MEMORIE
DI
MATEMATICA

INTRONO ALLE PROPRIETÀ GEOMETRICHE DEI MOVIMENTI DI UN SISTEMA DI PUNTI DI FORMA INVARIABILE.

MEMORIA

DEL PROFESSORE CAVALIERE GAETANO GIORGINI

Ricevuta adì 15. *Marzo* 1830.

PRESENTATA DAL SOCIO

SIGNOR CAVALIERE GIULIANO FRULLANI

ED APPROVATA DAL SOCIO

SIGNOR PROF. GIUSEPPE TRAMONTINI (1)

1. Alle ricerche meccaniche altre, per lo più, se ne mescolano nei trattati puramente geometriche ed analitiche: ne deriva, se non confusione, almeno una qualche apparente indeterminazione nei limiti della Scienza, ed una complicazione nociva alla distinta intelligenza delle leggi che regolano l'azione delle forze. Sarebbe prezzo dell' opera di togliere affatto dai trattati un tale inconveniente, ponendo nella Geometria tutte quelle teorie che non dipendono dalla considerazione delle forze, sebbene indispensabili per la Meccanica. Acquisterebbe questa ultima scienza in tal modo un grado singola-

(1) NB. Quando il Socio Sig. Cav. Giorgini presentò questa Memoria, non apparteneva alla Società Italiana, e perciò questo suo lavoro dovette essere approvato a norma dell' Articolo X. dello Statuto Sociale.

re di semplicità e di evidenza, di cui il Carnot ha dato un esempio nel suo libro dei *Principii fondamentali dell' equilibrio e del movimento* (2), ove l' esposizione delle leggi fondamentali della Meccanica non è confusa ed in parte oscurata da una moltitudine di ricerche geometriche, nelle quali la lettura di altri trattati potrebbe indurre a credere che stasse una gran parte di quella scienza.

2. Noi pure abbiamo voluto servire a questa opportunità colla *Teoria analitica delle projezioni* (3), mostrando quanto sia espediente ed importante premettere nella Geometria la dimostrazione delle proprietà delle projezioni delle linee e delle superficie. Ma se la teoria delle projezioni è più particolarmenre utile alla scienza dell' equilibrio, a quella della comunicazione dei movimenti gioverebbe assai un altro molto più esteso e più difficile ramo di preliminari ricerche geometriche. Intendo parlare di quelle, che avrebbero per oggetto le proprietà puramente geometriche dei movimenti, o secondo il linguaggio del citato Carnot *la teoria dei movimenti geometrici;* teoria affatto estranea alle leggi di Meccanica, e dalla imperfezione della quale dipendono al dire di lui, tutte le difficoltà che s' incontrano nelle applicazioni di tali leggi (4).

In questa memoria noi non ci proponiamo già di dare una tale teoria: il nostro scopo è assai più limitato, sebbene essa ne possa formare come il primo gradino, consistente nell'esame del movimento di un corpo, o di un sistema di punti che tutti si muovano conservando tra loro le medesime distanze.

---

(2) Paris, chez Bachelier. An. XI. 1803.

(3) Lucca. Atti della Reale Accademia Lucchese per l' anno 1819.

(4) Les grandes difficultés analytiques, qu' on rencontre dans la Science de l' équilibre et du mouvement viennent principalement, de ce que la théorie des mouvements géométriques n' est point faite. *Géometrie de Position* pag. 336.

§. 1.°

Delle proprietà geometriche del movimento infinitamente piccolo di un sistema di forma invariabile.

3. Prenderemo, come si suol praticare, tre assi fissi, ai quali riferiremo le coordinate rettangolari x, y, z di tutti i punti dello spazio. Quindi supporremo stabilmente legati al sistema de' punti di forma invariabile tre altri assi coordinati rettangolari x_1, y_1, z_1; mobili insieme col sistema, rispetto ai quali le coordinate dei punti del sistema medesimo rimarranno costanti. Per tal modo il movimento dei tre assi delle coordinate x_1, y_1, z_1 dipenderà da quello del sistema di forma invariabile, e reciprocamente questo da quello.

Sieno pertanto

$$x = \alpha \ldots\ldots y = \beta \ldots\ldots z = \gamma$$

le coordinate che determinano la posizione iniziale del punto per cui sono condotti gli assi x_1, y_1, z_1;

$$\begin{matrix} a, & a', & a''; \\ b, & b', & b''; \\ c, & c', & c''; \end{matrix}$$

i coseni degli angoli che questi assi formano respettivamente cogli assi fissi x, y, z. Avremo, come ognun sa, le condizioni

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1 \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1 \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1 \end{cases}$$

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} ab + a'b' + a''b'' = 0 \\ bc + b'c' + b''c'' = 0 \\ ca + c'a' + c''a'' = 0 \end{cases}$$

e le coordinate x, y, z di un qualsivoglia punto per le corrispondenti coordinate x_1, y_1, z_1, mediante le formole

$$(3) \quad \ldots\ldots \begin{cases} x = ax_1 + by_1 + cz_1 + \alpha \\ y = a'x_1 + b'y_1 + c'z_1 + \beta \\ z = a''x_1 + b''y_1 + c''z_1 + \gamma. \end{cases}$$

4. Prenda adesso il sistema un movimento infinitamente piccolo: le coordinate x_1, y_1, z_1 rimarranno come si è detto invariabili, mentre varieranno le altre quantità

$$\begin{array}{lll} x, & y, & z; \\ a, & a', & a''; \\ b, & b', & b''; \\ c, & c', & c''; \\ \alpha, & \beta, & \gamma. \end{array}$$

Se perciò denotiamo colla caratteristica δ le variazioni provate da una qualsivoglia quantità in questo movimento; il movimento di un qualunque punto del sistema di forma invariabile sarà dato dalle variazioni delle formole (3), che sono

$$(4) \quad \ldots \begin{cases} \delta x = x_1 \delta a + y_1 \delta b + z_1 \delta c + \delta \alpha, \\ \delta y = x_1 \delta a' + y_1 \delta b' + z_1 \delta c' + \delta \beta, \\ \delta z = x_1 \delta a'' + y_1 \delta b'' + z_1 \delta c'' + \delta \gamma. \end{cases}$$

5. Ma prima di esporre le conseguenze che discendono da queste equazioni intorno alle proprietà geometriche del supposto movimento, sarà opportuno dedurre dalle condizioni

(1), (2) alcune utili trasformate, ed alcune altre condizioni che esse inducono tralle variazioni delle quantità angolari che le compongono.

Dalla quarta e sesta pertanto delle indicate condizioni, ricaviamo

$$a' = a\left(\frac{bc''-b''c}{b''c'-b'c''}\right) \ldots\ldots a'' = a\left(\frac{b'c-bc'}{b''c'-b'c''}\right),$$

e sostituendo nella prima

$$a = \frac{b''c'-b'c''}{\sqrt{((b''c'-b'c'')^2+(bc''-b''c)^2+(b'c-bc')^2)}}.$$

Ma

$$(b''c'-b'c'')^2+(bc''-b''c)^2+(b'c-bc')^2 =$$

$$b^2(c'^2+c''^2)+b'^2(c^2+c''^2)+b''^2(c^2+c'^2)-2bcb'c'-2b'c'b''c''-2b''c''bc\,;$$

e siccome

$$c'^2+c''^2 = 1-c^2\,,$$

$$c^2+c''^2 = 1-c'^2\,,$$

$$c^2+c'^2 = 1-c''^2\,;$$

verrà

$$(b''c'-b'c'')^2+(bc''-b''c)^2+(b'c-bc')^2$$

$$= b^2+b'^2+b''^2-(bc+b'c'+b''c'')^2 = 1\,;$$

e quindi,

$$a = b''c'-b'c''. \ldots a' = bc''-b''c. \ldots a'' = b'c-bc';$$

onde concluderemo che ogniqualvolta tralle quantità a, a', a''; b, b', b''; c, c', c''; si verificano le condizioni (1) e (2), si hanno anche le seguenti

$$(5) \quad \ldots \quad \begin{cases} a=b''c'-b'c''\ldots a'=bc''-b''c\ldots a''=b'c-bc', \\ b=c''a'-c'a''\ldots b'=ca''-c''a\ldots b''=c'a-ca', \\ c=a''b'-a'b''\ldots c'=ab''-a''b\ldots c''=a'b-ab'; \end{cases}$$

formole che sono dovute al Lagrange.

