio de' corpi.

Esporrò in questo paragrafo con qualche estensione un principio analitico, che è per me la chiave d'ogni applicazione del calcolo alle questioni meccaniche prese per oggetto della presente Memoria. Ho fissate queste idee dopo lo studio da me fatto sulle funzioni discontinue (*). Potrei però citare alcuni passi tolti dalle Miscellanee di Torino e dalla Meccanica analitica dai quali appare, che Lagrange avea intraveduto lo stesso principio: ma a' suoi tempi le nozioni sulle funzioni discontinue non erano così avanzate come di presente dopo i lavori de' moderni chiarissimi geometri.

(*) Vedi il T. XX. delle Memorie di Matematica di questa Società pag. 573.

1. Sia una serie di valori

$$(1) \qquad x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 ; \ldots\ldots x_n$$

che si suppongono 1.° determinati ed anche numerici: 2.° di un numero n grande quanto si vuole: 3.° saltanti anche senza alcuna regola, talchè alcuni siano fra loro eguali, altri diversifichino per salti bruschi come piace. Tali sarebbero le distanze da un punto preso per origine di moltissimi punti fisici distribuiti sopra una retta in maniera affatto capricciosa.

Si può sempre immaginare una funzione $x(a)$ di una variabile a il cui primo valore si fissa arbitrariamente (lo chiamo l) e il cui aumento si fissa pure arbitrariamente (lo chiamo α), di maniera che i valori di

$$(2) \qquad x(l) ; x(l+\alpha) ; x(l+2\alpha) ; x(l+3\alpha) ; \ldots x(l+(n-1)\alpha)$$

siano rispettivamente eguali ai valori (1). Così si arriva a poter introdurre un'idea di regolarità nella successione (1), che è senza regola: la forma della funzione $x(a)$ sarà il più delle volte inassegnabile. Non importa: vedremo in seguito che basta potersene formare il concetto.

Per dimostrar ciò si prende una funzione arbitraria $\psi(i,a)$ di a e di un indice intero i, e la funzione cercata $x(a)$ si suppone della forma

$$(3) \qquad x(a)=A_1\psi(1,a)+A_2\psi(2,a)+A_3\psi(3,a)+\ldots+A_n\psi(n,a)$$

dove A_1, A_2, A_3.... sono n incognite da determinarsi, e dove all'indice i dentro $\psi(i,a)$ sonosi attribuiti diversi successivi valori come è scritto.

S' intendano le n incognite determinate per mezzo delle n equazioni

$$x_1 = A_1\psi(1, l) + A_2\psi(2, l) + \ldots\ldots\ldots + A_n\psi(n,l)$$

$$x_2 = A_1\psi(1,l+a) + A_2\psi(2,l+a) + \ldots\ldots + A_n\psi(n,l+a)$$

$$(4) \quad x_3 = A_1\psi(1,l+2a) + A_2\psi(2,l+2a) + \ldots\ldots + A_n\psi(n,l+2a)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = A_1\psi(1,l+(n-1)a) + A_2\psi(2,l+(n-1)a) + \ldots + A_n\psi(n,l+(n-1)a)$$

e i valori risultanti sostituiti nella (3), il secondo membro di questa sarà allora la funzione di a cercata. Infatti gli stessi valori di $A_1, A_2 \ldots$ che dicemmo doversi immaginare sostituiti nella (3), se si sostituiscano nelle (4) le renderanno tutte identiche. Ora la (3) in cui facciasi $a=l$ dà $x(l)=x_1$ per la prima delle (4): la stessa (3) ove facciasi $a=l+a$ dà $x(l+a)=x_2$ per la seconda delle (4) ec.

2. Sia n numero grandissimo e maggiore d'ogni assegnabile, sarà parimenti tale il numero dei termini nel secondo membro della (3), il numero delle incognite A_1, A_2, A_3, ecc. e il numero delle equazioni (4) colle quali le incognite vengono determinate: il detto di sopra rimane egualmente, giacchè si considera la sola possibilità della cosa e non l'attuale sua esecuzione. Allora volendo tener *finito* il valore dell'aumento a, la quantità $l+(n-1)a$ sostituita al luogo di a nell'ultima delle (4) sarebbe di grandezza matematicamente infinita. Siccome però anche a è arbitraria, possiamo immaginare che essendo n maggiore d'ogni assegnabile, a sia invece minore d'ogni assegnabile, talchè il prodotto $(n-1)a$ sia quantità finita. In tal caso il secondo membro della (3) è una serie infinita, e le $A_1, A_2, A_3, \ldots$ che determinate per mezzo delle (4), sono funzioni di $x_1, x_2, x_3 \ldots$ e di l, n, a, acquistano i valori limiti

a cui gli anzidetti valori continuamente s'accostano al crescere di n e all'impicciolirsi di α.

Quantunque al nostro scopo non sia necessario, diremo che per un principio noto nella teorica delle serie, le A_1, A_2, A_3 ecc. nella (3) non potranno differire fra loro che pel diverso valore dell'indice, talchè la (3) potrà scriversi

$$x(a) = \Sigma_{i=l}^{i=n} A_i \psi(i,n). \tag{5}$$

Ciò che più interessa, è la proprietà rimarcabile della funzione $x(a)$ quando il secondo membro della (3) si fa una serie infinita, e che vedesi passando da una delle equazioni (4) alla seguente. Crescendo a di un aumento α minore d'ogni quantità assegnabile, il valore corrispondente della funzione $x(a)$ può saltare di una quantità finita. Proprietà questa d'importanza primaria, come vedremo in tutta la seguente teorica. L'esistenza di simili funzioni in analisi era già nota, ed occorse anche al Legendre (*): quando però questa singolarità analitica non fosse constatata altrimenti, la precedente dimostrazione la porrebbe fuori di dubbio.

Adunque non solo è possibile escogitare una funzione $x(a)$ che renda la serie (2) eguale termine per termine alla (1), ma è possibile in infiniti modi, stante l'arbitrio rimasto nella funzione $\psi(i,a)$ assunta per comporre la (3).

3. La successione dei valori saltanti non sia più come nella (1) rappresentata da una serie semplice, ma da una serie doppia

(*) Exercices de Calcul Intégral. Vol. P. pag. 178. §. III. n. 33.

$$
\begin{array}{ll}
 & x_{1,1}\,;\ x_{2,1}\,;\ x_{3,1}\ \ldots\ x_{n',1} \\
 & x_{1,2}\,;\ x_{2,2}\,;\ x_{3,2}\ \ldots\ x_{n',2} \\
(6) & x_{1,3}\,;\ x_{2,3}\,;\ x_{3,3}\ \ldots\ x_{n',3} \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & x_{1,n''}\,;\ x_{2,n''}\,;\ x_{3,n''}\ \ldots\ x_{n',n''}\,;
\end{array}
$$

In una maniera simile a quella del n.° 1 potremo immaginare tutti questi valori dedotti da una sola funzione $x(a, b)$ a due variabili a, b crescenti per aumenti costanti α, β. I termini della serie doppia

$$
\begin{array}{l}
x(l, m)\,;\ x(l+\alpha, m)\ ;\ \ldots\ x(l+(n'-1)\alpha, m) \\
x(l, m+\beta)\,;\ x(l+\alpha, m+\beta)\ ;\ \ldots\ x(l+(n'-1)\alpha, m+\beta) \\
x(l, m+2\beta);\ x(l+\alpha, m+2\beta)\ ;\ \ldots\ x(l+(n'-1)\alpha, m+2\beta) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x(l, m+)n''-1)\beta);x(l+\alpha, m+(n''-1)\beta);..x(l+(n'-1)\alpha, m+(n''-1)\beta)
\end{array}
$$

saranno rispettivamente eguali a quelli delle (6): le variabili a, b cominciano da valori arbitrarii l, m, e parimente arbitrarii sono gli aumenti finiti α, β.

La dimostrazione si fa molto similmente a quella del n.° 1. Si prende una funzione arbitraria $\psi(i, j, a, b)$ delle due variabili a, b e di due indici i, j: si prende anche un numero $n'n''$ di coefficienti incogniti e si compone l' espressione

$$
\begin{aligned}
x(a,b) = {} & A_{1,1}\,\psi(1,1,a,b) + A_{2,1}\,\psi(2,1,a,b) + \ldots + A_{n',1}\,\psi(n',1,a,b) \\
& + A_{1,2}\,\psi(1,2,a,b) + A_{2,2}\,\psi(2,2,a,b) + \ldots + A_{n',2}\,\psi(n',2,a,b) \\
(8) \qquad & + A_{1,3}\,\psi(1,3,a,b) + A_{2,3}\,\psi(2,3,a,b) + \ldots + A_{n',3}\,\psi(n',3,a,b) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + A_{1,n''}\,\psi(1,n'',a,b) + A_{2,n''}\,\psi(2,n'',a,b) + \ldots + A_{n',n''}\,\psi(n',n'',a,b).
\end{aligned}
$$

Potremo introdurre in questa al luogo delle variabili a, b un numero $n'n''$ di combinazioni diverse di valori fatti con l, m, α, β, cioè quelle stesse combinazioni che corrispondono ai successivi termini della (7). Instituiremo allora un numero $n'n''$ di equazioni i cui secondi membri saranno le quantità modificate come ora si disse, e i primi saranno i rispettivi termini della (6). Dalla soluzione di queste $n'n''$ equazioni intenderemo dedotti tutti i coefficienti, i cui valori sostituiti nella (8) daranno la funzione ricercata.

I valori (6) ridotti alla regolarità mediante la disposizione (7) possono essere quelli delle distanze da un asse di un gran numero di punti fisici distribuiti alla rinfusa sopra una superficie piana; il che s'intenderà meglio più tardi.

4. Qui pure osserveremo 1.° nel caso che la serie doppia (6) fosse composta in ambi i versi di un numero di termini maggiore d'ogni assegnabile, potremo inversamente prendere gli aumenti arbitrarii α, β estremamente piccoli in modo che i prodotti $(n'-1)\alpha$, $(n''-1)\beta$ siano quantità finite. 2.° La funzione $x(a, b)$, per la quale i termini della (7) sono rispettivamente eguali a quelli della (6), può scriversi

$$
(9) \qquad x(a,b) = \Sigma_{i=1}^{i=n'} \Sigma_{j=1}^{j=n''} A_{i,j}\,\psi(i, j, a, b)\}
$$

ed essa pure è una funzione la quale può prendere valori fra

loro differenti di quantità finite, e che nondimeno corrispondano a valori di a, b aventi fra loro differenze minori d'ogni quantità assegnabile. 3.° La funzione $x(a, b)$, che compie l'ufficio di rendere i termini della (7) rispettivamente eguali a quelli della (6), non solo è possibile, ma lo è in infiniti modi a motivo dell' arbitrio rimasto nella funzione $\psi(i, j, a, b)$ assunta per formare la (8).

5. Ciò che più importa pel nostro scopo è l' estensione del principio analitico di cui parliamo ad una serie tripla di valori comunque irregolari che scriviamo come segue

$$
(10)\quad
\begin{array}{l}
x_{1,1,1} \;;\; x_{2,1,1} \;;\; x_{3,1,1} \;;\; \ldots\ldots\; x_{n',1,1} \\
x_{1,2,1} \;;\; x_{2,2,1} \;;\; x_{3,2,1} \;;\; \ldots\ldots\; x_{n',2,1} \\
x_{1,3,1} \;;\; x_{2,3,1} \;;\; x_{3,3,1} \;;\; \ldots\ldots\; x_{n',3,1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{1,n'',1} \;;\; x_{2,n'',1} \;;\; x_{3,n'',1} \;;\; \ldots\ldots\; x_{n',n'',1} \\
\hline
x_{1,1,2} \;;\; x_{2,1,2} \;;\; x_{3,1,2} \;;\; \ldots\ldots\; x_{n',1,2} \\
x_{1,2,2} \;;\; x_{2,2,2} \;;\; x_{3,2,2} \;;\; \ldots\ldots\; x_{n',2,2} \\
x_{1,3,2} \;;\; x_{2,3,2} \;;\; x_{3,3,2} \;;\; \ldots\ldots\; x_{n',3,2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{1,n'',2} \;;\; x_{2,n'',2} \;;\; x_{3,n'',2} \;;\; \ldots\ldots\; x_{n',n'',2} \\
\hline
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\hline
x_{1,1,n'''} \;;\; x_{2,1,n'''} \;;\; x_{3,1,n'''} \;;\; \ldots\ldots\; x_{n',1,n'''} \\
x_{1,2,n'''} \;;\; x_{2,2,n'''} \;;\; x_{3,2,n'''} \;;\; \ldots\ldots\; x_{n',2,n'''} \\
x_{1,3,n'''} \;;\; x_{2,3,n'''} \;;\; x_{3,3,n'''} \;;\; \ldots\ldots\; x_{n',3,n'''} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{1,n'',n'''} \;;\; x_{2,n'',n'''} \;;\; x_{3,n'',n'''} \;;\; \ldots\ldots\; x_{n',n'',n'''}
\end{array}
$$

e che possono rappresentare le distanze da un piano di un gran numero di punti fisici distribuiti senza regola nello spazio, come apparirà meglio in progresso. Si può quì pure immaginare una nuova serie tripla i cui termini siano rispettivamente eguali a quelli della precedente, e siano tutti dedotti da una sola funzione $x(a, b, c)$ a tre variabili a, b, c aventi valori iniziali arbitrarii l, m, n, e crescenti di aumenti arbitrarii α, β, γ. La nuova serie tripla è

$$
\begin{array}{ll}
x(l,m,n); \ldots\ldots\ldots\ldots & x(l+(n'-1)\alpha,\ m,n) \\
x(l,m+\beta,n); \ldots\ldots\ldots\ldots & x(l+(n'-1)\alpha,\ m+\beta,n) \\
x(l,m+2\beta,n); \ldots\ldots\ldots\ldots & x(l+(n'-1)\alpha,\ m+2\beta,n) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
x(l,m+(n''-1)\beta,n); \ldots\ldots & x(l+(n'-1)\alpha,m+(n''-1)\beta,n) \\
\hline
x(l,m,n+\gamma); \ldots\ldots\ldots\ldots & x(l+(n'-1)\alpha,m,\ n+\gamma) \\
x(l,m+\beta,n+\gamma); \ldots\ldots\ldots & x(l+(n'-1)\alpha,m+\beta,n+\gamma) \\
(11)\ x(l,m+2\beta,n+\gamma); \ldots\ldots\ldots & x(l+(n'-1)\alpha,m+2\beta,n+\gamma) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
x(l,m+(n''-1)\beta,n+\gamma); \ldots\ldots & x(l+(n'-1)\alpha,m+(n''-1)\beta,n+\gamma) \\
\hline
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\hline
x(l,m,n+(n'''-1)\gamma); \ldots\ldots & x(l+(n'-1)\alpha,m,n+(n'''-1)\gamma) \\
x(l,m+\beta,n+(n'''-1)\gamma); \ldots\ldots & x(l+(n'-1)\alpha,m+\beta,n+(n'''-1)\gamma) \\
x(l,m+2\beta,n+(n'''-1)\gamma); \ldots\ldots & x(l+(n'-1)\alpha,m+2\beta,n+(n'''-1)\gamma) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
x(l,m+(n''-1)\beta,n+(n'''-1)\gamma); \ldots & x(l+(n'-1)\alpha,m+(n''-1)\beta,n+(n'''-1)\gamma)
\end{array}
$$

La dimostrazione si fa alla stessa maniera; si prende una funzione arbitraria $\psi(i, j, k, a, b, c)$ delle tre variabili a, b, c e di tre indici i, j, k; si prende anche un numero $n'n''n'''$ di coefficienti incogniti da determinarsi e si compone l'espressione

$$
\begin{array}{ll}
x(a,b,c)= & A_{1,1,1}\ \psi(1,1,1,a,b,c) + \ldots + A_{n',1,1}\ \psi(n',1,1,a,b,c) \\
 & +A_{1,2,1}\ \psi(1,2,1,a,b,c) + \ldots + A_{n',2,1}\ \psi(n',2,1,a,b,c) \\
 & +A_{1,3,1}\ \psi(1,3,1,a,b,c) + \ldots + A_{n',3,1}\ \psi(n',3,1,a,b,c) \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & +A_{1,n'',1}\ \psi(1,n'',1,a,b,c) + \ldots + A_{n',n'',1}\ \psi(n',n'',1,a,b,c) \\
\hline
 & +A_{1,1,2}\ \psi(1,1,2,a,b,c) + \ldots + A_{n',1,2}\ \psi(n',1,2,a,b,c) \\
(12) & +A_{1,2,2}\ \psi(1,2,2,a,b,c) + \ldots + A_{n',2,2}\ \psi(n',2,2,a,b,c) \\
 & +A_{1,3,2}\ \psi(1,3,2,a,b,c) + \ldots + A_{n',3,2}\ \psi(n',3,2,a,b,c) \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & +A_{1,n'',2}\ \psi(1,n'',2,a,b,c) + \ldots + A_{n',n'',2}\ \psi(n',n'',2,a,b,c) \\
\hline
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\hline
 & +A_{1,1,n'''}\ \psi(1,1,n''',a,b,c) + \ldots + A_{n',1,n'''}\ \psi(n',1,n''',a,b,c) \\
 & +A_{1,2,n'''}\ \psi(1,2,n''',a,b,c) + \ldots + A_{n',2,n'''}\ \psi(n',2,n''',a,b,c) \\
 & +A_{1,3,n'''}\ \psi(1,3,n''',a,b,c) + \ldots + A_{n',3,n'''}\ \psi(n',3,n''',a,b,c) \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & +A_{1,n'',n'''}\ \psi(1,n'',n''',a,b,c) + \ldots + A_{n',n'',n'''}\ \psi(n',n'',n''',a,b,c)
\end{array}
$$

S' intende con questa formato un numero $n'n''n'''$ di equazioni contenenti diverse combinazioni di valori di a, b, c indicate dai successivi termini della (11), e i cui primi membri sono i successivi termini della (10). Dalla soluzione di queste equazioni s' immaginano dedotti i valori di tutti i coefficienti incogniti, e sostituiti nella (12), la quale diventa la funzione ricercata.

Gli aumenti α, β, γ avranno valori estremamente piccoli quando i numeri n', n'', n''' essendo grandissimi vuolsi che i prodotti $(n'-1)\alpha$, $(n''-1)\beta$, $(n'''-1)\gamma$ rimangano quantità finite.

La (12) potrà scriversi

$$(13) \qquad x(a,b,c)=\sum_{i=1}^{i=n'}\sum_{j=1}^{j=n''}\sum_{k=1}^{k=n'''} A_{i,j,k}\psi(i,j,k,a,b,c)$$

ed avrà la stessa proprietà rimarcabile già notata per le (5), (9). Questa funzione $x(a, b, c)$ che rende i termini della (11) rispettivamente eguali ai termini della (10), non solo è possibile, ma lo è in infiniti modi a motivo della funzione arbitraria $\psi(i, j, k, a, b, c)$.

6. Insisto perchè si fissi bene in che consiste il principio analitico di questo paragrafo: consiste nel poter considerare gli $n'n''n'''$ valori di una serie tripla (10) non marcati per solo giuoco d'indici ma realmente dedotti da una sola funzione $x(a, b, c)$ di tre variabili crescenti di aumenti costanti. La composizione di questa funzione sarà in atto inassegnabile: non importa; il suo concetto è fermato oso dire con chiarezza: essa riduce in certo modo alla regolarità una successione di valori saltanti senza regola.

La detta successione di valori poteva essere indicata con una serie semplice

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

ove n è numero grandissimo, e fu un nostro arbitrio l'averla

disposta sotto la forma di una serie tripla come la (10) mettendo indici opportuni per quella disposizione. Avevamo però una ragione di far ciò, perchè volevamo applicarla ad un esempio in cui un numero n di punti fisici ci è dato da un prodotto $n'n''n'''$ di tre numeri ciascuno dei quali è maggiore d'ogni assegnabile. Tali sono i punti fisici dei quali consta ogni corpo, potendosene contare un numero maggiore d'ogni assegnabile in tutte tre le dimensioni. Ben so che il numero non è assolutamente infinito in nessuna dimensione, e che anche il prodotto di tutti e tre questi numeri n', n'', n''' non è assolutamente infinito, ma bisogna mantenere i concetti della nostra mente, per cui i diversi ordini degli infiniti non sono se non numeri estremamente grandi moltiplicati fra loro. Se invece di un prodotto $n'n''n'''$ di tre numeri estremamente grandi mettessimo un solo n numero grandissimo, perderemmo l'idea delle tre dimensioni di un corpo, e sarebbe distrutta la natura stessa del corpo che prenderebbe la configurazione di una linea fisica: il progresso schiarirà questo discorso.

7. Ora potrà il lettore comprendere a che tende il principio analitico esposto in questo primo paragrafo. Fino a questi ultimi tempi i corpi solidi e fluidi sottoposti alla formola dell'analisi si dissero continui, tali cioè che i valori delle coordinate di ogni punto fisico differissero dai valori delle coordinate dei punti circostanti meno di ogni quantità assegnabile. Presentemente, osservata più da vicino l'interna conformazione della materia, si ammettono fra i punti del corpo pori o interstizj vuoti od occupati da altra materia, e i punti stessi distribuiti in maniere particolari a filamenti, a falde, a strati, ec. Per adattare l'analisi alla rappresentazione di questo stato al tutto conforme alla natura, io non assumo alcuna ipotesi: mi basta ammettere che i valori delle coordinate x, y, z dei diversi punti fisici del corpo possano saltare in maniera irregolare, ed avere distanze più o meno insensibili, ed anche finite. Ciò è quanto ottengo mediante l'esposto al numero 5.: io salvo l'irregolarità voluta dalla discontinuità della materia,

e insieme colla riduzione delle coordinate x, y, z alla composizione in a, b, c ottengo una regolarità nelle variabili semplici su cui riposano le ultime nostre considerazioni, regolarità necessaria pel meccanismo del calcolo, quale è adoperato da Lagrange nella Meccanica Analitica.

8. Regolarizzare i valori irregolari delle coordinate x dei diversi punti di un corpo (dicasi lo stesso delle y, e delle z) mediante le considerazioni del n.° 5, supponendo cioè alle x, y, z una composizione incognita e il più delle volte inassegnabile in a, b, c variabili crescenti regolarmente, è un' operazione puramente mentale intorno a cui non può erigersi alcuna controversia. Quantunque però non sia necessario, possiamo dare un appoggio a questa speculazione, dando una rappresentazione alle variabili semplici a, b, c. Possiamo dire ch' esse significano le coordinate dei diversi punti del corpo in una disposizione ideale antecedente allo stato vero nella quale la materia del corpo stesso era contenuta in un parallelepipedo $(\lambda-l)(\mu-m)(\nu-n)$ (avendo posto per brevità $\lambda=l+(n'-1)\alpha$; $\mu=m+(n''-1)\beta$; $\nu=n+(n'''-1)\gamma$) e tutte le a non diversificano fra loro che di aumenti eguali ad α, le b di aumenti eguali a β, le c di aumenti eguali a γ. È sempre lecito (si mediti bene) concepire i diversi punti del corpo tolti da queste sedi di disposizione uniforme, o istantaneamente, o in un tempo ideale, qualunque ne sia stato il mezzo, e trasportati a quello stato di maggiore o minore vicinanza fra loro, stato di disposizione saltante e irregolare, in cui si trovano nel corpo come è in natura e nel tempo in cui è sottoposto alla nostra considerazione; le x, y, z coordinate attuali saranno funzioni di quelle a, b, c coordinate ideali.

9. Prevedo un' opposizione. A che giova, si dirà, questo complicare le coordinate dei diversi punti riducendole ad una composizione per altre quantità che voi stesso chiamate inassegnabile? Potrà mai cavarsi alcun vantaggio da una considerazione che ci lascia una difficoltà invincibile? Rispondo, che giova moltissimo perchè, come ho già detto, si ha in questa

riduzione l' unico mezzo con cui l' analisi si attacca alle questioni meccaniche in discorso. Convengo poi che così si vengono primieramente a trattare le equazioni generali del moto e dell' equilibrio sotto tali forme che contenendo le a, b, c non sono direttamente di alcun uso. Ma sarà mio impegno mostrare in un terzo paragrafo un altro principio analitico per mezzo del quale si elimina ogni traccia delle composizione in a, b, c e otteniamo formole a cui possiamo direttamente applicare i numeri. Così le a, b, c dopo averci reso l' eminente servigio di fornirci il mezzo di scrivere le attuali questioni meccaniche in analisi, usciranno di vista quando non ci saranno più opportune. E stava qui appunto la difficoltà capitale. Il calcolo voleva una regolarità che non sembrava concessa della discontinuità della materia, e l' applicazione pratica dalle formole le voleva tali da poter riavere direttamente i valori attuali delle coordinate quantunque fra di loro differenti in maniera irregolare. L' artificio con cui la difficoltà si vince sta nell' uso simultaneo dei due principj esposti nei paragrafi primo e terzo di questa Memoria.

10. Ho parlato di punti fisici dei quali consta ogni corpo; ma non ho ancora detto bene che cosa intenda per essi. Newton voleva i corpi omogenei formati di particelle piccolissime elementari tutte eguali fra loro, diversamente configurate nei diversi corpi, impenetrabili, indestruttibili. Boscovich riducea gli elementi dei corpi a punti inestesi non in assoluto contatto. Ecco due ipotesi: sono meditazioni di sublimi intelletti, sono più o meno corrispondenti ai fatti fisici, ma sono ipotesi: ed è pure spiacevole il vedere qualche cosa d'ipotetico per fondamento di una scienza che dovrebbe dare risultamenti certi. Io vorrei schivare ogni ipotesi, e però i punti fisici, che ora chiamo molecole, sono per me gli *elementi di un corpo che possono considerarsi tutti eguali fra loro: tali che i nostri sensi non vi possano marcare distinzioni di parti: e in numero tale che possa considerarsi maggiore d' ogni assegnabile.* Non definisco se dette molecole siano estese o ines-

tese, se siano in contatto o no: l'analisi che darò può quì lasciare una indecisione. Spiego di più il mio pensiero. Un corpo può essere di tal natura che permetta di considerarlo ridotto a tante particelle tutte eguali fra loro ed ancora estese, ma di tale estensione che non appaja ai nostri sensi. Il miglio, di cui parla anche il Boscovich, è un corpo i cui granelli hanno una estensione che in verità non isfugge ai nostri sensi, ma può ammettersi per approssimazione a modo di similitudine. Quei granelli, la cui estensione si suppone per un momento sfuggevole ai sensi, sono per me le molecole di quel corpo. In un altro corpo per giungere all' eguaglianza delle molecole bisognerà immaginare una inoltratissima divisione, fosse anche bisogno di arrivare fino ai punti inestesi di Boscovich. Io non mi curo del dove si spinga la divisione: dal momento che un corpo è ridotto a particelle eguali il cui numero può considerarsi maggiore d' ogni assegnabile, siano poi esse estese o inestese, quelle sono per me le molecole del corpo. Pongo un' altra considerazione. Gli elementi dei corpi che ora ho chiamato molecole, sono anche per me invariabili, e in ciò mi avvicino alla sentenza del Newton: ma questa invariabilità non è assoluta, è per me relativa alla questione di cui intendo di occuparmi; è, per fare una similitudine, come l' idea della rigidità in meccanica, la quale è solo relativa alla grandezza delle forze considerate. Una tale invariabilità è così un concetto puramente mentale, e non una ipotesi fisica; le molecole sono invariabili in quanto sono l'ultimo appoggio delle mie considerazioni: ma sarebbe in mio arbitrio spingere indifferentemente più innanzi l' idea della loro composizione, se ne avessi bisogno.

11. Prima di terminare questo paragrafo farò osservare che in un luogo del paragrafo seguente mi occorrerà usare del principio del n.° 5. con una estensione la quale potrebbe allora fare una difficoltà che qui è bene di prevenire. Nel n.° 5. ho mostrata la possibilità di una sola funzione $x(a,b,c)$ che mediante le combinazioni dei valori attribuiti alle a, b, c

nel prospetto (11) somministri l'un dopo l'altro i valori di tutti i termini della serie tripla (10): ora mi bisogna concepire la possibilità di una funzione $\xi(a, b, c)$ delle stesse a, b, c, che attribuendo a queste variabili la stessa successione di valori, non mi presenti i successivi termini della serie tripla (10), ma quelli

$$\xi_{1,1,1}\,;\ \xi_{2,1,1}\ \ldots\ldots\ \xi_{n',1,1}\,;\ \xi_{1,2,1}\,;\ \text{ec.}$$

di un'altra serie tripla i quali abbiano coi termini della (10) una diversità notabile. I termini della (10) si consideravano determinati, anzi dati in numeri; questi nuovi $\xi_{1,1,1}$; $\xi_{2,1,1}$; ec. voglionsi quantità letterali indeterminate e fra di loro affatto indipendenti. Se ben si riflette all'andamento della dimostrazione per provare la possibilità della $x(a,b,c)$ si vedrà che regge egualmente per provare la possibilità della $\xi(a, b, c)$: quest'ultima avrà una composizione come la $x(a, b, c)$ colla differenza che dove la $x(a, b, c)$ ha per sue costanti quantità determinate, la $\xi(a, b, c)$ ha invece quantità indeterminate. La $\xi(a, b, c)$ per $a=l$, $b=m$, $c=n$ diventerà $\xi_{1,1,1}$; per $a=l+\alpha$, $b=m$, $c=n$ diventerà $\xi_{2,1,1}$ indipendente dalla $\xi_{1,1,1}$ e da ciascuna delle quantità simili seguenti: così via via.

Avrei potuto, giovandomi di quanto s'insegna nel calcolo delle variazioni, procedere altrimenti per sostenere insieme nella $\xi(a, b, c)$ l'idea di una composizione correlativa a quella della $x(a,b,c)$ e l'idea di una indipendenza fra tutti i valori da lei risultanti quando le a, b, c prendono valori determinati. Ma potendo arrivare allo stesso scopo per considerazioni rigorose ed ordinarie, ho creduto meglio non complicare con tali nuovi risguardi la mia teorica.

§. II.°

Nuova Analisi del moto e dell' equilibrio de' corpi omogenei considerati come ammassi di molecole.

12. Non ammetto in questa analisi alcuna equazione di condizione cui debbano soddisfare le coordinate dei diversi punti del corpo. Questa maniera con cui Lagrange cercò di esprimere i legami fisici e reciproci delle diverse particelle de' corpi, parve al Sig. Poisson (1) troppo astratta: egli vorrebbe ridurre tutto alle sole azioni molecolari. Io mi conformo a questo voto non ammettendo appunto oltre le forze esterne, che un'azione reciproca di attrazione o repulsione fra le diverse molecole espressa per una funzione incognita della distanza. Non è già che io creda da abbandonarsi l'altra maniera usata da Lagrange, chè anzi io sono d'avviso che eziandio con essa si possano vantaggiosamente trattare molte moderne questioni, ed ho già pubblicato un saggio di un mio lavoro che può in parte provare questa mia asserzione (2). Quì però non assumo che azioni molecolari tanto più volontieri, in quanto che l'equazione generale meccanica da cui partirò si attacca così a quella parte della Meccanica Analitica su cui non può cadere alcuna ragionevole controversia, e prescindo da tutto quanto havvi in quella grand'opera non ancor sanzionato dal consenso universale de' Geometri.

Chiamando

$$1, 2, 3, 4, \ldots n$$

i punti fisici del corpo nei quali non suppongo differenza di massa (rivedi n.° 10);

$$x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots x_n, y_n, z_n$$

---

(1) Memoires de l' Institut. de France. T. VIII. p. 361.

(2) Opuscoli Matematici e Fisici. T. I. p. 201. Milano 1832.

le rispettive coordinate ortogonali alla fine di un tempo t;

$$X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; \ldots X_n, Y_n, Z_n$$

le rispettive componenti secondo i tre assi della forza acceleratrice esterna alla fine dello stesso tempo t;

$$S_{1,2}, S_{1,3}, \ldots S_{1,n}; S_{2,3}, \ldots S_{2,n}; \text{ ec.}$$

le reciproche distanze dei punti scritte così per abbreviazione invece dei radicali

$$(14)\quad \begin{array}{c} \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}, \ldots \sqrt{(x_n-x_1)^2+(y_n-y_1)^2+(z_n-z_1)^2} \\ \sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2+(z_3-z_2)^2}, \ldots \sqrt{(x_n-x_2)^2+(y_n-y_2)^2+(z_n-z_2)^2} \\ \text{ecc.} \qquad \text{ecc.} \qquad \text{ecc.} \end{array}$$

e per ultimo $\phi(S)$ in generale la funzione incognita della distanza esprimente l'azione reciproca dei punti.

Dietro il solo principio del parallelogrammo delle forze e le prime nozioni del calcolo delle variazioni si stabilisce prontamente l'equazione generale del moto di tutto il sistema. Citerò la mia Memoria sui principj della Meccanica Analitica di Lagrange premiata dall' Istituto Italiano nel 1824 (vedi p. 34 e seguenti); si può anche ricorrere alla Meccanica Celeste di Laplace T. I. pag. 38. L' equazione è la seguente

$$
(15)\quad \left.\begin{array}{l}
\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}-X_1\right)\delta x_1+\left(\frac{d^2y_1}{dt^2}-Y_1\right)\delta y_1+\left(\frac{d^2z_1}{dt^2}-Z_1\right)\delta z_1 \\
+\left(\frac{d^2x_2}{dt^2}-X_2\right)\delta x_2+\left(\frac{d^2y_2}{dt^2}-Y_2\right)\delta y_2+\left(\frac{d^2z_2}{dt^2}-Z_2\right)\delta z_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+\left(\frac{d^2x_n}{dt^2}-X_n\right)\delta x_n+\left(\frac{d^2y_n}{dt^2}-Y_n\right)\delta y_n+\left(\frac{d^2z_n}{dt^2}-Z_n\right)\delta z_n \\
+\varphi(S_{1,2})\delta S_{1,2}+\varphi(S_{1,3})\delta S_{1,3}+\ldots+\varphi(S_{1,n})\delta S_{1,n} \\
+\varphi(S_{2,3})\delta S_{2,3}+\ldots+\varphi(S_{2,n})\delta S_{2,n} \\
\vdots \\
+\varphi(S_{n-1,n})\delta S_{n-1,n}
\end{array}\right\}=0
$$

Si rammenti che tutte le δx_1, δy_1, δz_1, δx_2, δy_2, δz_2; ec. non debbono altrimenti intendersi che quantità indeterminate e fra di loro indipendenti, i cui coefficienti si fanno separatamente zero, avendosi così tre volte tante equazioni quanto è il numero dei punti. Il simbolo δ poi precedente le

$$S_{1,2},\ S_{1,3},\ S_{2,3},\ \ldots\ \text{ec.}$$

(essendo queste quantità null'altro che i radicali (14)) indica una differenziazione al modo solito che, quando si eseguisce, applica la caratteristica δ a ciascuna delle $x_1, x_2, \ldots y_1, y_2 \ldots$ec. componenti quei radicali, talchè si accrescono i coefficienti totali delle $\delta x_1, \delta x_2, \ldots \delta y_1, \delta y_2, \ldots$ da eguagliarsi a zero.

13. Consideriamo la precedente (15) fatta di due parti: di una prima che abbraccia tutti i trinomj contenenti le forze acceleratrici esterne per ciascun punto: e di una seconda che comprende tutti i termini portati dalle forze interne. Quanto alla prima se poniamo per brevità in generale

$$(16)\quad \Lambda = \left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\delta x + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\delta y + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\delta z$$

può esprimersi colla serie

$$(17)\qquad \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 + \ldots\ldots + \Lambda_n$$

la quale, come si disse al n.° 6, dovrà cambiarsi colla espressione di una serie tripla, giacchè il numero grandissimo n eguaglia $n'n''n'''$, cioè può considerarsi il prodotto di tre fattori tutti e tre numeri grandissimi. In seguito col raziocinio del n.°. 5. si ridurrà la serie tripla ad un' altra simile, i cui termini siano tutti dedotti da una sola funzione $\Lambda(a,b,c)$ di tre variabili a, b, c. Questa $\Lambda(a, b, c)$ non è una funzione che debba immaginarsi composta di nuovo alla maniera indicata nello stesso numero 5. ; essa è il secondo membro della precedente (16) in cui le x, y, z (che appajono esplicitamente nei differenziali secondi presi per rapporto al tempo ed entrano implicitamente nelle X , Y , Z) si considerino ridotte funzioni di a, b, c giusta l' esposto ai n. 5, 6, 7, 8; e le δx, δy, δz similmente dietro il già detto al n.° 11. A ben comprendere quest' ultima asserzione bisogna rammentarsi che tali δx, δy, δz non sono che tre quantità indeterminate le quali si indicano così per comodo, a fine di richiamare le x, y, z cui rispettivamente si riferiscono, ma che meglio si esprimerebbero con tre nuove lettere ξ, η, ζ; che queste ξ, η, ζ debbono adattarsi successivamente ai diversi punti del sistema diventando rispettivamente

$$\xi_{1,1,1}\,,\ \eta_{1,1,1}\,,\ \zeta_{1,1,1}\ ;\ \xi_{2,1,1}\,,\ \eta_{2,1,1}\,,\ \zeta_{2,1,1}\ ;\ \text{ec.}$$

che esse cioè sono le $\xi(a, b, c)$, $\eta(a, b, c)$, $\zeta(a, b, c)$ di cui si è discorso al n.° 11.

Dopo ciò mettendo una somma tripla invece della serie tripla che le è eguale, non vi sarà difficoltà a riconoscere che

la prima parte della formola generale (15) eguaglia l'espressione

$$(18)\quad \sum_{a=l}^{a=\lambda}\sum_{b=m}^{b=\mu}\sum_{c=n}^{c=\nu}\left\{\left(\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)\delta x+\left(\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)\delta y+\left(\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)\delta z\right\}$$

essendo come al n.° 8. per abbreviazione

$$(19)\qquad \lambda=l+(n'-1)\alpha\,;\ \mu=m+(n''-1)\beta\,;\ \nu=n+(n'''-1)\gamma$$

Quest' espressione intanto si intende, in quanto le nostre considerazioni sono spinte all' interna composizione incognita delle x, y, z per quelle coordinate a, b, c che si riferiscono ad uno stato antecedente ideale di uniforme distribuzione.

14. Per la seconda parte della (15) contenente tutti i termini portati dalle forze interne, bisogna primieramente osservare che le successive linee orizzontali della medesima, le quali successivamente scemano di un termine, possono ridursi ad avere tutte uno stesso numero di termini e che quindi tutta quella quantità può scriversi

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\varphi(S_{1,1})\delta S_{1,1}+\tfrac{1}{2}\varphi(S_{1,2})\delta S_{1,2}+\ldots+\tfrac{1}{2}\varphi(S_{1,n})\delta S_{1,n}\\
&+\tfrac{1}{2}\varphi(S_{2,1})\delta S_{2,1}+\tfrac{1}{2}\varphi(S_{2,2})\delta S_{2,2}+\ldots+\tfrac{1}{2}\varphi(S_{2,n})\delta S_{2,n}\\
(20)\quad &+\tfrac{1}{2}\varphi(S_{3,1})\delta S_{3,1}+\tfrac{1}{2}\varphi(S_{3,2})\delta S_{3,2}+\ldots+\tfrac{1}{2}\varphi(S_{3,n})\delta S_{3,n}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\tfrac{1}{2}\varphi(S_{n,1})\delta S_{n,1}+\tfrac{1}{2}\varphi(S_{n,2})\delta S_{n,2}+\ldots+\tfrac{1}{2}\varphi(S_{n,n})\delta S_{n,n}.
\end{aligned}$$

Ciò apparirà se si riflette 1.° che i termini moltiplicati per

$$\delta S_{1,1},\quad \delta S_{2,2},\quad \delta S_{3,3},\ \ldots\ \delta S_{n,n}$$

sono introdotti per una regolarità di progressione negli indici, ma è come non vi fossero, essendo zero identicamente le

$S_{1,1}$, $S_{2,2}$, ec. e le loro variazioni, il che riesce manifesto mediante le espressioni (14) dei radicali equivalenti; 2.° che gli altri termini nella precedente (20) possono riunirsi a due a due: così per essere

$$S_{2,1}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

i due termini

$$\tfrac{1}{2}\phi(S_{1,2})\delta S_{1,2}+\tfrac{1}{2}\phi(S_{2,1})\delta S_{2,1}$$

equivalgono al solo $\phi(S_{1,2})\delta_{1,2}$; similmente

$$\tfrac{1}{2}\phi(S_{1,3})\delta S_{1,3}+\tfrac{1}{2}\phi(S_{3,1})\delta S_{3,1}$$

equivalgono al solo $\phi(S_{1,3})\delta S_{1,3}$, e così via, via. Con queste due avvertenze basta poca attenzione per comprendere che la precedente (20) si contrae nella seconda parte della (15). Si può anche osservare che ci saremmo con facili operazioni formata altrimenti l'espressione (20), se scrivendo la seconda parte della (15) avessimo considerata la sola azione di ogni punto sopra ogni punto senza la reazione di questi su di esso: il che importava di contemplare sempre tutti i punti per ogni linea orizzontale ivi scritta.

