NOTA
SUGL'INTEGRALI DEFINITI

DEL

COMMENDATORE PIETRO PAOLI

Ricevuta adì 11. *Dicembre* 1831.

Nella mia Memoria sugl' integrali definiti pubblicata nel primo Fascicolo Matematico del Tomo precedente dopo di aver presentato alcune difficoltà intorno alle dimostrazioni, che sono state date dell' equazioni

$$\int_0^\infty dx\text{sen}.rx = \frac{1}{r},\ \int_0^\infty dx\cos.rx = 0,\ \int_0^\infty \frac{dx\text{sen}.rx}{x} = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{dx\cos.rx}{1+x^2} = e^{-r}.\ \frac{\pi}{2},\ \text{ec.}$$

(ove π è il rapporto costante della circonferenza al diametro del circolo, e il numero che ha per logaritmo iperbolico l'unità, ed il segno $\int_m^n$ serve a denotare che l'integrazione deve farsi da $x=m$ fino ad $x=n$) espressi il mio desiderio, che qualche valente Geometra dileguando i miei dubbj stabilisse sopra più saldi fondamenti l'importante teoria degl' integrali definiti, i quali involvono le funzioni periodiche circolari. Prestandosi alle mie brame il Sig. Cav. Frullani inserì due Memorie nel secondo Fascicolo Matematico del medesimo Tomo, ove per verità non ha mostrato l'insussistenza delle miei objezioni, giudicandole forse immeritevoli di qualunqne considerazione, ma ha tentato di confermare con nuove dimostrazioni, che ha creduto per avventura non essere soggette alle medesime difficoltà, i teoremi di sopra accennati. Stimo opportuno in aggiunta alla mia Memoria alcune brevi riflessioni, che a parer mio portano qualche poco di luce nell'astrusa dottrina degl' integrali definiti di questa specie, e pongono in evidenza la necessità di certe cautele, che non possiamo trascurare senza correre il rischio di cadere in errori. E nel far ciò, per evitare il tedio di trascrivere tutti i ragionamenti del Sig. Frullani, supporrò che si abbiano avanti gli occhi le di lui Memorie.

Egli cerca in primo luogo il valore dell' integrale $\int_0^\infty \frac{d\phi \operatorname{sen}.\phi}{\phi}$, ed imitando l'analisi, con cui il celebre Signor Poisson ha inteso di verificare l' equazione

$$\int_0^\infty \frac{dx\cos.ax}{1+x^2} = e^{-a} \cdot \frac{\pi}{2},$$

divide l' intervallo tra i limiti o ed ∞ in infinite parti da o a π, da π a 2π, da 2π a 3π, ec. poi prendendo la somma degl' integrali corrispondenti a tutte queste parti trova

$$\int_0^\infty \frac{d\phi \operatorname{sen}.\phi}{\phi} = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi du \operatorname{sen}.u.\cot.ang.\,\frac{u}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Niuna difficoltà invero presenta questa ricerca quanto all'andamento del calcolo, ma siccome in essa si pone in sostanza l' infinito sotto la forma $i\pi$, ove i è un numero intero, può dubitarsi che questa forma particolare influisca sul valore dell' integrale, e ne limiti la generalità.

A schiarir questo dubbio osservo, che l'integrale $\int dx\cos.x$ è nullo tra i limiti o e $2i\pi$, comunque il numero intero i sia piccolo o grande, e di qui potrebbe taluno inferire, che sia in generale $\int_0^\infty dx\cos.x = 0$. Ma siccome il medesimo integrale tra i limiti o e $2i\pi+a$, ove a è un numero qualunque finito, si trova $= \operatorname{sen}.a$, con pari ragione se ne potrebbe concludere

$\int_0^\infty dx\cos.x = \text{sen}.a$. In questo caso adunque la diversa forma particolare attribuita all' infinito ha reso differente il valore dell' integrale. E quì giova avvertire che si giungerebbe egualmente al primo resultamento $\int_0^\infty dx\cos.x = 0$, se nel modo praticato dal Sig. Frullani l' intervallo tra i limiti o ed ∞ si dividesse in infinite parti da o a 2π, da 2π a 4π, da 4π a 6π, ec. riescendo nulli tutti questi parziali integrali, ed in conseguenza anche l' integrale totale, e si otterrebbe il secondo resultamento $\int_0^\infty dx\cos.x = \text{sen}.a$, se il medesimo intervallo si dividesse diversamente in parti, cioè da o ad a, da a a $2\pi + a$, da $2\pi + a$ a $4\pi + a$, ec., perchè i parziali integrali saranno tutti nulli, eccettuato il primo che è $= \text{sen}.a$.