Da queste ultime risulta inoltre che

$$a^2 + b^2 + c^2 =$$
$$a^2 + b(c''a' - c'a'') + c(a''b' - a'b'') =$$
$$a^2 + a'(bc'' - b''c) + a''(b'c - bc') =$$
$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1;$$

e che

$$aa' + bb' + cc' =$$
$$a'(b''c' - b'c'') + b'(c''a' - c'a'') + c'(a''b' - a'b'') = 0;$$

ed in conseguenza che le condizioni (1) e (2) involgono anche le altre analoghe

$$(6) \quad \ldots\ldots \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1; \end{cases}$$

$$(7) \quad \ldots\ldots \begin{cases} aa' + bb' + cc' = 0, \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0, \\ a''a + b''b + c''c = 0; \end{cases}$$

formole note, ma che ci è sembrato utile di dedurre algebricamente, non meno che le equazioni (5) poichè in questo modo acquistano maggiore generalità, e sono applicabili alla supposizione, che le quantità a, b, c ec. invece di essere coseni sieno quantità qualsivogliano anche immaginarie.

6. Passando adesso alle variazioni delle condizioni (1) e (2), e delle altre che ne dipendono (6), e (7), nasceranno le seguenti formole

$$(8) \quad \ldots\ldots \begin{cases} a\delta a + a'\delta a' + a''\delta a'' = 0, \\ b\delta b + b'\delta b' + b''\delta b'' = 0, \\ c\delta c + c'\delta c' + c''\delta c'' = 0; \end{cases}$$

$$(9)\quad \ldots \begin{cases} a\partial b+a'\partial b'+a''\partial b''+b\partial a+b'\partial a'+b''\partial a''=0\,, \\ b\partial c+b'\partial c'+b''\partial c''+c\partial b+c'\partial b'+c''\partial b''=0\,, \\ c\partial a+c'\partial a'+c''\partial a''+a\partial c+a'\partial c'+a''\partial c''=0\,; \end{cases}$$

ed

$$(10)\quad \ldots \begin{cases} a\,\partial a+b\,\partial b+c\,\partial c=0\,, \\ a'\,\partial a'+b'\,\partial b'+c'\,\partial c'=0\,, \\ a''\partial a''+b''\partial b''+c''\partial c''=0\,; \end{cases}$$

$$(11)\quad \ldots \begin{cases} a\,\partial a'+b\,\partial b'+c\,\partial c'+a'\partial a+b'\,\partial b+c'\,\partial c=0, \\ a'\,\partial a''+b'\,\partial b''+c'\,\partial c''+a''\partial a'+b''\partial b'+c''\partial c'=0, \\ a''\partial a+b''\partial b+c''\partial c+a\,\partial a''+b\,\partial b''+c\partial c''=0. \end{cases}$$

Quindi per maggiore facilità de' calcoli, che dovremo istituire, porremo

$$(12)\quad \ldots \begin{cases} \partial p=a''\partial a'+b''\partial b'+c''\partial c'=-a'\partial a''-b'\partial b''-c'\partial c'', \\ \partial q=a\partial a''+b\partial b''+c\partial c''=-a''\partial a-b''\partial b-c''\partial c, \\ \partial r=a'\partial a+b'\partial b+c'\partial c=-a\partial a'-b\partial b'-c\partial c'; \end{cases}$$

e

$$(13)\quad \ldots \begin{cases} \partial p'=c\partial b+c'\partial b'+c''\partial b''=-b\partial c-b'\partial c'-b''\partial c'', \\ \partial q'=a\partial c+a'\partial c'+a''\partial c''=-c\partial a-c'\partial a'-c''\partial a'', \\ \partial r'=b\partial a+b'\partial a'+b''\partial a''=-a\partial b-a'\partial b'-a''\partial b''; \end{cases}$$

ove ∂p, ∂q, ∂r; $\partial p'$, $\partial q'$, $\partial r'$, rappresentano quantità, delle quali mostreremo in seguito il significato geometrico.

La stabilita notazione ci dà

$$a'\partial r-a''\partial q=a'(a'\partial a+b\,\partial b+c'\partial c)+a''(a''\partial a+b''\partial b+c''\partial c)=$$
$$\partial a(a'^2+a''^2)+\partial b(a'b'+a''b'')+\partial c(a'c'+a''c'');$$

e siccome

$$a'^2 + a''^2 = 1 - a^2,$$
$$a'b' + a''b'' = -ab,$$
$$a'c' + a''c'' = -ac;$$

verrà

$$a'\delta r - a''\delta q = \delta a - a(a\delta a + b\delta b + c\delta c) = \delta a,$$

poichè $a\delta a + b\delta b + c\delta c = 0$. Dunque per mezzo di calcoli affatto analoghi saranno tutte le formole seguenti

$$(14) \ldots \begin{cases} \delta a = a'\delta r - a''\delta q \ldots \delta a' = a''\delta p - a\delta r \ldots \delta a'' = a\delta q - a'\delta p, \\ \delta b = b'\delta r - b''\delta q \ldots \delta b' = b''\delta p - b\delta r \ldots \delta b'' = b\delta q - b'\delta p, \\ \delta c = c'\delta r - c''\delta q \ldots \delta c' = c''\delta p - c\delta r \ldots \delta c'' = c\delta q - c'\delta p. \end{cases}$$

Da queste, moltiplicate per δp, δq, δr e sommate, risulteranno

$$(15) \ldots \begin{cases} \delta a\delta p + \delta a'\delta q + \delta a''\delta r = 0, \\ \delta b\delta p + \delta b'\delta q + \delta b''\delta r = 0, \\ \delta c\delta p + \delta c'\delta q + \delta c''\delta r = 0. \end{cases}$$

Inalzate invece al quadrato, e sommate daranno

$$(16) \ldots \begin{cases} \delta a^2 + \delta b^2 + \delta c^2 = \delta q^2 + \delta r^2, \\ \delta a'^2 + \delta b'^2 + \delta c'^2 = \delta r^2 + \delta p^2, \\ \delta a''^2 + \delta b''^2 + \delta c''^2 = \delta q^2 + \delta p^2; \end{cases}$$

e quindi sommando di nuovo

$$(17) \ldots\ldots \delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2 =$$
$$\tfrac{1}{2}(\delta a^2 + \delta b^2 + \delta c^2 + \delta a'^2 + \delta b'^2 + \delta c'^2 + \delta a''^2 + \delta b''^2 + \delta c''^2).$$