Prendiamo la (*p*)*esima* delle linee orizzontali formanti la (20): essa è

$$(21)\qquad \tfrac{1}{2}\phi(S_{p,1})\delta S_{p,1}+\ldots+\tfrac{1}{2}\phi(S_{p,q})\delta S_{p,q}+\ldots+\tfrac{1}{2}\phi(S_{p,n})\delta S_{p,n}$$

dove q è una variabile che prende tutti i valori interi da 1 a n inclusivamente, e p rimane costante, essendo poi (espressioni (14))

$$(22)\qquad S_{p,q}=\sqrt{(x_q-x_p)^2+(y_q-y_p)^2+(z_q-z_p)^2}.$$

Questa (21) è una serie composta dello stesso numero di termini della (17) e come essa può ridursi ad una serie tripla rappresentabile quindi per una sommatoria tripla quando le x, y, z si considerino al modo solito funzioni di a, b, c. Quì però occorrono due sorta di queste x, y, z; le une costanti, essendo le coordinate del punto generico che agisce su tutti gli altri, le esprimeremo per $x(a, b, c)$, $y(a, b, c)$, $z(a, b, c)$; le altre sono variabili e valgono a percorrere tutti i punti del corpo, tenuto fermo in vista l'anzidetto: le rappresenteremo per $x(f, g, h)$, $y(f, g, h)$, $z(f, g, h)$, intendendo che la composizione di queste seconde per f, g, h sia quella stessa delle precedenti per a, b, c. La variabilità delle f, g, h è poi quella stessa delle a, b, c nell'espressione (18), comincia da l, m, n, e va per gli aumenti α, β, γ fino ai secondi limiti λ, μ, ν. Così la (22) quadrata si muta nella

$$
\begin{aligned}
S^2 = & \left[x(f, g, h) - x(a, b, c) \right]^2 \\
(23) \qquad & + \left[y(f, g, h) - y(a, b, c) \right]^2 \\
& + \left[z(f, g, h) - z(a, b, c) \right]^2
\end{aligned}
$$

e la (21) è rappresentata dalla sommatoria tripla

$$
(24) \qquad \sum_{f=l}^{f=\lambda} \sum_{g=m}^{g=\mu} \sum_{h=n}^{h=\nu} \tfrac{1}{2}\varphi(S)\delta S.
$$

Se in questa mettansi successivamente per a, b, c i valori l, m, n; $l+\alpha, m, n$; $l+2\alpha, m, n$; ec. fino ad esaurire tutte le combinazioni della serie tripla (11), le successive espressioni così cavate dalla (24) saranno le somme delle successive serie orizzontali componenti la (20) e potranno disporsi in una serie tripla della stessa indole della (11). Adunque la somma di tutte queste somme sarà una somma sestupla, cioè

$$
(25) \qquad \sum_{a=l}^{a=\lambda} \sum_{b=m}^{b=\mu} \sum_{c=n}^{c=\nu} \sum_{f=l}^{f=\lambda} \sum_{g=m}^{g=\mu} \sum_{h=n}^{h=\nu} \tfrac{1}{2}\varphi(S)\delta S
$$

dove la S tanto in $\varphi(S)$ come in δS ha il significato postoci dalla (23): le prime somme sono prese per f, g, h cogli aumenti α, β, γ, e le seconde per a, b, c cogli stessi aumenti α, β, γ.

Così l'espressione (25) equivale alla seconda parte della formola generale (15).

15. Questa formola generale, attese le (18), (25) diventa

$$\sum_{a=l}^{a=\lambda}\sum_{b=m}^{b=\mu}\sum_{c=n}^{c=\nu}\left\{\left(\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)\delta x+\left(\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)\delta y+\left(\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)\delta z\right.$$

$$\left.+\sum_{f=l}^{f=\lambda}\sum_{g=m}^{g=\mu}\sum_{h=n}^{h=\nu}\tfrac{1}{2}\varphi(S)\delta S\right\}=0.$$

Una somma definita può cangiarsi in un integrale finito definito avente il primo limite eguale al primo della somma e il secondo eguale al secondo della somma accresciuto dell'aumento finito (*). Però la precedente formula generale (vedi per intendere chiaramente la notazione il luogo citato) si scriverà senza alterazione

$$\sum_{l}^{\lambda+\alpha}\Delta a\sum_{m}^{\mu+\beta}\Delta b\sum_{n}^{\nu+\gamma}\Delta c\left\{\left(\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)\delta x+\left(\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)\delta y+\left(\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)\delta z\right.$$

$$(26)\qquad\left.+\sum_{f=l}^{f=\lambda}\sum_{g=m}^{g=\mu}\sum_{h=n}^{h=\nu}\tfrac{1}{2}\varphi(S)\delta S\right\}=0.$$

Ecco la formola che contiene tutta la meccanica molecolare: essa merita un attento studio. La S vi ha il significato (23); la δS deducesi dalla stessa (23) che dà

$$(27)\qquad \begin{aligned} S\delta S &= \xi\delta\left[x(f,g,h)-x(a,b,c)\right]\\ &+\eta\delta\left[y(f,g,h)-y(a,b,c)\right]-\zeta\delta\left[z(f,g,h)-z(a,b,c)\right]\end{aligned}$$

(*) Vedi il T. XX. di questa Società pag. 632.

avendo posto per abbreviare

$$\xi = x(f, g, h) - x(a, b, c)$$

$$(28) \qquad \eta = y(f, g, h) - y(a, b, c)$$

$$\zeta = z(f, g, h) - z(a, b, c).$$

Tutta la difficoltà sta nella valutazione della variazione

$$\delta\,[\,x(f, g, h) - x(a, b, c)\,]$$

e delle altre due simili, giacchè ivi la caratteristica δ copre un binomio i cui due termini sembrano di diversa natura. Si vince tale difficoltà mediante una trasformazione che costituisce uno dei passi principali di questa nuova analisi.

16. Una funzione $x(f, g, h)$ di tre variabili f, g, h può aversi in serie per la stessa x ove al luogo delle f, g, h siano tre altre quantità qualunque a, b, c: la serie contiene le differenze finite di questa seconda x per a, b, c, prime, seconde ec: e le f, g, h non compajono che nei coefficienti (*). Ecco la formola

$$x(f, g, h) = x(a, b, c) + \frac{f-a}{\alpha}\Delta_a x + \frac{g-b}{\beta}\Delta_b x + \frac{h-c}{\gamma}\Delta_c x$$

$$+ \frac{(f-a)(f-a-\alpha)}{2\alpha^2}\Delta^2_a x + \frac{(f-a)(g-b)}{\alpha\beta}\Delta_a\Delta_b x + \frac{(f-a)(h-c)}{\alpha\gamma}\Delta_a\Delta_c x$$

$$+ \frac{(g-b)(g-b-\beta)}{2\beta^2}\Delta^2_b x + \frac{(g-b)(h-c)}{\beta\gamma}\Delta_b\Delta_c x + \frac{(h-c)(h-c-\gamma)}{2\gamma^2}\Delta^2_c x + \text{ec.}$$

dove nell' eccetera seguono le differenze terze e le più elevate. Sostituendo il secondo membro di questa equazione nella variazione $\delta[x(f, g, h) - x(a, b, c)]$, la caratteristica δ andrà

(*) Lacroix. Traité du calcul etc. Tom. III. pag. 60.

a colpire quantità tutte della stessa natura, cioè, giusta l'indole del calcolo delle variazioni, le sole differenze $\Delta_a x$, $\Delta_b x$, ec. e secondo s'insegna in quel calcolo potrà trasportarsi sotto i simboli delle dette differenze aderente alla stessa x. Pertanto la (27) si muterà nella seguente

$$
\begin{aligned}
S\partial S = {} & \xi\frac{f-a}{\alpha}\Delta_a\partial x + \xi\frac{g-b}{\beta}\Delta_b\partial x + \zeta\frac{h-c}{\gamma}\Delta_c\partial x \\
& + \xi\frac{(f-a)(f-a-\alpha)}{2\alpha^2}\Delta^2_a\partial x + \xi\frac{(f-a)(g-b)}{\alpha\beta}\Delta_a\Delta_b\partial x + \xi\frac{(f-a)(h-c)}{\alpha\gamma}\Delta_a\Delta_c\partial x \\
& + \xi\frac{(g-b)(g-b-\beta)}{2\beta^2}\Delta^2_b\partial x + \xi\frac{(g-b)(h-c)}{\beta\gamma}\Delta_b\Delta_c\partial x + \xi\frac{(h-c)(h-c-\gamma)}{2\gamma^2}\Delta^2_c\partial x \\
(29) \quad & + \xi\frac{(f-a)(f-c-\alpha)(f-a-2\alpha)}{2.3\alpha^3}\Delta^3_a\partial x + \xi\frac{(f-a)(f-a-\alpha)(g-b)}{2\alpha^2\beta}\Delta^2_a\Delta_b\partial x + \text{ec.} \\
& + (\text{quantità simile con } y \text{ per } x, \text{ e } \eta \text{ per } \xi) \\
& + (\text{quantità simile con } z \text{ per } x, \text{ e } \zeta \text{ per } \xi).
\end{aligned}
$$

Pongasi per compendio il segno

(30) $\int$ in luogo del segno $\sum\limits_{f=l}^{f=\lambda}\sum\limits_{g=m}^{g=\mu}\sum\limits_{h=n}^{h=\nu}$

facciasi

(31) $$\psi(S) = \tfrac{1}{2}\frac{\phi(S)}{S};$$

e si assumano le seguenti denominazioni

$$(1,x) = \frac{1}{\alpha} \int \psi(S)\xi(f-a)$$

$$(2,x) = \frac{1}{\beta} \int \psi(S)\xi(g-b)$$

$$(3,x) = \frac{1}{\gamma} \int \psi(S)\xi(h-c)$$

$$(4,x) = \frac{1}{2\alpha^2} \int \psi(S)\xi(f-a)(f-a-\alpha)$$

(32) $$(5,x) = \frac{1}{\alpha\beta} \int \psi(S)\xi(f-a)(g-b)$$

$$(6,x) = \frac{1}{\alpha\gamma} \int \psi(S)\xi(f-a)(h-c)$$

$$(7,x) = \frac{1}{2\beta^2} \int \psi(S)\xi(g-b)(g-b-\beta)$$

$$(8,x) = \frac{1}{\beta\gamma} \int \psi(S)\xi(g-b)(h-c)$$

$$(9,x) = \frac{1}{2\gamma^2} \int \psi(S)\xi(h-c)(h-c-\gamma)$$

$$(10,x) = \frac{1}{2.3\alpha^3} \int \psi(S)\xi(f-a)(f-a-\alpha)(f-a-2\alpha)$$

ec. ec.

Si assumano anche altrettante quantità simboliche

(33) $(1,y)$, $(2,y)$, $(3,y)$ ec.

le quali non differiscano dalle precedenti (32) che per avere η in vece di ξ; poi altrettante

(34) $(1,z)$, $(2,z)$, $(3,z)$ ec.

le quali pure non differiscano dalle precedenti (32) che per avere ζ in luogo di ξ.

Dopo tutte queste preparazioni la quantità (24) che costituisce la seconda parte della formola generale (26) sotto l'integrale finito triplicato, prende la forma

$$(35)\qquad \sum_{f=l}^{f=\lambda}\sum_{g=m}^{g=\mu}\sum_{h=n}^{h=\nu} \tfrac{1}{2}\varphi(S)\delta S=$$

$$(1,x)\Delta_a\delta x+(2,x)\Delta_b\delta x+(3,x)\Delta_c\delta x$$

$$+(4,x)\Delta^2_a\delta x+(5,x)\Delta_a\Delta_b\delta x+(6,x)\Delta_a\Delta_c\delta x$$

$$+(7,x)\Delta^2_b\delta x+(8,x)\Delta_b\Delta_c\delta x+(9,x)\Delta^2_c\delta x+\text{ec.}$$

+(quantità simile colle (33) in luogo delle (32) e δy in luogo di δx)

+(quantità simile colle (34) in luogo delle (32) e δz in luogo di δx)

e su questa espressione, chi conosce la M. A. di Lagrange, capisce subito potersi eseguire le trasformazioni dirette ad ottenere termini in cui le δx, δy, δz entrino come coefficienti non affetti da alcun segno di derivazione.

17. Difatti insegnò Lagrange in più luoghi ed anche pel caso delle differenze finite (*) che sopra un'espressione della forma

$$(0)\omega+(1)\Delta_a\omega+(2)\Delta_b\omega+(3)\Delta_c\omega$$

$$+(4)\Delta^2_a\omega+(5)\Delta_a\Delta_b\omega+(6)\Delta_a\Delta_c\omega+(7)\Delta^2_b\omega+(8)\Delta_b\Delta_c\omega+(9)\Delta^2_c\omega$$

$$(36)\quad +(10)\Delta^3_a\omega+(11)\Delta^2_a\Delta_b\omega+(12)\Delta^2_a\Delta_c\omega+(13)\Delta_a\Delta^2_b\omega+(14)\Delta_a\Delta_b\Delta_c\omega$$

$$+(15)\Delta_a\Delta^2_c\omega+(16)\Delta^3_b\omega+(17)\Delta^2_b\Delta_c\omega+(18)\Delta_b\Delta^2_c\omega+(19)\Delta^3_c\omega+\text{ec.}$$

(ove i coefficienti sono simboli che possono esprimere funzioni qualunque delle tre variabili a, b, c ed ω è un'altra funzione

(*) Miscellanea Taurinensia. T. II. p. 191. App. 2.°

qualunque di esse variabili) è sempre lecito eseguire alcune operazioni dirette a trasformarla in un'altra espressione della forma

$$
\begin{aligned}
(37)\quad & O\omega + \Delta_a O_1 + \Delta_b O_2 + \Delta_c O_3 \\
& + \Delta_a \Delta_b O_4 + \Delta_a \Delta_c O_5 + \Delta_b \Delta_c O_6 + \Delta_a \Delta_b \Delta_c O_7
\end{aligned}
$$

i cui termini, tranne il primo, sono tutti affetti da segni di differenze semplici o doppie o triple, e possono quindi subire immediatamente una o due o tre integrazioni quando, come nella (26), vengono ad essere sottoposti ad un segno d'integrazione triplicata. Passano allora a far parte delle quantità che si riferiscono ai limiti del corpo, talchè sotto l'integrale triplicato non rimane che il primo termine $O\omega$.

Le quantità O, O_1, O_2, ec. componenti l'espressione (37) sono date per le (0), (1), (2) ec. della (36). Non sarà discaro il trovar quì tali formole cui ho dato maggior estensione di quella che in realtà mi abbisogna per le applicazioni: ma il principio analitico in discorso è tanto interessante che merita di essere veduto in tutta la sua ampiezza.

A tale oggetto mi è d'uopo premettere che ponendo ad una quantità x funzione di a, b, c uno, due o più apici in alto a diritta s'intende che in luogo di a siavi $a-\alpha$, ovvero $a-2\alpha$, ec., restando b, c come prima. Che con una simile notazione ($x_{,}$, $x_{,,}$, ec.) di apici al piede a diritta vuolsi significare la sostituzione $b-\beta$, $b-2\beta$, ec. in luogo di b non toccando a, c. Per la sostituzione di $c-\gamma$, $c-2\gamma$ ec. a c senza alterazione delle a, b si adoperano apici in alto a sinistra, scrivendo $'x$, $''x$, ec. Dopo ciò s'intende facilmente anche la notazione mista: così $x_{,}''$ significa $x(a-2\alpha, b-\beta, c)$, $''x_{,,}$ significa $x(a, b-2\beta, c-\gamma)$, ecc. Ecco le formole.

$$0=(0)-\Delta_a(1)'-\Delta_b(2)_{,}-\Delta_c'(3)+\Delta^2_a(4)''+\Delta_a\Delta_b(5)_{,}'$$

$$+\Delta_a\Delta_c'(6)'+\Delta^2_b(7)_{,,}+\Delta_b\Delta_c'(8)_{,}+\Delta^2_c''(9)$$

$$-\Delta^3_a(10)'''-\Delta^2_a\Delta_b(11)_{,}''-\Delta^2_a\Delta_c'(12)''-\Delta_a\Delta^2_b(13)'_{,,}-\Delta_a\Delta_b\Delta_c'(14)_{,}'$$

$$-\Delta_a\Delta^2_c''(15)'-\Delta^3_b(16)_{,,,}-\Delta^2_b\Delta_c'(17)_{,,}-\Delta_b\Delta^2_c''(18)_{,}-\Delta^3_c'''(19)+\text{ec.}$$

$$O_1=\left\{\begin{matrix}(1)'-\Delta_a(4)''-\Delta_b(5)'_{,}-\Delta_c'(6)'+\Delta^2_a(10)'''+\Delta_a\Delta_b(11)_{,}''\\+\Delta_a\Delta_c'(12)''+\Delta^2_b(13)'_{,,}+\Delta_b\Delta_c'(14)_{,}'+\Delta^2_c''(15)-\text{ec.}\end{matrix}\right\}\omega$$

$$+\{(4)'-\Delta_a(10)''-\Delta_b(11)_{,}'-\Delta_c'(12)'+\text{ec.}\}\Delta_a\omega+\{(10)'-\text{ec.}\}\Delta^2_a\omega+\text{ec.}$$

$$O_2=\left\{\begin{matrix}(2)_{,}-\Delta_a(5)_{,}'-\Delta_b(7)_{,,}-\Delta_c'(8)_{,}+\Delta_2{}_a(11)_{,}''+\Delta_a\Delta_b(13)'_{,,}\\+\Delta_a\Delta_c'(14)_{,}'+\Delta^2_b(16)_{,,,}+\Delta_b\Delta_c'(17)_{,,}+\Delta^2_c''(18)_{,}-\text{ec.}\end{matrix}\right\}\omega$$

(38) $$+\{(7)_{,}-\Delta_a(13)_{,}'-\Delta_b(16)_{,,}-\Delta_c'(17)_{,}+\text{ec.}\}\Delta_b\omega+\{(16)_{,}-\text{ec.}\}\Delta^2_b\omega+\text{ec.}$$

$$O_3=\left\{\begin{matrix}'(3)-\Delta_a'(6)'-\Delta_b'(8)_{,}-\Delta_c''(9)+\Delta^2_a'(12)''+\Delta_a\Delta_b'(14)_{,}'\\+\Delta_a\Delta_c''(15)'+\Delta^2_b'(17)_{,,}+\Delta_b\Delta_c''(18)_{,}+\Delta^2_c'''(19)-\text{ec.}\end{matrix}\right\}\omega$$

$$+\{'(9)-\Delta_a'(15)'-\Delta_b'(18)_{,}-\Delta_c''(19)+\text{ec.}\}\Delta_c\omega+\{'(19)-\text{ec.}\}\Delta^2_c\omega+\text{ec.}$$

$$O_4=\{(5)_{,}'-\Delta_a(11)_{,}''-\Delta_b(13)'_{,,}-\Delta_c'(14)_{,}'+\text{ec.}\}\ \omega$$

$$+\{(11)_{,}'-\text{ec.}\}\Delta_a\omega+\{(13)_{,}'-\text{ec.}\}\Delta_b\omega+\text{ec.}$$

$$O_5=\{'(6)'-\Delta_a'(12)''-\Delta_b'(14)_{,}'-\Delta_c''(15)'+\text{ec.}\}\ \omega$$

$$+\{'(12)'-\text{ec.}\}\Delta_a\omega+\{'(15)'-\text{ec.}\}\Delta_c\omega+\text{ec.}$$

$$O_6=\{'(8)_{,}-\Delta_a'(14)_{,}'-\Delta_b'(17)_{,,}-\Delta_c''(18)_{,}+\text{ec.}\}\ \omega$$

$$+\{''(17)_{,}-\text{ec.}\}\Delta_b\omega+\{''(18)_{,}-\text{ec.}\}\Delta_c\omega+\text{ec.}$$

$$O_7=\{''(14)'_{,}-\text{ec.}\}\omega+\text{ec.}$$

Espongo altresì un andamento di dimostrazione per queste formole che si segue senza grande fatica. Conviene trasformare di mano in mano i successivi termini della (36), il che non oltrepassando le differenze di terz' ordine esige soltanto sei operazioni differenti.

Primieramente si trasforma il termine $(1)\Delta_a \omega$ ponendo

$$(1)\Delta_a \omega = p\omega + \Delta_a(q\omega)$$

essendo in quest' ultima p, q due quantità da determinarsi. Siccome si ha

$$\Delta_a(q\omega) = \Delta_a q.\omega + q_{a+\omega}\Delta_a \omega$$

si ottengono prontamente dal confronto i valori delle dette p, q: quindi

$$(1)\Delta_a \omega = -\Delta_a(1)'\omega + \Delta_a[(1)'\omega].$$

Su questo tipo si hanno subito anche le trasformazioni dei termini $(2)\Delta_b \omega$, $(3)\Delta_c \omega$. In seguito si pone

$$(4)\Delta^2_a \omega = p\omega + \Delta_a(q\omega) + \Delta^2_a(r\omega),$$

e sciogliendo le differenze prima e seconda de' prodotti in quelle de' rispettivi fattori, si hanno tre equazioni con cui si determinano le tre incognite p, q, r. Così ci risulta

$$(4)\Delta_a{}^2\omega = \Delta_a{}^2(4)''\omega - \Delta_a[2\Delta_a(4)''\omega] + \Delta^2_a[(4)''\omega],$$

sulla qual formola si eseguiscono anche le trasformazioni dei termini $(7)\Delta_b{}^2\omega$, $(9)\Delta_c{}^2\omega$. Si passa a mettere

$$(5)\Delta_a\Delta_b\omega = p\omega + \Delta_a(q\omega) + \Delta_b(u\omega) + \Delta_a\Delta_b(v\omega)$$

e sciogliendo come sopra le differenze dei prodotti si trovano quattro equazioni con cui si fanno note p, q, u, v: il risultato finale è

$$(5)\Delta_a\Delta_b\omega=\Delta_a\Delta_b(5)'_{,}\omega-\Delta_a[\Delta_b(5)'_{,}\omega]$$
$$-\Delta_b[\Delta_a(5)'_{,}\omega]+\Delta_a\Delta_b[(5)'_{,}\omega]$$

sul quale si stabiliscono anche le formole analoghe per

$$(6)\Delta_a\Delta_c\omega,\quad (8)\Delta_b\Delta_c\omega.$$

Volendo passare a trasformare anche i termini colle differenze terze, si fa

$$(10)\Delta^3_a\omega=p\omega+\Delta_a(q\omega)+\Delta^2_a(r\omega)+\Delta^3_a(s\omega)$$

e con operazione simile alle già descritte si ottiene la formola

$$(10)\Delta^3_a\omega=-\Delta^3_a(10)'''.\omega+\Delta_a[3\Delta^2_a(10)''\omega]$$
$$-\Delta^2_a[3\Delta_a(10)'\omega]+\Delta^3_a[(10)'''\omega],$$

che serve a trasformare anche i termini $(16)\Delta_b{}^3\omega$, $(19)\Delta_c{}^3\omega$. Si prosegue e si mette

$$(11)\Delta^2_a\Delta_b\omega=p\omega+\Delta_a(q\omega)+\Delta_b(u\omega)+\Delta^2_a(r\omega)+\Delta_a\Delta_b(v\omega)+\Delta^2_a\Delta_b(t\omega)$$

deducendone

$$(11)\Delta^2_a\Delta_b\omega=-\Delta^2_a\Delta_b(11)''_{,}\omega+\Delta_a[2\Delta_a\Delta_b(11)''_{,}\omega]+\Delta_a[\Delta^2_b(11)''_{,}\omega]$$
$$-\Delta^2_a[\Delta_b(11)''_{,}\omega]-\Delta_a\Delta_b[2\Delta_a(11)''_{,}\omega]+\Delta^2_b\Delta_a[(11)''_{,}\omega]$$

la quale formola si presta a cinque altre trasformazioni, cioè a quelle dei termini

$$(12)\Delta^2_a\Delta_c\omega,\ (13)\Delta_a\Delta^2_b\omega,\ (15)\Delta_a\Delta^2_c\omega,\ (17)\Delta^2_b\Delta_c\omega,\ (18)\Delta_b\Delta^2_c\omega.$$

Finalmente si pone

$$(14)\Delta_a\Delta_b\Delta_c\omega=p\omega+\Delta_a(q\omega)+\Delta_b(u\omega)+\Delta_c(x\omega)$$
$$+\Delta_a\Delta_b(v\omega)+\Delta_a\Delta_c(y\omega)+\Delta_b\Delta_c(z\omega)+\Delta_a\Delta_b\Delta_c(t\omega)$$

d' onde si cavano facilmente i valori delle otto incognite, trovando

$$(14)\Delta_a\Delta_b\Delta_c\omega=-\Delta_a\Delta_b\Delta_c'(14)_{,}'.\omega+\Delta_a[\Delta_b\Delta_c'(14)_{,}'\omega]$$
$$+\Delta_b[\Delta_a\Delta_c'(14)_{,}'\omega]+\Delta_c[\Delta_a\Delta_b'(14)_{,}'\omega]$$
$$-\Delta_a\Delta_b[\Delta_c'(14)_{,}'\omega]-\Delta_a\Delta_c[\Delta_b'(14)_{,}'\omega]-\Delta_b\Delta_c[\Delta_a'(14)_{,}'\omega]$$
$$+\Delta_a\Delta_b\Delta_c['(14)_{,}'\omega].$$

Avendo così sott' occhio le 19 formole risultanti da queste trasformazioni, si riconosce immediatamente il valore di O delle (38). Per quello di O_1 bisogna raccogliere nelle successive formole i termini preceduti da Δ_a: si comprenderanno anche quelli preceduti da Δ^2_a, Δ^3_a, ma non quelli preceduti da

$$\Delta_a\Delta_b,\ \Delta^2_a\Delta_b,\ \Delta_a\Delta_c,\ \Delta^2_a\Delta_c,\ \Delta^2_b\Delta_a,\ \Delta^2_c\Delta_a,$$

perchè quantunque questi siano derivate esatte per la variabile a, lo sono anche per un'altra variabile, e quindi si trovano contemplati a parte. Eseguite alcune riduzioni per isciogliere differenze di prodotti in differenze di fattori, si trova la formola scritta nelle (38). Una maniera analoga di operare ci conduce al riconoscimento di tutte le altre formole (38).

18. Mediante il principio analitico esposto nel n.° precedente eseguiscansi le trasformazioni sul secondo membro della (35): riterremo per brevità solo i termini di second'ordine, ma ognuno che bramasse di più, potrebbe agevolmente, viste le formole (38), scrivere anche quelli di terzo.

La (35) prenderà la forma

$$
\begin{aligned}
&\sum_{f=l}^{f=\lambda}\sum_{g=m}^{g=\mu}\sum_{h=n}^{h=\nu}\tfrac{1}{2}\varphi(S)\partial S= \\
&-(\mathrm{I}).\partial x-(\mathrm{II}).\partial y-(\mathrm{III})\partial z \\
(39)\qquad &+\Delta_a\Theta+\Delta_b\Pi+\Delta_c\Phi \\
&+\Delta_a\Delta_b\Psi+\Delta_a\Delta_c\Xi+\Delta_b\Delta_c\Upsilon+\Delta_a\Delta_b\Delta_c\Omega.
\end{aligned}
$$

Non ci occupiamo per ora dei valori delle quantità, Θ, Π, Φ, ecc. riserbandoci a farlo più tardi quando tratteremo delle equazioni ai limiti: qui noteremo solo i valori delle (I), (II), (III) che per la prima delle (38) sono

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{I})=&\Delta_a(1,x)'+\Delta_b(2,x)_{,}+\Delta_c{}'(3,x) \\
&-\Delta^2_a(4,x)''-\Delta_a\Delta_b(5,x)_{,}'-\Delta_a\Delta_c{}'(6,x)' \\
&-\Delta^2_b(7,x)_{,,}-\Delta_b\Delta_c{}'(8,x)_{,}-\Delta^2_c{}''(9,x)+\text{ec.} \\
(\mathrm{II})=&\Delta_a(1,y)'+\Delta_b(2,y)_{,}+\Delta_c{}'(3,y) \\
(40)\qquad &-\Delta^2_a(4,y)''-\Delta_a\Delta_b(5,y)_{,}'-\Delta_a\Delta_c{}'(6,y)' \\
&-\Delta^2_b(7,y)_{,,}-\Delta_b\Delta_c{}'(8,y)_{,}-\Delta^2_c{}''(9,y)+\text{ec.} \\
(\mathrm{III})=&\Delta_a(1,z)'+\Delta_b(2,z)_{,}+\Delta_c{}'(3,z) \\
&-\Delta^2_a(4,z)''-\Delta_a\Delta_b(5,z)_{,}'-\Delta_a\Delta_c{}'(6,z)' \\
&-\Delta^2_b(7,z)_{,,}-\Delta_b\Delta_c{}'(8,z)_{,}-\Delta_c{}''(9,z)+\text{ec.}
\end{aligned}
$$

19. Eccoci ora al punto di potere stabilire le equazioni generalissime spettanti al moto di un punto qualunque (x, y, z) del nostro sistema. Introducendo il secondo membro della (39), invece della quantità formante il primo membro, entro la formola (26), è noto dal calcolo delle variazioni doversi annullare a parte i coefficienti totali di δx, δy, δz che rimangono sotto l' integrale triplicato. E giacchè le altre parti dell'espressione (39) si riferiscono alle quantità dei limiti dopo una o due o tre integrazioni, avremo le equazioni

$$
\begin{aligned}
&X - \frac{d^2x}{dt^2} + (I) = 0 \\
(41) \qquad &Y - \frac{d^2y}{dt^2} + (II) = 0 \\
&Z - \frac{d^2z}{dt^2} + (III) = 0
\end{aligned}
$$

dove (I), (II), (III) hanno i valori (40) composti di quantità simboliche date per le (32), (33), (34).

Queste (41) sono vere anche ritenendo indeterminati e finiti gli aumenti α, β, γ assunti nelle differenze, nel qual caso se i numeri n', n'', n''' dei punti del corpo secondo le tre dimensioni (intendendo la primitiva disposizione ideale) sono matematicamente infiniti, tali anche diventano per le (19) i secondi limiti λ, μ, ν della somma tripla. Si schivano questi infiniti pei ragionamenti che seguono.

20. I valori di (I), (II), (III) somministrati dalle (40) hanno la proprietà singolare di poter essere svolti in serie per gli aumenti α, β, γ, restando in tali serie una prima parte fatta di quantità nelle quali gli aumenti α, β, γ non entrano in maniera esplicita. Tratterò solamente il valore di (I), potendosene inferire immediatamente le stesse conseguenze per (II), (III). Tutti sanno che una differenza finita $\Delta_\alpha z$ coll' aumento α può svolgersi nella serie

$$\Delta_a z = \alpha \frac{dz}{da} + \frac{\alpha^2}{2} \frac{d^2 z}{da^2} + \text{ec.}$$

Se mettasi in questa $a-\alpha$ per a, ovvero $b-\beta$ per b, ovvero $c-\gamma$ per c, o anche $a-2\alpha$ per a, ecc.: poi svolgasi di nuovo ogni termine del secondo membro in serie ordinata secondo le potenze degli aumenti α, β, γ, si troverà sempre che gli sviluppi equivalenti alle espressioni $\Delta_a z'$, $\Delta_b z$, $\Delta'_c z$, $\Delta^2_a z''$, e simili hanno lo stesso primo termine che sarebbe risultato se le quantità sotto i simboli Δ_a, Δ_b, Δ_c, Δ^2_a ec. non fossero state accentate: la diversità si riscontra nei termini seguenti ove gli aumenti α, β, γ formano più alta dimensione che nel primo.

Dopo ciò è facile capire che il valore di (I) delle equazioni (40) può scriversi

$$\begin{aligned} (\mathrm{I}) = {} & \alpha \frac{d(1,x)}{da} + \beta \frac{d(2,x)}{db} + \gamma \frac{d(3,x)}{dc} + \text{ec.} \\ (42) \qquad & -\alpha^2 \frac{d^2(4,x)}{da^2} - \alpha\beta \frac{d^2(5,x)}{dadb} - \alpha\gamma \frac{d^2(6,x)}{dadc} \\ & -\beta^2 \frac{d^2(7,x)}{db^2} - \beta\gamma \frac{d^2(8,x)}{dbdc} - \gamma^2 \frac{d^2(9,x)}{dc^2} + \text{ecc.} \end{aligned}$$

Seguono nella prima linea termini i cui coefficienti contengono gli aumenti α, β, γ a più di una dimensione: seguono dopo altre due linee termini ove gli aumenti α, β, γ sono a più che due dimensioni ecc.

Richiaminsi le espressioni (32) e facendo

$$
\begin{aligned}
&[1, x] = \int \psi(S)\xi(f-a) \\
&[2, x] = \int \psi(S)\xi(g-b) \\
&[3, x] = \int \psi(S)\xi(h-c) \\
&[4, x] = \int \psi(S)\xi(f-a)^2 \\
(43)\qquad &[5, x] = \int \psi(S)\xi(f-a)(g-b) \\
&[6, x] = \int \psi(S)\xi(f-a)(h-c) \\
&[7, x] = \int \psi(S)\xi(g-b)^2 \\
&[8, x] = \int \psi(S)\xi(g-b)(h-c) \\
&[9, x] = \int \psi(S)\xi(h-c)^2 \\
&\quad \text{ec.} \qquad\qquad \text{ec.}
\end{aligned}
$$

per cui le (32) si riproducono sotto la forma

$$
\begin{aligned}
&(1, x) = \frac{1}{\alpha}[1, x] \\
&(2, x) = \frac{1}{\beta}[2, x] \\
&(3, x) = \frac{1}{\gamma}[3, x] \\
&(4, x) = \frac{1}{2\alpha^2}[4, x] - \frac{1}{2\alpha}[1, x] \\
&(5, x) = \frac{1}{\alpha\beta}[5, x] \\
&(6, x) = \frac{1}{\alpha\gamma}[6, x] \\
&(7, x) = \frac{1}{2\beta^2}[7, x] - \frac{1}{2\beta}[2, x] \\
&(8, x) = \frac{1}{\beta\gamma}[8, x] \\
&(9, x) = \frac{1}{2\gamma^2}[9, x] - \frac{1}{2\gamma}[3, x] \\
&\quad \text{ec.} \qquad\qquad \text{ec.}
\end{aligned}
$$

la precedente (42) assume l' aspetto

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{I}) = {} & \frac{d[1,x]}{da} + \frac{d[2,x]}{db} + \frac{d[3,x]}{dc} \\
(44) \qquad & -\tfrac{1}{2}\frac{d^2[4,x]}{da^2} - \frac{d^2[5,x]}{dadb} - \frac{d^2[6,x]}{dadc} \\
& -\tfrac{1}{2}\frac{d^2[7,x]}{db^2} - \frac{d^2[8,x]}{dbdc} - \tfrac{1}{2}\frac{d^2[9,x]}{dc^2} + \text{ec.} + \mathrm{V}
\end{aligned}
$$

dove nell' eccetera abbiamo voluto significare il progresso dei termini simili a quelli scritti che non hanno coefficienti fatti cogli aumenti α, β, γ, e colla V il complesso di tutti gli altri termini che hanno le α, β, γ nei coefficienti almeno ad una dimensione.

Avremo similmente

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{II}) = {} & \frac{d[1,y]}{da} + \frac{d[2,y]}{db} + \frac{d[3,y]}{dc} \\
(45) \qquad & -\tfrac{1}{2}\frac{d^2[4,y]}{da^2} - \frac{d^2[5,y]}{dadb} - \frac{d^2[6,y]}{dadc} \\
& -\tfrac{1}{2}\frac{d^2[7,y]}{db^2} - \frac{d^2[8,y]}{dbdc} - \tfrac{1}{2}\frac{d^2[9,y]}{dc^2} + \text{ec.} + \mathrm{V}
\end{aligned}
$$

essendo

$$[1, y] = \int \psi(S)\eta(f-a)$$

$$[2, y] = \int \psi(S)\eta(g-b)$$

$$[3, y] = \int \psi(S)\eta(h-c)$$

$$[4, y] = \int \psi(S)\eta(f-a)^2$$

(46) $$[5, y] = \int \psi(S)\eta(f-a)(g-b)$$

$$[6, y] = \int \psi(S)\eta(f-a)(h-c)$$

$$[7, y] = \int \psi(S)\eta(g-b)^2$$

$$[8, y] = \int \psi(S)\eta(g-b)(h-c)$$

$$[9, y] = \int \psi(S)\eta(h-c)^2$$

ec. ec.

e U una quantità della stessa natura della V

$$(\mathrm{III}) = \frac{d[1,z]}{da} + \frac{d[2,z]}{db} + \frac{d[3,z]}{dc}$$

(47) $$-\tfrac{1}{2}\frac{d^2[4,z]}{da^2} - \frac{d^2[5,z]}{dadb} - \frac{d^2[6,z]}{dadc}$$

$$-\tfrac{1}{2}\frac{d^2[7,z]}{db^2} - \frac{d^2[8,z]}{dbdc} - \tfrac{1}{2}\frac{d^2[9,z]}{dc^2} + \text{ecc.} + \mathrm{W}$$

essendo

$$(1, z) = \int \psi(S)\zeta(f-a)$$

$$(2, z) = \int \psi(S)\zeta(g-b)$$

$$(3, z) = \int \psi(S)\zeta(h-c)$$

$$(4, z) = \int \psi(S)\zeta(f-a)^2$$

$$(5, z) = \int \psi(S)\zeta(f-a)(g-b) \tag{48}$$

$$(6, z) = \int \psi(S)\zeta(f-a)(h-c)$$

$$(7, z) = \int \psi(S)\zeta(g-b)^2$$

$$(8, z) = \int \psi(S)\zeta(g-b)(h-c)$$

$$(9, z) = \int \psi(S)\zeta(h-c)^2$$

ec. ec.

e W una quantità come le V, U.