Questa osservazione dà luogo a temere, che lo stesso possa accadere relativamente all' integrale $\int_0^\infty \frac{d\phi\,\text{sen}.\phi}{\phi}$, e quindi nasce il desiderio di una dimostrazione, per la quale si riconosca, che qualunque distribuzione in parti dell' intervallo tra i limiti o ed ∞, differente da quella usata dal Sig. Frullani, non può somministrare un diverso valore dello stesso integrale, come si cangia quello dell' integrale $\int_0^\infty d\phi\cos.\phi$.

La dimostrazione, che segue, dell' equazione

$$\int_0^\infty \frac{d\phi\,\text{sen}.r\phi}{\phi} = \int_0^\infty \frac{d\phi\,\text{sen}.\phi}{\phi},$$

oltre alla difficoltà accennata quì sopra, ne presenta un' altra più grave, in quanto che nel secondo limite ad un infinito indipendente da r si sostituisce un altro infinito, che ne dipende. Del resto senza tanto apparato di calcolo si riconosce con la massima facilità, che l' integrale

$$\int_0^{\frac{c}{r}} \frac{d\phi\,\text{sen}.r\phi}{\phi} = y,$$

ha lo stesso valore dell' integrale $\int_0^c \frac{d\phi \operatorname{sen}.\phi}{\phi}$, comunque il numero c sia finito o infinito, purchè indipendente da r. Poichè differenziando relativamente ad r, ed avendo riguardo alla variazione di r nel secondo limite troviamo

$$\frac{dy}{dr} = \int_0^{\frac{c}{r}} d\phi \cos.r\phi - \frac{\operatorname{sen}.c}{r} = \frac{\operatorname{sen}.c}{r} - \frac{\operatorname{sen}.c}{r} = 0.$$

È dunque $\int_0^{\frac{c}{r}} \frac{d\phi \operatorname{sen}.\phi}{\phi}$ eguale ad una costante indipendente da r, e per conseguenza eguale a $\int_0^c \frac{d\phi \operatorname{sen}.\phi}{\phi}$. Resta a vedere se l'integrale $\int_0^{\frac{c}{r}} \frac{d\phi \operatorname{sen}.r\phi}{\phi}$, che è certamente diverso da $\int_0^c \frac{d\phi \operatorname{sen}.r\phi}{\phi}$ per ogni valore finito di c, gli divenga eguale nel caso di c infinita. E questo è ciò, che bisogna dimostrare per poterne concludere, che sia $\int_0^\infty \frac{d\phi \operatorname{sen}.r\phi}{\phi} = \int_0^\infty \frac{d\phi \operatorname{sen}.\phi}{\phi}$. Nè deve recar maraviglia, che si richieda da me una tale dimostrazione, qualora si rifletta che la mutazione del limite ∞ in $\frac{\infty}{r}$ non è in altri casi permessa, e ne porge un esempio semplicissimo l'integrale $\int_0^\infty \frac{d\phi}{\phi}$, il di cui valore è diverso da quello di $\int_0^{\frac{\infty}{r}} \frac{d\phi}{\phi}$, perchè

$$\int_0^\infty \frac{d\phi}{\phi} - \int_0^{\frac{\infty}{r}} \frac{d\phi}{\phi} = \int_{\frac{\infty}{r}}^\infty \frac{d\phi}{\phi}$$

non è $= 0$, ma $= \log.r$.

Nello stesso modo l'integrale definito $z=\int_{0}^{\frac{c}{r}}\frac{d\phi\cos.r\phi}{\phi}$ differenziato relativamente ad r ci darà

$$\frac{dz}{dr}=\int_{0}^{\frac{c}{r}}d\phi\,\text{sen}.r\phi-\frac{\cos.c}{r}=\frac{\cos.c-1}{r}-\frac{\cos.c}{r}=-\frac{1}{r},$$

e quindi integrando avremo

$$\int_{0}^{\frac{c}{r}}\frac{d\phi\cos.r\phi}{\phi}=C-\log.r,$$

ove la costante C è indipendente da r. Pertanto sarà

$$\int_{0}^{\frac{c}{r}}.\,\frac{d\phi\cos.r\phi}{\phi}-\int_{0}^{\frac{c}{r'}}.\,\frac{d\phi\cos.r'\phi}{\phi}=\log.\frac{r'}{r}.$$

Bisognerebbe adesso provare che

$$\int_{0}^{\frac{\infty}{r}}\frac{d\phi\cos.r\phi}{\phi}\ \text{è}=\int_{0}^{\infty}.\,\frac{d\phi\cos.r\phi}{\phi}$$

per dedurne l'equazione del Sig. Frullani

$$\int_{0}^{\infty}\frac{d\phi(\cos.r\phi-\cos.r'\phi)}{\phi}=\log.\frac{r'}{r}.$$