7. Colla medesima facilità otterremo le analoghe relazioni tra $\delta p'$, $\delta q'$, $\delta r'$,

$$(18)\quad \begin{cases} \partial a = b\partial r' - c\partial q' \ldots\ldots \partial b = c\partial p' - a\partial r' \ldots\ldots \partial c = a\partial q' - b\partial p', \\ \partial a' = b'\partial r' - c'\partial q' \ldots \partial b' = c'\partial p' - a'\partial r' \ldots\ldots \partial c' = a'\partial q' - b'\partial p', \\ \partial a'' = b''\partial r' - c''\partial q' \ldots \partial b'' = c''\partial p' - a''\partial r' \ldots\ldots \partial c'' = a''\partial q' - b''\partial p'; \end{cases}$$

$$(19)\quad \ldots \begin{cases} \partial a\partial p' + \partial b\,\partial q' + \partial c\,\partial r' = 0, \\ \partial a'\partial p' + \partial b'\partial q' + \partial c'\partial r' = 0, \\ \partial a''\partial p' + \partial b''\partial q' + \partial c''\partial r' = 0, \end{cases}$$

$$(20)\quad \ldots \begin{cases} \partial a^2 + \partial a'^2 + \partial a''^2 = \partial q'^2 + \partial r'^2, \\ \partial b^2 + \partial b'^2 + \partial b''^2 = \partial r'^2 + \partial p'^2, \\ \partial c^2 + \partial c'^2 + \partial c''^2 = \partial p'^2 + \partial q'^2. \end{cases}$$

Siccome poi (12)

$$\partial p = a''\partial a' + b''\partial b' + c''\partial c',$$

che inoltre (18)

$$\partial a' = b'\partial r' - c'\partial q' \ldots \partial b' = c'\partial p' - a'\partial r' \ldots \partial c' = a'\partial q' - b'\partial p';$$

avremo

$$\partial p = (c'b'' - c''b')\partial p' + (c''a' - a''c')\partial q' + (a''b' - b''a')\partial r';$$

e poichè (5)

$$a = b''c' - b'c'' \ldots b = c''a' - c'a'' \ldots c = a''b' - a'b'';$$

sarà

$$\partial p = a\partial p' + b\partial q' + c\partial r':$$

onde, fatti i calcoli analoghi concluderemo che

$$(21)\quad \ldots \begin{cases} \partial p = a\partial p' + b\partial q' + c\partial r' \ldots \partial p' = a\partial p + a'\partial q + a''\partial r, \\ \partial q = a'\partial p' + b'\partial q' + c'\partial r' \ldots \partial q' = b\partial p + b'\partial q + b''\partial r, \\ \partial r = a''\partial p' + b''\partial q' + c''\partial r' \ldots \partial r' = c\partial p + c'\partial q + c''\partial r. \end{cases}$$

E quadrando e sommando questi risultati, verrà

$$(22) \quad . \quad . \quad . \quad \delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2 = \delta p'^2 + \delta q'^2 + \delta r'^2.$$

8. Ritorniamo adesso alle equazioni generali

$$\delta x = x_{\text{I}}\,\delta a + y_{\text{I}}\,\delta b + z_{\text{I}}\,\delta c + \delta a,$$

$$\delta y = x_{\text{I}}\,\delta a' + y_{\text{I}}\,\delta b' + z_{\text{I}}\,\delta c' + \delta\beta,$$

$$\delta z = x_{\text{I}}\,\delta a'' + y_{\text{I}}\,\delta b'' + z_{\text{I}}\,\delta c'' + \delta\gamma;$$

dell' Articolo 4.° le quali determinano il movimento di un qualsivoglia punto x, y, z del sistema di forma invariabile. E prima di tutto osserviamo che per determinare un punto del sistema, il quale percorra un dato spazietto δL parallelamente ad una data direzione, converrà supporre date le tre variazioni δx, δy, δz delle coordinate del punto cercato, le quali vaziazioni sono le projezioni dello spazietto percorso dal punto sopra i tre assi delle x, y, z. Supponendo adunque che le tre variazioni date sieno

$$\delta x = \delta \text{A} \ldots \delta y = \delta \text{B} \ldots . \delta z = \delta \text{C};$$

le sovrascritte equazioni diverranno

$$(23) \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \delta \text{A} = x_{\text{I}}\,\delta a + y_{\text{I}}\,\delta b + z_{\text{I}}\,\delta c + \delta a, \\ \delta \text{B} = x_{\text{I}}\,\delta a' + y_{\text{I}}\,\delta b' + z_{\text{I}}\,\delta c' + \delta\beta, \\ \delta \text{C} = x_{\text{I}}\,\delta a'' + y_{\text{I}}\,\delta b'' + z_{\text{I}}\,\delta c'' + \delta\gamma, \end{cases}$$

e serviranno a determinare i valori delle coordinate x_{I}, y_{I}, z_{I}, e conseguentemente la posizione del punto cercato nel sistema di forma invariabile.

9. Sembra a prima vista, tre essendo le incognite e tre

l'equazioni (23), che il problema sia determinato, e che un sol punto sodisfi alla espressa condizione, ma non è difficile assicurarsi che una delle tre equazioni (23) è la conseguenza delle altre due, e perciò che tutti i punti della retta rappresentata da questa equazione percorrono uno spazietto eguale a δL. Supponiamo di fatti che poste le due equazioni

$$\delta A = x_1 \delta a + y_1 \delta b + z_1 \delta c + \delta \alpha$$

$$\delta B = x_1 \delta a' + y_1 \delta b' + z_1 \delta c' + \delta \beta;$$

si voglia dedurne la terza. Osserveremo che la distanza dei punti del sistema essendo invariabile, la variazione della espressione

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2$$

dovrà essere nulla, e che in conseguenza sarà

$$(x - \alpha)(\delta A - \delta \alpha) + (y - \beta)(\delta B - \delta \beta) + (z - \gamma)(\delta C - \delta \gamma) = 0.$$

Quindi se in questa condizione, inerente alla natura del sistema, si pongono i valori di $\delta A - \delta \alpha$, $\delta B - \delta \beta$ dati dalle due equazioni premesse, ed i valori di $x - \alpha$, $y - \beta$, $z - \gamma$ presi nelle formole (3), liberando $\delta C - \delta \gamma$, troveremo

$$\delta C - \delta \gamma =$$

$$-\left(\frac{(ax_1 + by_1 + cz_1)(x_1 \delta a + y_1 \delta b + z_1 \delta c) + (a'x_1 + b'y_1 + c'z_1)(x_1 \delta a' + y_1 \delta b' + z_1 \delta c)}{a''x_1 + b''y_1 + c''z_1}\right)$$

ovvero effettuate le moltiplicazioni, e poste l' equazioni

$$a\delta a + a'\delta a' = - a''\delta a'',$$

$$b\delta b + b'\delta b' = - b''\delta b'',$$

$$c\delta c + c'\delta c' = - c''\delta c'';$$

$$a\delta b+a'\delta b'+b\delta a+b'\delta a'=-a''\delta b''-b''\delta a'',$$

$$b\delta c+b'\delta c'+c\delta b+c'\delta b'=-b''\delta c''-c''\delta b'',$$

$$c\delta a+c'\delta a'+a\delta c+a'\delta c'=-c''\delta a''-a''\delta c'';$$

dedotte dalle condizioni (8) e (9), verrà

$$\delta C-\delta\gamma=$$

$$\frac{x^2_1 a''\delta a''+y^2_1 b''\delta b''+z^2_1 c''\delta c''+x_1y_1(a''\delta b''+b''\delta a'')+y_1z_1(b''\delta c''+c''\delta b'')+z_1x_1(c''\delta a''+a''\delta c'')}{a''x_1+b''y_1+c''z_1}$$

$$=\frac{(a''x_1+b''y_1+c''z_1)(x_1\delta a''+y_1\delta b''+z_1\delta c'')}{a''x_1+b''y_1+c''z_1}$$

$$=x_1\delta a''+y_1\delta b''+z_1\delta c'':$$

e però

$$\delta C=x_1\delta a''+y_1\delta b''+z_1\delta c''+\delta\gamma,$$

che è la terza dell' equazioni (23).