21. Le espressioni (44), (45), (47) dei valori di (I), (II), (III) debbono ancora subire un ultimo cangiamento di forma: pongansi

$$L_1 = [1,x] - \tfrac{1}{2}\frac{d[4,x]}{da} - \tfrac{1}{2}\frac{d[5,x]}{db} - \tfrac{1}{2}\frac{d[6,x]}{dc} + \text{ec.}$$

$$L_2 = [2,x] - \tfrac{1}{2}\frac{d[5,x]}{da} - \tfrac{1}{2}\frac{d[7,x]}{db} - \tfrac{1}{2}\frac{d[8,x]}{dc} + \text{ec.}$$

$$L_3 = [3,x] - \tfrac{1}{2}\frac{d[6,x]}{da} - \tfrac{1}{2}\frac{d[8,x]}{db} - \tfrac{1}{2}\frac{d[9,x]}{dc} + \text{ec.}$$

$$M_1 = [1,y] - \tfrac{1}{2}\frac{d[4,y]}{da} - \tfrac{1}{2}\frac{d[5,y]}{db} - \tfrac{1}{2}\frac{d[6,y]}{dc} + \text{ec.}$$

(49) $$M_2 = [2,y] - \tfrac{1}{2}\frac{d[5,y]}{da} - \tfrac{1}{2}\frac{d[7,y]}{db} - \tfrac{1}{2}\frac{d[8,y]}{dc} + \text{ec.}$$

$$M_3 = [3,y] - \tfrac{1}{2}\frac{d[6,y]}{da} - \tfrac{1}{2}\frac{d[8,y]}{db} - \tfrac{1}{2}\frac{d[9,y]}{dc} + \text{ec.}$$

$$N_1 = [1,z] - \tfrac{1}{2}\frac{d[4,z]}{da} - \tfrac{1}{2}\frac{d[5,z]}{db} - \tfrac{1}{2}\frac{d[6,z]}{dc} + \text{ec.}$$

$$N_2 = [2,z] - \tfrac{1}{2}\frac{d[5,z]}{da} - \tfrac{1}{2}\frac{d[7,z]}{db} - \tfrac{1}{2}\frac{d[8,z]}{dc} + \text{ec.}$$

$$N_3 = [3,z] - \tfrac{1}{2}\frac{d[6,z]}{da} - \tfrac{1}{2}\frac{d[8,z]}{db} - \tfrac{1}{2}\frac{d[9,z]}{dc} + \text{ec.}$$

e le (44), (45), (47) potranno mutarsi nelle seguenti

$$(\mathrm{I}) = \frac{dL_1}{da} + \frac{dL_2}{db} + \frac{dL_3}{dc} + V$$

(50) $$(\mathrm{II}) = \frac{dM_1}{da} + \frac{dM_2}{db} + \frac{dM_3}{dc} + U$$

$$(\mathrm{III}) = \frac{dN_1}{da} + \frac{dN_2}{db} + \frac{dN_3}{dc} + W$$

22. Rimane a mostrare che le quantità simboliche componenti le (49) si trovano equivalenti ad altre espressioni for-

mate di quantità comuni e delle derivate delle x, y, z per a, b, c. Pongausi

$$
\begin{aligned}
A &= \int \psi(S)(f-a)^2 \\
B &= \int \psi(S)(g-b)^2 \\
C &= \int \psi(S)(h-c)^2 \\
D &= \int \psi(S)(f-a)(g-b) \\
E &= \int \psi(S)(f-a)(h-c) \\
F &= \int \psi(S)(g-b)(h-c) \\
G_1 &= \int \psi(S)(f-a)^3 \\
G_2 &= \int \psi(S)(f-a)^2(g-b) \\
G_3 &= \int \psi(S)(f-a)^2(h-c) \\
G_4 &= \int \psi(S)(f-a)(g-b)^2 \\
G_5 &= \int \psi(S)(f-a)(g-b)(h-c) \\
G_6 &= \int \psi(S)(f-a)(h-c)^2 \\
G_7 &= \int \psi(S)(g-b)^3 \\
G_8 &= \int \psi(S)(g-b)^2(h-c) \\
G_9 &= \int \psi(S)(g-b)(h-c)^2 \\
G_{10} &= \int \psi(S)(h-c)^3 \\
&\text{ec.} \qquad \text{ec.}
\end{aligned}
\tag{51}
$$

si osservi poi che la ξ data dalla prima delle (28) può aversi in serie, essendo pel teorema di Taylor

$$\xi=(f-a)\frac{dx}{da}+(g-b)\frac{dx}{db}+(h-c)\frac{dx}{dc}+\tfrac{1}{2}(f-a)^2\frac{d^2x}{da^2}+(f-a)(g-b)\frac{d^2x}{dadb}$$

$$+(f-a)(h-c)\frac{d^2x}{dadc}+\tfrac{1}{2}(g-b)\frac{d^2x}{db^2}+(g-b)(h-c)\frac{d^2x}{dbdc}+\tfrac{1}{2}(h-c)^2\frac{d^2x}{dc^2}+\text{ec.}$$

e che η, ζ equivalgono a simili serie in niente altro diverse che per esservi y ovvero z al luogo di x. Richiamate le espressioni (43), (46), (48), troveremo

$$[1,x]=A\frac{dx}{da}+D\frac{dx}{db}+E\frac{dx}{dc}+\tfrac{1}{2}G_1\frac{d^2x}{da^2}+G_2\frac{d^2b}{dadb}+\text{ec.}$$

$$[2,x]=D\frac{dx}{da}+B\frac{dx}{db}+F\frac{dx}{dc}+\tfrac{1}{2}G_2\frac{d^2x}{da^2}+G_4\frac{d^2x}{dadb}+\text{ec.}$$

$$[3,x]=E\frac{dx}{da}+F\frac{dx}{db}+C\frac{dx}{dc}+\tfrac{1}{2}G_3\frac{d^2x}{da^2}+G_5\frac{d^2x}{dadb}+\text{ec.}$$

(52) $$[4,x]=G_1\frac{dx}{da}+G_2\frac{dx}{db}+G_3\frac{dx}{dc}+\text{ec.}$$

$$[5,x]=G_2\frac{dx}{da}+G_4\frac{dx}{db}+G_5\frac{dx}{dc}+\text{ec.}$$

$$[6,x]=G_3\frac{dx}{da}+G_5\frac{dx}{db}+G_6\frac{dx}{dc}+\text{ec.}$$

$$[7,x]=G_4\frac{dx}{da}+G_7\frac{dx}{db}+G_8\frac{dx}{dc}+\text{ec.}$$

$$[8,x]=G_5\frac{dx}{da}+G_8\frac{dx}{db}+G_9\frac{dx}{dc}+\text{ec.}$$

$$[9,x]=G_6\frac{dx}{da}+G_9\frac{dx}{db}+G_{10}\frac{dx}{dc}+\text{ec.}$$

ec. ec.

$$[1,y]=A\frac{dy}{db}+D\frac{dy}{db}+E\frac{dy}{dc}+\tfrac{1}{2}G_1\frac{d^2y}{da^2}+G_2\frac{d^2y}{dadb}+\text{ec.}$$

$$[2,y]=D\frac{dy}{da}+B\frac{dy}{db}+F\frac{dy}{dc}+\tfrac{1}{2}G_2\frac{d^2y}{da^2}+G_4\frac{d^2y}{dadb}+\text{ec.}$$

$$[3,y]=E\frac{dy}{da}+F\frac{dy}{db}+C\frac{dy}{dc}+\tfrac{1}{2}G_3\frac{d^2y}{da^2}+G_5\frac{d^2y}{dadb}+\text{ec.}$$

$$[4,y]=G_1\frac{dy}{da}+G_2\frac{dy}{db}+G_3\frac{dy}{dc}+\text{ec.}$$

(53) $$[5,y]=G_2\frac{dy}{da}+G_4\frac{dy}{db}+G_5\frac{dy}{dc}+\text{ec.}$$

$$[6,y]=G_3\frac{dy}{da}+G_5\frac{dy}{db}+G_6\frac{dy}{dc}+\text{ec.}$$

$$[7,y]=G_4\frac{dy}{da}+G_7\frac{dy}{db}+G_8\frac{dy}{dc}+\text{ec.}$$

$$[8,y]=G_5\frac{dy}{da}+G_8\frac{dy}{db}+G_9\frac{dy}{dc}+\text{ec.}$$

$$[9,y]=G_6\frac{dy}{da}+G_9\frac{dy}{db}+G_{10}\frac{dy}{dc}+\text{ec.}$$

ec. ec.

$$[1,z]=A\frac{dz}{da}+D\frac{dz}{db}+E\frac{dz}{dc}+\tfrac{1}{2}G_1\frac{d^2z}{da^2}+G_2\frac{d^2z}{dadb}+\text{ec.}$$

$$[2,z]=D\frac{dz}{da}+B\frac{dz}{db}+F\frac{dz}{dc}+\tfrac{1}{2}G_2\frac{d^2z}{da^2}+G_4\frac{d^2z}{dadb}+\text{ec.}$$

$$[3,z]=E\frac{dz}{da}+F\frac{dz}{db}+C\frac{dz}{dc}+\tfrac{1}{2}G_3\frac{d^2z}{da^2}+G_5\frac{d^2z}{dadb}+\text{ec.}$$

$$[4,z]=G_1\frac{dz}{da}+G_2\frac{dz}{db}+G_3\frac{dz}{dc}+\text{ec.}$$

(54) $$[5,z]=G_2\frac{dz}{da}+G_4\frac{dz}{db}+G_5\frac{dz}{dc}+\text{ec.}$$

$$[6,z]=G_3\frac{dz}{da}+G_5\frac{dz}{db}+G_6\frac{dz}{dc}+\text{ec.}$$

$$[7,z]=G_4\frac{dz}{da}+G_7\frac{dz}{db}+G_8\frac{dz}{dc}+\text{ec.}$$

$$[8,z]=G_5\frac{dz}{da}+G_8\frac{dz}{db}+G_9\frac{dz}{dc}+\text{ec.}$$

$$[9,z]=G_6\frac{dz}{da}+G_9\frac{dz}{db}+G_{10}\frac{dz}{dc}+\text{ec.}$$

ec. ec.

È manifesto che le (53), (54) sono le stesse (52) in cui x è mutata in y, ovvero in z.

Pongasi attenzione che le quantità componenti le (50) si hanno per le (49), e queste per le espressioni (52), (53), (54) formate delle (51): vedremo più innanzi nel § 5.° quanto si renda più semplice il sistema di tutte queste equazioni, che qui doveva essere esposto nella sua ampiezza.

23. Intanto sostituendo nelle (41) i valori (50) avremo le tre equazioni spettanti al moto del punto generico (x, y, z) espresse come segue

$$
(55)\qquad
\begin{aligned}
&X-\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dL_1}{da}+\frac{dL_2}{db}+\frac{dL_3}{dc}+V=0\\
&Y-\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dM_1}{da}+\frac{dM_2}{db}+\frac{dM_3}{dc}+U=0\\
&Z-\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dN_1}{da}+\frac{dN_2}{db}+\frac{dN_3}{dc}+W=0
\end{aligned}
$$

dove V, U, W sono tre quantità che impiccioliscono continuamente insieme colle α, β, γ e diventano zero, quando questi aumenti si annullano.

Ora sul conto di questi aumenti α, β, γ si ragioni così. Essi entrano implicitamente nella composizione delle $x(a,b,c)$, $y(a,b,c)$, $z(a,b,c)$: basta richiamare il n.° 5. del primo paragrafo per convincersene. Là però (num. 2) si è anche parlato delle *funzioni limiti* a cui le $x(a,b,c)$, $y(a,b,c)$, $z(a,b,c)$ continuamente si avvicinano in valore al diminuirsi delle α, β, γ, ed a cui si riducono quando α, β, γ sono zero. Io non dirò che le $x(a,b,c)$, $y(a,b,c)$, $z(a,b,c)$ quali ci abbisognano nella nostra analisi, debbano appunto essere quelle funzioni limiti. Ciò potrebbe anche ammettersi: e allora una tale supposizione importerebbe di dover concepire tutti i punti del corpo nella prima ideale distribuzione uniforme in una perfetta continuità che li facesse corrispondere esattamente a tutti i punti geometrici dello spazio parallelepipedo $(\lambda-l)(\mu-m)(\nu-n)$.

Allora eziandio le equazioni (55) diverrebbero esattamente le

$$
(56)\qquad
\begin{aligned}
&X-\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dL_1}{da}+\frac{dL_2}{db}+\frac{dL_3}{dc}=0\\
&Y-\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dM_1}{da}+\frac{dM_2}{db}+\frac{dM_3}{dc}=0\\
&Z-\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dN_1}{da}+\frac{dN_2}{db}+\frac{dN_3}{dc}=0
\end{aligned}
$$

giacchè le quantità V, U, W sarebbero rigorosamente nulle. S'incontrano però varie difficoltà volendo ammettere tale primitiva distribuzione geometrica continua; dovendo discorrere di azioni di punti che per quanto si vogliano vicinissimi sono però gli uni fuori degli altri, ed anche l'idea della densità (come vedremo meglio in appresso) ci troviamo imbarazzati in quel perfetto pieno. Riesce quindi più comodo immaginare i punti fisici in quella prima distribuzione uniforme non proprio in contatto per modo che α, β, γ siano zero, ma a tali minime distanze che

$$
(57)\qquad \alpha=\beta=\gamma=\sigma
$$

essendo σ una quantità minore d'ogni assegnabile, ma non proprio zero. Allora nelle (55) le V, U, W non sono veramente zero ma quantità minori d'ogni assegnabile, trascurando le quali non può mai nascere alcun errore apprezzabile ai nostri sensi. Tenendo la prima considerazione delle funzioni limiti, le (56) sono le rigorose equazioni generali del moto: tenendo l'altra considerazione testè dichiarata, esse lo saranno con tale approssimazione che non darà mai errore sensibile. Non definirò io qui l'anzidetta questione: e nondimeno assumerò sempre le equazioni (56) per le equazioni generali del moto: giacchè in quanto all'effetto, qualunque si abbracci delle due sentenze, è sempre il medesimo. Sono però in dovere di avvertire che l'impicciolimento delle V, U, W in-

sieme con σ e l'annullarsi di loro quando σ è zero, involge una supposizione che restringe alquanto l'assoluta generalità del calcolo, come verrà meglio occasione di dichiarare in progresso.

24. Ecco l'importante conclusione di tutta l'analisi di questo paragrafo. Le equazioni generali del moto di un punto qualunque (x, y, z) del corpo sono le (56) ove le L_1, L_2, ec. hanno i valori (49) che per mezzo delle (52), (53), (54) si riducono a dipendere dalle quantità (51) nelle quali entra la sola incognita $\psi(S)$ relativa all'azione molecolare.

Ben è vero, che (come si disse al n.° 9.) le trovate equazioni si rapportano a quella composizione delle x, y, z in a, b, c che è ignota anzi inassegnabile; ma passiamo ora a vedere in qual modo, fermato il vantaggio di formole ottenute rigorosamente, si sormonta in quanto agli effetti l'accennata difficoltà.

§ III.°

Principio generale per passare alle espressioni di uso: sue prime applicazioni.

25. Avendo, o supponendo di avere, tre equazioni per cui le x, y, z siano determinate in funzione di tre altre variabili a, b, c

$$x=x(a,b,c);\ y=y(a,b,c);\ z=z(a,b,c) \tag{58}$$

possiamo sempre intendere cavate da queste le inverse (*)

$$a=a(x,y,z);\ b=b(x,y,z);\ c=c(x,y,z). \tag{59}$$

Nè l'essere $x(,a,b,c)$, $y(a,b,c)$, $z(a,b,c)$ funzioni discontinue per riguardo alle a, b, c può rendere men vera l'anzi-

(*) Meccanica analitica T. 2. pag. 299. n.° 9.

detta proposizione. In tal caso le funzioni inverse $a(x, y, z)$, $b(x, y, z)$, $c(x, y, z)$ saranno anch' esse discontinue; nelle (58) dando ad a, b, c valori continui, x, y, z ricevono valori discontinui, e nelle (59) sono a, b, c che prendono valori discontinui quando x, y, z li assumono continui. Volendo che risulti per le a, b, c nelle (59) la stessa continuità di valori che ad essi si attribuisce nelle (58), bisognerà dare alle x, y, z valori saltanti: tra i quali se altri se ne prendessero, corrisponderebbero essi a valori di a, b, c che sarebbero stranieri alle presenti considerazioni. Tutto ciò non può turbare l'operazione di cavare le (59) dalle (58) la quale è puramente analitica e si fa sopra funzioni stabilite, indipendentemente da valori attribuibili alle quantità letterali. Non è qui come in una operazione d' integrazione: là la continuità dei valori nelle variabili per cui si integra è voluta dal meccanismo stesso del calcolo, come sopra si disse (n.° 7), e senza una uniformità o un ultimo riposo sopra variabili a, b, c regolari non si può nemmeno avere una idea chiara dell' operazione. Del resto la possibilità del passaggio dalle (58) alle (59), anche nel caso delle funzioni discontinue, si comprende facilmente immaginando sostituite alle funzioni discontinue le serie infinite equivalenti; allora quel passaggio si avrà mediante un ritorno di serie, e contraendo le nuove serie infinite per mezzo di sommatorie, saranno queste le funzioni discontinue espresse dai secondi membri delle (59).

Conseguenza dell' enunciata inversione si è che avendo una funzione $K(a, b, c)$ di cui si suppone la forma determinata in a, b, c, può questa, quando ce ne venga bisogno, immaginarsi ridotta $K(x, y, z)$ funzione di x, y, z dove le a, b, c non trovinsi che implicitamente entro le x, y, z; la nuova forma in x, y, z sarà generalmente diversa dalla prima in a, b, c, ma ad essa si ridurrà mettendovi per x, y, z le espressioni (58). Può darsi (ma sono ben lungi dal dire che ciò debba essere sempre) che la $K(a, b, c)$ sia funzione discontinua riguardo alle a, b, c, e la $K(x, y, z)$ sia funzione continua

riguardo alle x, y, z, e sia poi ad un tempo stesso discontinua in quanto si considera funzione di a, b, c per la sostituzione alle x, y, z delle espressioni (58)

26. $L(a, b, c)$, $M(a, b, c)$, $N(a, b, c)$ sono tre funzioni di a, b, c che si suppongono date: tre altre quantità K_1, K_2, K_3 si suppongono determinate per le precedenti mediante le equazioni

$$K_1 = \frac{1}{H}\left(L\frac{dx}{da} + M\frac{dx}{db} + N\frac{dx}{dc}\right)$$

$$(60) \qquad K_2 = \frac{1}{H}\left(L\frac{dy}{da} + M\frac{dy}{db} + N\frac{dy}{dc}\right)$$

$$K_3 = \frac{1}{H}\left(L\frac{dz}{da} + M\frac{dz}{db} + N\frac{dz}{dc}\right)$$

essendo H un sestinomio il cui valore è il seguente

$$(61) \qquad H = \frac{dx}{da}\cdot\frac{dy}{db}\cdot\frac{dz}{dc} - \frac{dx}{db}\cdot\frac{dy}{da}\cdot\frac{dz}{dc}$$

$$\frac{dx}{db}\cdot\frac{dy}{dc}\cdot\frac{dz}{da} - \frac{dx}{dc}\cdot\frac{dy}{db}\cdot\frac{dz}{da}$$

$$\frac{dx}{dc}\cdot\frac{dy}{da}\cdot\frac{dz}{db} - \frac{dx}{da}\cdot\frac{dy}{dc}\cdot\frac{dz}{db}$$

Queste K_1, K_2, K_3 sono da riguardarsi primieramente come $K_1(a, b, c)$, $K_2(a, b, c)$, $K_3(a, b, c)$ funzioni di a, b, c risultanti dalle (60) in cui tutte le quantità, eseguite almeno col pensiero tutte le derivazioni indicate, siano portate all'ultima loro camposizione in a, b, c; poi (secondo si è detto sul fine del n.° precedente) come ridotte alle forme $K_1(x, y, z)$, $K_2(x, y, z)$, $K_3(x, y, z)$, ove le a, b, c non siano che implicite alle x, y, z.

Ora ecco il principio analitico. Avendo un trinomio come

$$\frac{dL}{da} + \frac{dM}{db} + \frac{dN}{dc}$$

può esso trasformarsi in un' altra espressione trinomiale ove le derivate, prescindendo da un fattore comune, siano per x, y, z. Si ha cioè l' equazione identica

$$(62) \qquad \frac{dL}{da} + \frac{dM}{db} + \frac{dN}{dc} = H\left(\frac{dK_1}{dx} + \frac{dK_2}{dy} + \frac{dK_3}{dz}\right)$$

stando le equazioni di posizione (60), (61). Passiamo alla dimostrazione che è alquanto lunga, ma di nessuna difficoltà, non avendosi per essa bisogno che di un maneggio di espressioni analitiche.

27. Asserisco primieramente che dalle (60) si hanno inversamente le seguenti

$$(63) \qquad \begin{aligned} L &= \alpha K_1 + \alpha' K_2 + \alpha'' K_3 \\ M &= \beta K_1 + \beta' K_2 + \beta'' K_3 \\ N &= \gamma K_1 + \gamma' K_2 + \gamma'' K_3 \end{aligned}$$

essendosi assunte per abbreviazione le denominazioni qui sotto notate (*)

(*) Meccanica analitica T. 2.° pag. 291.

$$\alpha = \frac{dy}{db} \cdot \frac{dz}{dc} - \frac{dz}{db} \cdot \frac{dy}{dc}$$

$$\alpha' = \frac{dz}{db} \cdot \frac{dx}{dc} - \frac{dx}{db} \cdot \frac{dz}{dc}$$

$$\alpha'' = \frac{dx}{db} \cdot \frac{dy}{dc} - \frac{dy}{db} \cdot \frac{dx}{dc}$$

$$\beta = \frac{dz}{da} \cdot \frac{dy}{dc} - \frac{dy}{da} \cdot \frac{dz}{dc}$$

$$(64) \qquad \beta' = \frac{dx}{da} \cdot \frac{dz}{dc} - \frac{dz}{da} \cdot \frac{dx}{dc}$$

$$\beta'' = \frac{dy}{da} \cdot \frac{dx}{dc} - \frac{dx}{da} \cdot \frac{dy}{dc}$$

$$\gamma = \frac{dy}{da} \cdot \frac{dz}{db} - \frac{dz}{da} \cdot \frac{dy}{db}$$

$$\gamma' = \frac{dz}{da} \cdot \frac{dx}{db} - \frac{dx}{da} \cdot \frac{dz}{db}$$

$$\gamma'' = \frac{dx}{da} \cdot \frac{dy}{db} - \frac{dy}{da} \cdot \frac{dx}{db}.$$

Ciò può provarsi in due maniere delle quali la prima e più ovvia, si è di sciogliere le equazioni (60) per L, M, N, usando le note formole date negli elementi d'algebra per la risoluzione generale di tre equazioni di primo grado a tre incognite.

Si può anche (e questo processo ci sembra il migliore) riconoscere preventivamente colla materiale sostituzione dei valori (64) identiche le seguenti nove equazioni

$$\alpha \frac{dx}{da} + \alpha' \frac{dy}{da} + \alpha'' \frac{dz}{da} = \mathrm{H}$$

$$\alpha \frac{dx}{db} + \alpha' \frac{dy}{db} + \alpha'' \frac{dz}{db} = 0$$

$$\alpha \frac{dx}{dc} + \alpha' \frac{dy}{dc} + \alpha'' \frac{dz}{dc} = 0$$

$$\beta \frac{dx}{da} + \beta' \frac{dy}{da} + \beta'' \frac{dz}{da} = 0$$

$$(65) \qquad \beta \frac{dx}{db} + \beta' \frac{dy}{db} + \beta'' \frac{dz}{db} = \mathrm{H}$$

$$\beta \frac{dx}{dc} + \beta' \frac{dy}{dc} + \beta'' \frac{dz}{dc} = 0$$

$$\gamma \frac{dx}{da} + \gamma' \frac{dy}{da} + \gamma'' \frac{dz}{da} = 0$$

$$\gamma \frac{dx}{db} + \gamma' \frac{dy}{db} + \gamma'' \frac{dz}{db} = 0$$

$$\gamma \frac{dx}{dc} + \gamma' \frac{dy}{dc} + \gamma'' \frac{dz}{dc} = \mathrm{H}.$$

Ciò fatto, si moltiplichino le (60) rispettivamente per $\alpha, \alpha', \alpha''$, indi si sommino: avuto occhio alle prime tre delle precedenti (65), dedurremo immediatamente la prima delle (63). Per ottenere la seconda conviene moltiplicare rispettivamente le (60 per β, β', β'', poscia sommarle e aver presenti le tre di mezzo delle (65). Così moltiplicando le (60) per $\gamma, \gamma', \gamma''$, sommandole e usando le ultime tre delle (65), si ha la terza (63).

28. Prima di passare alla dimostrazione della (62) esigiamo che si verifichino colla materiale sostituzione dei valori (64) anche le nove

$$\alpha \frac{dx}{da} + \beta \frac{dx}{db} + \gamma \frac{dx}{dc} = \mathrm{H}$$

$$\alpha' \frac{dx}{da} + \beta' \frac{dx}{db} + \gamma' \frac{dx}{dc} = 0$$

$$\alpha'' \frac{dx}{da} + \beta'' \frac{dx}{db} + \gamma'' \frac{dx}{dc} = 0$$

$$\alpha \frac{dy}{da} + \beta \frac{dy}{db} + \gamma \frac{dy}{dc} = 0$$

(66) $$\alpha' \frac{dy}{da} + \beta' \frac{dy}{db} + \gamma' \frac{dy}{dc} = \mathrm{H}$$

$$\alpha'' \frac{dy}{da} + \beta'' \frac{dy}{db} + \gamma'' \frac{dy}{dc} = 0$$

$$\alpha \frac{dz}{da} + \beta \frac{dz}{db} + \gamma \frac{dz}{dc} = 0$$

$$\alpha' \frac{dz}{da} + \beta' \frac{dz}{db} + \gamma' \frac{dz}{dc} = 0$$

$$\alpha'' \frac{dz}{da} + \beta'' \frac{dz}{db} + \gamma'' \frac{dz}{dc} = \mathrm{H}$$

ed anche quest' altre tre

$$\frac{d\alpha}{da} + \frac{d\beta}{db} + \frac{d\gamma}{dc} = 0$$

(67) $$\frac{d\alpha'}{da} + \frac{d\beta'}{db} + \frac{d\gamma'}{dc} = 0$$

$$\frac{d\alpha''}{da} + \frac{d\beta''}{db} + \frac{d\gamma''}{dc} = 0 .$$

L' operazione è alquanto prolissa e nojosa: ma è tanta l'importanza di queste equazioni identiche, principalmente delle

(66) (di cui vedremo anche in progresso ripetute applicazioni) che conviene sostenerne la fatica una volta per sempre.

29. Ora si parta dalla equazione

$$K_1(a, b, c) = K_1(x, y, z)$$

che è identica, giusta quanto si disse ai numeri 25, 26; ne disendono evidentemente le tre

$$\frac{dK_1}{da} = \frac{dK_1}{dx} \cdot \frac{dx}{da} + \frac{dK_1}{dy} \cdot \frac{dy}{da} + \frac{dK_1}{dz} \cdot \frac{dz}{da}$$

$$(68) \qquad \frac{dK_1}{db} = \frac{dK_1}{dx} \cdot \frac{dx}{db} + \frac{dK_1}{dy} \cdot \frac{dy}{db} + \frac{dK_1}{dz} \cdot \frac{dz}{db}$$

$$\frac{dK_1}{dc} = \frac{dK_1}{dx} \cdot \frac{dx}{dc} + \frac{dK_1}{dy} \cdot \frac{dy}{dc} + \frac{dK_1}{dz} \cdot \frac{dz}{dc}.$$

Queste si moltiplichino rispettivamente per α, β, γ e si sommino: viste la prima, la quarta e la settima delle (66) otterremo

$$(69) \qquad \alpha \frac{dK_1}{da} + \beta \frac{dK_1}{db} + \gamma \frac{dK_1}{dc} = H \frac{dK_1}{dx}.$$

Scrivansi nuovamente tre equazioni in tutto simili alle (68) e colla sola differenza consistente nell'adoperare K_2 invece di K_1: si moltiplichino rispettivamente per α', β', γ' e si sommino: viste la seconda, la quinta e l'ottava delle (66), avremo

$$(70) \qquad \alpha' \frac{dK_2}{da} + \beta' \frac{dK_2}{db} + \gamma' \frac{dK_2}{dc} = H \frac{dK_2}{dy}.$$

Scrivansi ancora tre equazioni come le (68) con K_3 in luogo di K_1: si moltiplichino rispettivamente per α'', β'', γ'' e si som-

mino: osservate la terza, sesta e nona delle (66) conchiuderemo

$$(71) \qquad \alpha'' \frac{dK_3}{da} + \beta'' \frac{dK_3}{db} + \gamma'' \frac{dK_3}{dc} = H \frac{dK_3}{dz}.$$

Adesso si sommi la (69) colla prima delle (67) moltiplicata per K_1, il risultato potrà scriversi

$$\frac{d(\alpha K_1)}{da} + \frac{d(\beta K_1)}{db} + \frac{d(\gamma K_1)}{dc} = H \frac{dK_1}{dx}.$$

Si sommi similmente la (70) colla seconda delle (67) moltiplicata per K_2, avremo alla stessa maniera

$$\frac{d(\alpha' K_2)}{da} + \frac{d(\beta' K_2)}{db} + \frac{d(\gamma' K_2)}{dc} = H \frac{dK_2}{dy}.$$

E così dalla somma della (71) colla terza delle (67) moltiplicata per K_3

$$\frac{d(\alpha'' K_3)}{da} + \frac{d(\beta'' K_3)}{db} + \frac{d(\gamma'' K_3)}{dc} = H \frac{dK_3}{dz}.$$

Infine si sommino queste ultime tre equazioni: l' equazione che ne risulta potrà scriversi

$$\frac{d(\alpha K_1 + \alpha' K_2 + \alpha'' K_3)}{da} + \frac{d(\beta K_1 + \beta' K_2 + \beta'' K_3)}{db}$$
$$+ \frac{d(\gamma K_1 + \gamma' K_2 + \gamma'' K_3)}{dc} = H \left(\frac{dK_1}{dx} + \frac{dK_2}{dy} + \frac{dK_3}{dz} \right)$$

e questa, richiamate le (63), si trova essere la (62) che volevamo dimostrare.

30. Vedremo in questa Memoria parecchie applicazioni

del principio analitico compreso nella (62): esso è quello di cui parlammo ai numeri 9, 24. Basta richiamare le formole (56) del § precedente per capire prontamente come l'applicazione del principio in discorso le trasforma in altre ove non apparisce il ricorso alla composizione incognita per a, b, c. Darò qui tali formole trasformate, ma prima spiegherò il senso di una nuova denominazione che stabilisco, ed è

$$(72) \qquad \frac{1}{H}\Gamma(a, b, c) = \Gamma(x, y, z).$$

Intendo che mediante il valore (61) in cui immagino eseguite tutte le derivazioni, risulti da $\frac{1}{H}$ una funzione determinata delle a, b, c che indico per $\Gamma(a, b, c)$. Intendo poi che avendo sostituiti in questa alle a, b, c i valori (59), siasi essa cangiata in una funzione di x, y, z ove le a, b, c non entrino che implicitamente dentro le x, y, z. La forma della funzione $\Gamma(x, y, z)$ sarà generalmente ben diversa da quella della $\Gamma(a, b, c)$ e si sarebbe dovuto indicarla con diversa lettera, ma si è adoperata la stessa lettera per la ragione che entrambe le espressioni significano diversamente una medesima quantità. Diremo più tardi che sia questa quantità, e come realmente essa sia misurata dall' espressione $\frac{1}{H}$.

31. Si assumano le denominazioni

$$P_1 = \Gamma\left(L_1 \frac{dx}{da} + L_2 \frac{dx}{db} + L_3 \frac{dx}{dc}\right)$$

$$P_2 = \Gamma\left(L_1 \frac{dy}{da} + L_2 \frac{dy}{db} + L_3 \frac{dy}{dc}\right)$$

$$P_3 = \Gamma\left(L_1 \frac{dz}{da} + L_2 \frac{dz}{db} + L_3 \frac{dz}{dc}\right)$$

$$Q_1 = \Gamma\left(M_1 \frac{dx}{da} + M_2 \frac{dx}{db} + M_3 \frac{dx}{dc}\right)$$

$$(73) \qquad Q_2 = \Gamma\left(M_1 \frac{dy}{da} + M_2 \frac{dy}{db} + M_3 \frac{dy}{dc}\right)$$

$$Q_3 = \Gamma\left(M_1 \frac{dz}{da} + M_2 \frac{dz}{db} + M_3 \frac{dz}{dc}\right)$$

$$R_1 = \Gamma\left(N_1 \frac{dx}{da} + N_2 \frac{dx}{db} + N_3 \frac{dx}{dc}\right)$$

$$R_2 = \Gamma\left(N_1 \frac{dy}{da} + N_2 \frac{dy}{db} + N_3 \frac{dy}{dc}\right)$$

$$R_3 = \Gamma\left(N_1 \frac{dz}{da} + N_2 \frac{dz}{db} + N_3 \frac{dz}{dc}\right)$$

e tenendo sott'occhio le (72), (60), (62) si vedranno prontamente le (56) summentovate mutarsi nelle seguenti

$$\Gamma\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dy} + \frac{dP_3}{dz} = 0$$

$$(74) \qquad \Gamma\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{dQ_1}{dx} + \frac{dQ_2}{dy} + \frac{dQ_3}{dz} = 0$$

$$\Gamma\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) + \frac{dR_1}{dx} + \frac{dR_2}{dy} + \frac{dR_3}{dz} = 0.$$

Ecco le equazioni d'uso continuo e generale per le questioni che riguardano il moto e l'equilibrio de' corpi omogenei solidi o fluidi di qualunque sorta. Perchè esse consentano con quelle date dai moderni Geometri, restano due cose a provarsi. La prima che l'espressione Γ, equivalente (pel n.° precedente) alla frazione $\frac{1}{H}$, significhi quella quantità che chiamasi la *densità* nel punto (x, y, z). La seconda che fra le nove quantità P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3 abbiano luogo le tre relazioni

$$P_2 = Q_1 ; \quad P_3 = R_1 ; \quad Q_3 = R_2 .$$

Vedremo il primo di questi teoremi dimostrato nel § 4.° seguente: vedremo il secondo nel § 5.°; talchè le (74) si troveranno perfettamente d'accordo coi risultamenti ottenuti dai suddetti Geometri dietro la considerazione delle pressioni (*).

È bene, riassumendo il fin qui detto, osservare che le P_1, P_2, P_3, Q_1 ec. componenti le (74) sono date per le (73): che le L_1, L_2, L_3, M_1 ec. di cui quest'ultime sono formate, si hanno per le (49) in funzione di quantità che per mezzo delle (52), (53), (54) dipendono dalle (51) nelle quali non trovasi che la sola incognita $\psi(S)$ relativa all'azione molecolare. Come questo sistema di equazioni si semplifichi d'assai, sarà l'argomento del § 5.°

32. È noto che le equazioni generali per l'equilibrio risultano come caso particolare di quelle del moto annullando i differenziali secondi $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$: potremmo dunque dispensarci dal considerarle a parte; nondimeno sarà utile il farlo, perchè avremo a servircene in progresso, e per la stessa

(*) Cauchy. Exercices de Mathématiques. T. II. pag. 111; T. III. pag. 166. Poisson. Mémoires de l'Institut de France. T. VIII. pag. 387; T. X. pag. 578.

ragione gioverà assumere le lettere p, q, r in luogo delle x, y, z come espressioni delle coordinate attuali di un punto generico del sistema in equilibrio. Queste p, q, r dovranno in generale essere anch' esse considerate come funzioni discontinue di tre variabili a, b, c continue, che possono riguardarsi (giusta il detto al n.° 8.) siccome coordinate spettanti ad uno stato antecedente di distribuzione uniforme ideale. Il bisogno di considerare le coordinate p, q, r dell'equilibrio siccome funzioni di altre tre variabili, mi si fece noto fin da quando trattai le questioni di Meccanica alla maniera de' Geometri nostri maestri (*): infatti ottenni allora con questo mezzo alcuni notabili risultati che non so se poteansi egualmente avere senza tale considerazione. Sarebbe anche facile mostrare ch'essa trovasi implicitamente in varii luoghi della Meccanica analitica di Lagrange. Non si conoscea però bene, dietro le sole idee colà adottate, una ragione di dover ricorrere ad una ulterior composizione anche nel caso dell' equilibrio: ora per la dottrina della discontinuità delle funzioni questa ragione è per se manifesta.

Ecco il sistema delle equazioni pel caso dell' equilibrio in riscontro delle finquì trovate che valgono pel caso del moto.

Porremo a riscontro delle (58), (59) le

$$(75) \qquad p = p(a, b, c); \quad q = q(a, b, c); \quad r = r(a, b, c)$$

e le loro inverse

$$(76) \qquad a = a(p, q, r); \quad b = b(p, q, r); \quad c = c(p, q, r)$$

Chiameremo h un sestinomio che corrisponde a quello della (61) e non ne differisce che per essere fatto colle p, q, r invece delle x, y, z

(*) Veggasi la Memoria citata più sopra al n.° 12.

$$(77)\qquad h = \frac{dp}{da}\cdot\frac{dq}{db}\cdot\frac{dr}{dc} - \frac{dp}{db}\cdot\frac{dq}{da}\cdot\frac{dr}{dc}$$

$$\frac{dp}{db}\cdot\frac{dq}{dc}\cdot\frac{dr}{da} - \frac{dp}{dc}\cdot\frac{dq}{db}\cdot\frac{dr}{da}$$

$$\frac{dp}{dc}\cdot\frac{dq}{da}\cdot\frac{dr}{db} - \frac{dp}{da}\cdot\frac{dq}{dc}\cdot\frac{dr}{db}.$$

Faremo come nella (72)

$$(78)\qquad \frac{1}{h} = \Gamma(a, b, c) = \Gamma(p, q, r).$$

Le equazioni in luogo delle (74) saranno

$$\Gamma X + \frac{dP_1}{dp} + \frac{dP_2}{dq} + \frac{dP_3}{dr} = 0$$

$$(79)\qquad \Gamma Y + \frac{dQ_1}{dp} + \frac{dQ_2}{dq} + \frac{dQ_3}{dr} = 0$$

$$\Gamma Z + \frac{dR_1}{dp} + \frac{dR_2}{dp} + \frac{dR_3}{dr} = 0.$$

Le nove quantità P_1, P_2, P_3; Q_1, Q_2, Q_3; R_1, R_2, R_3 dovranno riguardarsi date per equazioni affatto simili alle (73) ma aventi le derivate $\frac{dp}{da}, \frac{dp}{db}, \frac{dp}{dc}, \frac{dq}{da}$ ec. invece delle $\frac{dx}{da}, \frac{dx}{db}, \frac{dx}{dc}, \frac{dy}{da}$ ec. Quanto alle L_1, L_2, L_3, M_1 ec. che compongono le (73) saranno ancora date per le (49), ma le quantità simboliche eguaglieranno nelle (52), (53), (54) espressioni contenenti le derivate delle p, q, r per a, b, c in luogo delle corrispondenti prese sulle x, y, z. Le (51) resteranno le medesime, ma la S entro $\psi(S)$ non sarà data dalla (23), cui verrà surrogata la seguente

$$
\begin{aligned}
S^2 = & [p(f,g,h) - p(a,b,c)]^2 \\
(80) \qquad & + [q(f,g,h) - q(a,b,c)]^2 \\
& + [r(f,g,h) - r(a,b,c)]^2 .
\end{aligned}
$$

33. Nel caso del moto disse Lagrange (*) potersi considerare le x, y, z coordinate del punto generico alla fine del tempo t, come funzioni delle coordinate proprie di un tal punto in altra epoca di tempo, per esempio al principio del moto, e dello stesso tempo t decorso dopo quell'epoca. Questa idea, che è preziosa per le applicazioni, può benissimo conciliarsi colla dottrina della discontinuità finora esposta.

Dicansi p, q, r le coordinate del punto generico pel principio del tempo t (abbiamo adottato le lettere p, q, r perchè spesso si assume la posizione d'equilibrio per la posizione corrispondente alla prima epoca). Queste p, q, r potranno considerarsi

$$p(a,b,c), \quad q(a,b,c), \quad r(a,b,c)$$

funzioni di coordinate a, b, c che si riferiscono ad una antecedente posizione ideale ove le molecole fossero distribuite uniformemente. L'idea di Lagrange si sostiene col riguardare le x, y, z composte come segue

$$
\begin{aligned}
& x(p(a,b,c),\ q(a,b,c),\ r(a,b,c),\ t) \\
(81) \qquad & y(p(a,b,c),\ q(a,b,c),\ r(a,b,c),\ t) \\
& z(p(a,b,c),\ q(a,b,c),\ r(a,b,c),\ t)
\end{aligned}
$$

invece di riguardarle

$$(82) \qquad x(a,b,c,t), \quad y(a,b,c,t), \quad z(a,b,c,t),$$

(*) Meccanica Analitica. T. II. pag. 290.

siccome facemmo sino al presente. Nella composizione espressa dalle (81) si ha successivamente riguardo alla composizione delle x, y, z per le p, q, r riferita ad un' epoca antecedente reale, e poi anche alla composizione delle p, q, r per un' epoca antecedente ideale; nelle (82) è saltata la considerazione di mezzo. Ma in sostanza le (81) non sono che una dichiarazione delle (82): sono in ultima analisi funzioni delle quattro a, b, c, t come le (82), e però sta anche con esse tutto ciò che si è stabilito colle forme (82).

Nondimeno la distinzione delle forme (81) dalle (82) è utilissima, giacchè in atto pratico non si saprà assegnare la composizione espressa dalle (82) per le quattro a, b, c, t, ma spesso si sapranno assegnare le forme

$$(83) \qquad x(p, q, r, t), \quad y(p, q, r, t), \quad z(p, q, r, t)$$

che corrispondono alla prima delle due composizioni marcate nelle (81). Da queste forme (83) si passerebbe alle (82) mettendo per p, q, r le ulteriori funzioni di a, b, c più volte ricordate. Dissimulando però questa seconda composizione, noi potremo alle (83) applicare direttamente i numeri. Le forme (83) spesso saranno continue, e intanto dovranno considerarsi discontinue quando si riducono alle (82), in quanto s' introducono poi per le p, q, r forme discontinue di funzioni in a, b, c. Vedesi in ciò dove consiste veramente l' artificio di questi processi analitici. Le lettere p, q, r che a operazioni finite stanno preparate nelle forme (83) a ricevere i valori numerici dati dalle applicazioni, sono quelle stesse che durante l' andamento de' calcoli teorici si considerano rappresentare quantità ulteriormente composte in a, b, c. Finito il bisogno, si chiude questa seconda considerazione, e si ritiene solo la prima che serve all' uso pratico.