La dimostrazione, che egli ne dà, sebbene incompleta, somministra l'opportunità di una considerazione importante. Se avesse ne' suoi calcoli scritto $\frac{\omega}{r}$ in luogo di ω, avrebbe trovato che l'integrale $\int_{\frac{\omega}{r}}^{\infty}.\,\frac{d\phi\cos.r\phi}{\phi}$ (o più giustamente

$\int_{\frac{o}{r}}^{\frac{\infty}{r}} \frac{d\varphi\cos.r\varphi}{\varphi}$) è indipendente da r. E se passando ad un caso particolare avesse nella frazione $\frac{o}{r}$ posto $\omega=o$, e non avesse tenuto conto del denominatore r, ne avrebbe tirata l'erronea conseguenza, che sia

$$\int_{o}^{\infty} \frac{d\varphi\cos.r\varphi}{\varphi} \left(\text{o piuttosto} \int_{o}^{\frac{\infty}{r}} \frac{d\varphi\cos.r\varphi}{\varphi}\right)$$

eguale a $\int_{o}^{\infty} \frac{d\varphi\cos.\varphi}{\varphi}$. Di quì apparisce, che non può farsi in generale alcuna mutazione nella forma dei limiti degl'integrali definiti, perchè il solo cangiamento di $\frac{o}{r}$ in o, il quale a primo aspetto sembra permesso, conduce ad un resultamento falso. Insieme si riconosce quanto sia pericolosa questa arbitraria distribuzione in parti, con la quale si attribuisce all'infinito una forma particolare.

Tralascio per brevità di ripetere le medesime osservazioni intorno alle altre simili ricerche del Sig. Frullani, e solo mi trattengo un poco nell'esame dei ragionamenti derivati da altri principj, che si adducono da lui in conferma dell'equazioni

$$\int_{o}^{\infty} d\varphi\cos.r\varphi = o, \quad \int_{o}^{\infty} d\varphi\,\text{sen}.r\varphi = \frac{1}{r},$$

$$\int_{o}^{\infty} \frac{d\varphi\cos.r\varphi}{1+\varphi^2} = e^{-r}.\frac{\pi}{2}.$$

È evidente che l'integrale indefinito $\int d\varphi\cos.r\varphi$ determinato in modo, che svanisca insieme con φ può mettersi sotto la forma $\int_{o}^{\varphi} dx\cos.rx$ d'integrale definito, e viceversa l'integrale in apparenza definito $\int_{o}^{\varphi} dx\cos.rx$ è equivalente all' integrale indefinito $\int d\phi \cos .r\phi$. E siccome

$$\int_0^\phi dx\cos.rx \text{ è } = \int_0^c dx\cos.rx - \int_\phi^c dx\cos.rx,$$

essendo c finita o infinita, così avrà luogo l' equazione

$$(a) \qquad \int d\phi\cos.r\phi = \int_0^c dx\cos.rx - \int_\phi^c dx\cos.rx.$$

Ma dalla relazione osservata tra gl' integrali definiti ed i corrispondenti indefiniti si comprende, che questa equazione (a) in qualunque modo trasformata non potrà mai darci il valore di $\int_0^c dx\cos.rx$ sotto una forma diversa da quella, che si ottiene per mezzo della integrazione indefinita, cioè $\frac{\text{sen}.cr}{r}$. Se per esempio nell'integrale $\int_\phi^c dx\cos.rx$ ponghiamo col Signor Frullani $x = y + \phi$, ai limiti ϕ e c della x corrisponderanno i limiti 0 e $c - \phi$ della y, ed avremo

$$\int_\phi^c dx\cos.rx = \int_0^{c-\phi} dy\cos.r(y+\phi)$$

$$= \cos.r\phi \int_0^{c-\phi} dy\cos.ry - \text{sen}.r\phi \int_0^{c-\phi} dy\text{sen}.ry,$$

ponendo il qual valore nell' equazione (a) otterremo

$$\int_0^c dx\cos.rx =$$

$$\int d\phi\cos.r\phi - \cos.r\phi \int_0^{c-\phi} dy\cos.ry + \text{sen}.r\phi \int_0^{c-\phi} dy\text{sen}.ry,$$

o sia sostituendo agl' integrali definiti

$$\int_0^{c-\phi} dy\cos.ry, \quad \int_0^{c-\phi} dy\text{sen}.ry$$

gli equivalenti integrali indefiniti

$$-\int d\phi \cos.r(c-\phi),\ -\int d\phi \operatorname{sen}.r(c-\phi)$$

$$\int_0^c dx \cos.rx = \int d\phi \cos.r\phi + \cos.r\phi \int d\phi \cos.r(c-\phi)$$
$$-\operatorname{sen}.r\phi \int d\phi \operatorname{sen}.r(c-\phi),$$

ed eseguite le integrazioni

$$\int_0^c dx \cos.rx = \frac{\operatorname{sen}.r(c-\phi)\times\cos.r\phi}{r} + \frac{\cos.r(c-\phi)\times\operatorname{sen}.r\phi}{r} = \frac{\operatorname{sen}.rc}{r}.$$