Concludiamo adunque che tutti i punti del sistema situati sopra la retta rappresentata dall' equazioni (23), percorrono nel movimento spazii δL eguali e paralleli tra loro, di cui le projezioni sopra i tre assi x, y, z, sono le tre date quantità δA, δB, δC.

10. L' equazioni (23) moltiplicate respettivamente prima per a, a', a''; poi per b, b', b'', poi per c, c', c'', e sommate per ordine, in forza della notazione stabilita all' articolo 6. divengono

$$(24)\ \ldots\begin{cases} z_1\delta q'-y_1\delta r'=a(\delta A-\delta\alpha)+a'(\delta B-\delta\beta)+a''(\delta C-\delta\gamma), \\ x_1\delta r'-z_1\delta p'=b(\delta A-\delta\alpha)+b'(\delta B-\delta\beta)+b''(\delta C-\delta\gamma), \\ y_1\delta p'-x_1\delta q'=c(\delta A-\delta\alpha)+c'(\delta B-\delta\beta)+c''(\delta C-\delta\gamma); \end{cases}$$

e sotto questa forma rappresentano le tre projezioni della preindicata retta sopra i tre piani (x_1, y_1), (z_1, x_1), (y_1, z_1).

Ma l'equazioni di questa retta divengono anche più semplici, se si riferisce agli assi x, y, z. Per operare questa trasformazione, presi dall'equazioni (3), i valori

$$x_1 = a(x-\alpha) + a'(y-\beta) + a''(z-\gamma),$$

$$y_1 = b(x-\alpha) + b'(y-\beta) + b''(z-\gamma),$$

$$z_1 = c(x-\alpha) + c'(y-\beta) + c''(z-\gamma);$$

e sostituiti nell'equazioni (23), ricordandoci le formole (8) e (12) dell'articolo 6, troviamo

$$(25) \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} (y-\beta)\delta r - (z-\gamma)\delta q = \delta A - \delta\alpha \\ (z-\gamma)\delta p - (x-\alpha)\delta r = \delta B - \delta\beta, \\ (x-\alpha)\delta q - (y-\beta)\delta p = \delta C - \delta\gamma; \end{cases}$$

sotto questa forma le tre equazioni mostrano, più facilmente ancora, come esse sieno di fatti riducibili a sole due. Poichè moltiplicando la prima per $(x-\alpha)$, la seconda per $(y-\beta)$, la terza per $(z-\gamma)$, e sommando, si ricade sopra la condizione

$$(x-\alpha)(\delta A-\delta\alpha)+(y-\beta)(\delta B-\delta\beta)+(z-\gamma)(\delta C-\delta\gamma)=0;$$

la quale, come abbiamo veduto, esprime che il sistema è di forma invariabile.

11. Prima di maggiormente inoltrarci, osserviamo che la condizione della coesistenza delle tre equazioni (25), può essere posta sotto un' altra forma assai notabile. Infatti moltiplicando la prima per δp, la seconda per δq, la terza per δr, e sommando; troviamo

$$\delta p(\delta A-\delta\alpha)+\delta q(\delta B-\delta\beta)+\delta r(\delta C-\delta\gamma)=0,$$

ovvero

$$(26) \quad . \quad . \quad . \quad \delta A\delta p+\delta B\delta q+\delta C\delta r=\delta\alpha\delta p+\delta\beta\delta q+\delta\gamma\delta r.$$

12. Osserviamo inoltre che dati per δA, δB, δC diversi valori, la retta corrispondente (25) rimane sempre parallela in tutte le sue posizioni, onde segue, *che tutti i punti del sistema di forma invariabile posti sopra una qualsivoglia retta parallela alla retta* (25), *descrivono spazietti eguali e paralleli tra loro.*

13. Rappresentiamo attualmente per φ l' angolo, che la retta (25) forma colla direzione dello spazietto δL percorso da uno qualunque de' suoi punti: siccome d' altronde i coseni degli angoli, che questo spazietto δL forma coi tre assi x, y, z sono

$$\frac{\delta A}{\delta L} \cdot \cdot \cdot \frac{\delta B}{\delta L} \cdot \cdot \cdot \frac{\delta C}{\delta L};$$

ed i coseni degli angoli della retta (25) cogli assi medesimi sono

$$\frac{\delta p}{\sqrt{(\delta p^2+\delta q^2+\delta r^2)}} \cdot \cdot \cdot \frac{\delta q}{\sqrt{(\delta p^2+\delta q^2+\delta r^2)}} \cdot \cdot \cdot \frac{\delta r}{\sqrt{(\delta p^2+\delta q+\delta r^2)}};$$

per la nota espressione del coseno dell' angolo di due rette, sarà

$$\cos.\varphi = \frac{\delta A\delta p+\delta B\delta q+\delta C\delta r}{\delta L\sqrt{(\delta p^2+\delta q^2+\delta r^2)}};$$

da dove, ricordandoci la condizione (26), ricavasi

$$(27) \quad . \quad . \quad \delta L \cos.\varphi = \frac{\delta\alpha\delta p+\delta\beta\delta q+\delta\gamma\delta r}{\sqrt{(\delta p^2+\delta q^2+\delta r^2)}}.$$

Ma il prodotto $\delta L \cos.\varphi$ è evidentemente la projezione dello spazietto δL sopra la retta (25), o in altri termini la quantità, di cui il punto che ha percorso δL, si è avanzato nel senso della retta medesima; e siccome l' espressione (27) è indipendente dai valori di δA, δB, δC, ne potremo concludere che tutti i punti del sistema si avvicinano di una medesima quantità espressa per $\frac{\delta\alpha\delta p+\delta\beta\delta q+\delta\gamma\delta r}{\sqrt{(\delta p+\delta q^2+\delta r^2)}}$ ad un medesimo pia-

no perpendicolare alla retta (25), o ciò che è lo stesso *che nel movimento infinitamente piccolo di un sistema di forma invariabile, gli spazietti descritti dai punti del sistema valutati in una medesima determinata direzione sono eguali tra loro.*

14. Poichè l'equazione (27) ci da'

$$\delta L = \frac{1}{\cos.\phi}\left(\frac{\delta\alpha\delta p + \delta\beta\delta q + \delta\gamma\delta r}{\sqrt{(\delta p^2+\delta q^2+\delta r^2)}}\right)$$

possiamo concludere che il minimo valore di δL corrisponde al massimo di $\cos.\phi$, ossia corrisponde a $\cos.\phi = 1$, e $\phi = 0$, ed è espresso, chiamando δP questo minimo valore, per

$$(28) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \delta P = \frac{\delta\alpha\delta p + \delta\beta\delta q + \delta\gamma\delta r}{\sqrt{(\delta p^2+\delta q^2+\delta r^2)}}.$$