§ IV.

Massa: densità: equazione detta della continuità: teorica delle condensazioni.

34. Le molecole di un corpo, secondo la definizione del n.° 10, sono tutte eguali fra loro per ciascun corpo omogeneo, ma saranno diverse passando dall' uno all' altro corpo: per esempio, una molecola d' acqua sarà diversa da una molecola d' oro. Nondimeno, corpi diversi possono confrontarsi fra loro relativamente ad una proprietà comune, cioè in quanto sono pesanti; essi in conveniente quantità possono farsi equilibrio sui due bacini di una bilancia ideata matematicamente senza resistenze. Immagino tanto inoltrata la divisione in ogni corpo, che per ciascuno il numero delle particelle ottenute da ultimo possa considerarsi maggiore d' ogni assegnabile, e di più le particelle dei diversi corpi riescano tutte egualmente pesanti. Ciò, se ben si riflette, niente involge che non sia in nostro arbitrio supporre, potendosi in un corpo immaginare più inoltrata la divisione che in un altro. Così la divisione dell' acqua e la divisione dell' oro deve concepirsi inoltrata diversamente al segno che una particella d' acqua quale risulta al punto dove ci fermiamo nel dividere, e una particella d' oro similmente, poste sui due bacini di una bilancia come sopra, riescano in equilibrio. Le particelle elementari o atomi, ora definiti, non sono come le molecole definite al n.° 10: anch' essi passando da corpo a corpo saranno diversi in altre proprietà, ma avranno queste due comuni: sarà inapprezzabile in ciascuno di essi il volume, e saranno egualmente pesanti. Non havvi alcuna difficoltà a prendere queste particelle elementari o atomi in luogo delle molecole del n.° 10 per que' punti fisici di cui parlammo nell' analisi dei §§. 2.° e 3.°

35. *Massa* è in ogni corpo la somma delle particelle elementari egualmente pesanti confrontate fra loro e colle par-

ticelle elementari degli altri corpi. Questa somma sarebbe per ogni corpo espressa da un numero maggiore d'ogni assegnabile, ma si ottiene in maniera finita per mezzo di un rapporto, ed ecco come. Si prende un corpo di natura determinata e di determinato volume, per esempio l'acqua in certe circostanze e in tanta quantità da riempiere l'unità di volume. Il numero delle particelle elementari di tal corpo, secondo la definizione testè data, è maggiore d'ogni assegnabile, ma però determinato: esso è quello che prendesi per unità di massa. Posto ciò, in ogni altro corpo il numero delle particelle elementari, che considerato in se stesso sarebbe infinito, diventa espresso da una cifra finita relativamente al simile numero per l'anzidetta unità di massa. Un tal rapporto è quello che si designa colla lettera M. Dalla sola definizione si capisce che il rapporto M si ottiene sperimentalmente per mezzo del rapporto dei pesi, essendo il medesimo.

36. SCOLIO. Taluno obbjetterà che noi possiamo concepire le masse (quantunque in tal caso questa parola non sia usata, e si adoperi solo quella di quantità) anche per le sostanze così dette imponderabili, il calore, la luce, ecc. Ma altro è formarsi il concetto della massa, altro determinarne la misura in numeri. Anche per sì fatte sostanze (non intendendo io poi qui di definire la questione se questo vocabolo possa prendersi nel senso ordinario) noi possiamo concepire una quantità determinata di esse, per esempio quella che si richiede a produrre un certo fenomeno, e prendere il numero maggiore d'ogni assegnabile delle particelle elementari di cui può immaginarsi composta, per unità propria alle misure di quella sostanza particolare. In tal caso queste particelle elementari non possono confrontarsi con quelle dei corpi ordinarj, ma ammettono un confronto soltanto tra sostanze della stessa natura: tra diverse quantità di calore fra loro, tra diverse quantità di luce fra loro, ecc. Una quantità di calore che produce un fenomeno (m)uplo in grandezza di quello prodotto dalla quantità di calore assunta per unità, avrà il numero m per

sua misura. Questo fenomeno non sarà una caduta o una pressione, come per la materia pesante, sarà di un' altra specie, per esempio lo scioglimento di una certa quantità di ghiaccio. Per legare fra loro le misure di due sostanze imponderabili si esigerebbe un fenomeno che potesse essere prodotto egualmente da entrambe: in quella guisa che si legano fra loro le misure delle masse di innumerabili corpi pesanti di diversissima natura, perchè con tutti si può produrre lo stesso fenomeno di caduta o di pressione. A maggiore dilucidazione dirò che se avessimo a considerare i fenomeni del moto solo in masse di materia pesante della stessa natura, solo in masse d' acqua, o d' aria, ec. non sarebbe stata necessaria la divisione fino agli atomi descritti al n.° 34: bastava allor chiamare massa *la somma delle molecole di un corpo* secondo la definizione del n.° 10; intanto si è definita la massa come al n.° 35, in quanto concorrono spesso più corpi di differente natura alla produzione dei fenomeni più ordinarj di equilibrio e di moto. Finchè restiamo nella trattazione del moto e dell' equilibrio de' corpi omogenei, possiamo mantenerne il confronto solo con corpi della stessa natura: e però non farà urto se in questa o in altra memoria ne trasporteremo le formole generali anche al moto del calore, della luce, ec.

37. Abbiamo ora bisogno di formarci un concetto intorno la determinazione delle misure delle masse, non per un rapporto di pesi come al n.° 35, ma in una maniera più generale per mezzo di un rapporto di volumi. Quella determinata quantità di materia che si è assunta per unità, s' immagini distribuita nell' unità di volume di forma parallelepipeda o piuttosto cubica, in modo che i suoi atomi siano tutti secondo i tre spigoli ad una stessa distanza fra loro, la quale in generale sarà picciolissima e incognita, come la σ delle equazioni (57) n.° 23. Se gli atomi di un altro corpo qualunque di forma parallelepipeda avessero una eguale distribuzione uniforme, fossero cioè tutti fra loro secondo i tre spigoli alla stessa distanza σ, come gli atomi nella massa unitaria, evidentemente

il numero U che dà la misura del volume del corpo, eguaglierebbe il numero cercato M; cioè tante volte la massa del corpo sarebbe multipla dell' unitaria, quante volte U del volume unitario. Ma possono gli atomi del corpo essere distribuiti uniformemente in un volume parallelepipedo v, tutti ad eguale distanza fra loro secondo i tre spigoli, e nello stesso tempo però questa distanza costante non essere la σ ma un' altra τ. Allora conviene immaginare per un qualsiasi mezzo cambiata una sì fatta distribuzione uniforme in quella della massa unitaria, intendendo ridotte tutte le distanze eguali τ alle distanze eguali σ. Per questa operazione si cambierà il volume v del corpo, e si ridurrà ad un altro volume U. Dicasi ρ il rapporto dei due volumi v, U, talchè

$$\rho = \frac{U}{v}. \tag{84}$$

Questa ρ misura una nuova quantità che nasce da una semplice relazione e dicesi *densità*. Adunque, *la densità si esprime pel volume che il corpo avrebbe se i suoi atomi fossero ridotti alla stessa distribuzione uniforme della massa unitaria, diviso pel volume vero del corpo*. Se $\rho = 1$, dicesi che il corpo ha la stessa densità della massa unitaria; se $\rho > 1$, dicesi che è più denso, se $\rho < 1$, dicesi che è più raro.

Siccome, giusta il detto di sopra, il volume U è espresso dal medesimo numero che misura il rapporto M, la precedente equazione (84) si muta nella notissima

$$\rho = \frac{M}{v}. \tag{85}$$

Avendo M altrimenti, cioè per via di pesi (n.° 35.), ed essendo facile assegnare v colle misure lineari, l'equazione (85) ci fornirà la determinazione delle densità in diversi corpi. Se non trattasi di materia ponderabile (n.° 36), converrà necessariamente ricorrere ad altri mezzi per avere le speciali densità che allora diconsi più comunemente *intensità*.

38. Quanto si disse finora, suppone che siasi convenuto di prendere per unità di massa quella di una determinata materia ponderabile, per esempio di acqua distillata a quattro gradi centigradi di temperatura, distribuita uniformemente nell' unità di volume. Se invece si pigliasse per unità di massa la quantità d' acqua che riempie la (n)*esima* parte dell' unità di volume, non si avrebbe più, come nel n.° precedente, $M=U$, ma $M=nU$, e invece della (85) avremmo dalla (84)

$$\rho = \frac{M}{nv}. \tag{86}$$

nel sistema metrico $n = 1000$.

Se si cambiasse la sostanza, per esempio in luogo di prendere per unitaria la densità dell' acqua, si prendesse quella dell' aria, chiamando unità di massa l' unità di volume empiuta d' aria, la densità e la massa di un corpo qualunque non sarebbero più espresse dai numeri ρ, M, ma da numeri diversi ρ', M'. Dicasi h il numero di unità di volume a cui si ridurrebbe l' acqua che empie l' unità di volume, dando alle sue particelle la stessa distanza fra loro che hanno quelle dell'aria; un corpo di volume v che prendendo fra le sue particelle la stessa distribuzione di quella delle particelle acquee, riduceasi ad un volume U, prendendo invece la disposizione delle particelle aeree, ridurrassi ad volume $U'=hU$: quindi per la (84)

$$\rho' = \frac{U'}{v} = \frac{hU}{v} = h\rho$$

e per la (85)

$$M' = \rho' v = h\rho v = hM.$$

Così ρ', M' si hanno pei numeri ρ, M moltiplicati con h. Quest' h può anche dirsi (vedi più sopra la definizione dedotta dalla (84)) la densità dell' acqua in rapporto a quella

dell' aria: quindi il teorema: *la densità di un corpo, supposta l' unità di massa di una determinata materia, deve moltiplicarsi per la densità di quella materia in rapporto alla nuova, se si cambia l' unità di massa.*

39. Abbiamo date alcune formole di uso fra densità, massa e volume, ma bisogna ritenere che la vera e generalissima definizione della densità è quella dedotta dalla (84). Questa formola non si altera anche dividendo per un numero grandissimo entrambi i termini della frazione del secondo membro, e così rendendo insieme picciolissimi quei due volumi, il cui rapporto dà la densità. Senza mutare la nostra idea sulla densità ρ, potremo coll'indicato mezzo ridurci dalla (84) alla formola

$$\rho = \frac{\sigma^3}{\tau^3} \tag{87}$$

essendo σ, τ come si è detto al n.° 37.; σ^3 è un volume cubico avente ai vertici otto atomi secondo la distribuzione della massa unitaria: τ^3 è un volume cubico i cui vertici sono occupati da otto atomi nella distribuzione uniforme ma diversa della materia del corpo che si confronta. Vedesi subito che se tutti gl' innumerabili cubi τ^3 di cui è formato v si riducessero alla grandezza dei cubi σ^3, il volume v si cangerebbe in U.

Per le equazioni (85), (87) la massa M di un corpo il cui volume è v, e le cui particelle elementari sono distribuite uniformemente alla distanza costante τ secondo i tre spigoli, può esprimersi con

$$M = \frac{\sigma^3}{\tau^3} v. \tag{88}$$

Immaginiamo ora un corpo il cui volume parallelepipedo sia W, e in cui la distribuzione delle particelle elementari non sia uniforme, ma fatta di tanti pezzi diversamente uniformi. Sia cioè W la somma di tanti altri parallelepipedi $v_1, v_2, v_3 \ldots$ in ciascuno dei quali le particelle siano secondo i tre spigoli

a distanze costanti $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ che cambiano dall'uno all' altro parallelepipedo. La massa totale M esistente nel parallelepipedo intero W sarà la somma delle singole masse esistenti nei parallelepipedi $v_1, v_2, v_3, \ldots$ e per la (88) sarà

$$(89) \qquad M = \frac{\sigma^3}{\tau_1^3} v_1 + \frac{\sigma^3}{\tau_2^3} v_2 + \frac{\sigma^3}{\tau_3^3} v_3 + \text{ec.}$$

40. Dopo il corpo a densità cangiante ora descritto possiamo immaginarne uno parimenti di volume parallelepipedo W, in cui i cangiamenti della densità si facciano immediatamente d' uno in altro dei cubi determinati da otto atomi. Ciò equivale a considerare nella (89) i volumi $v_1, v_2, v_3, \ldots$ accresciuti grandemente di numero e impiccioliti di grandezza fino ad essere eguali ai rispettivi cubi $\tau_1^3, \tau_2^3, \tau_3^3$, ec. Le densità

$$\frac{\sigma^3}{\tau_1^3}, \frac{\sigma^3}{\tau_2^3}, \frac{\sigma^3}{\tau_3^3}, \ldots\ldots \frac{\sigma^3}{\tau_n^3} \ldots\ldots$$

non saranno costanti per molti cubi eguali ripetuti in uno stesso parallelepipedo: ma sussisteranno ciascuna per un solo cubo. Un tal corpo dicesi a *densità variabile:* la misura di questa densità è in ogni parte del corpo il rapporto $\frac{\sigma^3}{\tau_n^3}$ tra il cubo σ^3 determinato da otto atomi nella massa unitaria, e il cubo τ_n^3 ivi determinato da otto atomi del corpo stesso.

Formata così l'idea di un corpo a densità variabile, non trovasi più necessario che il volume τ_n^3 costituente il denominatore della frazione $\frac{\sigma^3}{\tau_n^3}$, sia cubico: potrà essere un altro volume compreso da piani determinati da rette che terminano ad otto atomi del corpo. A intendere ciò chiaramente, immaginiamo che le particelle del corpo dianzi descritto avessero (n.° 8 del § 1.) una distribuzione antecedente ideale

uniforme in un volume $(\lambda-l)(\mu-m)(\nu-n)$ di forma parallelepipeda, essendovi tutte fra loro secondo i tre spigoli alla distanza costante σ della massa unitaria; dette a, b, c le coordinate di uno qualunque di tali punti fisici,

$$(a+\alpha, b, c),\ (a, b+\beta, c),\ (a, b, c+\gamma),\ (a+\alpha, b+\beta, c)$$

$$(a+\alpha, b, c+\gamma),\ (a, b+\beta, c+\gamma),\ (a+\alpha, b+\beta, c+\gamma)$$

(dove $\alpha=\beta=\gamma=\sigma$ come nelle equazioni (57) del § 2) saranno stati gli altri sette punti fisici che insieme col suddetto (a, b, c) determinavano un cubo σ^3, di cui il punto (a, b, c) era il più vicino all' origine degli assi delle a, b, c. Dal volume $(\lambda-l)(\mu-m)(\nu-n)$ passarono le particelle del corpo che consideriamo al volume W, prendendo la distribuzione variabile sopra descritta. Denominate ora x, y, z le coordinate del punto fisico generico prima significato da (a, b, c), saranno come segue le coordinate degli otto atomi che prima corrispondevano agli otto vertici del considerato cubo σ^3.

$$(90)\quad \begin{array}{ll}
\text{(I)} & x(a,b,c),\ y(a,b,c),\ z(a,b,c) \\
\text{(II)} & x(a+\alpha,b,c),\ y(a+\alpha,b,c),\ z(a+\alpha,b,c) \\
\text{(III)} & x(a,b+\beta,c),\ y(a,b+\beta,c),\ z(a,b+\beta,c) \\
\text{(IV)} & x(a,b,c+\gamma),\ y(a,b,c+\gamma),\ z(a,b,c+\gamma) \\
\text{(V)} & x(a+\alpha,b+\beta,c),\ y(a+\alpha,b+\beta,c),\ z(a+\alpha,b+\beta,c) \\
\text{(VI)} & x(a+\alpha,b,c+\gamma),\ y(a+\alpha,b,c+\gamma),\ z(a+\alpha,b,c+\gamma) \\
\text{(VII)} & x(a,b+\beta,c+\gamma),\ y(a,b+\beta,c+\gamma),\ z(a,b+\beta,c+\gamma) \\
\text{(VIII)} & x(a+\alpha,b+\beta,c+\gamma),\ y(a+\alpha,b+\beta,c+\gamma),\ z(a+\alpha,b+\beta,c+\gamma).
\end{array}$$

Non è necessario che passando alla nuova disposizione variabile, le particelle siansi collocate in un volume ancora paral-

lelepipedo W, mettendosi ai vertici di tanti cubi τ_1^3, τ_2^3, τ_3^3, ec., siccome dicemmo al principio di questo numero; potevano configurarsi altrimenti: gli otto punti espressi dalle (90) invece di determinare il cubo τ_n^3, saranno ai vertici di un poliedro di cui verrà fissato il volume, congiungendo quegli otto punti per mezzo di rette tra le quali poi si tirino i convenienti piani. Si denomini ϖ il volume di questo poliedro sostituito al cubo τ_n^3: il volume totale del corpo non sarà costituito dalla somma di innumerabili cubi τ_1^3, τ_2^3, τ_3^3, ec. attigui gli uni agli altri, ma da quella di innumerabili poliedri ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, ec. succedentisi in simile maniera e formati come si disse del generico ϖ; l'idea e la misura della densità variabile non ci sarà data dal rapporto $\frac{\sigma^3}{\tau_n^3}$, ma dal rapporto $\frac{\sigma^3}{\varpi}$, e dirassi la densità corrispondente al primo degli otto punti (90) che determinano il poliedro, cioè al punto (x, y, z).

Questa definizione della densità variabile, che ora significheremo colla lettera Γ, sta con qualunque supposizione di discontinuità nella disposizione dei punti fisici del corpo. La definizione stessa ci somministra la formola

$$\Gamma = \frac{\sigma^3}{\varpi}. \tag{91}$$

41. Il volume ϖ può esprimersi in funzione delle coordinate degli otto punti da cui è determinato, per il che conviene immaginarlo diviso in sei piramidi triangolari che siano tutte le une fuori delle altre, cioè non abbiano alcuna loro parte comune, appunto come le sei piramidi triangolari in cui si divide un cubo. La combinazione delle sei piramidi può farsi in più maniere che però tutte conducono a risultati eguali per le conseguenze che abbiamo di mira; una di queste com-

binazioni dà il poliedro ϖ fatto come segue

$$(92)\quad \begin{aligned}\varpi = {} & \text{pir.}(\text{I, II, III, VI}) + \text{pir.}(\text{I, III, VI, VII}) + \text{pir.}(\text{I, IV, VI, VII}) \\ & + \text{pir.}(\text{II, III, V, VI}) + \text{pir.}(\text{III, V, VI, VII}) + \text{pir.}(\text{V, VI, VII, VIII})\end{aligned}$$

indicando ogni piramide per mezzo de' suoi quattro vertici.

Il volume di una piramide triangolare può aversi in funzione delle coordinate de' suoi quattro vertici: se queste sono

$$x_1, y_1, z_1;\quad x_2, y_2, z_2;\quad x_3, y_3, z_3;\quad x_4, y_4, z_4,$$

quel volume è dato dalla formola (*)

$$(93)\quad \frac{1}{6}\left\{\begin{aligned}&(z_4-z_1)(x_3-x_1)(y_2-y_1)-(z_4-z_1)(x_2-x_1)(y_3-y_1)\\ &(y_4-y_1)(z_3-z_1)(x_2-x_1)-(y_4-y_1)(z_2-z_1)(x_3-x_1)\\ &(x_4-x_1)(y_3-y_1)(z_2-z_1)-(x_4-x_1)(y_2-y_1)(z_3-z_1)\end{aligned}\right\}$$

Si applichi questa formola successivamente alle sei piramidi che sono espresse nel secondo membro della (92), mettendo ogni volta per le coordinate dei quattro vertici i valori corrispondenti dati dalle espressioni (90).

Così per la prima piramide prenderemo

$x_1 = x(a, b, c)$	; y_1; z_1	
$x_2 = x(a, b+\beta, c)$	; y_2; z_2	eguali alle
$x_3 = x(a+\alpha, b, c)$	; y_3; z_3	espressioni
$x_4 = x(a+\alpha, b, c+\gamma)$	; y_4; z_4	corrispondenti

(*) Lagrange. Mémoires de Berlin. an. 1773. pag. 149.

per la seconda

$x_1 = x(a, b, c)$; y_1; z_1

$x_2 = x(a, b+\beta, c)$; y_2; z_2 eguali alle

$x_3 = x(a+\alpha, b, c+\gamma)$; y_3; z_3 espressioni

$x_4 = x(a, b+\beta, c+\gamma)$; y_4; z_4 corrispondenti

per la terza

$x_1 = x(a, b, c)$; y_1; z_1

$x_2 = x(a, b, c+\gamma)$; y_2; z_2 eguali alle

$x_3 = x(a, b+\beta, c+\gamma)$; y_3; z_3 espressioni

$x_4 = x(a+\alpha, b, c+\gamma)$; y_4; z_4 corrispondenti

per la quarta

$x_1 = x(a+\alpha, b, c)$; y_1; z_1

$x_2 = x(a, b+\beta, c)$; y_2; z_2 eguali alle

$x_3 = x(a+\alpha, b+\beta, c)$; y_3; z_3 espressioni

$x_4 = x(a+\alpha, b, c+\gamma)$; y_4; z_4 corrispondenti

per la quinta

$x_1 = x(a, b+\beta, c)$; y_1; z_1

$x_2 = x(a+\alpha, b+\beta, c)$; y_2; z_2 eguali alle

$x_3 = x(a+\alpha, b, c+\gamma)$; y_3; z_3 espressioni

$x_4 = x(a, b+\beta, c+\gamma)$; y_4; z_4 corrispondenti

per la sesta

$$x_1 = x(a+\alpha, b+\beta, c) \quad ; \; y_1; \; z_1$$

$$x_2 = x(a+\alpha, b, c+\gamma) \quad ; \; y_2; \; z_2 \quad \text{eguali alle}$$

$$x_3 = x(a, b+\beta, c+\gamma) \quad ; \; y_3; \; z_3 \quad \text{espressioni}$$

$$x_4 = x(a+\alpha, b+\beta, c+\gamma) \quad ; \; y_4; \; z_4 \quad \text{corrispondenti.}$$

Svolgendo ognuna delle sei volte in serie per gli aumenti α, β, γ la formola risultante dalla (93), si troverà dopo alcune riduzioni che possono essere abbreviate dall' uso delle equazioni (65), il volume di ciascuna delle sei piramidi ridotto all' espressione

$$\frac{1}{6}\alpha\beta\gamma H + \Omega$$

essendo H il sestinomio dell' equazione (61), e Ω una somma di termini moltiplicati per prodotti e potenze delle α, β, γ per lo meno a quattro dimensioni.

Pertanto la (92) si muterà nella

$$\varpi = \alpha\beta\gamma H + \Psi$$

essendo Ψ somma di sei quantità simili alla Ω: e per essere $\alpha = \beta = \gamma = \sigma$ avremo per ultimo

$$\varpi = \sigma^3 H + \Phi \tag{94}$$

significando Φ una somma di termini moltiplicati per potenze di σ, di cui la più bassa è la quarta.

Sostituendo il valore di ϖ della (94) nella (91), ci risulta

$$\Gamma = \frac{1}{H} + \Upsilon \tag{95}$$

dove Υ esprime una somma di termini moltiplicati tutti almeno per la prima potenza di σ.

È questo il luogo di richiamare ciò che si è detto più sopra al n.° 23 circa il diritto in cui siamo di ommettere i termini moltiplicati per σ che si trovano in somma con altri che non contengono a coefficiente questa quantità piccolissima, e quindi conchiudere dalla (95)

$$\Gamma = \frac{1}{H} \tag{96}$$

in cui si legge il teorema annunciato in anticipazione al n.° 31. Vedesi da questa formola che la densità variabile Γ è veramente una funzione $\Gamma(a, b, c)$ delle coordinate a, b, c, e quindi delle x, y, z, come si disse al n.° 30. La forma di quest'ultima funzione è incognita, ma vi ha un mezzo per determinarla, come vedremo fra poco.

42. SCOLIO. Considerare lo spazio occupato da un corpo come diviso in tanti gruppi di sei piramidi triangolari, la cui somma può disporsi in una serie tripla (n.° 5.) è una teorica da me già altrove trattata per le lunghe (veggasi la Sezione 3.ª della Memoria citata nel n.° 12). Ora però il lettore potrà accorgersi di quanto sia migliorata. Il miglioramento principale consiste nell'aver dato alle particelle della massa, quando si considerano le coordinate a, b, c spettanti alla distribuzione antecedente uniforme, una giacitura in configurazione parallelepipeda: si hanno così somme triple i cui limiti sono indipendenti gli uni dagli altri, mentre in quel primo lavoro io avea complicate assaissimo le quantità ai limiti delle integrazioni.

Ciò che finora esposi appartiene a que' sistemi che nell' opera citata chiamai sistemi di volume; ma colà distinsi anche i sistemi lineari e i sistemi superficiali, la cui considerazione viene utile per certe questioni meccaniche e in certe ipotesi di astrazione. Nel presente scritto mi diressi subito ai

sistemi a tre dimensioni, i quali sono poi quelli che corrispondono alla realtà delle cose: ma diedi nei primi quattro numeri al § 1.° le iniziative per chi volesse rifare alla stessa maniera anche tutto ciò che nella Memoria ricordata si riferisce alle altre due specie di sistemi. Volendo pei medesimi le definizioni della densità variabile, si modelleranno analogamente a quella che leggesi nella formola (91); pei sistemi lineari il secondo membro avrà per denominatore l'espressione di una linea retta, e pei sistemi superficiali quella della somma di due triangoli; quindi i teoremi corrispondenti a quello dato dalla (96).

L'espressione della massa nel corpo a densità variabile descritto in maniera generalissima sul fine del n.° 40, potrà dedursi dalla (89) adattata a tal corpo, riducendone il secondo membro sotto forma di serie tripla, come fecesi di simili serie ai n. 13, 14. Ne emerge facilmente il teorema conosciuto che ci dà quella massa mediante un integrale triplicato della densità; non mi vi trattengo, nulla trovando da aggiungere a ciò che già si sa. Dicasi a un di presso del modo di trovare le masse per le altre due specie di sistemi sopra menzionati.

43. Vedemmo una prima applicazione dell'equazione (96) per ridurci il fattore Γ nei primi termini delle (74) quale si trova in quelle equazioni generalissime che ci vennero insegnate da' moderni Geometri; vediamo ora come se ne deduce prontamente la quarta equazione generale conosciuta sotto il nome di *equazione della continuità*. Capiremo, riflettendo sugli antecedenti, ch'essa sussiste anche in qualunque supposizione di discontinuità nella materia, motivo per cui bisognerebbe cambiarle il nome. Nel caso del moto le coordinate attuali x, y, z sono (n.° 33) funzioni delle tre variabili a, b, c e altresì del tempo t: quindi anche il sestinomio H è funzione di a, b, c, t, e in conseguenza anche la densità Γ, sia che si consideri ridotta alla composizione in a, b, c, ovvero a quella in x, y, z. Nella prima supposizione, quando riguardasi la composizione $\Gamma(a, b, c, t)$, le a, b, c sono indipendenti da t;

nella seconda supposizione, cioè quando riguardasi la composizione $\Gamma(x, y, z, t)$, la t entra esplicitamente ed anche implicitamente alle x, y, z.

L' equazione (96), che può scriversi

$$\Gamma H = 1 \tag{97}$$

è un' equazione identica: dunque sussisteranno con essa anche tutte le sue derivate per rapporto a t. Derivando logaritmicamente per t, se ne cava

$$\frac{1}{\Gamma}\frac{d\Gamma}{dt} + \frac{1}{H}\frac{dH}{dt} = 0. \tag{98}$$

Richiamisi il valore di H espresso nella (61), e si rammentino anche le denominazioni (64) avremo

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} = {} & \alpha\frac{d^2x}{dadt} + \beta\frac{d^2x}{dbdt} + \gamma\frac{d^2x}{dcdt} \\ & + \alpha'\frac{d^2y}{dadt} + \beta'\frac{d^2y}{dbdt} + \gamma'\frac{d^2y}{dcdt} \\ & + \alpha''\frac{d^2z}{dadt} + \beta''\frac{d^2z}{dbdt} + \gamma''\frac{d^2z}{dcdt}.\end{aligned}$$

Ora le tre funzioni derivate $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ chiamansi le tre velocità del punto (x, y, z) secondo i tre assi, e soglionsi marcare rispettivamente colle lettere u, v, w. Immaginando condotte a termine le derivazioni, esse saranno funzioni di a, b, c, t

$$u(a, b, c, t); \quad v(a, b, c, t); \quad w(a, b, c, t) \tag{99}$$

e possono intendersi ridotte alla composizione

$$u(x, y, z, t); \quad v(x, y, z, t); \quad w(x, y, z, t) \tag{100}$$

alla stessa maniera colla quale (n.° 30) si disse potersi la $\Gamma(a, b, c, t)$ ridursi alla $\Gamma(x, y, z, t)$.

Dalle equazioni identiche

$$(101)\qquad \frac{dx}{dt}=u(x,y,z,t);\ \frac{dy}{dt}=v(x,y,z,t);\ \frac{dz}{dt}=w(x,y,z,t)$$

si deducono le nove

$$\frac{d^2x}{dadt}=\frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{da}+\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{da}+\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{da}$$

$$\frac{d^2x}{dbdt}=\frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{db}+\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{db}+\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{db}$$

$$\frac{d^2x}{dcdt}=\frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dc}+\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dc}+\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dc}$$

$$\frac{d^2y}{dadt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{da}+\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{da}+\frac{dv}{dz}\cdot\frac{dz}{da}$$

$$(102)\qquad \frac{d^2y}{dbdt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{db}+\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{db}+\frac{dv}{dz}\cdot\frac{dz}{db}$$

$$\frac{d^2y}{dcdt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dc}+\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dc}+\frac{dv}{dz}\cdot\frac{dz}{dc}$$

$$\frac{d^2z}{dadt}=\frac{dw}{dx}\cdot\frac{dx}{da}+\frac{dw}{dy}\cdot\frac{dy}{da}+\frac{dw}{dz}\cdot\frac{dz}{da}$$

$$\frac{d^2z}{dbdt}=\frac{dw}{dx}\cdot\frac{dx}{db}+\frac{dw}{dy}\cdot\frac{dy}{db}+\frac{dw}{dz}\cdot\frac{dz}{db}$$

$$\frac{d^2z}{dcdt}=\frac{dw}{dx}\cdot\frac{dx}{dc}+\frac{dw}{dy}\cdot\frac{dy}{dc}+\frac{dw}{dz}\cdot\frac{dz}{dc}$$

i valori delle quali sostituiti nel precedente di $\frac{d\Pi}{dt}$, lo fanno diventare

$$\frac{dH}{dt} = \frac{du}{dx}\left(\alpha\frac{dx}{da} + \beta\frac{dx}{db} + \gamma\frac{dx}{dc}\right)$$

$$+ \frac{du}{dy}\left(\alpha\frac{dy}{da} + \beta\frac{dy}{db} + \gamma\frac{dy}{dc}\right)$$

$$+ \frac{du}{dz}\left(\alpha\frac{dz}{da} + \beta\frac{dz}{db} + \gamma\frac{dz}{dc}\right)$$

$$+ \frac{dv}{dx}\left(\alpha'\frac{dx}{da} + \beta'\frac{dx}{db} + \gamma'\frac{dx}{dc}\right)$$

$$+ \frac{dv}{dy}\left(\alpha'\frac{dy}{da} + \beta'\frac{dy}{db} + \gamma'\frac{dy}{dc}\right)$$

$$+ \frac{dv}{dz}\left(\alpha'\frac{dz}{da} + \beta'\frac{dz}{db} + \gamma'\frac{dz}{dc}\right)$$

$$+ \frac{dw}{dx}\left(\alpha''\frac{dy}{da} + \beta''\frac{dx}{db} + \gamma''\frac{dx}{dc}\right)$$

$$+ \frac{dw}{dy}\left(\alpha''\frac{dy}{da} + \beta''\frac{dy}{db} + \gamma''\frac{dy}{dc}\right)$$

$$+ \frac{dw}{dz}\left(\alpha''\frac{dz}{da} + \beta''\frac{dz}{db} + \gamma''\frac{dz}{dc}\right).$$

Presentemente si richiamino le nove equazioni identiche scritte nel § precedente e segnate (66): a colpo d'occhio vedesi l'ultima equazione ridursi alla seguente

$$(103) \qquad \frac{1}{H}\frac{dH}{dt} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$$

Quindi la (98) può scriversi

$$(104) \qquad \frac{1}{\Gamma}\cdot\frac{d\Gamma}{dt} + \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Si ha poi manifestamente a motivo delle (101)

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d\Gamma}{dx} u + \frac{d\Gamma}{dy} v + \frac{d\Gamma}{dz} w + \Gamma'(t)$$

avendo significato con $\Gamma'(t)$ la derivata parziale della Γ per la t esplicita. Pertanto la (104) si riduce

$$(105) \qquad \frac{d(\Gamma u)}{dx} + \frac{d(\Gamma v)}{dy} + \frac{d(\Gamma w)}{dz} + \Gamma'(t) = 0$$

la quale è la nota equazione che volevamo dimostrare.

Anche qui può notarsi che le variabili mentali a, b, c sostengono tutto l'andamento analitico della dimostrazione, e poi spariscono nel risultato finale formato di espressioni cui possono applicarsi i numeri giusta le idee esposte al n.° 33.

44. Dalla equazione (97) può farsi discendere anche una formola spettante alla teorica delle condensazioni e rarefazioni. Ciò faccio tanto più volentieri in quanto che le idee qui esposte si troveranno anticipate utilmente anche per altre teoriche di cui in appresso. Le coordinate di un punto generico del corpo per una prima epoca (che ordinariamente si fa corrispondere alla stazione d'equilibrio) siano p, q, r funzioni delle a, b, c variabili spettanti alla distribuzione antecedente ideale. Spostato il corpo per qualsivoglia cagione dalla anzidetta posizione, le coordinate dello stesso punto generico per una seconda epoca, cioè alla fine di un tempo t, siano

$$(106) \qquad x = p + \xi\,;\; y = q + \eta\,;\; z = r + \zeta.$$

Le ξ, η, ζ esprimono gli spostamenti avvenuti nel tempo t secondo i tre assi: esse sono tre quantità di cui si fa molto uso in seguito, e possono riguardarsi composte in tre diverse maniere. Primieramente funzioni di a, b, c, t

$$(107) \qquad \xi(a,b,c,t)\,;\; \eta(a,b,c,t)\,;\; \zeta(a,b,c,t)$$

avendo di mira l'ultimo appoggio delle nostre considerazioni, cioè le variabili semplici; è la maniera più naturale. Secon-

dariamente in funzione delle coordinate p, q, r corrispondenti alla prima epoca

$$(108) \qquad \xi(p, q, r, t)\,;\ \eta(p, q, r, t)\,;\ \zeta(p, q, r, t)$$

deducendo questa composizione dalla precedente (107) per mezzo delle equazioni (76) del n.° 32. Per ultimo in funzione delle coordinate x, y, z spettanti alla seconda epoca

$$(109) \qquad \xi(x, y, z, t);\ \eta(x, y, z, t);\ \zeta(x, y, z, t)$$

ridotte parimenti dalle (107) per mezzo delle equazioni (59) del n.° 25, la cui deduzione dalle (58) non soffre cambiamento quando, come adesso, s' introduce la t espressa e non sottintesa. Solo in questo terzo caso la detta t entra esplicitamente ed implicitamente nelle x, y, z.

Tali spostamenti ξ, η, ζ si considerano quantità picciolissime, cioè funzioni qualsivogliono moltiplicate tutte per una quantità i estremamente piccola (*), precisamente come si suole concepire di quegli aumenti che diconsi *variazioni*. Si capisce a motivo dell' anzidetto coefficiente i che le derivate

$$\frac{d\xi}{da}, \frac{d\xi}{db}, \ldots\ldots \frac{d\eta}{da} \text{ ec.}$$

giusta la composizione (107) o le derivate

$$\frac{d\xi}{dp}, \frac{d\xi}{dq}, \ldots\ldots \frac{d\eta}{dp} \text{ ec.}$$

secondo la composizione (108) o in fine le derivate

$$\frac{d\xi}{dx}, \frac{d\xi}{dy}, \ldots\ldots \frac{d\eta}{dx} \text{ ec.}$$

a norma della composizione (109), sono quantità piccolissime

(*) Lagrange. Théorie des Fonctions Analytiques. pag. 274.

e della stessa natura delle ξ, η, ζ da cui sono derivate. Viene dall'aver dato alle ξ, η, ζ l'idea delle variazioni, che dovranno ommettersi i termini in cui queste quantità o le loro derivate come sopra saranno a due o più dimensioni: e che potrà usarsi la caratteristica δ innanzi ad una quantità per significare una somma di termini da essa dedotti in cui le ξ, η, ζ o le loro derivate anzidette sono a dimensione lineare.

Si richiami il sestinomio h dell'equazione (77) formato colle derivate parziali delle p, q, r per a, b, c: si denomini γ la densità del corpo nel punto (p, q, r) della prima posizione; avremo per la (97)

$$\gamma h = 1. \tag{110}$$

Siano Γ, H come più sopra al n.° 41, e ripetasi la (97). Se nel sestinomio h pongansi per p, q, r i valori

$$x - \xi; \quad y - \eta; \quad z - \zeta$$

cavati dalle precedenti (106), avremo

$$h = \mathrm{H} - \delta\mathrm{H}. \tag{111}$$

Ora richiamando le (61), (64), con un processo affatto simile a quello tenuto nel numero precedente, vedremo primieramente essere

$$\delta\mathrm{H} = \alpha \frac{d\xi}{da} + \beta \frac{d\xi}{db} + \gamma \frac{d\xi}{dc}$$

$$+ \alpha' \frac{d\eta}{da} + \beta' \frac{d\eta}{db} + \gamma' \frac{d\eta}{dc}$$

$$+ \alpha'' \frac{d\zeta}{da} + \beta'' \frac{d\zeta}{db} + \gamma'' \frac{d\zeta}{dc}$$

poi, assunta per le ξ, η, ζ la composizione (109), dedurremo

$$\frac{d\xi}{da}=\frac{d\xi}{dx}\cdot\frac{dx}{da}+\frac{d\xi}{dy}\cdot\frac{dy}{da}+\frac{d\xi}{dz}\cdot\frac{dz}{da}$$

$$\frac{d\xi}{db}=\frac{d\xi}{dx}\cdot\frac{dx}{db}+\frac{d\xi}{dy}\cdot\frac{dy}{db}+\frac{d\xi}{dz}\cdot\frac{dz}{db}$$

$$\frac{d\xi}{dc}=\frac{d\xi}{dx}\cdot\frac{dx}{dc}+\frac{d\xi}{dy}\cdot\frac{dy}{dc}+\frac{d\xi}{dz}\cdot\frac{dz}{dc}$$

$$\frac{d\eta}{da}=\frac{d\eta}{dx}\cdot\frac{dx}{da}+\frac{d\eta}{dy}\cdot\frac{dy}{da}+\frac{d\eta}{dz}\cdot\frac{dz}{da}$$

$$\frac{d\eta}{db}=\frac{d\eta}{dx}\cdot\frac{dx}{db}+\frac{d\eta}{dy}\cdot\frac{dy}{db}+\frac{d\eta}{dz}\cdot\frac{dz}{db}$$

$$\frac{d\eta}{dc}=\frac{d\eta}{dx}\cdot\frac{dx}{dc}+\frac{d\eta}{dy}\cdot\frac{dy}{dc}+\frac{d\eta}{dz}\cdot\frac{dz}{dc}$$

$$\frac{d\zeta}{da}=\frac{d\zeta}{dx}\cdot\frac{dx}{da}+\frac{d\zeta}{dy}\cdot\frac{dy}{da}+\frac{d\zeta}{dz}\cdot\frac{dz}{da}$$

$$\frac{d\zeta}{db}=\frac{d\zeta}{dx}\cdot\frac{dx}{db}+\frac{d\zeta}{dy}\cdot\frac{dy}{db}+\frac{d\zeta}{dz}\cdot\frac{dz}{db}$$

$$\frac{d\zeta}{dc}=\frac{d\zeta}{dx}\cdot\frac{dx}{dc}+\frac{d\zeta}{dy}\cdot\frac{dy}{dc}+\frac{d\zeta}{dz}\cdot\frac{dz}{dc}$$

i quali valori, sostituiti nel precedente di δH, lo fanno diventare

$$\partial H = \frac{d\xi}{dx}\left(\alpha\,\frac{dx}{da} + \beta\,\frac{dx}{db} + \gamma\,\frac{dx}{dc}\right)$$

$$+\frac{d\xi}{dy}\left(\alpha\,\frac{dy}{da} + \beta\,\frac{dy}{db} + \gamma\,\frac{dy}{dc}\right)$$

$$+\frac{d\xi}{dz}\left(\alpha\,\frac{dz}{da} + \beta\,\frac{dz}{db} + \gamma\,\frac{dz}{dc}\right)$$

$$+\frac{d\eta}{dx}\left(\alpha'\,\frac{dx}{da} + \beta'\,\frac{dx}{db} + \gamma'\,\frac{dx}{dc}\right)$$

$$+\frac{d\eta}{dy}\left(\alpha'\,\frac{dy}{da} + \beta'\,\frac{dy}{db} + \gamma'\,\frac{dy}{dc}\right)$$

$$+\frac{d\eta}{dz}\left(\alpha'\,\frac{dz}{da} + \beta'\,\frac{dz}{db} + \gamma'\,\frac{dz}{dc}\right)$$

$$+\frac{d\zeta}{dx}\left(\alpha''\,\frac{dx}{da} + \beta''\,\frac{dx}{db} + \gamma''\,\frac{dx}{dc}\right)$$

$$+\frac{d\zeta}{dy}\left(\alpha''\,\frac{dy}{da} + \beta''\,\frac{dy}{db} + \gamma''\,\frac{dy}{dc}\right)$$

$$+\frac{d\zeta}{dz}\left(\alpha''\,\frac{dz}{da} + \beta''\,\frac{dz}{db} + \gamma''\,\frac{dz}{dc}\right)$$

e per le equazioni (66) riducesi immediatamente

$$\partial H = H\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right).$$

Questo valore sostituito nella (111) ci somministra

$$h = H\left(1 - \frac{d\xi}{dx} - \frac{d\eta}{dy} - \frac{d\zeta}{dz}\right) \tag{112}$$

donde, messi per h, H i valori corrispondenti $\frac{1}{\delta}$, $\frac{1}{\Gamma}$ cavati dalle (110), (97), si ha finalmente

$$\Gamma = \gamma\left(1 - \frac{d\xi}{dx} - \frac{d\eta}{dy} - \frac{d\zeta}{dz}\right) \tag{113}$$

che dà l'una per l'altra le densità corrispondenti alle due epoche. Questa formola combina con quella data in più luoghi de' suoi *Esercizj* dal Sig. Cauchy (*); ma egli nel primo de' luoghi citati, se ho ben inteso, pose la condizione che la densità γ corrispondente alla prima posizione fosse costante; la precedente analisi prova l'equazione vera anche per γ variabile di punto in punto, come pare che il suddetto Autore abbia egli pure supposto negli altri due luoghi citati. Avremmo potuto nella relazione fra le due densità γ, Γ supporre gli spostamenti ξ, η, ζ fatti secondo la composizione (108), cioè in funzione delle coordinate d'equilibrio; allora avremmo trovato

$$\Gamma\left(1 + \frac{d\xi}{dp} + \frac{d\eta}{dq} + \frac{d\zeta}{dr}\right) = \gamma. \tag{114}$$

L'andamento del calcolo essendo molto simile al precedente è lasciato alla perizia del leggitore.