E nella stessa maniera prendendo a considerare l'integrale $\int d\phi \operatorname{sen}.r\phi$ in luogo di $\int d\phi \cos.r\phi$, avremo $\int_0^c dx \operatorname{sen}.rx = \frac{1-\cos.rc}{r}$. Or come mai il Sig. Frullani partendo dalla medesima equazione (a) ha trovato nel caso di c infinita $\int_0^c d\phi \cos.r\phi = 0$, e $\int_0^c d\phi \operatorname{sen}.r\phi = \frac{1}{r}$? Ciò gli è avvenuto, perchè cangiando il limite $c-\phi$ in c ha supposto $\int_0^c dy \cos.ry = \int_0^{c-\phi} dy \cos.ry$, ed $\int_0^c dy \operatorname{sen}.ry = \int_0^{c-\phi} dy \operatorname{sen}.ry$, vale a dire $\operatorname{sen}.r(c-\phi) = \operatorname{sen}.rc$, e $\cos.r(c-\phi) = \cos.rc$. Ma sebbene essendo c infinita e ϕ finita la quantità $r(c-\phi)$ possa riguardarsi come eguale ad rc, non è però $\operatorname{sen}.r(c-\phi) = \operatorname{sen}.rc$, nè $\cos.r(c-\phi) = \cos.rc$. Di che si accorgerà facilmente il Sig. Frullani, se porrà qui come altrove, l'infinito c sotto la forma $i\pi$, essendo i numero intero.

La frazione $\frac{x+a}{x} = 1 + \frac{a}{x}$, ove a è una quantità costante ed x una quantità variabile positiva, al crescere della x va accostandosi sempre più all'unità senza mai divenirne minore se a è positiva, nè maggiore se a è negativa, e quindi è $=1$ il limite di quella frazione. Ma non può dirsi egualmente che l' unità sia il limite della frazione $\frac{\text{sen.}(x+a)}{\text{sen.}x}$, la quale aumentandosi continuamente la x ora cresce, ora diminuisce, ora di positiva diventa negativa e viceversa, talvolta è nulla, talvolta infinita.

Relativamente all' integrale $\int_0^\infty \frac{d\varphi \cos.\varphi}{a^2+\varphi^2}$ il Sig. Frullani ritrova, che la quantità

$$P=\left(\frac{e^a+e^{-a}}{2a}\cdot\frac{\pi}{2}-\int_0^\infty\frac{d\varphi\cos.\varphi}{a^2+\varphi^2}\right):\frac{e^a-e^{-a}}{2a}$$

è rappresentata dalla serie

$$r-\frac{r^3}{2.3^2}+\frac{r^5}{2.3.4.5^2}-\frac{r^7}{2.3.4.5.6.7^2}+\text{ec.}$$

ove $r=\infty$. E siccome la medesima serie rappresenta ancora il valore dell' integrale $\int_0^\infty\frac{dr\text{sen.}r}{r}$, che è $=\frac{\pi}{2}$ dietro le sue antecedenti dimostrazioni, ne deduce

$$\int_0^\infty\frac{d\varphi\cos.\varphi}{a^2+\varphi^2}=e^{-a}\,\frac{\pi}{2a}.$$

Ma qui non può vedersi senza molta sorpresa, che il Signor Frullani, il quale altrove ha saggiamente inculcato la necessità di evitare le serie divergenti nel maneggio degl'integrali definiti, faccia uso nel caso attuale di una serie infinitamente divergente.

Le serie divergenti non esprimono il valore che rappresentano, se non in quanto si tenga conto del loro complemento o residuo, il quale nelle serie convergenti ha sempre il limite zero. Ora chi ci assicura, che il complemento sia il medesimo, quando la serie

$$r-\frac{r^3}{2.3^2}+\frac{r^5}{2.3.4.5^2}-\text{ec.}$$

rappresenta il valore di P, e quando rappresenta quello dell' integrale $\int_0^\infty \frac{dr.\mathrm{sen}.r}{r}$?

Dalle riflessioni precedenti parmi potersi concludere che le ricerche del Sig. Frullani, del tutto insufficienti a diradare i dubbj promossi da me nella mia Memoria lasciano la questione nel medesimo stato, in cui era, prima che egli ne intraprendesse l' esame.