Perchè adunque i valori di δA, δB, δC sieno tali che l'angolo ϕ si annulli, la retta (25) diverrà il luogo geometrico dei punti, che percorrono il minimo spazietto δP. Ad esprimere questa condizione basterà scrivere, che gli angoli fatti dallo spazietto $\delta L = \delta P$ coi tre assi coordinati sono eguali agli angoli della retta (25) coi medesimi assi, cioè che

$$\frac{\delta A}{\delta P} = \frac{\delta p}{\sqrt{(\delta p^2+\delta q^2+\delta r^2)}} \cdot\cdot \frac{\delta B}{\delta P} = \frac{\delta q}{\sqrt{(\delta p^2+\delta q^2+\delta r^2)}} \cdot\cdot \frac{\delta C}{\delta P} = \frac{\delta r}{\sqrt{(\delta p^2+\delta q^2+\delta r^2)}}.$$

Quindi presi i valori di δA, δB, δC, e sostituiti nelle equazioni (25), avremo le seguenti

$$(29) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} (y-\beta)\delta r - (z-\gamma)\delta q + \delta\alpha = \dfrac{\delta p\,\delta P}{\sqrt{(\delta p^2+\delta q^2+\delta r^2)}} \\ (z-\gamma)\delta p - (x-\alpha)\delta r + \delta\beta = \dfrac{\delta q\,\delta P}{\sqrt{(\delta p^2+\delta q^2+\delta r^2)}} \\ (x-\alpha)\delta q - (y-\beta)\delta p + \delta\gamma = \dfrac{\delta r\,\delta P}{\sqrt{(\delta p^2+\delta q^2+\delta r^2)}} \end{cases}$$

per rappresentare la retta luogo geometrico dei punti che percorrono il minimo spazietto δP.

15. Ciò posto, non è difficile riconoscere che questa linea, i punti della quale si muovono seguendo la direzione della retta stessa, è come un asse attorno a cui un' altra qualsivoglia delle rette rappresentate dall'equazione (25) percorre un elemento di una superficie cilindrica circolare. Di fatti tutti i punti del sistema posti sopra le due rette (29), e (25) si avanzano, (valutando l' avanzamento in una medesima direzione) di una medesima quantità δP; e mentre i punti della retta (29) descrivono effettivamente lo spazietto δP, quelli della retta (25) rimangono da essi ad una distanza invariabile, poichè il sistema è di forma invariabile, e descrivono lo spazietto δL, che sarà evidentemente un archetto di elica tracciata sopra il cilindro preindicato. Da tutto ciò dedurremo il teorema fondamentale seguente. *In qualunque movimento infinitamente piccolo di un sistema di forma invariabile tutti i punti del sistema prendono contemporaneamente un comune movimento di traslazione nella direzione di una retta determinata, ed un comune movimento di rotazione attorno alla retta medesima.*

Nel progresso di questo scritto chiameremo la retta (29) dotata della preindicata proprietà di dare in qualche modo la direzione del movimento *asse del moto.*

16. Da quanto abbiamo esposto risulta che i punti i quali percorrono spazii eguali tra loro, sono posti sopra superficie cilindriche circolari, che hanno per asse comune l' asse stesso del moto. E di fatti, se nell' equazione

$$\delta L^2 = \delta A^2 + \delta B^2 + \delta C^2,$$

supponiamo determinato soltanto lo spazietto δL, l' eliminazione di δA, δB, δC per mezzo dell' equazioni (25) darà

$$((y-\beta)\delta r-(z-\gamma)\delta q+\delta\alpha)^2+((z-\gamma)\delta p-(x-\alpha)\delta r+\delta\beta)^2$$
$$+((x-\alpha)\delta q-(y-\beta)\delta p+\delta\gamma)^2=\delta L^2;$$

che è l'equazione di una superficie cilindrica di cui l'asse è la retta (29).

17. Questa medesima proprietà si ritrova dimostrando direttamente che la distanza delle due rette parallele (29) e (25) è indipendente dalla direzione dello spazio δL. Prendasi perciò un piano perpendicolare a queste due rette, rappresentato dall'equazione

$$(x-\alpha)\delta p+(y-\beta)\delta q+(z-\gamma)\delta r=0.$$

La distanza dei punti nei quali verrà incontrato dalle due rette sarà quella delle rette medesime. Ora X, Y, Z, essendo le coordinate del punto nel quale la retta (25) incontra il piano, avremo facilmente.

$$X-\alpha=\frac{(\delta C-\delta\gamma)\delta q-(\delta B-\delta\beta)\delta r}{\delta p^2+\delta q^2+\delta r^2},$$

$$Y-\beta=\frac{(\delta A-\delta\alpha)\delta r-(\delta C-\delta\gamma)\delta p}{\delta p^2+\delta q^2+\delta r^2},$$

$$Z-\gamma=\frac{(\delta B-\delta\beta\delta)p-(\delta A-\delta\alpha)\delta q}{\delta p^2+\delta q^2+\delta r^2};$$

Similmente X', Y', Z' essendo le coordinate del punto d'incontro dell'altra retta (29) col medesimo piano, verrà

$$X'-\alpha=\frac{\delta\beta\delta r-\delta\gamma\delta q}{\delta p^2+\delta q^2+\delta r^2},$$

$$Y'-\beta=\frac{\delta\gamma\delta p-\delta\alpha\delta r}{\delta p^2+\delta q^2+\delta r^2},$$

$$Z'-\gamma=\frac{\delta\alpha\delta q-\delta\beta\delta p}{\delta p^2\delta+q^2+\delta r^2};$$

quindi il quadrato della distanza cercata

$$D^2 = (X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2$$

sarà

$$D^2 = \frac{(\delta C \delta q - \delta B \delta r)^2 + (\delta A \delta r - \delta C \delta p)^2 + (\delta B \delta p - \delta A \delta q)^2}{(\delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2)^2}.$$

Sotto questa forma essa sembra dipendere dalle projezioni δA, δB, δC, e perciò dalla direzione dello spazio δL; ma questa contradizione non è che apparente, poichè, eseguiti i quadrati indicati, ed aggiunto al numeratore il polinomio nullo

$$\delta A^2 \delta p^2 + \delta B^2 \delta q^2 + \delta C^2 \delta r^2 - \delta A^2 \delta p^2 - \delta B^2 \delta p^2 - \delta C^2 \delta r^2,$$

il valore di D^2 diviene

$$D^2 = \frac{(\delta A^2 + \delta B^2 + \delta C^2)(\delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2) - (\delta A \delta p + \delta B \delta q + \delta C \delta r)^2}{(\delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2)^2};$$

e siccome

$$\delta A^2 + \delta B^2 + \delta C^2 = \delta L^2,$$

e per le formole (26) e (28)

$$\delta P = \frac{\delta A \delta p + \delta B \delta q + \delta C \delta r}{\sqrt{(\delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2)}},$$

rimarrà

$$(30) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad D^2 = \frac{\delta L^2 - \delta P^2}{\sqrt{(\delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2)}};$$

risultato indipendente dalla direzione dello spazio δL.

18. Questo valore di D^2 ha il vantaggio di tosto condurre alla espressione della rotazione del sistema attorno all'asse del moto. Basterà a questo effetto considerare le due posizioni consecutive della retta (25) prima e dopo l' eseguito movimento, ed osservare che lo spazio δL percorso da un punto qualunque dell' indicata retta (25), è l' ipotenusa di un

triangolo rettangolo di cui un lato è la projezione δP dello spazio stesso δL sopra la retta (29), e l'altro lato è l'archetto circolare avente il centro nell'asse (29), per raggio la distanza D, e per grandezza la distanza normale delle due posizioni consecutive della retta (25).