45. La teorica delle condensazioni di cui ora feci parola, è d'importanza primaria pel Sig. Cauchy, che ne usa anche per la formazione di molte equazioni meccaniche. L'importanza è minore per noi che deduciamo tali equazioni da altri principj. Nondimeno è bene quì indicare, almeno di fuga, come debbasi trattare una tale teorica secondo le nostre viste.

Ammesse quì pure le due epoche, nella prima delle quali le coordinate del punto generico siano espresse da

$$p(a, b, c), \quad q(a, b, c), \quad r(a, b, c)$$

e nella seconda da

(*) Exercices de Mathématiques. T. III. pag. 165, formule (24).
Ibid. pag. 219, formule (17). T. IV. pag. 132, formules (12), (13).

$$x(a, b, c, t), \quad y(a, b, c, t), \quad z(a, b, c, t)$$

ovvero (espressioni (83) del n.° 33) da

$$x(p, q, r, t), \; y(p, q, r, t), \; z(p, q, r, t) \; ; \tag{115}$$

immaginiamo per la prima epoca descritta intorno al punto (p, q, r) una sfera di raggio i. Varie molecole si troveranno sulla superficie di questa sfera, e saranno quelle che nella prima distribuzione ideale aveano coordinate a', b', c' tali da soddisfare poi per la 1.ª epoca all' equazione

$$\begin{aligned} &[p(a', b', c') - p(a, b, c)]^2 + [q(a', b', c') - q(a, b, c)]^2 \\ &+ [r(a', b', c') - r(a, b, c)]^2 = i^2. \end{aligned} \tag{116}$$

Facciamo

$$\begin{aligned} p(a', b', c') &= p(a, b, c) + i\varepsilon \\ q(a', b', c') &= q(a, b, c) + i\mathfrak{z} \\ r(a', b', c') &= r(a, b, c) + i\omega \end{aligned} \tag{117}$$

e la precedente (116) darà fra le ε, $\mathfrak{z}$, ω l' equazione di condizione

$$\varepsilon^2 + \mathfrak{z}^2 + \omega^2 = 1. \tag{118}$$

Chiaminsi l, m, n le coordinate di un punto qualunque dell' immaginata superficie sferica che ha per centro (p, q, r), riferite a questo punto come ad origine di tre nuovi assi paralleli a quelli delle p, q, r, e delle x, y, z; dando alle ε, $\mathfrak{z}$, ω tutti i valori numerici possibili che soddisfanno alla (118) e che in forza dell' equazione stessa non possono superare l' unità, avremo dalle

$$l = i\varepsilon \; ; \quad m = i\mathfrak{z} \; ; \quad n = i\omega$$

tutti i punti geometrici di detta superficie sferica. Queste ε, ϑ, ω significano i tre coseni degli angoli che il raggio i condotto a un punto qualunque della superficie sferica fa coi tre assi ortogonali. Dando invece alle ε, ϑ, ω non tutta la variabilità anzidetta, ma i soli valori cavati dalle (117), avremo quei soli punti della superficie sferica ove trovansi anche punti fisici.

Alla seconda epoca, quando il punto (p, q, r) è trasportato ad avere le coordinate x, y, z, uno qualunque dei punti che trovavansi sulla superficie sferica di raggio i alla prima epoca, avrà per le (115) le coordinate

$$x(p+i\varepsilon,\ q+i\vartheta,\ r+i\omega,\ t)$$

$$y(p+i\varepsilon,\ q+i\vartheta,\ r+i\omega,\ t)$$

$$z(p+i\varepsilon,\ q+i\vartheta,\ r+i\omega,\ t)$$

dove i valori di ε, ϑ, ω sono quelli dedotti dalle (117).

E se dicansi L, M, N le sue coordinate relativamente al punto (x, y, z) preso come centro e come origine di tre nuovi assi paralleli agli ortogonali, saranno

$$L=x(p+i\varepsilon,\ q+i\vartheta,\ r+i\omega,\ t)-x(p,q,r,t)$$

$$M=y(p+i\varepsilon,\ q+i\vartheta,\ r+i\omega,\ t)-y(p,q,r,t)$$

$$N=z(p+i\varepsilon,\ q+i\vartheta,\ r+i\omega,\ t)-z(p,q,r,t)$$

ovvero

$$L=i\left(\varepsilon\frac{dx}{dp}+\vartheta\frac{dx}{dq}+\omega\frac{dx}{dr}\right)+i^2R_1$$

$$(119)\qquad M=i\left(\varepsilon\frac{dy}{dp}+\vartheta\frac{dy}{dq}+\omega\frac{dy}{dr}\right)+i^2R_2$$

$$N=i\left(\varepsilon\frac{dz}{dp}+\vartheta\frac{dz}{dq}+\omega\frac{dz}{dr}\right)+i^2R_3$$

dove i^2R_1, i^2R_2, i^2R_3 esprimono somme di termini nei quali la i entra nei coefficienti almeno alla potenza seconda.

Prendansi i soli primi termini di questi sviluppi, e pongansi

$$f = i\left(\varepsilon\frac{dx}{dp} + \vartheta\frac{dx}{dq} + \varpi\frac{dx}{dr}\right)$$

$$(120) \qquad g = i\left(\varepsilon\frac{dy}{dp} + \vartheta\frac{dy}{dq} + \varpi\frac{dy}{dr}\right)$$

$$h = i\left(\varepsilon\frac{dz}{dp} + \vartheta\frac{dz}{dq} + \varpi\frac{dz}{dr}\right)$$

restituendo alle ε, ϑ, ϖ tutta la variabilità compatibile colla equazione di condizione (118). Saranno le f, g, h coordinate di un punto qualunque di una superficie rientrante in se stessa e avente per equazione quella che risulta eliminando ε, ϑ, ϖ dalle (118), (120). Tale equazione è

$$\begin{aligned}
&[(\alpha)^2+(\beta)^2+(\gamma)^2]f^2+2[(\alpha)(\alpha')+(\beta)(\beta')+(\gamma)(\gamma')]fg \\
(121) \quad &+[(\alpha')^2+(\beta')^2+(\gamma')^2]g^2+2[(\alpha)(\alpha'')+(\beta)(\beta'')+(\gamma)(\gamma'')]fh \\
&+[(\alpha'')^2+(\beta'')^2+(\gamma'')^2]h^2+2[(\alpha')(\alpha'')+(\beta')(\beta'')+(\gamma')(\gamma'')]gh=i^2(\mathrm{H})
\end{aligned}$$

essendo con una composizione affatto simile a quella delle (61), (64)

$$(\alpha) = \frac{dy}{dq} \cdot \frac{dz}{dr} - \frac{dz}{dq} \cdot \frac{dy}{dr}$$

$$(\alpha') = \frac{dz}{dq} \cdot \frac{dx}{dr} - \frac{dx}{dq} \cdot \frac{dz}{dr}$$

$$(\alpha'') = \frac{dx}{dq} \cdot \frac{dy}{dr} - \frac{dy}{dq} \cdot \frac{dx}{dr}$$

$$(\beta) = \frac{dz}{dp} \cdot \frac{dy}{dr} - \frac{dy}{dp} \cdot \frac{dz}{dr}$$

(122) $$(\beta') = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{dz}{dr} - \frac{dz}{dp} \cdot \frac{dx}{dr}$$

$$(\beta'') = \frac{dy}{dp} \cdot \frac{dx}{dr} - \frac{dx}{dp} \cdot \frac{dy}{dr}$$

$$(\gamma) = \frac{dy}{dp} \cdot \frac{dz}{dq} - \frac{dz}{dp} \cdot \frac{dy}{dq}$$

$$(\gamma') = \frac{dz}{dp} \cdot \frac{dx}{dq} - \frac{dx}{dp} \cdot \frac{dz}{dq}$$

$$(\gamma'') = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{dy}{dq} - \frac{dy}{dp} \cdot \frac{dx}{dq};$$

$$(\mathrm{H}) = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{dy}{dq} \cdot \frac{dz}{dr} - \frac{dx}{dq} \cdot \frac{dy}{dp} \cdot \frac{dz}{dr}$$

(123) $$+ \frac{dx}{dq} \cdot \frac{dy}{dr} \cdot \frac{dz}{dp} - \frac{dx}{dr} \cdot \frac{dy}{dq} \cdot \frac{dz}{dp}$$

$$+ \frac{dx}{dr} \cdot \frac{dy}{dp} \cdot \frac{dz}{dq} - \frac{dx}{dp} \cdot \frac{dy}{dr} \cdot \frac{dz}{dq}.$$

I punti fisici che alla prima epoca erano alla superficie sferica di raggio i, alla seconda epoca non saranno precisamente sulla superficie ora immaginata, a motivo che i valori

(119) delle loro coordinate relativamente al punto (x, y, z) hanno altri termini oltre i primi fatti colla i lineare. Se ne discosteranno però di pochissimo, e tanto meno, quanto più i sia piccola; talchè concepita la superficie vera che comprende tutti quei punti fisici, sarà essa relativamente alla superficie della equazione (121) una specie di superficie perturbata, prendendo per un momento a prestito questo termine dall' Astronomia.

Per la ragione ultimamente esposta si trova interessante la disamina della superficie di equazione (121). Essa è una elissoide, e i suoi assi sono determinati di grandezza e di posizione. Ciò dà luogo a varii notabili teoremi che possono vedersi negli Esercizj di Matematica del Sig. Cauchy.

§ V.

Riduzione delle equazioni generali dietro le proprietà fisiche dell' azione molecolare.

46. Potrei assumere le due proprietà dell' azione molecolare che or ora mostrerò discendere da semplici discussioni analitiche, siccome date dalla sperienza con pari sicurezza a quella dello stesso principio sperimentale che si prende a base della meccanica: così fecero infatti i moderni chiarissimi Geometri. Parmi però che non sia senza interesse il provarle anche sussistenti necessariamente, ammesso il solo principio per se manifesto che nelle equazioni generali (74) o (56) i termini introdotti dall' azione molecolare debbano essere confrontabili coi primi datici dalle forze acceleratrici. Un sì fatto riscontro ci servirà, se non altro, di molto conforto provandoci che in tutte le precedenti deduzioni non ci siamo allontanati dalla verità.

O riguardinsi le nove quantità P_1, P_2, P_3, Q_1, ec. nelle (74) o le nove L_1, L_2, L_3, M_1 ec. nelle (56), esse tutte dipendono

dalle (51) del n.° 22, sulle quali dobbiamo concentrare le nostre considerazioni. Queste sono manifestamente funzioni delle a, b, c in cui tali variabili rimangono in tutta la loro generalità. Diciamo dunque primieramente ch' esse non possono essere quantità aventi sempre un valore infinito, perchè se ciò fosse, non sarebbe più vero che nelle (56) i termini ultimi sarebbero in grandezza confrontabili coi primi. È questo il luogo di richiamare il teorema di Lagrange citato più sopra al n.° 44. Una quantità funzione di a, b, c, la quale è sempre piccola indipendentemente dalle stesse a, b, c cui si lascia una significazione generale, deve avere la forma $if(a, b, c)$ dove la piccolezza dipende dal coefficiente i: e ne consegue, come si è colà veduto, che le derivate di essa per a o per b o per c sono quantità piccole dello stesso ordine. È evidente che per maggiore generalità si potrebbe ammettere invece del solo termine if una serie $if + i^2 f_1 + i^3 f_2$ ec. ma le conseguenze essendo precisamente le stesse, questa considerazione non farebbe che complicare le espressioni senza alcun vantaggio. Il medesimo ragionamento persuade che una funzione delle a, b, c, la quale fosse sempre infinita, rimanendo le a, b, c in tutta la loro generalità, sarebbe pure della forma $if(a, b, c)$ risultando il valore infinitamente grande dal fattore costante i; e che le sue derivate per a, b, c sarebbero ancora infite. Adunque se fossero sempre infinite le A, B, C, ec. nelle (51), sarebbero anche generalmente infiniti gli ultimi termini nelle (56), contro il supposto.

Ora si esaminino alcune delle (51), per esempio, le prime tre, giacchè ciò che si dice di esse potrà ripetersi egualmente delle altre. Restituendo al segno $\int$ il significato scritto nella (30) e alla $\psi(S)$ il valore della (31) abbiamo

$$A = \tfrac{1}{2} \sum_{f=l}^{f=\lambda} \sum_{g=m}^{g=\mu} \sum_{h=n}^{h=\nu} \varphi(S) \frac{(f-a)^2}{S}$$

(124) $$B = \tfrac{1}{2} \sum_{f=l}^{f=\lambda} \sum_{g=m}^{g=\mu} \sum_{h=n}^{h=\nu} \varphi(S) \frac{(g-b)^2}{S}$$

$$C = \tfrac{1}{2} \sum_{f=l}^{f=\lambda} \sum_{g=m}^{g=\mu} \sum_{h=n}^{h=\nu} \varphi(S) \frac{(h-c)^2}{S}$$

Queste espressioni equivalgono a somme triple (rivedi il n.° 5) che si estendono per tre versi ad un numero di termini maggiore d' ogni assegnabile. Ora è noto in analisi (chi non avesse in pronto altri libri può consultare il mio Trattato sul calcolo degl' integrali definiti ai numeri 120, 161) che il valore di una somma di termini il cui numero diventa maggiore d' ogni assegnabile, sia che si tratti di una serie semplice o di una doppia o di una tripla, può riescire finito quando i termini diminuiscono continuamente di grandezza mentre crescono di numero: e questo avviene ordinariamente perchè tali termini hanno coefficienti che si fanno semprepiù piccoli al di sotto d' ogni grandezza assegnabile. Richiamato questo principio generale, osservinsi le (124): non si vedono in esse le quantità

$$\varphi(S) \frac{(f-a)^2}{S}, \quad \varphi(S) \frac{(g-b)^2}{S}, \quad \varphi(S) \frac{(h-c)^2}{S}$$

sotto i segni sommatorj moltiplicate per coefficienti estremamente piccoli, quindi generalmente non si vede per qual motivo ciascuno dei termini componenti dette serie triple debba avere un valore minore d'ogni assegnabile, e saremmo portati a conchiudere che quelle somme avranno in generale valori infiniti. Ciò non potendo essere, converrà pure che anche in mancanza di coefficienti comuni estremamente piccoli, gl' infiniti termini componenti quelle serie infinite abbiano ciascuno

un valore minore d'ogni assegnabile: nè potrà accadere che per una delle due ragioni che soggiungo. O perchè siano estremamente piccoli i valori delle differenze $f-a$, $g-b$, $h-c$, o perchè tali differenze non essendo insensibili, insensibile sia invece il valore del fattore $\phi(S)$. Quando sono piccolissime le differenze $f-a$, $g-b$, $h-c$, tale è anche la S (rivedi l'espressione (23)) e lo è di una piccolezza dello stesso ordine, ma le frazioni $\frac{(f-a)^2}{S}$, $\frac{(g-b)^2}{S}$, $\frac{(h-c)^2}{S}$ hanno ancora valori piccolissimi per la dimensione più alta che scorgesi nei numeratori. Procurata così da questi fattori la piccolezza del termine, la $\phi(S)$ può avervi un valore finito e notabile, cioè, *l'espressione dell'azione molecolare può avere un valore sensibile pei punti estremamente vicini.* Nel secondo caso, quando $f-a$, $g-b$, $h-c$ e quindi S hanno valori finiti, deve essere insensibile il valore di $\phi(S)$, cioè, *l'azione molecolare è insibile per distanze sensibili.* Ecco le due proprietà dell'azione molecolare insegnateci anche dalla fisica.

47. Prevedo un'obbjezione che apparentemente ha molta forza, e per la quale credetti io pure sulle prime distrutto l'anzidetto ragionamento: essa però, più attentamente considerata, lo convalida e lo illustra. Anche la prima parte (può dirsi) dell'equazione generale (26) sotto l'integrale triplicato non vedesi moltiplicata per coefficiente estremamente piccolo, eppure niuno vorrà ammettere per quella quantità le conseguenze ora pretese per le quantità sottoposte ai segni triplicati (124). Rispondo: quel coefficiente estremamente piccolo che non si vede fattore della prima parte della (26), vi si deve necessariamente introdurre (ed è un σ^3) quando i valori numerici delle forze acceleratrici X, Y, Z, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ s'intendono formati avendo stabilita per unità di forza quella che è applicata all'unità di massa, con altre circostanze che quì non importa riferire. Mi riserbo, come in luogo più opportuno, a provar ciò con tutta chiarezza sul principio del § seguente; e se

finora ho ommesso un tal fattore piccolissimo σ^3, fu per minore complicazione, potendosene in tutti gli antecedenti far di meno. Questa risposta, che sembra perentoria, dà luogo ancora ad una replica. Sia pure (si dirà) che le forze X, Y, Z, $\frac{d^2x}{dt^2}$ ec. per essere applicate ad atomi di materia e non a masse finite debbano moltiplicarsi pel fattore σ^3, anche $\phi(S)$ essendo l' espressione di una simile forza applicata agli stessi punti fisici, dovrà prendere quel fattore, e allora avremo sotto ai segni sommatorj (124) il coefficiente piccolissimo che renderà vano tutto il discorso del numero precedente. Rispondo: il fattore σ^3 della $\phi(S)$ non può essere disposto come qui si suppone: esso deve conservarsi estrinseco ai segni sommatorj nelle (124) e simili, perchè le quantità indi risultanti sono ancora nella (26) sottoposte ad un altro integrale triplicato, come la prima parte di cui qui sopra si è parlato. Con altre parole; la seconda parte della (26) è una somma sestupla: il fattore σ^3 servirà a produrre quella piccolezza che si esige per un integrale triplicato, ma per l' altra somma triplicata, il cui segno è poi distribuito sopra molti termini che riescono fatti delle (124) e simili, la piccolezza sarà procurata dal ragionamento del numero precedente che rimane come prima della fatta obbjezione.

48. Insistiamo anzi su quel ragionamento per dedurne altre importanti conseguenze. Si trasformino le (124) e simili ponendo

$$f-a=k,\ g-b=i,\ h-c=j \tag{125}$$

dove k, i, j esprimono tre nuove variabili: avremo

$$A=\tfrac{1}{2}\sum_{k=l-a}^{k=\lambda-a}\ \sum_{i=m-b}^{i=\mu-b}\ \sum_{j=n-c}^{j=\nu-c}\phi(S)\frac{k^2}{S} \tag{126}$$

e similmente per le quantità simili; la S data dalla (23) ci sarà ora data dalla

$$S^2=[x(a+k, b+i, c+j)-x(a, b, c)]^2$$

$$(127) \qquad +[y(a+k, b+i, c+j)-y(a, b, c)]^2$$

$$+[z(a+k, b+i, c+j)-z(a, b, c)]^2$$

e sarà una funzione di k, i, j che indichiamo con $S(k, i, j)$. Gli indici inferiori nei segni sommatorj delle (126) e simili, saranno necessariamente quantità negative; la variabile k passando dal valore negativo $-(a-l)$ al positivo $\lambda-a$ passerà per tutti i valori espressi e sottintesi nella serie

$$(128) \qquad -(a-l),\ldots -3\sigma,\ -2\sigma,\ -\sigma,\ 0,\ \sigma,\ 2\sigma,\ 3\sigma,\ldots,(-\lambda a);$$

dicasi a un di presso per le variabili i, j.

È bene immaginarsi distesa la somma triplicata (126), richiamando la forma (11) del n.° 5: eccone una porzione che abbraccia due soli termini prima e dopo del valor zero di ciascuna delle tre variabili.

$$
\begin{aligned}
&\varphi(S(-2\sigma,-2\sigma,-2\sigma))\frac{4\sigma^3}{S}+\varphi(S(-\sigma,-2\sigma,-2\sigma))\frac{\sigma^3}{S}+\varphi(S(\sigma,-2\sigma,-2\sigma))\frac{\sigma^3}{S}+\varphi(S(2\sigma,-2\sigma,-2\sigma))\frac{4\sigma^3}{S}\\
&+\varphi(S(-2\sigma,-\sigma,-2\sigma))\frac{4\sigma^3}{S}+\varphi(S(-\sigma,-\sigma,-2\sigma))\frac{\sigma^3}{S}+\varphi(S(\sigma,-\sigma,-2\sigma))\frac{\sigma^3}{S}+\varphi(S(2\sigma,-\sigma,-2\sigma))\frac{4\sigma^3}{S}\\
(129)\quad &+\varphi(S(-2\sigma,0,-2\sigma))\frac{4\sigma^3}{S}+\varphi(S(-\sigma,0,-2\sigma))\frac{\sigma^3}{S}+\varphi(S(\sigma,0,-2\sigma))\frac{\sigma^3}{S}+\varphi(S(2\sigma,0,-2\sigma))\frac{4\sigma^3}{S}\\
&+\varphi(S(-2\sigma,\sigma,-2\sigma))\frac{4\sigma^3}{S}+\varphi(S(-\sigma,\sigma,-2\sigma))\frac{\sigma^3}{S}+\varphi(S(\sigma,\sigma,-2\sigma))\frac{\sigma^3}{S}+\varphi(S(2\sigma,\sigma,-2\sigma))\frac{4\sigma^3}{S}\\
&+\varphi(S(-2\sigma,2\sigma,-2\sigma))\frac{4\sigma^3}{S}+\varphi(S(-\sigma,2\sigma,-2\sigma))\frac{\sigma^3}{S}+\varphi(S(\sigma,2\sigma,-2\sigma))\frac{\sigma^3}{S}+\varphi(S(2\sigma,2\sigma,-2\sigma))\frac{4\sigma^3}{S}
\end{aligned}
$$

più quattro altre riunioni simili di cinque linee orizzontali, che facilmente si formano dopo la precedente. Osservandosi nella precedente al terzo posto in tutte le S la quantità -2σ, le altre quattro riunioni vi avranno costantemente $-\sigma$ la seconda, zero la terza, σ la quarta, 2σ la quinta. Noteremo inoltre che in tutti i termini sopra scritti la S in denominatori deve seguire la composizione della S sotto il segno ϕ nello stesso termine: ciò non si è indicato per minor complicazione.

Si capisce facilmente come questa somma tripla debbasi estendere da sei parti per abbracciare tutti i termini significati nella (126). Ora diciamo non essere necessario ritenere nella somma (126) della quale la (129) è parte, tutti i termini visibili nella forma distesa: perchè molto prima di arrivare ai sei limiti i termini ora menzionati possono considerarsi come tanti zero, non aggiungendo quantità sensibile al valore già raccolto in forza dei termini antecedenti. Questa proposizione è fatta di due altre che la dichiarano completamente. Osserviamo in primo luogo che non bisogna concederle troppo, fino a credere che basti tener conto *di un numero finito di termini* in tutti i sei versi: il che equivarrebbe a credere che la $\phi(S)$ si estenda a sole poche molecole intorno al punto (a,b,c). Riflettendo sulle (126), (129) si capisce che il fattore $\frac{k^2}{S}$ darebbe coefficienti $\frac{\sigma}{S}\sigma$, $\frac{2\sigma}{S}2\sigma$, ec. piccolissimi, per cui un numero finito di termini ci somministrerebbe una somma la quale avrebbe un valore trascurabile. Non è che abbracciando un numero di termini maggiore d'ogni assegnabile, che si viene a distruggere l'effetto di quel coefficiente piccolissimo e ad ottenere una quantità finita. Adunque *l'azione molecolare* $\phi(S)$ *si estende all'ingiro del punto* (a, b, c) *ad un numero di molecole maggiore d'ogni assegnabile.* Chiamasi *raggio della sfera di attività* quello di una sfera ideale dove sono comprese tutte le molecole a cui si estende l'azione molecolare con effetto da calcolarsi. Ma pongasi mente alla natura delle serie triple

come la (126), e ne dedurremo un' altra proposizione ben interessante. L' estensione per ciascuna delle tre variabili ad un numero di termini tanto maggiore d' ogni assegnabile, che la serie

$$(130) \qquad -m\sigma,\ -(m-1)\sigma, \ldots,\ -\sigma,\ 0,\ \sigma,\ 2\sigma, \ldots, n\sigma$$

corrispondente alla (128), finisca da ambe le parti con $-m\sigma$, $n\sigma$ quantità finite, quando tutti i termini influiscano nel valore della somma totale, non solo distrugge l'effetto della piccolezza introdotta da un coefficieute σ di primo ordine, ma quello altresì di una piccolezza introdotta da un coefficiente σ^3 di terz' ordine. Ora nelle serie come la (126) vedemmo più sopra che non ci abbisogna di togliere se non la piccolezza di primo ordine. Se dunque i termini formanti la (126) avessero un valore influente nella somma per tutta l' estensione indicata dai sei limiti, questo valore della somma sarebbe ancora infinito. Ciò non potendo essere, convien dire che nei tre versi indicati dai tre segni sommatorj, a motivo del rapido decremento di $\varphi(S)$, i termini cessino d' avere valore influente nella somma, assai prima che nella serie (130) e nelle due simili si giunga dall' una e dall' altra parte a limiti $-m\sigma$, $n\sigma$ di grandezza finita. Da ciò consegue che *il raggio della sfera di attività dell' azione molecolare, quantunque si estenda a un numero grandissimo di molecole, deve ancora considerarsi una quantità insensibile.* Questa proposizione è stabilita dal Sig. Poisson come ipotesi conforme alla natura (*): ora dai precedenti ragionamenti è provata discendere necessariamente dalle premesse.

49. Per quest' ultima proposizione alla (126) e a tutte le espressioni simili può farsi subire un cambiamento, può darsi cioè la forma

(*) Journal de l'Ecole Polyt. Cah. 20. pag. 7.

$$(131) \qquad A = \sum_{k=-n\sigma}^{k=n\sigma} \sum_{i=-n\sigma}^{i=n\sigma} \sum_{j=-n\sigma}^{j=n\sigma} \psi(S) k^2$$

dove i limiti $-n\sigma$, $n\sigma$ si prendono eguali, dal segno in fuori, intendendo il numero n tanto grande quanto basta per comprendere tutti i punti contenuti nella sfera di attività. Nella distribuzione uniforme ideale antecedente, di cui tante volte si è parlato, sono veramente in egual numero i punti compresi nella sfera di attività delle varie parti del punto (a, b, c) secondo i tre assi; nella distribuzione irregolare qualunque intorno al punto (x, y, z) vi potrà essere materia più stipata da un lato, più rarefatta dall'altro: ma ciò non toglie di poter prendere il numero n eguale nei limiti $-n\sigma$, $n\sigma$. Prendendo questo numero tanto grande da abbracciare tutti i punti fisici compresi nella sfera di attività dalla parte più stipata, se si piglia egualmente grande dall' altra parte, si verranno a ritenere nelle somme anche termini spettanti a punti che sono fuori della detta sfera di attività: siccome però quei termini sono senza influenza nel valore della somma totale, non ci risulterà alcun errore dalla loro aggregazione. Anzi, secondo la pratica dei geometri moderni in simili casi, potremo mettere $-\infty$, ∞ in luogo di $-n\sigma$, $n\sigma$, giacchè spingendo le somme al di là dei termini utili quanto si vuole, anche all'infinito, non si fa che aggiungere termini non influenti nel valore delle medesime. Mi conformerò io pure fra poco a quest' uso, ma quì ritengo i limiti $-n\sigma$, $n\sigma$; il numero assai grande n è incognito, ma questa ignoranza non mi fa danno; e raccomando di tener ben presente, che la quantità $n\sigma$, ripetuta sei volte nei limiti delle somme (131) e simili, è ancora una grandezza insensibile in rapporto alle quantità finite.

50. L' aver dimostrato che le somme triple (126) e simili possono estendersi soltanto a quei termini nei quali le k, i, j che compongono fattori esterni alla $\psi(S)$, hanno valori ancora insensibili in confronto delle quantità finite, ci conduce a un' altra conseguenza importantissima per la nostra analisi,

quella cioè di potere riguardare come zero nelle (51) tutte le G_1, G_2, G_3, ec. Che sia così, ci si farà manifesto rappresentandoci una di queste somme triple distesa a somiglianza della (129). Tutti i termini di essa si vedranno moltiplicati per fattori esterni alla $\psi(S)$ di una piccolezza d' ordine maggiore di quella che si ritiene per le sei A, B, C, D, E, F: adunque saranno tutti trascurabili in confronto di quelli, quindi anche la somma degli uni trascurabile in confronto della somma degli altri: ma la somma di quelli dava valori finiti per le A, B, C, D, E, F, dunque le somme G_1, G_2, G_3 ec. saranno trascurabili in confronto delle quantità finite.

Questo annullarsi di tutte le G_1, G_2, G_3 ec. riduce nelle (52) i valori delle espressioni simboliche $[1, x]$, $[2, x]$, $[3, x]$ ai soli tre primi termini, e riduce a zero tutti i valori delle $[4, x]$, $[5, x]$, ec. Similmente avverrà dei valori delle $[1, y]$, $[2, y]$, $[3, y]$, $[4, y]$, ec. nelle (53) e dei valori delle $[1, z]$, $[2, z]$, $[3, z]$, $[4, z]$, ec. nelle (54). Dopo ciò vedremo che nelle (49) i valori delle nove L_1, L_2, L_3, M_1, ec. si riducono ai soli primi termini, perchè la derivazione per a o per b o per c delle quantità trascurabili $[4, x]$, $[5, x]$ ec. non ne toglie la piccolezza, giusta il teorema Lagrangiano rammentato al numero 46.

Vediamo le conseguenze delle accennate riduzioni.

51. I valori delle nove L_1, L_2, L_3, M_1, ec. diventano

$$L_1 = A\frac{dx}{da} + D\frac{dx}{db} + E\frac{dx}{dc}$$

$$L_2 = D\frac{dx}{da} + B\frac{dx}{db} + F\frac{dx}{dc}$$

$$L_3 = E\frac{dx}{da} + F\frac{dx}{db} + C\frac{dx}{dc}$$

$$M_1 = A\frac{dy}{da} + D\frac{dy}{db} + E\frac{dy}{dc}$$

(132) $$M_2 = D\frac{dy}{da} + B\frac{dy}{db} + F\frac{dy}{dc}$$

$$M_3 = E\frac{dy}{da} + F\frac{dy}{db} + C\frac{dy}{dc}$$

$$N_1 = A\frac{dz}{da} + D\frac{dz}{db} + E\frac{dz}{dc}$$

$$N_2 = D\frac{dz}{da} + B\frac{dz}{db} + F\frac{dz}{dc}$$

$$N_3 = E\frac{dz}{da} + F\frac{dz}{db} + C\frac{dz}{dc}.$$

Se questi si sostituiscono nelle (73) le tre relazioni

(133) $$P_2 = Q_1;\ P_3 = R_1;\ Q_3 = R_2$$

di cui parlammo al n.° 30, si riconoscono vere colla semplice ispezione dei valori indi risultanti per le nove P_1, P_2, P_3; Q_1, Q_2, Q_3; R_1, R_2, R_3. Eseguisca il lettore questa sostituzione che non ha difficoltà, ed oltre al persuadersi per tal modo delle interessanti relazioni (133), farà un' operazione necessaria per capire il prospetto che soggiungo.

52. Ecco un compendio che ci mette sott' occhio quanto siamo di già avanzati nella nostra teorica analitica.

Le equazioni generali pel punto generico (x, y, z) del corpo omogeneo in moto sono, ripetendo le (74)

$$\Gamma\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\frac{dP_1}{dx}+\frac{dP_2}{dy}+\frac{dP_3}{dz}=0$$

$$(134)\qquad \Gamma\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)+\frac{dQ_1}{dx}+\frac{dQ_2}{dy}+\frac{dQ_3}{dz}=0$$

$$\Gamma\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)+\frac{dR_1}{dx}+\frac{dR_2}{dy}+\frac{dR_3}{dz}=0.$$

In queste la $\Gamma(x, y, z, t)$ esprime la densità corrispondente al punto suddetto (x, y, z); e le nove P_1, P_2, ec. hanno valori cui possiamo dare l' aspetto che espongo

$$P_1=(x, x)\Gamma;\ P_2=(x, y)\Gamma;\ P_3=(x, z)\Gamma$$

$$(135)\qquad Q_1=(x, y)\Gamma;\ Q_2=(y, y)\Gamma;\ Q_3=(y, z)\Gamma$$

$$R_1=(x, z)\Gamma;\ R_2=(y, z)\Gamma;\ R_3=(z, z)\Gamma$$

avendo assunte sei espressioni simboliche (x, x), (x, y), (x, z), (y, y), (y, z), (z, z) i cui valori sono i seguenti

$$(x,x)=A\left(\frac{dx}{da}\right)^2+B\left(\frac{dx}{db}\right)^2+C\left(\frac{dx}{dc}\right)^2$$
$$+2D\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}+2E\frac{dx}{da}\frac{dx}{dc}+2F\frac{dx}{db}\frac{dx}{dc}$$

$$(y,y)=A\left(\frac{dy}{da}\right)^2+B\left(\frac{dy}{db}\right)^2+C\left(\frac{dy}{dc}\right)^2$$
$$+2D\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}+2E\frac{dy}{da}\frac{dy}{dc}+2F\frac{dy}{db}\frac{dy}{dc}$$

$$(z,z)=A\left(\frac{dz}{da}\right)^2+B\left(\frac{dz}{db}\right)^2+C\left(\frac{dz}{dc}\right)^2$$
$$+2D\frac{dz}{da}\frac{dz}{db}+2E\frac{dz}{da}\frac{dz}{dc}+2F\frac{dz}{db}\frac{dz}{dc}$$

(136) $$(x,y)=A\frac{dx}{da}\frac{dy}{da}+B\frac{dx}{db}\frac{dy}{db}+C\frac{dx}{dc}\frac{dy}{dc}$$
$$+D\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}+\frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\right)+E\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{dc}+\frac{dx}{dc}\frac{dy}{da}\right)$$
$$+F\left(\frac{dx}{db}\frac{dy}{dc}+\frac{dx}{dc}\frac{dy}{db}\right)$$

$$(x,z)=A\frac{dx}{da}\frac{dz}{da}+B\frac{dx}{db}\frac{dz}{db}+C\frac{dx}{dc}\frac{dz}{dc}$$
$$+D\left(\frac{dx}{da}\frac{dz}{db}+\frac{dx}{db}\frac{dz}{da}\right)+E\left(\frac{dx}{da}\frac{dz}{dc}+\frac{dx}{dc}\frac{dz}{da}\right)$$
$$+F\left(\frac{dx}{db}\frac{dz}{dc}+\frac{dx}{dc}\frac{dz}{db}\right)$$

$$(y,z)=A\frac{dy}{da}\frac{dz}{da}+B\frac{dy}{db}\frac{dz}{db}+C\frac{dy}{dc}\frac{dz}{dc}$$
$$+D\left(\frac{dy}{da}\frac{dz}{db}+\frac{dy}{db}\frac{dz}{da}\right)+E\left(\frac{dy}{da}\frac{dz}{dc}+\frac{dy}{dc}\frac{dz}{da}\right)$$
$$+F\left(\frac{dy}{db}\frac{dz}{dc}+\frac{dy}{dc}\frac{dz}{db}\right)$$

Nelle (135) riscontransi immediatamente le relazioni (133). I valori poi delle sei A, B, C, D, E, F sono per le prime sei delle (51) e pei ragionamenti fatti al n.° 49

$$
(137)\quad
\begin{aligned}
A&=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\sum_{i=-\infty}^{i=\infty}\sum_{j=-\infty}^{j=\infty}\psi(S)k^2\\
B&=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\sum_{i=-\infty}^{i=\infty}\sum_{j=-\infty}^{j=\infty}\psi(S)i^2\\
C&=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\sum_{i=-\infty}^{i=\infty}\sum_{j=-\infty}^{j=\infty}\psi(S)j^2\\
D&=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\sum_{i=-\infty}^{i=\infty}\sum_{j=-\infty}^{j=\infty}\psi(S)ki\\
E&=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\sum_{i=-\infty}^{i=\infty}\sum_{j=-\infty}^{j=\infty}\psi(S)kj\\
F&=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\sum_{i=-\infty}^{i=\infty}\sum_{j=-\infty}^{j=\infty}\psi(S)ij
\end{aligned}
$$

In queste la $\psi(S)$ è funzione di forma incognita, ma la S ci è data dalla (127).

Giova notare che la (127) svolta col teorema di Taylor, diventa primieramente

$$
(138)\quad
\begin{aligned}
S^2=&\left(k\frac{dx}{da}+i\frac{dx}{db}+j\frac{dx}{dc}+\text{ec.}\right)^2\\
&+\left(k\frac{dy}{da}+i\frac{dy}{db}+j\frac{dy}{dc}+\text{ec.}\right)^2\\
&+\left(k\frac{dz}{da}+i\frac{dz}{db}+j\frac{dz}{dc}+\text{ec.}\right)^2;
\end{aligned}
$$

poscia, ponendo per abbreviazione

$$t_1=\left(\frac{dx}{da}\right)^2+\left(\frac{dy}{da}\right)^2+\left(\frac{dz}{da}\right)^2$$

$$t_2=\left(\frac{dx}{db}\right)^2+\left(\frac{dy}{db}\right)^2+\left(\frac{dz}{db}\right)^2$$

$$t_3=\left(\frac{dx}{dc}\right)^2+\left(\frac{dy}{dc}\right)^2+\left(\frac{dz}{dc}\right)^2$$

(139)

$$t_4=\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}+\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}+\frac{dz}{da}\frac{dz}{db}$$

$$t_5=\frac{dx}{da}\frac{dx}{dc}+\frac{dy}{da}\frac{dy}{dc}+\frac{dz}{da}\frac{dz}{dc}$$

$$t_6=\frac{dx}{db}\frac{dx}{dc}+\frac{dy}{db}\frac{dy}{dc}+\frac{dz}{db}\frac{dz}{dc}$$

e svolgendo i quadrati

(140) $$S^2=k^2t_1+i^2t_2+j^2t_3+2kit_4+2kjt_5+2ijt_6+R$$

dove R è posta invece di una somma di termini nei quali le k, i, j sono per lo meno a tre dimensioni.

53. Le quantità (139) fanno un gran giuoco nella nostra teorica. Interessa primieramente di trovare in funzione di esse il sestinomio H di cui abbiamo data l'espressione nella (61) e da cui per la (96) risulta anche il valore della densità Γ.

Quadrando la prima, la quarta e la settima delle equazioni (66), indi sommandole abbiamo per le denominazioni (139)

$$\alpha^2t_1+\beta^2t_2+\gamma^2t_3+2\alpha\beta t_4+2\alpha\gamma t_5+2\beta\gamma t_6=H^2.$$

Similmente dalla seconda, quinta e ottava delle stesse (66)

$$\alpha'^2t_1+\beta'^2t_2+\gamma'^2t_3+2\alpha'\beta't_4+2\alpha'\gamma't_5+2\beta'\gamma't_6=H^2$$

e dalla terza, sesta e nona

$$\alpha''^2 t_1 + \beta''^2 t_2 + \gamma''^2 t_3 + 2\alpha''\beta'' t_4 + 2\alpha''\gamma'' t_5 + 2\beta''\gamma'' t_6 = H^2.$$

Si sommino queste tre ultime equazioni: dedurremo

$$3H^2 = (\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2) t_1 + 2(\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'') t_4$$

$$(141) \qquad + (\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2) t_2 + 2(\alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'') t_5$$

$$+ (\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2) t_3 + 2(\beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'') t_6.$$

Ora si noti l' equazione identica

$$(AM - BL)^2 + (CL - AN)^2 + (BN - CM)^2 =$$

$$(A^2 + B^2 + C^2)(L^2 + M^2 + N^2) - (AL + BM + CN)^2$$

e per essa, richiamati i valori scritti nelle (64), si troveranno

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = t_2 t_3 - t_6^2$$

$$(142) \qquad \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = t_1 t_3 - t_5^2$$

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = t_1 t_2 - t_4^2.$$

Si noti anche quest' altra equazione identica

$$(AM - BL)(BP - AQ) + (CL - AN)(AR - CP) + (BN - CM)(CQ - BR)$$

$$= (AP + BQ + CR)(AL + BM + CN) - (A^2 + B^2 + C^2)(LP + MQ + NR)$$

e per essa, riscontrando anche qui pazientemente i valori delle (64), si otterranno le altre tre

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = t_5 t_6 - t_3 t_4$$

(143) $$\alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' = t_4 t_6 - t_2 t_5$$

$$\beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = t_4 t_5 - t_1 t_6.$$

La (141) per le (142), (143) ci somministra dopo facili riduzioni

(144) $$H = \sqrt{t_1 t_2 t_3 + 2 t_4 t_5 t_6 - t_1 t_6^2 - t_2 t_5^2 - t_3 t_4^2}$$

la quale è la formola che ci eravamo proposto di ritrovare.

54. Ora passeremo ad una trasformazione molto importante dei sei valori delle A, B, C, D, E, F dati dalla (137).

Quelle somme triplicate possono cambiarsi in integrali continui. Abbiamo la formola (*)

$$\Sigma \Delta x . u(x) = \frac{1}{\sigma} \int dx . u - \frac{1}{2} u + \frac{1}{12} \sigma \frac{du}{dx} - \text{ec.}$$

essendo σ l' aumento delle differenze. Per mezzo di questa le (137) si mutano nelle

(145)
$$A = \frac{1}{\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} di \int_{-\infty}^{\infty} dj . \psi(S) k^2$$

$$B = \frac{1}{\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} di \int_{-\infty}^{\infty} dj . \psi(S) i^2$$

$$C = \frac{1}{\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} di \int_{-\infty}^{\infty} dj . \psi(S) j^2$$

$$D = \frac{1}{\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} di \int_{-\infty}^{\infty} dj . \psi(S) ki$$

$$E = \frac{1}{\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} di \int_{-\infty}^{\infty} dj . \psi(S) kj$$

$$F = \frac{1}{\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} di \int_{-\infty}^{\infty} dj . \psi(S) ij,$$

(*) Lacroix. Traitè ec. T. III. pag. 98, ovvero Bordoni. Lezioni. T. 2. pag. 479.

avendo trascurati termini di grandezza insensibile in confronto dei termini scritti, i quali poi sono della stessa natura delle quantità finite (rivedi il ragionamento del n.° 50).

Presentemente si trasformino questi integrali triplicati per tre nuove variabili ξ, η, ζ fra le quali e le precedenti si abbiano le equazioni

$$\xi = k\frac{dx}{da} + i\frac{dx}{db} + j\frac{dx}{dc} + \text{ec.}$$

$$(146) \qquad \eta = k\frac{dy}{da} + i\frac{dy}{db} + j\frac{dy}{dc} + \text{ec.}$$

$$\zeta = k\frac{dz}{da} + i\frac{dz}{db} + j\frac{dz}{dc} + \text{ec.}$$

Sarà per la (138)

$$(147) \qquad S = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Potremo poi dalle precedenti (146) cavare con un ritorno di serie le inverse che danno k, i, j per ξ, η, ζ. I termini in cui ξ, η, ζ sono a potenza lineare si hanno facilmente moltiplicando dette (146) rispettivamente per α, α', α'', indi sommandole e facendo uso delle prime tre equazioni (65); questa operazione ci dà la k. Moltiplicando invece le (146) rispettivamente per β, β', β'', ovvero per γ, γ', γ'', coll' uso delle altre equazioni (65) avremo similmente i, j. Così

$$k = \frac{1}{H}(\alpha\xi + \alpha'\eta + \alpha''\zeta) + \text{ec.}$$

$$(148) \qquad i = \frac{1}{H}(\beta\xi + \beta'\eta + \beta''\zeta) + \text{ec.}$$

$$j = \frac{1}{H}(\gamma\xi + \gamma'\eta + \gamma''\zeta) + \text{ec.}$$

seguono negli eccetera i termini ove ξ, η, ζ sarebbero a più alte dimensioni. Ecco le inverse delle equazioni (146).

Per la trasformazione degl' integrali triplicati (145), bisogna, siccome è noto (*), calcolare il coefficiente

$$\frac{dj}{d\xi}\left(\frac{dk}{d\eta}\frac{di}{d\zeta}-\frac{di}{d\eta}\frac{dk}{d\zeta}\right)+\frac{dj}{d\eta}\left(\frac{dk}{d\zeta}\frac{di}{d\xi}-\frac{di}{d\zeta}\frac{dk}{d\xi}\right)+\frac{dj}{d\zeta}\left(\frac{dk}{d\xi}\frac{di}{d\eta}-\frac{di}{d\xi}\frac{dk}{d\eta}\right)$$

che per le (148) risulta

$$(149)\qquad \frac{1}{H^3}[\gamma(\alpha'\beta''-\beta'\alpha'')+\gamma'(\alpha''\beta-\beta''\alpha)+\gamma''(\alpha\beta'-\beta\alpha')]+\text{ec.}$$

seguendo nell' eccetera termini ove ξ, η, ζ sono per lo meno a dimensione lineare.

Caveremo pazientemente dalle (64)

$$\alpha'\beta''-\beta\alpha''=\frac{dx}{dc}\left(\alpha\frac{dx}{da}+\beta\frac{dx}{db}+\gamma\frac{dx}{dc}\right)$$

$$\alpha''\beta-\beta''\alpha=\frac{dy}{dc}\left(\alpha'\frac{dy}{da}+\beta'\frac{dy}{db}+\gamma'\frac{dy}{dc}\right)$$

$$\alpha\beta'-\beta\alpha'=\frac{dz}{dc}\left(\alpha''\frac{dz}{da}+\beta''\frac{dz}{db}+\gamma''\frac{dz}{dc}\right)$$

ossia per la prima, quinta e nona delle (66)

$$\alpha'\beta''-\beta\alpha''=\frac{dx}{dc}H;\quad \alpha''\beta-\beta''\alpha=\frac{dy}{dc}H;\quad \alpha\beta'-\beta\alpha'=\frac{dz}{dc}H.$$

Quindi

$$\gamma(\alpha'\beta''-\alpha\beta'')+\gamma'(\alpha''\beta-\beta''\alpha)+\gamma''(\alpha\beta'-\beta\alpha')$$

$$=\left(\gamma\frac{dx}{dc}+\gamma'\frac{dy}{dc}+\gamma''\frac{dz}{dc}\right)H=H^2$$

a motivo dell' ultima delle (65).

(*) Lacroix. T. II. pag. 208; ovvero Bordoni. T. I. pag. 380.

Pertanto il coefficiente (149) da introdursi in tutti gl'integrali trasformati, diventa

$$\frac{1}{H} + \text{ec.}$$

Questi integrali poi trasformati dalle (145) sono

$$A = \frac{1}{\sigma^3 H^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta . \psi(S)(\alpha\xi + \alpha'\eta + \alpha''\zeta)^2 + \text{ec.}$$

$$B = \frac{1}{\sigma^3 H^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta . \psi(S)(\beta\xi + \beta'\eta + \beta''\zeta)^2 + \text{ec.}$$

$$C = \frac{1}{\sigma^3 H^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta . \psi(S)(\gamma\xi + \gamma'\eta + \gamma''\zeta)^2 + \text{ec.}$$

(150)

$$D = \frac{1}{\sigma^3 H^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta . \psi(S)(\alpha\xi + \alpha'\eta + \alpha''\zeta)(\beta\xi + \beta' + \beta\eta''\zeta) + \text{ec.}$$

$$E = \frac{1}{\sigma^3 H^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta . \psi(S)(\alpha\xi + \alpha'\eta - \alpha''\zeta)(\gamma\xi + \gamma'\eta + \gamma''\zeta) + \text{ec.}$$

$$F = \frac{1}{\sigma^3 H^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta . \psi(S)(\beta\xi + \beta'\eta + \beta''\zeta)(\gamma\xi + \gamma'\eta + \gamma''\zeta) + \text{ec.}$$

In questi la S ha il valore (147); seguono negli eccetera termini dove ξ, η, ζ sono a più alta dimensione della seconda; i limiti sono ancora l'infinito negativo e il positivo, come si scorge dalle (148). Le stesse (148) ci fanno capire che la grandezza delle ξ, η, ζ è dello stesso ordine di quella delle k, i, j; quindi per la stessa ragione per cui al n.° 50 dicemmo trascurabili tutte le G_1, G_2, G_3, ec. dovranno anche trascurarsi tutti i termini che seguono gli esposti nelle (150).

Svolgiamo ora i quadrati e i prodotti nelle precedenti (150); osserviamo che gl' integrali

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta . \psi(\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2})\xi\zeta^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta . \psi(\sqrt{\xi^2+\zeta^2+\eta\zeta^2})\eta^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta . \psi(\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2})\zeta^2$$

sono necessariamente fra loro eguali, essendovi ξ, η, ζ lettere che entrano solo istrumentalmente e possono scambiarsi fra loro. Osserviamo anche che gl' integrali

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta . \psi(\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2})\xi\eta$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta . \psi(\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2})\xi\zeta$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta . \psi(\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2})\eta\zeta$$

sono zero per un teorema assai noto nel calcolo degl'integrali definiti (può consultarsi il mio Trattato citato più sopra, leggendovi il n.° 22). Poniamo

$$(151) \qquad \mu = \frac{1}{\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta . \psi(\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2})\xi^2 .$$

Dopo tutto l' esposto le (150) si cambiano nelle

$$A = \frac{\mu}{H^3}(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2)$$

$$B = \frac{\mu}{H^3}(\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2)$$

$$C = \frac{\mu}{H^3}(\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2)$$

$$D = \frac{\mu}{H^3}(\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'')$$

$$E = \frac{\mu}{H^3}(\alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'')$$

$$F = \frac{\mu}{H^3}(\beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'')$$

ossia per le (142), (143) nelle

$$A = \frac{\mu}{H^3}(t_2\, t_3 - t_6^{\,2})$$

$$B = \frac{\mu}{H^3}(t_1\, t_3 - t_5^{\,2})$$

$$C = \frac{\mu}{H^3}(t_1\, t_2 - t_4^{\,2})$$

(152)

$$D = \frac{\mu}{H^3}(t_5\, t_6 - t_3\, t_4)$$

$$E = \frac{\mu}{H^3}(t_4\, t_6 - t_2\, t_5)$$

$$F = \frac{\mu}{H^3}(t_4\, t_5 - t_1\, t_6)$$

dove H ha il valore (144). Così le sei A, B, C, D, E, F sono date in funzione delle sei quantità (139) e di un coefficiente

μ che è la sola incognita veramente indeterminabile, perchè dipendente dalla particolare natura del corpo e dalla legge di azione molecolare.

Queste ultime (152) sono formole d'importanza capitale, come vedremo nelle varie applicazioni; esse completano il prospetto del n.° 52, dovendovi essere surrogate alle (137).

55. Troviamo necessario avvertire che s'ingannerebbe grandemente chi dietro l'ispezione della formola (51) s'avvisasse di credere la μ costante per rapporto alle a, b, c; essa è veramente funzione (quantunque incognita) di queste a, b, c, o delle x, y, z, t quando intendasi fatta la trasformazione già praticata al n.° 30 per la densità Γ, e al n.° 43 per le tre velocità u, v, w. Ciò apparirà chiaro se ci persuaderemo che nella $\psi(S)$ o $\varphi(S)$ (equazione (31)) debbono le a, b, c entrare anche esplicitamente alla S. Infatti l'azione che riceve ciascun punto del corpo dai punti circostanti non è solo quella proveniente dall'azione molecolare propriamente detta, che avrebbe effetto quand'anche non vi fossero le forze esterne X, Y, Z. Havvene un'altra parte proveniente da queste X, Y, Z applicate agli altri punti del corpo, che avrebbe luogo quand'anche non vi fosse azione molecolare interna, detta da Lagrange forza attiva. Per formarsene una idea può immaginarsi un sistema discreto di corpi legati fra loro con verghe imperniate a cerniera nei luoghi dove si attaccano ai corpi: tali verghe sarebbero veicoli di un'azione reciproca dei corpi, detta da Lagrange forza passiva, indipendentemente da ogni attrazione o repulsione fra essi. Interessa di capir bene come questa forza passiva (detta altrimenti pressione) può veramente considerarsi come una parte di $\varphi(S)$. Vi si riesce introducendone separatamente l'espressione nella prima equazione (15), e notando che i nuovi termini diventano sommabili con quelli introdotti dalla $\varphi(S)$: ossia, ciò che è lo stesso, notando che quella espressione a parte non fa che rendere binomj tutti i coefficienti delle variazioni $\delta S_{1,2}$, $\delta S_{1,3}$ ec.

Adunque, denominata p la pressione che il punto

$(x_{a,b,c}, y_{a,b,c}, z_{a,b,c})$ riceve dal punto $(x_{f,g,h}, y_{f,g,h}, z_{f,g,h})$, saranno

$$p\,\frac{x_{f,g,h}-x_{a,b,c}}{S},\ p\,\frac{y_{f,g,h}-y_{a,b,c}}{S},\ p\,\frac{z_{f,g,h}-z_{a,b,c}}{S}$$

(dove S è quella dell' equazione (23)) le sue tre componenti secondo i tre assi, e similmente

$$-p\,\frac{x_{f,g,h}-x_{a,b,c}}{S},\ -p\,\frac{y_{f,g,h}-y_{a,b,c}}{S},\ -p\,\frac{z_{f,g,h}-z_{a,b,c}}{S}$$

le tre componenti della pressione trasmessa al secondo punto dal primo. Di quì chiunque conosce l'impianto dell'equazione (15) capirà che l'introduzione a parte della pressione p, vi aggiunge i termini

$$\begin{aligned} &p_{1,2}\,\partial S_{1,2} + p_{1,3}\,\partial S_{1,3} + \ldots\ldots + p_{1,n}\ \ \partial S_{1,n} \\ &\qquad + p_{2,3}\,\partial S_{2,3} + \ldots\ldots + p_{2,n}\ \ \partial S_{2,n} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + p_{n-1,n}\ \partial S_{n-1,n} \end{aligned}$$

affatto simili a quelli che già vi esistono. È dunque p sommabile con $\varphi(S)$ ed ha poi comune con essa anche un' altra proprietà, quella di dover essere nulla appena la distanza S si fa sensibile: infatti è chiaro che non è immediatamente trasmessa al punto (x, y, z) se non dai punti circostanti vicinissimi.

Riflettendo all'indole di questa p si vede che la sua composizione deve essere $p(a, b, c, S)$. Che sia funzione delle a, b, c esplicitamente alla S si fa evidente osservando ch' essa è per sua natura diversa in diverse parti del corpo, quantunque vi siano eguali le distanze S dai punti circostanti; che sia funzione di S è pur chiaro pel dover essa diventar zero appena S si fa sensibile.

Potrebbe taluno pretendere che per l'assoluta generalità debbano nella composizione della p considerarsi esplicite alla S non soltanto le coordinate a, b, c del punto che riceve l'azione, ma anche le coordinate $a+k$, $b+i$, $c+j$ (equazioni (125)) del punto che la trasmette. Senza negare l'osservazione diremo che pel nostro caso essa diventa inutile. Difatto, adottata la nuova significazione, potrebbe poi questa svolgersi in serie per le potenze di k, i, j, avendo la serie per primo termine quello $p(a, b, c, S)$ sopra considerato. I termini seguenti produrrebbero nelle somme definite (137) altri termini della natura delle G_1, G_2, G_3, ec. che abbiamo trascurate. Conclusione del fin quì detto si è che potremo considerare la pressione $p(a, b, c, S)$ compenetrata nella $\varphi(S)$ o $\psi(S)$, la quale ha per tal modo una parte in cui le a, b, c sono esplicite alla S: quindi la μ della (151) non è costante per rapporto ad a, b, c.

56. Sul finire di questo paragrafo crediamo utile preparare alcune denominazioni di cui faremo uso frequente nel seguito. Ciascuna delle nove derivate

$$\frac{dx}{da}, \frac{dx}{db}, \frac{dx}{dc}; \frac{dy}{da}, \frac{dy}{db}, \frac{dy}{dc}; \frac{dz}{da}, \frac{dz}{db}, \frac{dz}{dc},$$

se s'immaginano eseguite le derivazioni, è una funzione di a, b, c, t che potrà trasformarsi in una di x, y, z, t, siccome più volte si è detto. Il non avere una significazione fisica da attribuire alle medesime non impedisce che queste quantità analitiche entrino con molto effetto nei calcoli. Poniamo adunque

$$\frac{dx}{da}=\varepsilon_1(x,y,z,t); \quad \frac{dx}{db}=\varepsilon_2(x,y,z,t); \quad \frac{dx}{dc}=\varepsilon_3(x,y,z,t)$$

$$(153) \quad \frac{dy}{da}=\vartheta_1(x,y,z,t); \quad \frac{dy}{db}=\vartheta_2(x,y,z,t); \quad \frac{dy}{dc}=\vartheta_3(x,y,z,t)$$

$$\frac{dz}{da}=\tau_1(x,y,z,t); \quad \frac{dz}{db}=\tau_2(x,y,z,t); \quad \frac{dz}{dc}=\tau_3(x,y,z,t)$$

Se queste equazioni identiche si derivano per t, osservando per esempio nella prima di esse che

$$\frac{d^2x}{dadt} = \frac{du}{da} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{da} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{da} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{da}$$

$$= \frac{du}{dx}\varepsilon_1 + \frac{du}{dy}\vartheta_1 + \frac{du}{dz}\tau_1$$

e così per tutte le altre, otteniamo nove equazioni, le quali sono poi richiamate più d'una volta, e sono

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{du}{dx}\varepsilon_1 + \frac{du}{dy}\vartheta_1 + \frac{du}{dz}\tau_1$$

$$\frac{d\varepsilon_2}{dt} = \frac{du}{dx}\varepsilon_2 + \frac{du}{dy}\vartheta_2 + \frac{du}{dz}\tau_2$$

$$\frac{d\varepsilon_3}{dt} = \frac{du}{dx}\varepsilon_3 + \frac{du}{dy}\vartheta_3 + \frac{du}{dz}\tau_3$$

$$\frac{d\vartheta_1}{dt} = \frac{dv}{dx}\varepsilon_1 + \frac{dv}{dy}\vartheta_1 + \frac{dv}{dz}\tau_1$$

(154) $$\frac{d\vartheta_2}{dt} = \frac{dv}{dx}\varepsilon_2 + \frac{dv}{dy}\vartheta_2 + \frac{dv}{dz}\tau_2$$

$$\frac{d\vartheta_3}{dt} = \frac{dv}{dx}\varepsilon_3 + \frac{dv}{dy}\vartheta_3 + \frac{dv}{dz}\tau_3$$

$$\frac{d\tau_1}{dt} = \frac{dw}{dx}\varepsilon_1 + \frac{dw}{dy}\vartheta_1 + \frac{dw}{dz}\tau_1$$

$$\frac{d\tau_2}{dt} = \frac{dw}{dx}\varepsilon_2 + \frac{dw}{dy}\vartheta_2 + \frac{dw}{dz}\tau_2$$

$$\frac{d\tau_3}{dt} = \frac{dw}{dx}\varepsilon_3 + \frac{dw}{dy}\vartheta_3 + \frac{dw}{dz}\tau_3 .$$

In queste $\frac{d\varepsilon_1}{dt}$, $\frac{d\varepsilon_2}{dt}$, ec. esprimono le derivate totali per t delle ε_1, ε_2, ec., è cioè

$$(155) \qquad \frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{d\varepsilon_1}{dx} u + \frac{d\varepsilon_1}{dy} v + \frac{d\varepsilon_1}{dz} w + \left(\frac{d\varepsilon_1}{dt}\right)$$

significando $\left(\frac{d\varepsilon_1}{dt}\right)$ il differenziale parziale di ε_1 pel solo t esplicito alle x, y, z; così di tutte le espressioni simili.

Per le denominazioni (153) le (139) prendono l'espressione

$$(156) \qquad \begin{aligned} t_1 &= \varepsilon_1^2 + \vartheta_1^2 + \tau_1^2 \\ t_2 &= \varepsilon_2^2 + \vartheta_2^2 + \tau_2^2 \\ t_3 &= \varepsilon_3^2 + \vartheta_3^2 + \tau_3^2 \\ t_4 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \vartheta_1 \vartheta_2 + \tau_1 \tau_2 \\ t_5 &= \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \vartheta_1 \vartheta_3 + \tau_1 \tau_3 \\ t_6 &= \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \vartheta_2 \vartheta_3 + \tau_2 \tau_3. \end{aligned}$$

57. Noteremo per ultimo che dalle (153) abbiamo manifestamente

$$\frac{d\vartheta_1}{db} = \frac{d\varepsilon_2}{da}; \quad \frac{d\varepsilon_1}{dc} = \frac{d\varepsilon_3}{da}; \quad \frac{d\varepsilon_2}{dc} = \frac{d\varepsilon_3}{db}$$

ossia per le stesse (153)

$$(157) \qquad \begin{aligned} \frac{d\varepsilon_1}{dx} \varepsilon_2 + \frac{d\varepsilon_1}{dy} \vartheta_2 + \frac{d\varepsilon_1}{dz} \tau_2 &= \frac{d\varepsilon_2}{dx} \varepsilon_1 + \frac{d\varepsilon_2}{dy} \vartheta_1 + \frac{d\varepsilon_2}{dz} \tau_1 \\ \frac{d\varepsilon_1}{dx} \varepsilon_3 + \frac{d\varepsilon_1}{dy} \vartheta_3 + \frac{d\varepsilon_1}{dz} \tau_3 &= \frac{d\varepsilon_3}{dx} \varepsilon_1 + \frac{d\varepsilon_3}{dy} \vartheta_1 + \frac{d\varepsilon_3}{dz} \tau_1 \\ \frac{d\varepsilon_2}{dx} \varepsilon_3 + \frac{d\varepsilon_2}{dy} \vartheta_3 + \frac{d\varepsilon_2}{dz} \tau_3 &= \frac{d\varepsilon_3}{dx} \varepsilon_2 + \frac{d\varepsilon_3}{dy} \vartheta_2 + \frac{d\varepsilon_3}{dz} \tau_2 \end{aligned}$$

e che sei altre equazioni simili risultano dalle restanti sei delle (153).

Possono altresì dedursi dall' equazione (97) fra la densità Γ e il sestinomio H, derivata per a, o per b, o per c le tre equazioni seguenti

$$(158)\quad \begin{aligned} &\frac{d.\Gamma\varepsilon_1}{dx}+\frac{d.\Gamma\vartheta_1}{dy}+\frac{d.\Gamma\tau_1}{dz}=0\\ &\frac{d.\Gamma\varepsilon_2}{dx}+\frac{d.\Gamma\vartheta_2}{dy}+\frac{d.\Gamma\tau_2}{dz}=0\\ &\frac{d.\Gamma\varepsilon_3}{dx}+\frac{d.\Gamma\vartheta_3}{dy}+\frac{d.\Gamma\tau_3}{dz}=0. \end{aligned}$$

Il processo analitico per giungervi è alquanto lungo, ma affatto somigliante a quello impiegato al n.° 43 per dimostrare l' equazione (105) della continuità. Il punto principale di riscontro fra l' analisi qui indicata e quella là eseguita sta nelle tre equazioni

$$(159)\quad \begin{aligned} &\frac{1}{H}\cdot\frac{dH}{da}=\frac{d\varepsilon_1}{dx}+\frac{d\vartheta_1}{dy}+\frac{d\tau_1}{dz}\\ &\frac{1}{H}\cdot\frac{dH}{db}=\frac{d\varepsilon_2}{dx}+\frac{d\vartheta_2}{dy}+\frac{d\tau_2}{dz}\\ &\frac{1}{H}\cdot\frac{dH}{dc}=\frac{d\varepsilon_3}{dx}+\frac{d\vartheta_3}{dy}+\frac{d\tau_3}{dz} \end{aligned}$$

poste a confronto della (103). Ma vedremo più tardi che l'equazione (105), quantunque finora tanto usata, principalmente in idraulica, è in verità un' equazione identica insignificante. Però non credo che miglior sorte abbiano a incontrare le precedenti (158), del cui ritrovamento sul principio io m'era rallegrato. Parea nondimeno sconveniente ommetterne un cenno nell' analisi generale di questo paragrafo che ho procurato di rendere, per quanto era possibile, compiuta e ricca di formole.

§ VI.

Equazioni ai limiti.

58. In relazione a ciò che ho asserito al n.° 47. debbo ora porre quei ragionamenti che persuadono l' introduzione del coefficiente σ^3 a moltiplicatore delle X, Y, Z, $\frac{d^2x}{dt^2}$, ec.

Noi intendiamo per unità di forza la somma di tante forze elementari eguali e costanti che applicate continuamente a tutti i punti fisici dell' unità di massa, fanno che questa percorra nell' unità di tempo la mezza unità di spazio. Può essa forza, invece di essere egualmente distribuita a tutti i punti dell' unità di massa, considerarsi applicata a un solo di essi, e producente lo stesso effetto: o perchè tal massa essendosi resa solida, il moto prodotto in un punto si propaghi a tutti: o perchè si consideri tutta la massa raccolta in un solo punto; ma questo concetto non è necessario, se si ammette l' antecedente definizione. Quindi per la forza X intendiamo una forza multipla X volte dell' anzidetta. Ora s' immagini l' unità di massa distribuita in un volume cubico in maniera che tutti i suoi punti siano a eguali distanze secondo i tre spigoli, come si è detto al n.° 40, essendo σ questa distanza costante. Se n è il numero degl' intervalli fra punto e punto in un lato del cubo, il numero totale dei punti fisici nel cubo è $(n+1)^3$. Quindi se X è la forza che muove tutta l'unità di massa, la parte elementare di essa che muove un solo punto di questa massa è

$$\frac{X}{(n+1)^3} = \frac{X}{n^3} - \frac{3X}{n^4} + \frac{6X}{n^5} + \text{ec.}$$

Da un' altra parte il volume cubico di questa massa misurato da 1, unità di volume, è anche misurato da $(n\sigma)^3$; e dall'equazione $1 = n^3\sigma^3$ si cava $\frac{1}{n^3} = \sigma^3$. Adunque l'antecedente espres-

sione della forza applicata a un punto si muta nella

$$\sigma^3 X - 3\,\frac{\sigma^3 X}{n} + \frac{6\sigma^3 X}{n^2} + \text{ec.}$$

e si riduce manifestamente al solo primo termine, essendo gli altri incomparabilmente piccoli in confronto del medesimo. Così è provato che avendo rapportata la misura della forza X all' unità di massa, l' espressione della forza applicata a un solo punto fisico è $\sigma^3 X$.

Forza di diverso genere è quella che s' intende produrre moto in una massa finita non essendo applicata a tutti i suoi punti, come la gravità, ma applicata ai soli punti di una parte della sua superficie. Consideriamola applicata ad una faccia del cubo contenente l' unità di massa resa solida per facilitare il concetto della trasmissione del moto. Risulta anche questa forza dalla somma di forze elementari eguali applicate ai singoli punti della superficie, ma queste forze elementari in rapporto alle elementari antecedentemente descritte sono di diversa natura, intendendosi ciascuna di esse muovere non un solo punto, ma anche tutti gli altri n punti che si trovano con esso in una retta secondo la terza dimensione del cubo. Nell' equazione generale della Meccanica s' introducono anche forze di questo genere se si vogliono considerare le pressioni alle superficie dei corpi. Il modo di praticare una tale introduzione nell' equazione (26) non ha difficoltà per chi conosce la Meccanica Analitica, ma volendone la misura rapportata come quella delle antecedenti all' unità di massa, ragioneremo così. Detta X' questa forza che applicata ad una faccia del cubo muove tutta l'unità di massa, essa risulta dalla somma di un numero $(n+1)^2$ di tante forze elementari eguali applicate ai singoli punti fisici esistenti in quella faccia del cubo. Dunque la forza applicata ad un solo dei punti alla superficie è

$$\frac{X'}{(n+1)^2} = \frac{X'}{n^2} - \frac{2X'}{n^3} + \frac{3X'}{n^4} + \text{ec.}$$

D' altra parte abbiamo l' unità superficiale $1 = (n\sigma)^2$ da cui $\frac{1}{n^2} = \sigma^2$; epperò da $\sigma^2 X' - \frac{2\sigma^2 X'}{n} + \frac{3\sigma^2 X'}{n^2} +$ ec. o piuttosto solamente da $\sigma^2 X'$ è misurata la forza applicata a un punto della superficie. Pertanto trattandosi di forze applicate a punti della superficie del corpo, e rapportandone la misura all' unità di massa, bisognerà introdurre il coefficiente σ^2.

59. Abbiansi per maggiore generalità anche forze del secondo genere sopra descritto applicate ai punti che trovansi alla superficie del corpo. Sia

$$f(x, y, z, t) = 0 \tag{160}$$

in generale l' equazione di detta superficie che può essere continua e discontinua: nel qual secondo caso è sempre permesso immaginare la forma f nella equazione (160) tale che si adatti a rappresentarla ancora totalmente, assumendo una funzione discontinua.

Potremmo immaginare, ciò che basta in molti casi senza bisogno di ricorrere alla teorica delle funzioni discontinue, una sola forma di funzione $\pi(x, y, z, t)$ che valga a rappresentare la pressione per tutti i punti della superficie, potendo variare di valore dall' uno all' altro di essi, non perchè cambi di forma, ma unicamente pel diverso valore che vi prendono le coordinate x, y, z. Potremmo invece immaginare per rappresentare le pressioni alla superficie moltissime funzioni differenti fra loro anche nelle forme, ciascuna delle quali si mantenga soltanto per un determinato numero di punti della superficie, e non per gli altri. Una generalità bastante per le applicazioni più ordinarie è d' immaginarne sei

$$\begin{matrix} \pi_1(x,y,z,t), & \pi_2(x,y,z,t), & \pi_3(x,y,z,t) \\ \pi_4(x,y,z,t), & \pi_5(x,y,z,t), & \pi_6(x,y,z,t) \end{matrix} \tag{161}$$

che corrispondono alle sei parti che ordinariamente si nominano nei corpi, la sinistra, la destra, il davanti, il di dietro, il disotto, il di sopra. Immagineremo altresì (il che pure è bastante per quasi tutti i problemi) che dette pressioni a due a due siano applicate a uno stesso numero di punti in senso contrario: vale a dire la π_1 si estenda a un certo numero di punti del corpo nella superficie a sinistra, e la π_2 in senso contrario a uno stesso numero di punti a destra: le linee che rinchiudono i punti di applicazione di dette forze π_1, π_2 possono essere varie in mille maniere, ma però determinate nei diversi problemi. Così la π_3 s' intenderà applicata a un certo numero di punti sul davanti, potendo essere questo numero al tutto diverso da quello di applicazione delle due precedenti, e la π_4 a uno stesso numero di punti in senso contrario sul di dietro; così della π_5, π_6 pel di sotto e pel di sopra. Ritengasi che la supposizione dell'eguaglianza del numero dei punti cui sono applicate le forze opposte, non è veramente necessaria: è una facilitazione senza la quale converrebbe ammettere nel discorso alcune lungaggini inutili per la maggior parte dei casi.

60. Se ben si riflette a ciò che si è detto ai n.i 5, 8 circa il modo di regolarizzare mediante le funzioni $x(a, b, c)$, $y(a, b, c)$, $z(a, b, c)$ i valori irregolari delle coordinate dei diversi punti del corpo, si capirà che niente c'impedisce di rappresentare con una serie doppia dedotta dalla $x(l, b, c)$ in cui l sia costante e variino le b, c, tutte le coordinate x dei punti cui è applicata la prima forza $\pi_1(x, y, z, t)$, e con una simile serie doppia dedotta da $x(\lambda, b, c)$ le coordinate x di tutti i punti cui è applicata la forza opposta $-\pi_2$; dicasi a un di presso delle coordinate y, z. Così le $x(a, m, c)$, $y(a, m, c)$, $z(a, m, c)$ ci rappresenteranno le coordinate dei punti alla superficie cui è appli-

cata la forza π_3, e le $x(a, \mu, c)$, $y(a, \mu, c)$, $z(a, \mu, c)$ spetteranno a quelli cui è applicata la forza opposta $-\pi_4$. Similmente le $x(a, b, n)$, $y(a, b, n)$, $z(a, b, n)$ le coordinate dei punti alla superficie cui è applicata la forza π_5, e le $x(a, b, v)$, $y(a, b, v)$, $z(a, b, v)$ quelle dei punti cui è applicata la forza opposta $-\pi_6$. Ciò torna lo stesso (quantunque non sia necessario, come già si disse al n.° 8) che l'immaginare un' epoca antecedente ideale in cui tutti i punti di applicazione della pressione π_1 si trovassero sopra una faccia di un parallelepipedo, e quelli cui è applicata $-\pi_2$ sulla faccia opposta dello stesso parallelepipedo, e così rispettivamente delle π_3, $-\pi_4$; e delle π_5, $-\pi_6$. Raccomando di riflettere come la relazione fra le coordinate x, y, z dei diversi punti del corpo alla superficie, dipendente dalla equazione (160), non cangia menomamente il metodo con cui nel § primo insegnammo a passare dalla (10) alla (11): metodo che non si occupa di sapere se i valori delle coordinate x, y, z dei diversi punti siano fra di loro indipendenti, ovvero abbiano la relazione che risulta da un' equazione cui debbano soddisfare. Si può anche osservare che impicciolendo il numero dei punti di applicazione delle forze π_1, $-\pi_2$, o ingrandendolo: e così pel numero dei punti di applicazione delle forze π_3, $-\pi_4$; π_5, $-\pi_6$, si cambiano le dimensioni dell' immaginato parallelepipedo per la prima epoca ideale di distribuzione uniforme: esso riuscirà con facce opposte più allungate, più ristrette, ec.; ma può sempre supporsi una forma parallelepipeda che soddisfaccia e mantenga il concetto formato più sopra. E ciò adattando opportunamente i numeri n', n'', n''' delle molecole succedentisi a intervalli eguali secondo i tre spigoli, ossia (equazioni (19)) le lunghezze λ, μ, v di essi spigoli. Siano infatti v', v'', v''' i numeri dei punti alla superficie cui sono rispettivamente applicate le forze

π_1, π_3, π_5: le opposte $-\pi_2, -\pi_4, -\pi_6$ sono per supposizione applicate a punti di numeri rispettivamente eguali; dovranno essere

$$n''n''' = v'; \quad n'n'' = v''; \quad n'n''' = v'''$$

e quindi

$$n' = \sqrt{\frac{v''v'''}{v'}}; \quad n'' = \sqrt{\frac{v'v''}{v'''}}; \quad n''' = \sqrt{\frac{v'v'''}{v''}}.$$

61. Si adotti di scrivere una funzione $k(a, b, c)$ di a, b, c colla sola lettera k seguita da una nuova lettera l fra parentesi per indicare che in essa si è messo l in luogo di a; così $k(l) = k(l, b, c)$, e anche $k(\lambda) = k(\lambda, b, c)$. In modo simile intenderemo $k(m) = k(a, m, c)$, $k(\mu) = k(a, \mu, c)$, ed anche $k(n) = k(a, b, n)$, $k(v) = k(a, b, v)$.

Si esprimano altresì per $\pi_{1x}, \pi_{1y}, \pi_{1z}$ le tre componenti della pressione π_1 secondo i tre assi ortogonali; per $\pi_{2x}, \pi_{3y}, \pi_{2z}$ le tre simili componenti della pressione π_2: così per le altre quattro.

Non è difficile capire che l'introdotta supposizione delle sei pressioni alla superficie del corpo accrescerà l'equazione generale (26) dei sei termini

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{m}^{\mu+\beta}\Delta b\sum_{n}^{\nu+\gamma}\Delta c\left\{\pi_{1x}(l)\,\partial x(l)+\pi_{1y}(l)\,\partial y(l)+\pi_{1z}(l)\,\partial z(l)\right\}\\
&+\sum_{m}^{\mu+\beta}\Delta b\sum_{n}^{\nu+\gamma}\Delta c\left\{\pi_{2x}(\lambda)\partial x(\lambda)+\pi_{2y}(\lambda)\partial y(\lambda)+\pi_{2z}(\lambda)\,\partial z(\lambda)\right\}\\
&-\sum_{l}^{\lambda+\alpha}\Delta a\sum_{n}^{\nu+\gamma}\Delta c\left\{\pi_{3x}(m)\partial x(m)+\pi_{3y}(m)\partial y(m)+\pi_{3z}(m)\partial z(m)\right\}\\
(162)\quad &+\sum_{l}^{\lambda+\alpha}\Delta a\sum_{n}^{\nu+\gamma}\Delta c\left\{\pi_{4x}(\mu)\partial x(\mu)+\pi_{4y}(\mu)\partial y(\mu)+\pi_{4z}(\mu)\,\partial z(\mu)\right\}\\
&-\sum_{l}^{\lambda+\alpha}\Delta a\sum_{m}^{\mu+\beta}\Delta b\left\{\pi_{5x}(n)\partial x(n)+\pi_{5y}(n)\,\partial y(n)+\pi_{5z}(n)\,\partial z(n)\right\}\\
&+\sum_{l}^{\lambda+\alpha}\Delta a\sum_{m}^{\mu+\beta}\Delta b\left\{\pi_{6x}(v)\partial x(v)+\pi_{6y}(v)\partial y(v)+\pi_{6z}(v)\,\partial z(v)\right\}
\end{aligned}
$$

A questi vengono omogenei altri termini portati dalla quantità che segue la già considerata nel secondo membro della (39), quantità fatta di parti che sono differenze esatte o per a o per b o per c, e che quindi collocate sotto l'integrale triplicato della (26) possono subire una o più integrazioni.