Ciò posto se per $\delta\omega$ rappresentiamo il movimento angolare eseguito da questa retta attorno all'asse, o ciò che è lo stesso, la rotazione cercata, l'archetto circolare sopra indicato ha per espressione $D\delta\omega$. Quindi nel menzionato triangolo rettangolo sarà

$$\delta L^2 = \delta P^2 + D^2 \delta\omega^2,$$

donde

$$\delta\omega^2 = \frac{\delta L^2 - \delta P^2}{D^2},$$

e sostituendo per D^2 il suo valore (30) avremo

$$(31) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \delta\omega = \sqrt{(\delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2)}$$

per l'espressione della rotazione del sistema di forma invariabile attorno all'asse del moto.

19. In quanto precede abbiamo supposto, che il movimento del sistema di forma invariabile venga determinato dalle variazioni delle quantità α, β, γ; a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''; le quali fissano la posizione iniziale degli assi x_1, y_1, z_1 del sistema, ed abbiamo trovato.

1.° Che il movimento di un qualsivoglia punto x, y, z, del sistema è determinato dall'equazioni

$$(32) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \delta x = \delta\alpha + (y-\beta)\delta r - (z-\gamma)\delta q, \\ \delta y = \delta\beta + (z-\gamma)\delta p - (x-\alpha)\delta r, \\ \delta z = \delta\gamma + (x-\alpha)\delta q - (y-\beta)\delta p; \end{cases}$$

corrispondenti alle equazione (25).

2.° Che esiste sempre un asse del moto rappresentato dall'equazioni (29), di cui la proprietà caratteristica si è che

tutti i punti del sistema posti sopra di un tal asse si muovono seguendo la direzione dell' asse stesso.

3.° Che tutto il sistema di forma invariabile è dotato di un *comune movimento di traslazione* nella direzione dell'asse del moto, di cui la misura è data dalla formola (28).

4.° Che contemporaneamente il sistema è animato di un *comune movimento di rotazione* attorno all' asse del moto misurata dalla formola (31).

20. Questi tre ultimi elementi, la posizione cioè dell'asse del moto, la misura della traslazione, e quella della rotazione determinano evidentemente tutte le condizioni essenziali, e caratteristiche di ogni movimento. Perciò supponendoli dati, dovranno dipenderne tutte le altre quantità più sopra considerate. Ed in fatti si prendano come quantità date δP e $\delta\omega$; e per rappresentare la retta asse del moto le tre equazioni

$$(33) \quad \ldots\ldots \begin{cases} ny - mz = e, \\ lz - nx = f, \\ mx - ly = g; \end{cases}$$

nelle quali l, m, n potranno rappresentare i coseni degli angoli che l' asse del moto forma coi tre assi delle coordinate, e tanto l, m, n quanto e, f, g dovranno essere quantità date colle condizioni

$$(34) \quad \ldots\ldots \begin{cases} l^2 + m^2 + n^2 = 1, \\ le + mf + ng = 0, \end{cases}$$

di cui la seconda esprime che le tre equazioni (33) si riducono a sole due, cioè rappresentano una linea retta.

Avremo primieramente le due equazioni (28) e (31)

$$\delta P = \frac{\delta\alpha\delta p + \delta\beta\delta q + \delta\gamma\delta r}{\sqrt{(\delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2)}},$$

$$\delta\omega = \sqrt{(\delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2)}.$$

Quindi per esprimere che l'equazioni (33) coincidono coll'equazioni (29), avremo le altre condizioni

$$\frac{l}{n} = \frac{\delta p}{\delta r} \; . \; . \; . \; . \; . \; \frac{m}{n} = \frac{\delta q}{\delta r};$$

$$e = \frac{\beta\delta r - \gamma\delta q - \delta a}{\delta\omega} + \frac{\delta p \delta P}{\delta\omega^2},$$

$$f = \frac{\gamma\delta p - \alpha\delta r - \delta\beta}{\delta\omega} + \frac{\delta q \delta P}{\delta\omega^2},$$

$$g = \frac{\alpha\delta q - \beta\delta p - \delta\gamma}{\delta\omega} + \frac{\delta r \delta P}{\delta\omega^2}.$$

E da queste sette equazioni ricaveremo facilmente per le variazioni δp, δq, δr; $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, che sono le incognite del problema attuale, i valori

$$\delta p = l\delta\omega\delta q = m\delta\omega\delta r = n\delta\omega;$$

$$\delta\alpha = \delta\omega(n\beta - m\gamma - e) + l\delta P,$$

$$\delta\beta = \delta\omega(l\gamma - n\alpha - f) + m\delta P,$$

$$\delta\gamma = \delta\omega(m\alpha - l\beta - g) + n\delta P;$$

21. Che se si volessero anche le altre variazioni δa, δb, δc; $\delta a'$, $\delta b'$, $\delta c'$; $\delta a''$, $\delta b''$, $\delta c''$; ricorrendo alle formole (14) dell'articolo 6. e sostituendo i valori di δp, δq, δr; avremmo

$$\delta a = \delta\omega(na' - ma'')\delta a' = \delta\omega(la'' - na)\delta a'' = \delta\omega(ma - la'),$$

$$\delta b = \delta\omega(nb' - mb'')\delta b' = \delta\omega(lb'' - nb)\delta b'' = \delta\omega(mb - lb'),$$

$$\delta c = \delta\omega(nc' - mc'')\delta c' = \delta\omega(lc'' - nc)\delta c'' = \delta\omega(mc - lc');$$

Ciò chè compisce la determinazione del movimento degli assi x_1, y_1, z_1; quando è dato l'asse del moto, e sono cono-

sciute la traslazione e la rotazione del sistema rispetto a quest' asse.

Qualora finalmente si richieda per mezzo degli stessi elementi dati, anche il movimento, o in altri termini le variazioni delle coordinate di un qualsivoglia punto del sistema di forma invariabile, converrà ricorrere alle formole (32), e quivi sostituiti i valori di δp, δq, δr; $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, si troveranno

$$(35) \quad \ldots \quad \begin{cases} \delta x = \delta\omega(ny - mz - e) + l\delta P, \\ \delta y = \delta\omega(lz - nx - f) + m\delta P, \\ \delta z = \delta\omega(mx - ly - g) + n\delta P. \end{cases}$$

Valori i quali, cambiando x, y, z in α, β, γ, si riducono, come era facile prevedere, a quelli già sopra trovati per $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$.

22. I risultati sin quì ottenuti costituiscono le fondamentali proprietà puramente geometriche del movimento di un sistema di punti di forma invariabile. Il Sig. Poisson al capo IV. della sua Dinamica aveva già esposte le formole relative al movimento di rotazione attorno ad un punto fisso; le quali formole divengono un caso particolare di quelle da noi dimostrate.

§. 2.°

Della composizione e decomposizione dei movimenti di un sistema di forma invariabile.

23. Da quanto abbiamo esposto nel titolo antecedente risulta che in qualsivoglia movimento infinitamente piccolo di un sistema di forma invariabile, vi è sempre un asse del moto, sopra il quale si avanzano i punti del sistema che in esso sono situati, mentre tutti gli altri punti descrivono attorno ad esso altrettanti archetti di eliche.

È questo il movimento che ha effettivamente luogo, ed al quale senza abbandonare la realtà, non può esserne sosti-

tuito alcun altro, di maniera che a stretto rigore la trasformazione dei movimenti non è possibile. Se si considerano però i due effetti dei quali abbiamo nel titolo precedente assegnata una distinta misura, la traslazione cioè comune a tutti i punti del sistema nella direzione dell' asse del moto, e la loro comune rotazione attorno a quest' asse, si sarà condotti a riguardarli come componenti del movimento effettivo, in questo senso; che se avessero luogo uno dopo l' altro, il sistema di forma invariabile proverebbe il medesimo traslocamento, cioè arriverebbe alla medesima situazione alla quale si arriva col movimento che ha effettivamente luogo, il quale può in qualche modo essere considerato come risultante degli altri due.