Difatti osservando le (35), (38) e confrontando le (37), (39) si viene a capire che nella (39)

$$\Theta=(1,x)'\partial x+(1,y)'\partial y+(1,z)'\partial z$$

$$\Pi=(2,x)_{,}\partial x+(2,y)_{,}\partial y+(2,z)_{,}\partial z$$

$$\Phi={}'(3,x)\partial x+{}'(3,y)\partial y+{}'(3,z)\partial z$$

avendo ommessi altri termini la cui aggiunzione si sarebbe trovata inutile a motivo dell'annullarsi di tutte le G_1, G_2, G_3, ec., come si è detto al n.° 50. Per la stessa ragione nella

(39) risultano zero le Ψ, Ξ, Υ, Ω. Ponendo per $(1,x)$, $(2,x)$, $(3,x)$, $(1,y)$, ec. i loro valori già indicati al n.° 20, e ommettendo i termini di valore incomparabile rapporto ai primi, abbiamo

$$\Theta = \frac{1}{\alpha}[1,x]\delta x + \frac{1}{\alpha}[1,y]\delta y + \frac{1}{\alpha}[1,z]\delta z$$

$$\Pi = \frac{1}{\beta}[2,x]\delta x + \frac{1}{\beta}[2,y]\delta y + \frac{1}{\beta}[2,z]\delta z$$

$$\Phi = \frac{1}{\gamma}[3,x]\delta x + \frac{1}{\gamma}[3,y]\delta y + \frac{1}{\gamma}[3,z]\delta z,$$

da cui, se si sostituiscono i valori delle (52), (53), (54) annullandovi le G_1, G_2, ec., e si mettano $\alpha=\beta=\gamma=\sigma$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\Theta = &\frac{1}{\sigma}\left(A\frac{dx}{da} + D\frac{dx}{db} + E\frac{dx}{dc}\right)\delta x \\
&+\frac{1}{\sigma}\left(A\frac{dy}{da} + D\frac{dy}{db} + E\frac{dy}{dc}\right)\delta y \\
&+\frac{1}{\sigma}\left(A\frac{dz}{da} + D\frac{dz}{db} + E\frac{dz}{dc}\right)\delta z. \\
\Pi = &\frac{1}{\sigma}\left(D\frac{dx}{da} + B\frac{dx}{db} + F\frac{dx}{dc}\right)\delta x \\
&+\frac{1}{\sigma}\left(D\frac{dy}{da} + B\frac{dy}{db} + F\frac{dy}{dc}\right)\delta y \\
&+\frac{1}{\sigma}\left(D\frac{dz}{da} + B\frac{dz}{db} + F\frac{dz}{dc}\right)\delta z. \\
\Phi = &\frac{1}{\sigma}\left(E\frac{dx}{da} + F\frac{dx}{db} + C\frac{dx}{dc}\right)\delta x \\
&+\frac{1}{\sigma}\left(E\frac{dy}{da} + F\frac{dy}{db} + C\frac{dy}{dc}\right)\delta y \\
&+\frac{1}{\sigma}\left(E\frac{dz}{da} + F\frac{dz}{db} + C\frac{dz}{dc}\right)\delta z.
\end{aligned} \tag{163}$$

Si eseguisca l'integrazione per a sulla $\Delta_a \Theta$, e si definisca come è indicato dai limiti scritti nella (26), mettendo soltanto λ e non $\lambda + a$ nel secondo limite per una ragione più volte accennata; otterremo due integrali duplicati della stessa natura dei primi due nella quantità (162), cioè l'espressione

$$\Sigma_m^{\mu+\beta} \Delta b \Sigma_n^{\nu+\gamma} \Delta c \Theta(\lambda) - \Sigma_m^{\mu+\beta} \Delta b \Sigma_n^{\nu+\gamma} \Delta c \Theta(l).$$

Pongansi in questa per $\Theta(\lambda)$, $\Theta(l)$ i valori desunti dalla prima delle precedenti (163), e poi tali integrali duplicati si fondano cogli accennati della (162). In tale operazione dovrà togliersi dappertutto nei valori di $\Theta(\lambda)$, $\Theta(l)$ il coefficiente $\frac{1}{\sigma}$: eccone la ragione. Dicemmo al n.° 47. che alle quantità A, B, C, D, E, F si sottintende il fattore σ^3: questo diventa σ^2 a motivo del fattore $\frac{1}{\sigma}$, cioè diventa quello stesso fattore che è sottinteso per le espressioni $\pi_{1x}, \pi_{1y}, \pi_{1z}, \pi_{2x}$, ec. nella (162) giusta quanto si è dimostrato più sopra al n.° 58.

Sotto ciascuno di questi integrali duplicati debbonsi pei principj della Meccanica Analitica e del calcolo delle variazioni annullare separatamente i coefficienti totali delle $\delta x(l)$, $\delta y(l)$, $\delta z(l)$; $\delta x(\lambda)$, $\delta y(\lambda)$, $\delta z(\lambda)$: e così si formano sei equazioni. Con un ragionamento affatto simile si caveranno altre sei equazioni dai due integrali duplicati seguenti nella (162) e dall'integrazione definita della quantità $\Delta_b \Pi$, dopo messo per Π il valore dato dalla seconda delle (163); così sei altre equazioni dagli ultimi due integrali della (162) e dalla integrazione definita della quantità $\Delta_c \Phi$. Distribuiremo queste 18 equazioni in due riunioni, l'una delle quali comprenderà tutte le equazioni pei primi limiti, e l'altra quelle pei secondi limiti. La prima riunione sarà

$$\pi_{1x}(l) = -\left(A\frac{dx}{da} + D\frac{dx}{db} + E\frac{dx}{dc}\right)(l)$$

$$\pi_{1y}(l) = -\left(A\frac{dy}{da} + D\frac{dy}{db} + E\frac{dy}{dc}\right)(l)$$

$$\pi_{1z}(l) = -\left(A\frac{dz}{da} + D\frac{dz}{db} + E\frac{dz}{dc}\right)(l)$$

$$\pi_{3x}(m) = -\left(D\frac{dx}{da} + B\frac{dx}{db} + F\frac{dx}{dc}\right)(m)$$

(164) $$\pi_{3y}(m) = -\left(D\frac{dy}{da} + B\frac{dy}{db} + F\frac{dy}{dc}\right)(m)$$

$$\pi_{3z}(m) = -\left(D\frac{dz}{da} + B\frac{dz}{db} + F\frac{dz}{dc}\right)(m)$$

$$\pi_{5x}(n) = -\left(E\frac{dx}{da} + F\frac{dx}{db} + C\frac{dx}{dc}\right)(n)$$

$$\pi_{5y}(n) = -\left(E\frac{dy}{da} + F\frac{dy}{db} + C\frac{dy}{dc}\right)(n)$$

$$\pi_{5z}(n) = -\left(E\frac{dz}{da} + F\frac{dz}{db} + C\frac{dz}{dc}\right)(n).$$

La seconda riunione sarà affatto simile alla precedente, avendo le π_2, π_4, π_6, in luogo delle π_1, π_3, π_5 e le lettere λ, μ, ν in luogo delle l, m, n.

62. Ora se si richiamino le denominazioni (153) del n.° 56., si comprende facilmente che le precedenti (164) possono semplicemente scriversi

$$\pi_{1x} = -A\varepsilon_1 - D\varepsilon_2 - E\varepsilon_3$$

$$\pi_{1y} = -A\delta_1 - D\delta_2 - E\delta_3$$

$$\pi_{1z} = -A\tau_1 - D\tau_2 - E\tau_3$$

$$\pi_{3x} = -D\varepsilon_1 - B\varepsilon_2 - F\varepsilon_3$$

(165) $$\pi_{3y} = -D\delta_1 - B\delta_2 - F\delta_3$$

$$\pi_{3z} = -D\tau_1 - B\tau_2 - F\tau_3$$

$$\pi_{5x} = -E\varepsilon_1 - F\varepsilon_2 - C\varepsilon_3$$

$$\pi_{5y} = -E\delta_1 - F\delta_2 - C\delta_3$$

$$\pi_{5z} = -E\tau_1 - F\tau_2 - C\tau_3$$

intendendo che nei secondi membri le x, y, z che compongono le quantità non siano le generiche per un punto qualunque interno, ma quelle stesse che compongono le

$$\pi_1(x, y, z, t), \quad \pi_3(x, y, z, t), \quad \pi_5(x, y, z, t)$$

dei primi membri, cioè le coordinate corrispondenti a quelle particolari porzioni di superficie cui sono applicate dette pressioni. Alla stessa maniera si ridurrebbero alle (165) anche le equazioni della seconda riunione accennata sul fine del n.° precedente: i primi membri avrebbero π_2, π_4, π_6 in luogo di π_1, π_3, π_5, i secondi membri sarebbero i medesimi, ma s' intenderebbe che per essi le x, y, z sono quelle coordinate che corrispondono alle pressioni $\pi_2(x,y,z,t), \pi_4(x,y,z,t), \pi_6(x,y,z,t)$.

Equazioni affatto simili alle (165) hanno luogo pel caso dell' equilibrio. Bisogna allora in correlazione col n.° 32. mettere le lettere p, q, r in luogo di x, y, z, e rifare analogamente le denominazioni (153), che allora non presenteranno la lettera t. Nè è qui inopportuno osservare come dall'eguale sussistenza delle equazioni (165) pel moto e per l'equilibrio, si ha la vera dimostrazione (forse l' unica rigorosa) della sussistenza dei teoremi fra le pressioni alle superficie dei corpi passando dall' equilibrio al moto.

Noteremo altresì che se nei secondi membri delle (165) tutto è noto, si hanno da tali equazioni i valori delle pressioni supposte incognite; se invece queste pressioni sono cognite, dette equazioni servono alla determinazione delle funzioni arbitrarie, che entrano nelle quantità dei secondi membri, come meglio si capisce dagli esempj.

A compimento di questo paragrafo potremmo qui introdurre la teorica che trovasi negli Esercizj del Sig. Cauchy relativamente alle pressioni nell'interno dei corpi. Converrebbe a tale oggetto prendere un parallelepipedo interno e considerare tutta l' azione del corpo circostante come data da sei pressioni p_1, $-p_2$, p_3, $-p_4$, p_5, $-p_6$ sulle sei facce del medesimo; indi fare la stessa considerazione sopra un altro parallelepipedo avente comune coll' anzidetto il vertice più vicino all' origine delle coordinate. Si hanno allora alcuni teoremi fra le pressioni sulle facce del primo parallelepipedo, e quelle sulle facce del secondo per quel punto che è comune ad ambi i parallelepipedi. Ommetto questa teorica per due ragioni. Essa non è della stessa importanza per noi come pel Geometra francese, seguendo noi un' altra via nel determinare le equazioni generali. Di più tali teoremi risultando dalla nostra teorica alquanto diversi da quelli del Sig. Cauchy, c'impegneremmo in una discussione che non potrebbe esser breve, e basterebbe a fornire per se sola l' argomento di una Memoria a parte.

§ VII.

Teorica dei fluidi.

Abbiamo esposta un'analisi generale pel moto di tutti i corpi soggetti all'azione molecolare: e ciò fino al ritrovamento della equazione (26). Questa generalità è stata alquanto ristretta passando dalle equazioni (55) alle (56), perchè quel passaggio supponeva, come non si è tralasciato di farne cenno, che le molecole le quali in un'epoca del moto sono fra loro estremamente vicine, non siano distaccate per distanze finite ad altra epoca del moto. Trovo questa proposizione ammessa in maniera espressa o sottintesa da tutti i Meccanici, e corrispondente alla maggior parte dei casi che si verificano in natura, quantunque non sempre (*); quindi è anche da me adottata. Ora per l'applicazione della data analisi al caso particolare del moto di questo o di quel corpo, converrà primamente stabilire una *definizione* che fissi la natura del corpo: esaminare le conseguenze dell'assunta definizione per la modificazione speciale delle formole generali, e fuori della definizione non ammettere alcuna nuova ipotesi. Comincio dalla applicazione al moto de' fluidi e per questa memoria mi limito ad essa, assicurando però di avere già in pronto altre formole spettanti al moto di altri corpi e principalmente quelle relative ai moti oscillatorj e vibratorj che diversificano dalle trovate dai moderni Geometri. La sola teorica del moto de' fluidi involge tante novità, che io non amo moltiplicare le applicazioni prima di sentire il voto de' Geometri su di questa. Vedremo che la teorica finora ammessa pel moto de' fluidi è ben lontana dall'essere perfetta.

63. Domando primieramente se si abbia una chiara ed esatta definizione del corpo fluido. Poco soddisfacente, se così

(*) Poisson. Traité de Mecanique. 1833. T. 2. pag. 680.

mi è lecito esprimermi, trovo su questo argomento tutto ciò che ne dissero Scrittori anche celeberrimi prima delle ultime memorie. Lagrange chiamò (1) i fluidi tali corpi le cui particelle sono esilissime, indipendenti le une dalle altre, e perfettamente e liberamente mobili in tutti i versi. Ma questa definizione potrebbe indurre a credere affatto nullo l'effetto della forza molecolare fra le particelle dei fluidi, il che non s'accorda cogl' insegnamenti della Fisica. Vale la stessa osservazione per la definizione di Laplace (2) che chiamò le particelle dei fluidi perfettamente mobili e cedenti alla minima forza. E passando dalla definizione all'uso che se ne è fatto, dirò che mettere a fondamento della teorica dei fluidi il principio della pressione eguale in tutti i sensi, è un appoggiarsi a un dato puramente sperimentale desunto dallo stato d'equilibrio e trasportato gratuitamente a quello di moto. Lo stesso Lagrange non ne parve soddisfatto nel luogo della sua opera sopra citato, giacchè si erige in principio primitivo un teorema che deve piuttosto risultare come conseguenza. Ciò tanto più in quanto che tutti i Geometri che usarono di quel principio per determinare le equazioni del moto de' fluidi, vi introdussero un' idea straniera alla natura del fluido, cioè un parallelepipedo solido di lati infinitesimi o di lati indeterminati, le cui facce opposte siano premute egualmente. Dissi parallelepipedo solido, perchè quantunque essi non l'abbiano così chiamato, è manifesto che deve essere tale se hanno ad aver luogo le risultanti di innumerabili forze parallele agenti sulle dette facce. E questo parallelepipedo, e le parti solidificate, e le minime superficie rigide sparse per entro alla massa fluida da qualche moderno: tutto ciò, per quanto a me sembra, non può conciliarsi col rigore filosofico che non permette se non quanto è strettamente compreso nella definizione. Quale sarà

(1) M. A. T. I. pag. 181.
(2) Mécanique Céleste T. I. p. 47.

dunque questa definizione? Si raccoglie dalle recenti opere sull' azione molecolare: e infatti a me sembra che dal solo concetto della vicinanza maggiore o minore delle molecole possa chiaramente spiegarsi la differenza fra solido e fluido, e il passaggio di un corpo da uno stato all'altro. Il Sig. Poisson dopo Laplace ci fece conoscere che lo stato di fluidità deve risultare da una distanza maggiore delle molecole nella quale si perde una parte di quell' azione che in distanza minore produce la solidità. Lo stesso Geometra chiama fluido quel corpo (*) che nel movimento si costituisce intorno a ciascuna molecola sempre simile a se stesso, ma talvolta in una scala più o meno grande. Riflette inseguito (**) che questo stato di distribuzione delle molecole in tutto simile al primitivo non è a rigore raggiunto dal fluido se non ritornando all' equilibrio, potendo nello stato di moto la distribuzione non essere perfetta. Questo è certamente dire ben molto di più di quanto se ne diceva prima.

Io chiamerò *fluido quel corpo le cui molecole vicine si tengono in ogni movimento a tali reciproche distanze che non differiscono fra loro se non per quantità di second' ordine.* Il vero senso di questa definizione risulterà più lucido dall'esame delle conseguenze. Intanto noterò che essa si estende egualmente ai liquidi e ai fluidi aeriformi. Se avessimo definito il fluido quel corpo le cui molecole sono sempre a distanze rigorosamente eguali, è manifesto che passando d' una in altra molecola vicina si sarebbe dedotto che ogni fluido deve avere dappertutto la stessa densità. Ma la differenza lasciata nelle quantità di second'ordine toglie questo inconveniente, e spiega benissimo la sussistenza della densità variabile nei fluidi elastici. Una quantità di second'ordine accumulata per un tratto finito in cui è ripetuta un numero di volte maggiore d' ogni

(*) Journal Polyt. Cah. XX. pag. 91.
(**) Ibid. pag. 95.

assegnabile dà una somma che è confrontabile colle quantità di primo ordine: ciò è notissimo per altre parti delle matematiche e anche per la semplice geometria. In un fluido aeriforme le distanze reciproche delle particelle vicine sono eguali per le quantità di primo ordine, ma la differenza di quelle di second' ordine fa sì, che in due luoghi separati da intervallo finito le distanze reciproche delle particelle siano diverse, non fra loro, ma confrontando la distanza che domina in un luogo con quella che domina nell' altro.

64. Posta la definizione come sopra, consideriamo in un' epoca qualunque del moto la materia fluida contenuta nella sfera di attività intorno al punto (x, y, z), e distinguiamo il caso del fluido a densità costante e del fluido a densità variabile, cominciando dal primo. Facciamo attenzione ai punti del fluido che sono alla superficie di questa sfera di attività di raggio r: essi nella prima disposizione ideale avranno avuto coordinate $a+f$, $b+g$, $c+h$ tali da soddisfare all'equazione

$$\begin{aligned}&(x(a+f, b+g, c+h) - x(a, b, c))^2\\ &+(y(a+f, b+g, c+h) - y(a, b, c))^2\\ &+(z(a+f, b+g, c+h) - z(a, b, c))^2 = r^2\end{aligned}$$

essendo f, g, h quantità piccolissime che svaniscono con r, qualunque siano a, b, c e quindi (n.° 46) della forma $r\varphi(a,b,c)$.

Dalla precedente equazione, richiamate le denominazioni (139), potremo passare alla seguente paragonando le quantità dello stesso ordine

$$(166) \qquad t_1 f^2 + t_2 g^2 + t_3 h^2 + 2t_4 fg + 2t_5 fh + 2t_6 gh = r^2$$

la quale è quella di un' ellissoide entro cui nella prima disposizione ideale stava la stessa materia che all' epoca considerata è compresa nella sfera di attività. Il punto (a, b, c) che per quella prima epoca ideale corrisponde al punto (x, y, z)

della seconda epoca, non è generalmente al centro della suddetta ellissoide: infatti il discorso finqui è generale ed abbraccia anche il caso di un solido in cui intorno al punto (x,y,z) siavi entro la sfera di attività materia stipata da una parte e rarefatta dall' altra. Ma nel caso del fluido, essendo la densità eguale tutt' all' intorno del punto (x, y, z), non si vede ragione per cui il punto (a, b, c) dovesse in quella prima epoca essere eccentrico alla detta ellissoide da una parte piuttosto che dall' altra. Se il punto (a, b, c) è nel centro dell' ellissoide, essendo f, g, h le coordinate di questa superficie di second' ordine rapporto al punto (a, b, c), è forza che nell' equazione (166) siano

$$t_4 = t_5 = t_6 = 0; \tag{167}$$

veggasi la nota teorica di questa superficie (*).

Le equazioni (167) sono quelle in cui veramente sta espressa la natura del fluido: esse possono trovarsi anche altrimenti dopo la definizione data nel n.° precedente; quindi a conferma delle medesime porremo fra poco un altro ragionamento più generale.

65. SCOLIO. Intanto osserveremo che sbaglierebbe chi credesse nel caso del fluido a densità costante, che l'ellissoide del centro (a, b, c) e dell' equazione

$$t_1 f^2 + t_2 g^2 + t_3 h^2 = r^2$$

fosse una sfera, e avessimo così $t_1 = t_2 = t_3$. Pongasi mente che la distribuzione ideale delle molecole ad intervalli eguali σ secondo i tre assi è ben dissimile dalla distribuzione che ha realmente luogo nei fluidi in natura. Quella ci dà le distanze delle molecole secondo le diagonali diverse dalle di-

(*) Cauchy. Sur les applications du calcul à la Géometrie. Pag. 247.

stanze secondo i tre assi, giacchè riescono $\sigma\sqrt{2}$, e $\sigma\sqrt{3}$; mentre nei fluidi debbono essere eguali in tutti i versi, come nelle disposizioni dei mucchi di palle, e come può vedersi nei fluidi grossolani, ver. gr. nel miglio. Una materia collocata in quest' ultima maniera assume necessariamente una disposizione diversa secondo tre assi ortogonali tirati per entro alla medesima, e di qui ne viene che ritornata alla disposizione di distanze eguali secondo i tre assi, debbono gli assi di quella ellissoide essere diversi fra loro. Mi sono di ciò persuaso anche per via di esperimenti. Ho visto, per esempio, che un ammasso di tante sferette col diametro σ poste successivamente a contatto nel verso di tre assi ortogonali delle a, b, c coordinate dei loro centri, se si travasi in una cassa parallelepipeda rettangola i cui lati siano presi per gli assi delle x, y, z coordinate ortogonali dei centri delle stesse sfere, e si lasci che la materia vi prenda la disposizione dei mucchi di palle, le x, y, z riescono funzioni delle a, b, c in diverse maniere per diversi casi. Una delle dette maniere dà

$$(168) \qquad x = a \pm \tfrac{1}{2}\sigma; \quad y = \tfrac{\sqrt{3}}{2}.b + \tfrac{1}{2}\sigma; \quad z = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, c + \tfrac{1}{2}\,\sigma$$

le quali equazioni (rivedi le (139)) danno benissimo

$$t_4 = t_5 = t_6 = 0\,; \text{ ma } t_1 = 1\,,\ t_2 = \frac{3}{4}\,,\ t_3 = \frac{2}{3}$$

diverse fra loro. L' esservi altre equazioni oltre le (168) per esprimere un collocamento colla distribuzione dei mucchi di palle entro la cassa parallelepipeda, dipende dalla diversa configurazione che possono prendere fra loro le stesse palle sui piani delle xy, xz, yz. Di qui si prevede come travasando il fluido entro capacità a superficie curve potrà variare in indefinite maniere la fattura delle equazioni simili alle (168). Ma per noi basta di aver mostrato anche in un solo caso la diversità delle t_1, t_2, t_3.

66. Ecco il ragionamento generale diretto a confermare le equazioni (167) base di tutta la teorica dei fluidi, e a provarne la sussistenza anche pei fluidi a densità variabile. Nella distribuzione delle molecole dei fluidi, quale fu indicata nel num. precedente, ad ogni molecola intorno al punto (x, y, z) corrisponde un' altra molecola simmetrica ad eguale distanza dal suddetto punto, prescindendo dalle quantità di second' ordine. Il quadrato della distanza di una molecola dal punto (x, y, z) è espressa (equazione 140) dal sestinomio

$$\text{(I)} \qquad k^2t_1 + i^2t_2 + j^2t_3 + 2kit_4 + 2kjt_5 + 2ijt_6$$

se si ommettono le quantità d' ordine più elevato; e quindi anche il quadrato della distanza dallo stesso punto (x, y, z) dell' anzidetta molecola simmetrica sarà espresso da un simile sestinomio

$$\text{(II)} \qquad k'^2t_1 + i'^2t_2 + j'^2t_3 + 2k'i't_4 + 2k'j't_5 + 2i'j't_6$$

significando k', i', j' aumenti analoghi agli aumenti k, i, j. Questa espressione (II) dovrà eguagliare in valore la (I) a motivo dell' eguaglianza delle distanze, e si dice che ciò dovrà essere indipendentemente dalle t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6 che sono eguali per ambi i sestinomj. Infatti osservando la natura delle quantità k, k', i, i', j, j' (n.° 48, e seg.) si capisce ch' esse si riferiscono al primo stato di disposizione ideale, e intorno ad ogni punto (a, b, c) prendono una variabilità che non dipende dalla posizione dello stesso punto, ossia dalle a, b, c; esse dunque sono indipendenti da queste variabili a, b, c, e tali più non sarebbero se l'equazione (I)=(II) non si verificasse termine per termine. Questo modo di verificarsi dell' equazione (I)=(II) ci fornisce primieramente le tre equazioni

$$k'^2 = k^2; \quad i'^2 = i^2; \quad j'^2 = j^2,$$

ossia

$$k' = \pm k; \quad i' = \pm i; \quad j' = \pm j.$$

Non possono supporsi insieme $k'=k$, $i'=i$, $j'=j$, perchè allora le due molecole egualmente distanti dal punto (x, y, z) non sarebbero che una sola; conviene che uno almeno dei valori k, i, j sia preso negativamente per formare quelli di k', i', j'. Poniamo successivamente

$$k'=k,\ i'=i,\ j'=-j;\ k'=k,\ i'=-i,\ j'=j;\ k'=-k,\ i'=i,\ j'=j;$$

l'equazione (I) — (II) = 0 ci darà le tre

$$(169)\qquad kt_5+it_6=0;\quad kt_4+jt_6=0;\quad it_4+jt_5=0$$

dalle quali cavando i valori delle t_4, t_5, t_6 si trovano tutti e tre zero, siccome è scritto nelle (167).

67. Ora passeremo ad esaminare come l'analisi generale si pieghi alla teorica dei fluidi in conseguenza delle (167); e a quest'oggetto sarà necessario occuparci in questo numero di alcune formole preparatorie. Se poniamo

$$(170)\qquad \begin{aligned} &\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{t_1}}\frac{dx}{da};\ \beta_1=\frac{1}{\sqrt{t_1}}\frac{dy}{da};\ \gamma_1=\frac{1}{\sqrt{t_1}}\frac{dz}{da}\\ &\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{t_2}}\frac{dx}{db};\ \beta_2=\frac{1}{\sqrt{t_2}}\frac{dy}{db};\ \gamma_2=\frac{1}{\sqrt{t_2}}\frac{dz}{db}\\ &\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{t_3}}\frac{dx}{dc};\ \beta_3=\frac{1}{\sqrt{t_3}}\frac{dy}{dc};\ \gamma_3=\frac{1}{\sqrt{t_3}}\frac{dz}{dc}\end{aligned}$$

abbiamo dalle (139) e dalle (167) le sei

$$
(171)\quad
\begin{aligned}
&\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1\\
&\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1\\
&\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2=1\\
&\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0\\
&\alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3=0\\
&\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=0.
\end{aligned}
$$

Un' elegantissima analisi di Monge (*) ci prova che sussistendo le precedenti sei equazioni (171), sussistono anche le altre sei

$$
(172)\quad
\begin{aligned}
&\alpha_1^2+\alpha_2^2+\beta_3^2=1\\
&\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1\\
&\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1\\
&\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0\\
&\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3=0\\
&\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3=0.
\end{aligned}
$$

Detta analisi consiste nel fare

(*) Lacroix. Traité du Calcul. T. I. pag. 533.

$$M = 1 + \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3$$

$$N = 1 + \alpha_1 - \beta_2 - \gamma_3$$

$$P = 1 - \alpha_1 + \beta_2 - \gamma_3$$

$$Q = 1 - \alpha_1 - \beta_2 + \gamma_3$$

avendo scelto fra le nove quantità α_1, α_2, α_3, β_1, ec. le α_1, β_2, γ_3 per quelle tre di cui le altre sei debbono essere funzioni in forza delle equazioni (171). Tali funzioni sono

$$\beta_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{NP} + \tfrac{1}{2}\sqrt{MQ}$$

$$\alpha_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{NP} - \tfrac{1}{2}\sqrt{MQ}$$

$$\alpha_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{NQ} + \tfrac{1}{2}\sqrt{MP}$$

(173)

$$\gamma_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{NQ} - \tfrac{1}{2}\sqrt{MP}$$

$$\gamma_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{PQ} + \tfrac{1}{2}\sqrt{MN}$$

$$\beta_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{PQ} - \tfrac{1}{2}\sqrt{MN}$$

e senza molta difficoltà se ne fa la verificazione a *posteriori* sostituendone i valori nelle (171) e osservando che riescono tutte identiche. Lo stesso metodo di sostituzione dei valori (173) nelle (172) può servire a dimostrare quest'ultime in una maniera affatto sgombra da considerazioni geometriche e più facile di quella da me altrove (*) proposta per ottenere lo stesso fine.

(*) Opuscoli matematici e fisici. Milano 1834. T. I.° pag. 228.

Nel nostro caso a motivo delle (170) le (172) diventano

$$
(174)\quad
\begin{aligned}
&\frac{1}{t_1}\left(\frac{dx}{da}\right)^2+\frac{1}{t_2}\left(\frac{dx}{db}\right)^2+\frac{1}{t_3}\left(\frac{dx}{dc}\right)^2=1\\
&\frac{1}{t_1}\left(\frac{dy}{da}\right)^2+\frac{1}{t_2}\left(\frac{dy}{dc}\right)^2+\frac{1}{t_3}\left(\frac{dy}{dc}\right)^2=1\\
&\frac{1}{t_1}\left(\frac{dz}{da}\right)^2+\frac{1}{t_2}\left(\frac{dz}{db}\right)^2+\frac{1}{t_3}\left(\frac{dz}{dc}\right)^2=1\\
&\frac{1}{t_1}\frac{dx}{da}\frac{dy}{da}+\frac{1}{t_2}\frac{dx}{db}\frac{dy}{db}+\frac{1}{t_3}\frac{dx}{dc}\frac{dy}{dc}=0\\
&\frac{1}{t_1}\frac{dx}{da}\frac{dz}{da}+\frac{1}{t_2}\frac{dx}{db}\frac{dz}{db}+\frac{1}{t_3}\frac{dx}{dc}\frac{dz}{dc}=0\\
&\frac{1}{t_1}\frac{dy}{da}\frac{dz}{da}+\frac{1}{t_2}\frac{dy}{db}\frac{dz}{db}+\frac{1}{t_3}\frac{dy}{dc}\frac{dz}{dc}=0
\end{aligned}
$$

68. Richiamiamo adesso le equazioni generali (134), (135), (136), (152) e vediamo a che si riducono nel caso de' fluidi.

Primieramente osserviamo che in questo caso, a motivo delle (167), otteniamo dalla (144)

$$(175)\qquad H=\sqrt{t_1 t_2 t_3}$$

quindi per la (96)

$$(176)\qquad \Gamma=\frac{1}{\sqrt{t_1 t_2 t_3}}.$$

Con queste due e colle (167) ridurremo le (152) alle seguenti

$$
(177)\quad
\begin{aligned}
&A=\frac{\mu}{t_1}\Gamma;\quad B=\frac{\mu}{t_2}\Gamma;\quad C=\frac{\mu}{t_3}\Gamma\\
&D=E=F=0.
\end{aligned}
$$

Per le quali, e per le antecedentemente preparate (174) le equazioni (136) diventano

$$(178)\qquad \begin{aligned} &(x,x)=(y,y)=(z,z)=\mu\Gamma \\ &(x,y)=(x,z)=(y,z)=0. \end{aligned}$$

In conseguenza le (135) si riducono

$$(179)\qquad \begin{aligned} &P_1=Q_2=R_3=\mu\Gamma^2 \\ &P_2=P_3=Q_1=Q_3=R_1=R_2=0. \end{aligned}$$

E per ultimo le (134) ci risultano

$$(180)\qquad \begin{aligned} &\Gamma\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\frac{d.\mu\Gamma^2}{dx}=0 \\ &\Gamma\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)+\frac{d.\mu\Gamma^2}{dy}=0 \\ &\Gamma\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)+\frac{d.\mu\Gamma^2}{dz}=0 \end{aligned}$$

equazioni che consentono colle già conosciute pel moto de' fluidi in generale, e sulle quali ritorneremo fra poco.

69. Ma restano a discutersi molte altre equazioni in cui troveremo parecchie novità dedotte dalla nostra analisi.

Per le denominazioni (153), e le equazioni (167) le (139) diventano

$$(181)\qquad \begin{aligned} &\varepsilon_1^2+\delta_1^2+\tau_1^2=t_1 \\ &\varepsilon_2^2+\delta_2^2+\tau_2^2=t_2 \\ &\varepsilon_3^2+\delta_3^2+\tau_3^2=t_3 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \delta_1 \delta_2 + \tau_1 \tau_2 = 0$$

(182) $$\varepsilon_1 \varepsilon_3 + \delta_1 \delta_3 + \tau_1 \tau_3 = 0$$

$$\varepsilon_2 \varepsilon_3 + \delta_2 \delta_3 + \tau_2 \tau_3 = 0$$

e le (174)

$$\frac{1}{t_1} \varepsilon_1^2 + \frac{1}{t_2} \varepsilon_2^2 + \frac{1}{t_3} \varepsilon_3^2 = 1$$

(183) $$\frac{1}{t_1} \delta_1^2 + \frac{1}{t_2} \delta_2^2 + \frac{1}{t_3} \delta_3^2 = 1$$

$$\frac{1}{t_1} \tau_1^2 + \frac{1}{t_2} \tau_2^2 + \frac{1}{t_3} \tau_3^2 = 1$$

$$\frac{1}{t_1} \varepsilon_1 \delta_1 + \frac{1}{t_2} \varepsilon_2 \delta_2 + \frac{1}{t_3} \varepsilon_3 \delta_3 = 0$$

(184) $$\frac{1}{t_1} \varepsilon_1 \tau_1 + \frac{1}{t_2} \varepsilon_2 \tau_2 + \frac{1}{t_3} \varepsilon_3 \tau_3 = 0$$

$$\frac{1}{t_1} \delta_1 \tau_1 + \frac{1}{t_2} \delta_2 \tau_2 + \frac{1}{t_3} \delta_3 \tau_3 = 0.$$

Dalle prime tre delle (154) moltiplicate rispettivamente per

$$\frac{1}{t_1} \varepsilon_1, \quad \frac{1}{t_2} \varepsilon_2, \quad \frac{1}{t_3} \varepsilon_3,$$

e sommate: moltiplicate da capo per

$$\frac{1}{t_1} \delta_1, \quad \frac{1}{t_2} \delta_2, \quad \frac{1}{t_3} \delta_3,$$

e di nuovo sommate: moltiplicate un' altra volta per

$$\frac{1}{t_1} \tau_1, \quad \frac{1}{t_2} \tau_2, \quad \frac{1}{t_3} \tau_3,$$

e parimenti sommate, deduciamo per le (183), (184)

$$\frac{du}{dx}=\frac{\varepsilon_1}{t_1}\frac{d\varepsilon_1}{dt}+\frac{\varepsilon_2}{t_2}\frac{d\varepsilon_2}{dt}+\frac{\varepsilon_3}{t_3}\frac{d\varepsilon_3}{dt}$$

$$(185)\qquad \frac{du}{dy}=\frac{\vartheta_1}{t_1}\frac{d\varepsilon_1}{dt}+\frac{\vartheta_2}{t_2}\frac{d\varepsilon_2}{dt}+\frac{\vartheta_3}{t_3}\frac{d\varepsilon_3}{dt}$$

$$\frac{du}{dz}=\frac{\tau_1}{t_1}\frac{d\varepsilon_1}{dt}+\frac{\tau_2}{t_2}\frac{d\varepsilon_2}{dt}+\frac{\tau_3}{t_3}\frac{dt_3}{dt}.$$

In una maniera affatto simile otteniamo dalle seguenti tre equazioni delle (154) le

$$\frac{dv}{dx}=\frac{\varepsilon_1}{t_1}\frac{d\vartheta_1}{dt}+\frac{\varepsilon_2}{t_2}\frac{d\vartheta_2}{dt}+\frac{\varepsilon_3}{t_3}\frac{d\vartheta_3}{dt}$$

$$(186)\qquad \frac{dv}{dy}=\frac{\vartheta_1}{t_1}\frac{d\vartheta_1}{dt}+\frac{\vartheta_2}{t_2}\frac{d\vartheta_2}{dt}+\frac{\vartheta_3}{t_3}\frac{d\vartheta_3}{dt}$$

$$\frac{dv}{dz}=\frac{\tau_1}{t_1}\frac{d\vartheta_1}{dt}+\frac{\tau_2}{t_2}\frac{d\vartheta_2}{dt}+\frac{\tau_3}{t_3}\frac{d\vartheta_3}{dt}.$$

E dalle ultime tre delle (154) le

$$\frac{dw}{dx}=\frac{\varepsilon_1}{t_1}\frac{d\tau_1}{dt}+\frac{\varepsilon_2}{t_2}\frac{d\tau_2}{dt}+\frac{\varepsilon_3}{at_3}\frac{d\tau_3}{dt}$$

$$(187)\qquad \frac{dw}{dy}=\frac{\vartheta_1}{t_1}\frac{d\tau_1}{dt}+\frac{\vartheta_2}{t_2}\frac{d\tau_2}{dt}+\frac{\vartheta_3}{t_3}\frac{d\tau_3}{dt}$$

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\tau_1}{t_1}\frac{d\tau_1}{dt}+\frac{\tau_2}{t_2}\frac{d\tau_2}{dt}+\frac{\tau_3}{t_3}\frac{d\tau_3}{dt}.$$

Poniamo

$$(188)\qquad \theta_1=\frac{1}{t_1}\frac{dt_1}{dt};\ \theta_2=\frac{1}{t_2}\frac{dt_2}{dt};\ \theta_3=\frac{1}{t_3}\frac{dt_3}{dt};$$

le (183), (184) derivate per t daranno

$$\frac{\varepsilon_1}{t_1}\frac{d\varepsilon_1}{dt}+\frac{\varepsilon_2}{t_2}\frac{d\varepsilon_2}{dt}+\frac{\varepsilon_3}{t_3}\frac{d\varepsilon_3}{dt}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_1^2\theta_1}{t_1}+\frac{\varepsilon_2^2\theta_2}{t_2}+\frac{\varepsilon_3^2\theta_3}{t_3}\right)$$

$$\frac{\vartheta_1}{t_1}\frac{d\vartheta_1}{dt}+\frac{\vartheta_2}{t_2}\frac{d\vartheta_2}{dt}+\frac{\vartheta_3}{t_3}\frac{d\vartheta_3}{dt}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\vartheta_1^2\theta_1}{t_1}+\frac{\vartheta_2^2\theta_2}{t_2}+\frac{\vartheta_3^2\theta_3}{t_3}\right)$$

$$\frac{\tau_1}{t_1}\frac{d\tau_1}{dt}+\frac{\tau_2}{t_2}\frac{d\tau_2}{dt}+\frac{\tau_3}{t_3}\frac{d\tau_3}{dt}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\tau_1^2\theta_1}{t_1}+\frac{\tau_2^2\theta_1}{t_2}+\frac{\tau_3^2\theta_3}{t_3}\right)$$

$$\frac{\varepsilon_1}{t_1}\frac{d\vartheta_1}{dt}+\frac{\varepsilon_2}{t_2}\frac{d\vartheta_2}{dt}+\frac{\varepsilon_3}{t_3}\frac{d\vartheta_3}{dt}+\frac{\vartheta_1}{t_1}\frac{d\varepsilon_1}{dt}+\frac{\vartheta_2}{t_2}\frac{d\varepsilon_2}{dt}+\frac{\vartheta_3}{t_3}\frac{d\varepsilon_3}{dt}$$

$$=\varepsilon_1\vartheta_1\frac{\theta_1}{t_1}+\varepsilon_2\vartheta_2\frac{\theta_2}{t_2}+\varepsilon_3\vartheta_3\frac{\theta_3}{t_3}$$

$$\frac{\varepsilon_1}{t_1}\frac{d\tau_1}{dt}+\frac{\varepsilon_2}{t_2}\frac{d\tau_2}{dt}+\frac{\varepsilon_3}{t_3}\frac{d\tau_3}{dt}+\frac{\tau_1}{t_1}\frac{d\varepsilon_1}{dt}+\frac{\tau_2}{t_2}\frac{d\varepsilon_2}{dt}+\frac{\tau_3}{t_3}\frac{d\varepsilon_3}{dt}$$

$$=\varepsilon_1\tau_1\frac{\theta_1}{t_1}+\varepsilon_2\tau_2\frac{\theta_2}{t_2}+\varepsilon_3\tau_3\frac{\theta_3}{t_3},$$

$$\frac{\vartheta_1}{t_1}\frac{d\tau_1}{dt}+\frac{\vartheta_2}{t_2}\frac{d\tau_2}{dt}+\frac{\vartheta_3}{t_3}\frac{d\tau_3}{dt}+\frac{\tau_1}{t_1}\frac{d\vartheta_1}{dt}+\frac{\tau_2}{t_2}\frac{d\vartheta_2}{dt}+\frac{\tau_3}{t_3}\frac{d\vartheta_3}{dt}$$

$$=\vartheta_1\tau_1\frac{\theta_1}{t_1}+\vartheta_2\tau_2\frac{\theta_2}{t_2}+\vartheta_3\tau_3\frac{\theta_3}{t_3},$$

le quali a motivo delle (185), (186), (187) si mutano nelle seguenti

$$2\frac{du}{dx}=\frac{1}{t_1}\varepsilon_1{}^2\theta_1+\frac{1}{t_2}\varepsilon_2{}^2\theta_2+\frac{1}{t_3}\varepsilon_3{}^2\theta_3$$

(189) $$2\frac{dv}{dy}=\frac{1}{t_1}\varsigma_1{}^2\theta_1+\frac{1}{t_2}\varsigma_2{}^2\theta_2+\frac{1}{t_3}\varsigma_3{}^2\theta_3$$

$$2\frac{dw}{dz}=\frac{1}{t_1}\tau_1{}^2\theta_1+\frac{1}{t_2}\tau_2{}^2\theta_2+\frac{1}{t_3}\tau_3{}^2\theta_3$$

$$\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}=\frac{1}{t_1}\varepsilon_1\varsigma_1\theta_1+\frac{1}{t_2}\varepsilon_2\varsigma_2\theta_2+\frac{1}{t_3}\varepsilon_3\varsigma_3\theta_3$$

(190) $$\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}=\frac{1}{t_1}\varepsilon_1\tau_1\theta_1+\frac{1}{t_2}\varepsilon_2\tau_2\theta_2+\frac{1}{t_3}\varepsilon_3\tau_3\theta_3$$

$$\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}=\frac{1}{t_1}\varsigma_1\tau_1\theta_1+\frac{1}{t_2}\varsigma_2\tau_2\theta_2+\frac{1}{t_3}\varsigma_3\tau_3\theta_3$$

sei equazioni che fanno un gran giuoco, come or ora vedremo. Per un primo saggio, sommando le (189) abbiamo prontamente in virtù delle (181)

(191) $$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=\tfrac{1}{2}(\theta_1+\theta_2+\theta_3).$$

È questo il risultato medesimo che si avrebbe dalla equazione della continuità (104), sostituendovi a Γ il suo valore dato dalla (176); ma tale equazione non è che una equazione identica, perchè le θ_1, θ_2, θ_3 sono poi date esse medesime, come tosto si vedrà, per le derivate parziali delle tre velocità. Ciò ritorna nella riflessione fatta sul fine del n.° 57.