24. Da questo modo di considerare ciaschedun movimento rispetto alla sua propria traslazione ed alla sua rotazione, si scenderà facilmente al concetto generale della composizione e decomposizione dei movimenti. Difatti sebbene nel movimento infinitamente piccolo di un sistema di forma invariabile ciaschedun punto di esso non sia effettivamente animato di un medesimo movimento di traslazione e di un medesimo movimento di rotazione, se non che parallelamente ed attorno all' asse del moto; si potrà ciò non ostante immaginare che il traslocamento finale che verrebbe indotto nel sistema supponendolo successivamente animato de' diversi movimenti parallelamente ed attorno ad altrettanti assi di moto, possa egualmente ottenersi con un movimento unico del sistema; movimento al quale daremo il nome di *risultante*, mentre daremo quello di *componenti* a tutti gli altri movimenti, della successione dei quali il primo può tener luogo, riguardo all' effetto finale.

25. Posta questa definizione, il problema generale della composizione e decomposizione dei movimenti si enuncierà nel modo seguente. *Dati i movimenti componenti* (cioè in ciascheduno di essi l' asse del moto, la traslazione e la rotazione) *trovare il movimento risultante* (cioè l' asse, la rotazione e la traslazione in questo movimento), *e reciprocamente*.

Prendiamo a questo effetto l' equazioni

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} ny - mz = e, \\ lz - nx = f, \\ mx - ly = g, \end{cases}$$

alle quali, come all' articolo 20, aggiungeremo le condizioni

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} l^2 + m^2 + n^2 = 1, \\ le + mf + ng = 0; \end{cases}$$

per rappresentare l' asse del movimento risultante. Per δP, $\delta\omega$ esprimiamo la traslazione e la rotazione in questo movimento. Similmente le analoghe equazioni

$$(3) \quad . \quad . \quad \begin{cases} n'y - m'z = e', \\ l'z - n'x = f', \\ m'x - l'y = g', \end{cases} \qquad (4) \quad . \quad . \quad \begin{cases} l'^2 + m'^2 + n'^2 = 1, \\ l'e' + m'f' + n'g' = 0, \end{cases}$$

$$(5) \quad . \quad . \quad \begin{cases} n''y - m''z = e'', \\ l''z - n''x = f'', \\ m''x - l''y = g'', \end{cases} \qquad (6) \quad . \quad . \quad \begin{cases} l''^2 + m''^2 + n''^2 = 1, \\ l''e'' + m''f'' + n''g'' = 0; \end{cases}$$

$$(7) \quad . \quad . \quad \begin{cases} n'''y - m'''z = e''', \\ l'''z - n'''x = f''', \\ m'''x - l'''y = g''', \end{cases} \qquad (8) \quad . \quad . \quad \begin{cases} l'''^2 + m'''^2 + n'''^2 = 1, \\ l'''e''' + m'''f''' + n'''g''' = 0, \end{cases}$$

ec. ec.

ci rappresentino gli assi dei movimenti componenti; e per distinguerli dal movimento risultante, e tra loro stessi, indichiamo colle caratteristiche δ', δ'', δ''' ec. le variazioni dipendenti da ciascheduno di essi. Coerentemente a questa notazione

intenderemo per $\delta'P$, $\delta'\omega$; $\delta''P$, $\delta''\omega$; $\delta'''P$, $\delta'''\omega$, ec. ec. le traslazioni e rotazioni respettive in ciaschedun movimento corrispondente agli assi (3), (5), (7) ec.

26. I movimenti di ciaschedun punto del sistema di forma invariabile relativi a questi diversi assi saranno dati dalle formole (35) dell' articolo 22, e quindi respettivamente determinati dall' equazioni

$$(9) \quad \ldots \quad \begin{cases} \delta x = \delta\omega(ny - mz - e) + l\delta P, \\ \delta y = \delta\omega(lz - nx - f) + m\delta P, \\ \delta z = \delta\omega(mx - ly - g) + n\delta P, \end{cases}$$

$$(10) \quad \ldots \quad \begin{cases} \delta' x = \delta'\omega(n'y - m'z - e') + l'\,\delta' P, \\ \delta' y = \delta'\omega(l'z - n'x - f') + m'\delta' P, \\ \delta' z = \delta'\omega(m'x - l'y - g') + n'\delta' P, \end{cases}$$

$$(11) \quad \ldots \quad \begin{cases} \delta'' x = \delta''\omega(n''y - m''z - e'') + l''\delta'' P, \\ \delta'' y = \delta''\omega(l''z - n''x - f'') + m''\delta'' P, \\ \delta'' z = \delta''\omega(m''x - l''y - g'') + n''\delta'' P, \end{cases}$$

$$(12) \quad \ldots \quad \begin{cases} \delta''' x = \delta'''\omega(n'''y - m'''z - e''') + l'''\,\delta''' P, \\ \delta''' y = \delta'''\omega(l'''z - n'''x - f''') + m'''\delta''' P, \\ \delta''' z = \delta'''\omega(m'''x - l'''y - g''') + n'''\delta''' P, \end{cases}$$

ec. ec.

le quali esprimono le variazioni delle coordinate di un qualsivoglia punto in ciascheduno dei diversi movimenti. Ma noi vogliamo che i diversi movimenti indicati dalle caratteristiche

δ', δ'', δ''' ec. conducano il sistema alla posizione stessa, alla quale lo avrebbe portato il movimento indicato colla caratteristica δ; ciò richiede che le variazioni delle coordinate in questo ultimo movimento sieno eguali alla somma delle corrispondenti variazioni nei primi; ossia che per qualsivoglia punto del sistema si abbiano

$$\delta x = \delta' x + \delta'' x + \delta''' x + \text{ec.}$$

$$\delta y = \delta' y + \delta'' y + \delta''' y + \text{ec.}$$

$$\delta z = \delta' z + \delta'' z + \delta''' z + \text{ec.}$$

Sostituendo adunque i valori (10), (11), (12) ec. le tre equazioni

$$y(n\delta\omega - (n'\delta'\omega + n''\delta''\omega + \text{ec.})) - z(m\delta\omega - (m'\delta'\omega + m''\delta''\omega + \text{ec.}))$$
$$= (l'\delta'\mathrm{P} + l''\delta''\mathrm{P} + \text{ec.} - e'\delta'\omega - e''\delta''\omega - \text{ec.}) - (l\delta\mathrm{P} - e\delta\omega),$$

$$z(l\delta\omega - (l'\delta'\omega + l''\delta''\omega + \text{ec.})) - x(n\delta\omega - (n'\delta'\omega + n''\delta'' + \text{ec.}))$$
$$= (m'\delta'\mathrm{P} + m''\delta''\mathrm{P} + \text{ec.} - f'\delta'\omega - f''\delta''\omega - \text{ec.}) - (m\delta\mathrm{P} - f\delta\omega),$$

$$x(m\delta\omega - (m'\delta'\omega + m''\delta''\omega + \text{ec.})) - y(l\delta\omega - (l'\delta'\omega + l''\delta''\omega + \text{ec.}))$$
$$= (n'\delta'\mathrm{P} + n''\delta'\mathrm{P} + \text{ec.} - g'\delta'\omega - g''\delta\omega'' - \text{ec.}) - (n\delta\mathrm{P} - g\delta\omega);$$