70. Mettiamo per comodo

(192) $$A=2\frac{du}{dx};\quad B=2\frac{dv}{dy};\quad C=2\frac{dw}{dz}$$
$$F=\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx};\quad E=\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx};\quad D=\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}.$$

Moltiplicando rispettivamente per $\varepsilon_1, \delta_1, \tau_1$ la prima delle (189) e le due prime delle (190), indi sommandole; moltiplicando similmente la prima delle (190) la seconda delle (189) e la terza delle (190), indi sommandole; moltiplicando per ultimo similmente la seconda e la terza delle (190) e la terza delle (189) e ancora sommandole, avremo per effetto delle (181), (182) le tre che seguono

$$\varepsilon_1(A-\theta_1)+\delta_1 F+\tau_1 E=0$$

$$(193)\qquad \varepsilon_1 F+\delta_1(B-\theta_1)+\tau_1 D=0$$

$$\varepsilon_1 E+\delta_1 D+\tau_1(C-\theta_1)=0.$$

Ripetendo la stessa operazione collo stesso ordine e colla sola differenza di moltiplicare rispettivamente le equazioni tre a tre per $\varepsilon_2, \delta_2, \tau_2$ invece di moltiplicarle per $\varepsilon_1, \delta_1, \tau_1$, otterremo

$$\varepsilon_2(A-\theta_2)+\delta_2 F+\tau_2 E=0$$

$$(194)\qquad \varepsilon_2 F+\delta_2(B-\theta_2)+\tau_2 D=0$$

$$\varepsilon_2 E+\delta_2 D+\tau_2(C-\theta_2)=0.$$

Replicando ancora la stessa operazione collo stesso ordine, ma moltiplicando le equazioni a tre a tre rispettivamente per $\varepsilon_3, \delta_3, \tau_3$, conseguiremo

$$\varepsilon_3(A-\theta_3)+\delta_3 F+\tau_3 E=0$$

$$(195)\qquad \varepsilon_3 F+\delta_3(B-\theta_3)+\tau_3 D=0$$

$$\varepsilon_3 E+\delta_3 D+\tau_3(C-\theta_3)=0.$$

Fra le (193) possiamo eliminare le ε_1, s_1, τ_1, e ottenere una equazione che contenga solamente θ_1 e le sei A, B, C, D, E, F. Havvi più d'una strada per giungere a questo scopo: ne accennerò una ed è quella di dividere le tre equazioni (193) per ε_1, e fra le tre risultanti eliminare i due rapporti $\frac{s_1}{\varepsilon_1}$, $\frac{\tau_1}{\varepsilon_1}$. Si conseguisce così dopo alcune riduzioni la

$$\begin{aligned}&\theta_1^3-(A+B+C)\theta_1^2+(AB+AC+BC-D^2-E^2-F^2)\theta_1\\ (196)\qquad &+AD^2+BE^2+CF^2-ABC-2DEF=0.\end{aligned}$$

Con un processo di eliminazione affatto simile ed eseguito sulle (194) troveremo un'equazione di terzo grado che non differirà dalla (196) se non per avere θ_2 in luogo di θ_1. E una simile operazione praticata sulle (195) ci darà un'altra equazione di terzo grado in niente differente dalla (196) se si eccettua l'esservi θ_3 al posto di θ_1.

71. Il verificarsi della equazione (196) tanto con θ_1, come con θ_2, come con θ_3 non vuol dire che θ_1, θ_2, θ_3 siano fra di loro eguali, ma che sono le tre radici di una stessa equazione

$$\begin{aligned}&\theta^3-(A+B+C)\theta^2+(AB+AC+BC-D^2-E^2-F^2)\theta\\ (197)\qquad &+AD^2+BE^2+CF^2-ABC-2DEF=0.\end{aligned}$$

Infatti, così essendo, la teorica delle equazioni ci darebbe

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3=A+B+C$$

(198) $$\theta_1\theta_2+\theta_1\theta_3+\theta_2\theta_3=AB+AC+BC-D^2-E^2-F^2$$

$$\theta_1\theta_2\theta_3=ABC+2DEF-AD^2-BE^2-CF^2$$

La prima di queste è la stessa (191) già trovata altrimenti: e non dubito che anche le due seguenti possano avere una diversa verificazione, che cercherei se non credessi la verità della proposizione asserita già manifesta senza bisogno di novella prova.

L' equazione (197) occorse anche a Lagrange, a Binet, a Cauchy in altre ricerche di meccanica (*). Il primo di questi geometri dimostrò che avea le sue tre radici sempre reali: il terzo ne indicò la risoluzione che si conduce felicemente alle formole finali, quando facciasi uso del metodo di risoluzione delle equazioni di terzo grado per mezzo delle funzioni circolari.

Osserveremo, perchè riesce utile in seguito, che se mai per un caso particolare fossero

(199) $$D=E=F=0.$$

le tre radici della (197) sarebbero A, B, C.

Supposte cognite le tre radici θ_1, θ_2, θ_3, si hanno dalle (188)

(200) $$t_1=e^{\int dt.\theta_1}\ ;\quad t_2=e^{\int dt.\theta_2}\ ;\quad t_3=e^{\int dt.\theta_3}$$

72. Ma interessa di ottenere equazioni fra le sole derivate parziali delle velocità u, v, w. Che vi debbano essere, non può mettersi in dubbio se si riflette che le equazioni

(*) Exercices de mathématiques. T. 2. pag. 98.

(154) unite alle (182) formano un sistema di dodici equazioni fra cui eliminando le nove ε_1, ϑ_1, τ_1, ε_2, ec. resteranno tre equazioni fatte delle sole velocità. Il loro ritrovamento però non è per nulla ovvio, e conviene usare certi maneggi a fine di evitare processi analitici di una prolissità che spaventa.

Scritte le (193) nella maniera seguente

$$\varepsilon_1 \theta_1 = \varepsilon_1 A + \vartheta_1 F + \tau_1 E$$

$$(201) \qquad \vartheta_1 \theta_1 = \varepsilon_1 F + \vartheta_1 B + \tau_1 D$$

$$\tau_1 \theta_1 = \varepsilon_1 E + \vartheta_1 D + \tau_1 C$$

si derivino per t. Metteremo per $\frac{d\varepsilon_1}{dt}$, $\frac{d\vartheta_1}{dt}$, $\frac{d\tau_1}{dt}$ i loro valori datici dalla prima, quarta e settima delle (154), e ricomparendo i prodotti $\varepsilon_1 \theta_1$, $\vartheta_1 \theta_1$, $\tau_1 \theta_1$ vi sostituiremo le espressioni equivalenti che si vedono nelle stesse precedenti (201). Dopo varie riduzioni che si presentano non difficilmente, giungeremo ad un risultamento al quale (adottando d'ora innanzi d'indicare cogli apici le derivate totali per t) potrà darsi il seguente prospetto

$$\varepsilon_1 \theta'_1 = \varepsilon_1 a + \vartheta_1 f + \tau_1 e$$

$$(202) \qquad \vartheta_1 \theta'_1 = \varepsilon_1 f + \vartheta_1 b + \tau_1 d$$

$$\tau_1 \theta'_1 = \varepsilon_1 e + \vartheta_1 d + \tau_1 c$$

essendo le nuove sei quantità a, b, c, d, e, f date per le sei A, B, C, D, E, F delle (192), e per tre nuove

$$(203) \qquad \xi = \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}; \quad \eta = \frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}; \quad \zeta = \frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}$$

mediante le equazioni

$$
(204)\qquad \begin{aligned} a &= A' - F\xi + E\eta \\ b &= B' + F\xi - D\zeta \\ c &= C' - E\eta + D\zeta \end{aligned}
$$

$$
(205)\qquad \begin{aligned} f &= F' + \tfrac{1}{2}(A - B)\xi + \tfrac{1}{2} D\eta - \tfrac{1}{2} E\zeta \\ e &= E' + \tfrac{1}{2}(C - A)\eta - \tfrac{1}{2} D\xi + \tfrac{1}{2} F\zeta \\ d &= D' + \tfrac{1}{2}(B - C)\zeta + \tfrac{1}{2} E\xi - \tfrac{1}{2} F\eta. \end{aligned}
$$

Avverto che in questa operazione si riconosceranno facilmente i valori delle (204), ma non così subito quelle delle (205). I coefficienti di ς_1 e di ε_1 nei secondi membri della prima e seconda delle (202) non compariranno al primo aspetto eguali, riuscendo l' uno

$$
F' + (A - B)\frac{du}{dy} + F\left(\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dx}\right) + E\frac{dw}{dy} - D\frac{du}{dz}
$$

e l' altro

$$
E' + (B - A)\frac{dv}{dx} + F\left(\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy}\right) + D\frac{dw}{dx} - E\frac{dv}{dz}.
$$

Non è che svolgendo dopo la sostituzione dei valori (202), che si troveranno entrambi eguali all' espressione

$$
F' + \frac{du}{dx}\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dx}\frac{dw}{dy} - \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dz}\frac{dv}{dz}.
$$

Quindi mettendo invece dell' uno o dell' altro la loro semisomma, e richiamando le denominazioni (203), si avrà la prima delle (205).

Similmente i coefficienti di τ_1, ε_1 nei secondi membri

della prima e terza delle (202) appariranno sulle prime diversi all' occhio, cioè

$$E'+(A-C)\frac{du}{dz}+E\left(\frac{dw}{dz}-\frac{du}{dx}\right)+F\frac{dv}{dz}-D\frac{du}{dy}$$

$$E'+(C-A)\frac{dw}{dx}+E\left(\frac{du}{dx}-\frac{dw}{dz}\right)+D\frac{dv}{dx}-F\frac{dw}{dy}$$

ma colla sostituzione dei valori (192) si troveranno entrambi eguali all' espressione

$$E'+\frac{du}{dx}\frac{du}{dz}+\frac{dv}{dx}\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dx}\frac{dw}{dz}-\frac{du}{dx}\frac{dw}{dx}-\frac{du}{dy}\frac{dw}{dy}-\frac{du}{dz}\frac{dw}{dz}$$

però si potrà usare la loro semisomma che ci mostrerà la seconda delle (205). Un simile giuoco giustifica la terza delle (205); i due coefficienti apparentemente diversi di τ_1, δ_1 nei secondi membri della seconda e terza delle (202) sono

$$D'+(B-C)\frac{dv}{dz}+D\left(\frac{dw}{dz}-\frac{dv}{dy}\right)+F\frac{du}{dz}-E\frac{dv}{dx}$$

$$D'+(C-B)\frac{dw}{dy}+D\left(\frac{dv}{dy}-\frac{dw}{dz}\right)+E\frac{du}{dy}-F\frac{dw}{dx}$$

e l' espressione a cui entrambi si riducono colla sostituzione dei valori (192) è

$$D'+\frac{du}{dy}\frac{du}{dz}+\frac{dv}{dy}\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\frac{dw}{dz}-\frac{dv}{dx}\frac{dw}{dx}-\frac{dv}{dy}\frac{dw}{dy}-\frac{dv}{dz}\frac{dw}{dz}.$$

73. Combineremo le equazioni (202) ultimamente dimostrate colle precedenti (201); ecco in qual modo.

Eliminando θ_1 dalle (201) avremo

$$A\varepsilon_1\vartheta_1+F\vartheta_1^2+E\vartheta_1\tau_1=F\varepsilon_1^2+B\varepsilon_1\vartheta_1+D\varepsilon_1\tau_1$$

$$(206)\qquad A\varepsilon_1\tau_1+F\vartheta_1\tau_1+E\tau_1^2=E\varepsilon_1^2+D\varepsilon_1\vartheta_1+C\varepsilon_1\tau_1$$

$$F\varepsilon_1\tau_1+B\vartheta_1\tau_1+D\tau_1^2=E\varepsilon_1\vartheta_1+D\vartheta_1^2+C\vartheta_1\tau_1.$$

Similmente l'eliminazione di θ_1' dalle (202) ci darà le tre

$$a\varepsilon_1\vartheta_1+f\vartheta_1^2+e\vartheta_1\tau_1=f\varepsilon_1^2+b\varepsilon_1\vartheta_1+d\varepsilon_1\tau_1$$

$$(207)\qquad a\varepsilon_1\tau_1+f\vartheta_1\tau_1+e\tau_1^2=e\varepsilon_1^2+d\varepsilon_1\vartheta_1+c\varepsilon_1\tau_1$$

$$f\varepsilon_1\tau_1+b\vartheta_1\tau_1+d\tau_1^2=e\varepsilon_1\vartheta_1+d\vartheta_1^2+c\vartheta_1\tau_1.$$

Alle (206) moltiplicate rispettivamente per f, e, d si sottraggano le (207) moltiplicate rispettivamente per F, E, D, e la sottrazione facciasi ordinatamente, cioè la prima alla prima, la seconda alla seconda, la terza alla terza: otterremo

$$(Af-Fa)\varepsilon_1\vartheta_1+(Ef-Fe)\vartheta_1\tau_1=(Bf-Fb)\varepsilon_1\vartheta_1+(Df-Fd)\varepsilon_1\tau_1$$

$$(208)\qquad (Ae-Ea)\varepsilon_1\tau_1+(Fe-Ef)\vartheta_1\tau_1=(De-Ed)\varepsilon_1\vartheta_1+(Ce-Ec)\varepsilon_1\tau_1$$

$$(Fd-Df)\varepsilon_1\tau_1+(Bd-Db)\vartheta_1\tau_1=(Ed-De)\varepsilon_1\vartheta_1+(Cd-Dc)\vartheta_1\tau_1.$$

Ora sommando le prime due di queste (208), i termini che contengono ϑ_1, τ_1 spariscono, ed i restanti sono tutti divisibili per ε_1: si ha così un risultato che può essere presentato come segue

$$[(A-B)f-F(a-b)+Ed-De]\vartheta_1=[(C-A)e-E(c-a)+Df-Fd]\tau_1.$$

Si sommi da capo la prima delle (208) colla terza in cui siansi rovesciati i membri, cioè scritto per primo il secondo e viceversa; i termini che spariscono sono quelli che contengono $\varepsilon_1 \tau_1$: i restanti sono divisibili per ϑ_1, e si ha

$$[(A-B)f-F(a-b)+Ed-De]\varepsilon_1=[(B-C)d-D(b-c)+Fe-Ef]\tau_1.$$

Sommando in fine le ultime due delle (208) spariscono i termini che contengono $\varepsilon_1 \vartheta_1$, e i restanti sono divisibili per τ_1. quindi

$$[(B-C)d-D(b-c)+Fe-Ef]\vartheta_1=[(C-A)e-E(c-a)+Df-Fd]\varepsilon_1.$$

Le tre equazioni ultimamente trovate non sono in sostanza che due sole. Ponendo per abbreviare

$$L=(B-C)d-D(b-c)+Fe-Ef$$

(209) $$M=(C-A)e-E(c-a)+Df-Fd$$

$$N=(A-B)f-F(a-b)+Ed-De$$

esse sono tutte e tre comprese nelle due equazioni

(210) $$\frac{\varepsilon_1}{L}=\frac{\vartheta_1}{M}=\frac{\tau_1}{N}.$$

74. Chi ponga mente all' analisi di questi due ultimi numeri capirà che le precedenti (210) prendono la loro origine dalle (193), e che se rifaremo la stessa analisi partendo invece dalle (194), arriveremo sulle medesime tracce alle altre equazioni

(211) $$\frac{\varepsilon_2}{L}=\frac{\vartheta_2}{M}=\frac{\tau_2}{N}$$

essendo i valori delle L, M, N ancora i marcati nelle (209).

Per verità converrà prendere delle (154) altre equazioni diverse dalle usate al n° 72, cioè la seconda, quinta, ottava invece della prima, quarta, settima; ma quest'unica differenza nell'andamento dei due calcoli è anzi, per chi ben osserva, ciò che rende il riscontro perfetto. In simil maniera partendo dalle (195) giungeremo alle altre tre

$$(212) \qquad \frac{\varepsilon_3}{L} = \frac{s_3}{M} = \frac{\tau_3}{N}.$$

Chiamisi per un momento h il valore dei tre membri componenti le equazioni (210) e k quello dei tre membri delle (211): avremo

$$\varepsilon_1 = hL\,; \quad s_1 = hM\,; \quad \tau_1 = hN$$

$$\varepsilon_2 = kL\,; \quad s_2 = kM\,; \quad \tau_2 = kN.$$

Sostituiscansi questi valori nella prima delle (182) e dividendo per hk, otterremo

$$(213) \qquad L^2 + M^2 + N^2 = 0.$$

Lo stesso risultato ci sarebbe porto dalle altre due equazioni delle (182) e dalle altre due combinazioni delle (210), (211), (212). L'equazione (213) non può sussistere se non si hanno separatamente

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0;$$

è questo un principio analitico assai noto, ed usato dai geometri nelle equazioni fatte di somme di quadrati di quantità reali.

Dunque per le denominazioni (209) avremo

$$(B-C)d-D(b-c)+Fe-Ef=0$$

$$(214)\qquad (C-A)e-E(c-a)+Df-Fd=0$$

$$(A-B)f-F(a-b)+Ed-De=0.$$

Ecco finalmente le tre equazioni che si cercavano fra le sole velocità, come si disse sul principio del n.° 72. Conviene intendere sostituiti nelle (214) alle A, B, C, D, E, F i valori (192), e alle a, b, c, d, e, f i valori (204), (205) nei quali entrano le ξ, η, ζ date per le (203).

75. Le formole fin qui dimostrate contengono nel loro complesso quanto basta alla piena risoluzione d'ogni problema relativo al moto de' fluidi, ammessa la condizione esposta al principio di questo paragrafo. Restano però le difficoltà analitiche che risguardano l'integrazione delle molte equazioni a differenze parziali. Queste, anche nella teorica più semplice adottata dai geometri nostri maestri, furono reputate sì gravi (*) da sorpassare tutte le forze dell'analisi conosciuta; e però all'oggetto di avere equazioni più trattabili, furono ammesse alcune facilitazioni che qui chiameremo ad esame.

Primieramente fu ammessa l'integrabilità del trinomio $Xdx+Ydy+Zdz$, ossia (ciò che significa lo stesso, ma s'intende meglio) la sussistenza di una funzione $V(x, y, z, t)$ che verifichi le equazioni

$$(215)\qquad X=\frac{dV}{dx};\quad Y=\frac{dV}{dy};\quad Z=\frac{dV}{dz}.$$

È noto che si fatta supposizione è rigorosamente conforme alle leggi della natura, e che è appunto essa sola per cui si possono dalle equazioni meccaniche cavare le leggi della idrostatica. Accetteremo pertanto questa supposizione anche nella

(*) Lagrange. M. A. T. 2. pag. 304.

nostra analisi senza difficoltà. In secondo luogo si suppose, non solo nell' equilibrio, ma anche nel moto la densità Γ costante se parlisi di fluidi incompressibili, e proporzionale alla pressione ove si tratti di fluidi elastici. Parmi che nel caso del moto l'ammettere questa proposizione a *priori* non sia più conciliabile colle cognizioni attuali della scienza. Il Sig. Poisson (luogo sopra citato) ha trovato che il fluido durante il moto può prendere nelle sue molecole una costituzione diversa da quella che corrisponde allo stato d' equilibrio; e anche col solo raziocinio non si vede un motivo per cui nel moto de' fluidi incompressibili le loro particelle non abbiano a potere staccarsi fra loro più e meno (quantunque di pochissimo) in diversi luoghi. Dirò di più che il ragionamento, a chi ben medita, persuade il contrario : e che anche l' osservazione ci fa vedere nelle precipitose cadute d' acqua la formazione di una quasi nebbia acquosa in cui la densità è certamente diversa da quella propria delle altre parti del fluido in moto. La proposizione avrà nondimeno luogo con molta approssimazione in gran numero di casi : ma dovrà spettare al calcolo l' indicarci co' suoi risultamenti a *posteriori* quando ciò avviene. Non ammetteremo qui dunque a *priori* questa supposizione, e non pronunciando sulla Γ, aspetteremo che questa quantità ci sia fatta conoscere per effetto delle stesse equazioni idrauliche.

In terzo luogo si adottò che anche il trinomio $udx+vdy+wdz$ possa essere nella maggior parte dei casi differenziale esatto, cioè che si dia una funzione $\lambda(x, y, z, t)$ tale da soddisfare alle equazioni

$$(216) \qquad u=\frac{d\lambda}{dx}; \quad v=\frac{d\lambda}{dy}; \quad w=\frac{d\lambda}{dz};$$

il che torna lo stesso come il supporre eguali a zero le tre quantità ξ, η, ζ, delle nostre equazioni (203). Io non accetto interamente questa supposizione, nè interamente la rifiuto. Non l'accetto interamente, perchè ben lungi dal credere colla

comune degl'idraulici (e come io pure scrissi altra volta) ch' essa si avveri rigorosamente il più delle volte in natura, reputo presentemente rarissimo questo avvenimento, trovando giusto quanto scrisse nell' ultima sua opera il Tadini, che può bastare un sasso gittato in una corrente, perchè anche nella ipotesi che quella proprietà avesse luogo dapprima, non sussista più a preciso rigore da quel momento in poi. Non la rigetto poi interamente, perchè, come or ora si vedrà meglio, sono d'avviso che il moto calcolato nell' ipotesi di quel differenziale esatto, se non è il vero della natura, lo rappresenta però con approssimazione, e che la sua analisi deve mettersi a fondamento di quell' altra più accurata e più difficile che valga ad esprimere il moto vero.

76. Ammetto dunque senza esitazione la prima facilitazione, rigetto la seconda ed alla terza surrogo un'altra dietro i seguenti ragionamenti. Richiaminsi le equazioni (180), le quali, ponendo per abbreviare

$$p = -\mu\Gamma^2, \tag{217}$$

viste le (215), possono scriversi

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{dV}{dx} - u'\right) &= \frac{dp}{dx} \\ \Gamma\left(\frac{dV}{dy} - v'\right) &= \frac{dp}{dy} \\ \Gamma\left(\frac{dV}{dz} - w'\right) &= \frac{dp}{dz}. \end{aligned} \tag{218}$$

La supposizione mia è che non il trinomio $udx + vdy + wdz$ sia differenziale esatto, ma bensì il trinomio $u'dx + v'dy + w'dz$, ossia che u', v', w', come le forze X, Y, Z siano tali da dar luogo ad una funzione $k(x, y, z, t)$ atta a verificare le equazioni

$$(219) \qquad u' = \frac{dk}{dx}; \quad v' = \frac{dk}{dy}; \quad w' = \frac{dk}{dz}.$$

Infatti nella cognizione in cui siamo che tutte le forze della natura godano di tale proprietà, non saprei vedere ragione per cui dovessero andarne prive le u', v', w', le quali possono riguardarsi vere forze che ad ogni istante fanno con quelle equilibrio. Anche la conseguenza immediata di questa supposizione può servire a confermarla viemmeglio. Discende da essa e dalle (218) che la densità Γ è funzione della pressione p, funzione che si ridurrà ad una costante nel caso della densità costante, sarà altre volte quella della proporzionalità, e potrà anche avere altre forme. Niente di più ragionevole e di più conforme ai dettati della Fisica. Si sa che Lagrange ha notato un caso di moto (*) che si sottrae alla legge di differenziale esatto $udx+vdy+wdz$, e quel passo della Meccanica Analitica fu copiato in quasi tutti i posteriori trattati d'idraulica. È ora facile vedere che quel caso non si sottrae alla nostra legge più generale.

77. Insistiamo sulle stabilite equazioni (219), ossia, ciò che è lo stesso, sulle equazioni

$$(220) \qquad \frac{du'}{dy} = \frac{dv'}{dx}; \quad \frac{du'}{dz} = \frac{dw'}{dx}; \quad \frac{dv'}{dz} = \frac{dw'}{dy}.$$

Assunta in generale una funzione $\varphi(x, y, z, t)$, avremo

$$\varphi' = \frac{d\phi}{dx} u + \frac{d\phi}{dy} v + \frac{d\phi}{dz} w + \frac{d\phi}{dt}$$

$$\frac{d\phi'}{dx} = \frac{d^2\phi}{dx^2} u + \frac{d^2\phi}{dxdy} v + \frac{d^2\phi}{dxdz} w + \frac{d^2\phi}{dxdt}$$

$$+ \frac{d\phi}{dx}\frac{du}{dx} + \frac{d\phi}{dy}\frac{dv}{dx} + \frac{d\phi}{dz}\frac{dw}{dx}.$$

(*) M. A. T. 2. pag. 310.

Da un'altra parte se considereremo la derivata parziale $\frac{d\phi}{dx}$, e ne prenderemo la derivata totale per t, otterremo

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)' = \frac{d^2\phi}{dx^2}u + \frac{d^2\phi}{dxdy}v + \frac{d^2\phi}{dxdz}w + \frac{d^2\phi}{dxdt}.$$

Quindi

$$\frac{d\phi'}{dx} = \left(\frac{d\phi}{dx}\right)' + \frac{d\phi}{dx}\frac{du}{dx} + \frac{d\phi}{dy}\frac{dv}{dx} + \frac{d\phi}{dz}\frac{dw}{dx}$$

$$(221) \qquad \frac{d\phi'}{dy} = \left(\frac{d\phi}{dy}\right)' + \frac{d\phi}{dx}\frac{du}{dy} + \frac{d\phi}{dy}\frac{dv}{dy} + \frac{d\phi}{dz}\frac{dw}{dy}$$

$$\frac{d\phi'}{dz} = \left(\frac{d\phi}{dz}\right)' + \frac{d\phi}{dx}\frac{du}{dz} + \frac{d\phi}{dy}\frac{dv}{dz} + \frac{d\phi}{dz}\frac{dw}{dz}.$$

Le ultime due di queste equazioni (221) hanno una dimostrazione similissima a quella indicata per la prima.

A motivo delle (221) le (220) si cangiano in altre cui può darsi la seguente espressione

$$\left(\frac{du}{dy}\right)' - \left(\frac{dv}{dx}\right)' = -\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right)\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right) + \frac{dw}{dy}\left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}\right) + \frac{dw}{dx}\left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)' - \left(\frac{du}{dz}\right)' = \frac{dv}{dz}\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right) - \left(\frac{dw}{dz} + \frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}\right) + \frac{dv}{dx}\left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{dv}{dz}\right)' - \left(\frac{dw}{dy}\right)' = \frac{du}{dz}\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right) + \frac{du}{dy}\left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}\right) - \left(\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)\left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right)$$

le quali per le (203) si presentano più compendiosamente sotto la forma

$$\xi' = -\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right)\xi + \frac{dw}{dy}\eta + \frac{dw}{dx}\zeta$$

$$(222) \qquad \eta' = \frac{dv}{dz}\xi - \left(\frac{dw}{dz} + \frac{du}{dx}\right)\eta + \frac{dv}{dx}\zeta$$

$$\zeta' = \frac{du}{dz}\xi + \frac{du}{dy}\eta - \left(\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)\zeta.$$

È visibile che quest' ultime equazioni sono soddisfatte dalla supposizione

$$(223) \qquad \xi = 0; \quad \eta = 0; \quad \zeta = 0,$$

le quali ne sono integrali particolari nati dal far zero alcune costanti arbitrarie che in generale non saranno nulle. Così la supposizione di cui parlammo sulla fine del n.° 75 è compresa come caso particolare nella nostra più generale. Il moto del fluido colla supposizione delle (223) dovrà essere trattato come una approssimazione, e dopo di esso per mezzo delle (222) dovremo farci strada all' analisi più accurata, in quella guisa che in Astronomia si parte dal moto elittico dei pianeti per poi trattare più sottilmente il moto perturbato.

78. Avviandoci pertanto alla trattazione del moto de' fluidi nella supposizione delle equazioni (223), ci si renderanno assai meno complicate le (214).

Di fatto le (204), (205) ci danno

$$a = A'; \; b = B'; \; c = C'; \; f = F'; \; e = E'; \; d = D'.$$

Abbiamo poi per le (192), (216)

$$A = 2\frac{d^2\lambda}{dx^2}; \; B = 2\frac{d^2\lambda}{dy^2}; \; C = 2\frac{d^2\lambda}{dz^2}$$

$$F = 2\frac{d^2\lambda}{dxdy}; \; E = 2\frac{d^2\lambda}{dxdz}; \; D = 2\frac{d^2\lambda}{dydz}.$$

Quindi le (214) diventano

$$\left(\frac{d^2\lambda}{dy^2} - \frac{d^2\lambda}{dz^2}\right)\left(\frac{d^2\lambda}{dydz}\right)' - \frac{d^2\lambda}{dydz}\left(\frac{d^2\lambda}{dy^2} - \frac{d^2\lambda}{dz^2}\right)' + \frac{d^2\lambda}{dxdy}\left(\frac{d^2\lambda}{dxdz}\right)' - \frac{d^2\lambda}{dxdz}\left(\frac{d^2\lambda}{dxdy}\right)' = 0$$

$$(224) \quad \left(\frac{d^2\lambda}{dz^2} - \frac{d^2\lambda}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2\lambda}{dxdz}\right)' - \frac{d^2\lambda}{dxdz}\left(\frac{d^2\lambda}{dz^2} - \frac{d^2\lambda}{dx^2}\right)' + \frac{d^2\lambda}{dydz}\left(\frac{d^2\lambda}{dxdy}\right)' - \frac{d^2\lambda}{dxdy}\left(\frac{d^2\lambda}{dydz}\right)' = 0$$

$$\left(\frac{d^2\lambda}{dx^2} - \frac{d^2\lambda}{dy^2}\right)\left(\frac{d^2\lambda}{dxdy}\right)' - \frac{d^2\lambda}{dxdy}\left(\frac{d^2\lambda}{dx^2} - \frac{d^2\lambda}{dy^2}\right)' + \frac{d^2\lambda}{dxdz}\left(\frac{d^2\lambda}{dydz}\right)' - \frac{d^2\lambda}{dydz}\left(\frac{d^2\lambda}{dxdz}\right)' = 0$$

colle quali dovrà essere determinata la λ.

Anche queste equazioni si trovano soddisfatte dalla supposizione di tre equazioni che ne sono tre integrali particolari, cioè dalle

$$(225)\qquad \frac{d^2\lambda}{dxdy}=0;\quad \frac{d^2\lambda}{dxdz}=0;\quad \frac{d^2\lambda}{dydz}=0;$$

le quali ci danno

$$(226)\qquad \lambda=\phi(x,t)+\psi(y,t)+\chi(z,t)$$

e quindi per le (216)

$$(227)\qquad u=\frac{d\phi}{dx};\quad v=\frac{d\psi}{dy};\quad w=\frac{d\chi}{dz};$$

cioè ognuna delle tre velocità secondo i tre assi funzione della sola coordinata secondo cui è diretta, e del tempo esplicito. È questo il caso particolare previsto al n.° 71, dove abbiamo messe in ipotesi le equazioni (199).

Il moto in cui si riscontra sifatta proprietà è generalmente assai diverso da quello che si avvera in natura, anche nella supposizione delle (223), ma può servire di base alla ricerca delle equazioni proprie del moto che ammette tale supposizione; in quella guisa che nella teorica dei pianeti si può far dipendere la determinazione del moto elittico da quella del moto circolare.

79. Ecco pertanto, per quanto a me pare, il vero andamento da tenersi per la formazione di una esatta teorica idraulica. Si partirà primieramente dalla disamina del moto in cui si avverassero le equazioni (225), e di cui facilmente possono determinarsi tutti gli accidenti; cercando per mezzo delle equazioni (224) di dedurne l'analisi spettante al moto più vicino alla natura che ammette la sola supposizione delle equazioni (223). Poi di nuovo partendo da quest'ultimo si salirà col sussidio delle equazioni (222) alle equazioni generalissime che esprimeranno il vero moto della natura. Così si vincerà

in due volte la difficoltà, siccome si è notato farsi in Astronomia.

Restano a crearsi le due analisi con cui fare gli accennati due passi, nè io oso dirle superiori alle attuali forze della scienza del calcolo: anzi ne reputo accessibile la ricerca almeno per alcuno dei grandi problemi della natura. L'impresa però è sì vasta che non può essere da me tentata in questo luogo, essendomi qui proposta la sola dimostrazione delle equazioni generali spettanti alla nuova teorica.

80. Prima di finire ci rimane a far parola delle equazioni che si avverano alla superficie del fluido, e che discendono dalle (165) del § 6.° Basterà discuterne le prime tre che a motivo delle (177) diventano nel nostro caso

$$\pi_{1x} = -\frac{\mu}{t_1}\Gamma\varepsilon_1 ; \; \pi_{1y} = -\frac{\mu}{t_1}\Gamma\delta_1 ; \; \pi_{1z} = -\frac{\mu}{t_1}\Gamma\tau_1$$

ossia per la (217)

$$(228) \qquad \pi_{1x} = \frac{p}{\Gamma t_1}\varepsilon_1 ; \; \pi_{1y} = \frac{p}{\Gamma t_1}\delta_1 ; \; \pi_{1z} = \frac{p}{\Gamma t_1}\tau_1 .$$

La pressione π_1 alla superficie nel punto (x, y, z) è per definizione data dall'equazione

$$\pi_1 = \sqrt{\pi_{1x}^2 + \pi_{1y}^2 + \pi_{1z}^2}$$

e

$$\frac{\pi_{1x}}{\pi_1}, \quad \frac{\pi_{1y}}{\pi_1}, \quad \frac{\pi_{1z}}{\pi_1}$$

significano i tre coseni degli angoli che la sua direzione fa cogli assi delle x, y, z.

Dunque nel nostro caso per le (228) e per la prima delle (181) avremo

$$(229) \qquad \pi_1 = \frac{p}{\Gamma\sqrt{t_1}}$$

e i tre coseni che ne fissano la direzione saranno

$$(230) \qquad \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{t_1}}; \quad \frac{\delta_1}{\sqrt{t_1}}; \quad \frac{\tau_1}{\sqrt{t_1}}.$$

81. Parlammo (n.° 59. equaz. (160)) di una equazione $f(x, y, z) = 0$ che ha luogo fra le coordinate dei punti della superficie cui è applicata la pressione π_1; e al n.° 60 facemmo conoscere che queste x, y, z non sono le $x(a, b, c)$, $y(a, b, c)$, $z(a, b, c)$ generali per qualunque punto del fluido, ma $x(l, b, c)$, $y(l, b, c)$, $z(l, b, c)$ in cui una delle a, b, c (in questo caso la a) ha assunto un valore costante l.

Immaginiamo sostituite le $x(l, b, c)$, $y(l, b, c)$, $z(l, b, c)$ nella $f(x, y, z) = 0$; l'equazione si verificherà indipendentemente dalle b, c, che mantengono la loro variabilità, quindi sussisteranno insieme con essa le sue derivate per b, e per c. Le prime di queste, a motivo delle denominazioni (153) possono scriversi

$$(231) \qquad f'(x)\,\varepsilon_2 + f'(y)\,\delta_2 + f'(z)\,\tau_2 = 0$$

$$(232) \qquad f'(x)\,\varepsilon_3 + f'(y)\,\delta_3 + f'(z)\,\tau_3 = 0$$

dove gli apici indicano le derivate al modo Lagrangiano. In verità la $f(x, y, z) = 0$ sarà identica anche per riguardo ad l, e quindi potrebbe essere derivata anche relativamente a questa quantità, ma sbaglierebbe assai chi credesse di poterne in tale maniera dedurre un'altra equazione simile alle due precedenti; perchè, ponendo mente (n.° 60) alla formazione delle funzioni $x(l, b, c)$, $y(l, b, c)$, $z(l, b, c)$, si viene a capire che la l vi entra non solo al posto della a, ma anche fra le costanti.

La (231) e la prima delle (182) sono due equazioni, che mediante un processo assai noto possono mettersi sotto la forma

$$(233) \qquad \frac{\varepsilon_2}{(1)} = \frac{\delta_2}{(2)} = \frac{\tau_2}{(3)}$$

essendo

$$(1) = \tau_1 f'(y) - \delta_1 f'(z)$$

(234) $$(2) = \varepsilon_1 f'(z) - \tau_1 f'(x)$$

$$(3) = \delta_1 f'(x) - \varepsilon_1 f'(y).$$

In maniera affatto simile la (232) e la seconda delle (182) ci daranno

(235) $$\frac{\varepsilon_3}{(1)} = \frac{\delta_3}{(2)} = \frac{\tau_3}{(3)}.$$

Chiamisi per un momento h il valore dei tre membri componenti le equazioni (233), e k quello dei tre membri delle (235); deducendo dalle prime i valori di ε_2, δ_2, τ_2, e dalle seconde i valori di ε_3, δ_3, τ_3; sostituendoli nella terza delle (182), e dividendo per hk, avremo

$$(1)^2 + (2)^2 + (3)^2 = 0.$$

Equazione che per un ragionamento usato anche sulla (213), si scompone nelle tre

$$(1) = 0; \quad (2) = 0; \quad (3) = 0$$

le quali per le (234) riduconsi alle due

(236) $$\frac{\varepsilon_1}{f'(x)} = \frac{\delta_1}{f'(y)} = \frac{\tau_1}{f'(z)}$$

ossia alle tre

(237) $$\varepsilon_1 = \omega f'(x); \quad \delta_1 = \omega f'(y); \quad \tau_1 = \omega f'(z),$$

essendo ω una quantità che rimane a determinarsi.

Per le (237) la prima delle (181) ci somministra

$$(238)\qquad \sqrt{t_1} = \omega\sqrt{f'(x)^2+f'(y)^2+f'(z)^2}.$$

I trovati valori (237), (238) sostituiti nelle espressioni (230) ci danno

$$(239)\qquad \frac{f'(x)}{\sqrt{f'(x)^2+f'(y)^2+f'(z)^2}};\ \frac{f'(y)}{\sqrt{f'(x)^2+f'(y)^2+f'(z)^2}};\ \frac{f'(z)}{\sqrt{f'(x)^2+f'(y)^2+f'(z)^2}}$$

per le espressioni dei tre coseni degli angoli che la direzione della pressione π_1 fa coi tre assi ortogonali; e (rammentando formole notissime di geometria analitica) viene così provato che una tal direzione è quella della perpendicolare alla superficie di equazione $f(x, y, z) = 0$ nel punto (x, y, z). Questo bel teorema, affatto conforme ai dati delle sperienze, non era (secondo le mie cognizioni) stato dimostrato se non per la sola idrostatica e pel solo caso in cui la pressione π_1 fosse costante da un punto all' altro della superficie (*); ora la dimostrazione si estende anche all' idraulica, ed alla pressione variabile di punto in punto. Dirò di più: immaginando una superficie qualunque nell' interno del fluido, e giusta quanto si è accennato sul fine del n.° 62, l'azione del fluido ambiente ridotta ad una pressione contro quella superficie, il teorema sta egualmente. Così si desume dall' intima natura de' fluidi quel principio, che un' illustre Geometra vivente pose a fondamento d' ogni altra ricerca intorno ai fluidi. (**)

(*) Poisson. Traité de Mécanique 1833. T. 2. pag. 524. n.° 584.
(**) Cauchy. Exercices de Mathématiques. T. 2. pag. 23.