che ne verranno, dovranno aver luogo per qualsivogliano valori delle coordinate x, y, z, e quindi si romperanno nelle sei equazioni di condizione

$$(13) \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} l\delta\omega = l'\delta'\omega + l''\delta''\omega + l'''\delta'''\omega + \text{ec.} \\ m\omega\delta = m'\delta'\omega + m''\delta''\omega + m'''\delta'''\omega + \text{ec.} \\ n\delta\omega = n'\delta'\omega + n''\delta''\omega + n'''\delta''\omega + \text{ec.} \end{cases}$$

$$(14)\ .\ .\ \begin{cases} l\delta P - e\delta\omega = (l'\delta' P + l''\delta'' P + \text{ec.}) - (e'\delta'\omega + e''\delta''\omega + \text{ec.}), \\ m\delta P - f\delta\omega = (m'\delta' P + m''\delta'' P + \text{ec.}) - (f'\delta'\omega + f''\delta''\omega + \text{ec.}), \\ n\delta P - g\delta\omega = (n'\delta' P + n''\delta'' P + \text{ec.}) - (g'\delta'\omega + g''\delta''\omega + \text{ec.}), \end{cases}$$

le quali saranno necessarie e bastanti acciocchè il movimento δ sia risultante dei movimenti δ', δ'', δ''' ec.

27. Allorquando il problema abbia per oggetto la composizione dei movimenti δ', δ'', δ''' ec. in un solo δ, tutte le quantità che entrano nei secondi membri dell' equazioni (13) e (14) formano i dati del problema, mentre tutte quelle che entrano nei primi membri sono le incognite. Si pongano, per abbreviare i calcoli

$$l'\delta'\omega + l''\delta''\omega + \text{ec.} = \delta o\ ,$$

$$m'\delta'\omega + m''\delta''\omega + \text{ec.} = \delta o'\ ,$$

$$n'\delta\omega + n''\delta''\omega + \text{ec.} = \delta o'',$$

$$(l'\delta' P + l''\delta'' P + \text{ec.}) - (e'\delta'\omega + e''\delta''\omega + \text{ec.}) = \delta s\ ,$$

$$(m'\delta' P + m''\delta'' P + \text{ec.}) - (f'\delta'\omega + f''\delta''\omega + \text{ec.}) = \delta s'\ ,$$

$$(n'\delta' P + n''\delta'' P + \text{ec.}) - (g'\delta'\omega + g''\delta''\omega + \text{ec.}) = \delta s'',$$

l' equazioni fondamentali (13), (14) divengono

$$l\delta\omega = \delta o\ \ldots\ m\delta\omega = \delta o'\ \ldots\ n\delta\omega = \delta o'',$$

$$l\delta P - e\delta\omega = \delta s\ \ldots\ m\delta P - f\delta\omega = \delta s'\ \ldots\ n\delta P - g\delta\omega = \delta s''.$$

Dalle tre prime ricaviamo

$$(15)\ .\ .\ .\ .\ \delta\omega = \sqrt{(\delta o^2 + \delta o'^2 + \delta o''^2)},$$

$$l = \frac{\delta o}{\sqrt{(\delta o^2 + \delta o'^2 + \delta o''^2)}} \ldots m = \frac{\delta o'}{\sqrt{(\delta o^2 + \delta o'^2 + \delta o''^2)}} \ldots n = \frac{\delta o''}{\sqrt{(\delta o^2 + \delta o'^2 + \delta o''^2)}}.$$

E le tre seguenti moltiplicate la prima per l, la seconda per m, e la terza per n e sommate, osservando che

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

$$le + mf + ng = 0,$$

ci danno

$$\delta P = l\delta s + m\delta s' + n\delta s'';$$

e quindi

$$(16) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \delta P = \frac{\delta s \delta o + \delta s' \delta o' + \delta s'' \delta o''}{\sqrt{(\delta o^2 + \delta o'^2 + \delta o''^2)}};$$

e finalmente

$$e = \frac{\delta o(\delta s \delta o + \delta s' \delta o' + \delta s'' \delta o')}{(\delta o^2 + \delta o'^2 + \delta o''^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\delta s}{\sqrt{(\delta o^2 + \delta o'^2 + \delta o''^2)}}$$

$$f = \frac{\delta o'(\delta s \delta o + \delta s' \delta o' + \delta s'' \delta o'')}{(\delta o^2 + \delta o'^2 + \delta o''^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\delta s'}{\sqrt{(\delta o^2 + \delta o'^2 + \delta o''^2)}}$$

$$g = \frac{\delta o''(\delta s \delta o + \delta s' \delta o' + \delta s'' \delta o'')}{(\delta o^2 + \delta o'^2 + \delta o''^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\delta s''}{\sqrt{(\delta o^2 + \delta o'^2 + \delta o''^2)}}.$$

Formole, le quali risolvono completamente il problema della composizione di più movimenti in un solo, e sostituite nell' equazioni (1) ci danno le seguenti

$$(17) \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} y\delta o'' - z\delta o' + \delta s' = \dfrac{\delta o(\delta s\delta o + \delta s'\delta o' + \delta s''\delta o'')}{\delta o^2 + \delta o'^2 + \delta o''^2}, \\ z\delta o - x\delta o'' + \delta s'' = \dfrac{\delta o'(\delta s\delta o + \delta s'\delta o' + \delta s''\delta o'')}{\delta o^2 + \delta o'^2 + \delta o''^2} \\ x\delta o' - y\delta o + \delta s''' = \dfrac{\delta o''(\delta s\delta o + \delta s'\delta o' + \delta s''\delta o'')}{\delta o^2 + \delta o'^2 + \delta o''^2} \end{cases}$$

che rappresentano la linea retta asse del movimento risultante.

28. Le formole trovate dimostrano che il valore della rotazione $\delta\omega$ nel movimento risultante è affatto indipendente dalle traslazioni componenti $\delta'P$, $\delta''P$ ec., mentre all' opposto la traslazione risultante δP dipende non solo dai valori delle traslazioni componenti, ma da quelli ancora delle rotazioni componenti $\delta'\omega$, $\delta''\omega$, ec. Risulta parimente dall' equazione (13) che *la rotazione nel movimento risultante moltiplicata nel coseno dell' angolo che fa l' asse di questo movimento con una retta qualunque, è uguale alla somma dei prodotti di ciascheduna rotazione componente nel coseno dell' angolo che il respettivo asse del moto forma colla medesima retta.* Mentrechè d' altra parte egli è chiaro per l' equazioni (14), che l'analogo teorema non si verifica riguardo ai movimenti di traslazione, se non nella particolare ipotesi espressa dalle condizioni

$$(18) \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} e\delta\omega = e'\delta'\omega + e''\delta''\omega + \text{ec.}, \\ f\delta\omega = f'\delta'\omega + f'\delta''\omega + \text{ec.}, \\ g\delta\omega = g'\delta'\omega + g''\delta''\omega + \text{ec.} \end{cases}$$

29. Nella supposizione che i diversi assi dei movimenti componenti passino tutti per un medesimo punto α, β, γ; si avranno le condizioni

$$(19)\quad \begin{cases} n'\beta - m'\gamma = e', & n''\beta - m''\gamma = e'', & n'''\beta - m'''\gamma = e''', \\ l'\gamma - n'\alpha = f', & l''\gamma - n''\alpha = f'', & l'''\gamma - n'''\alpha = f''', \\ m'\alpha - l'\beta = g', & m''\alpha - l''\beta = g'', & m'''\alpha - l'''\beta = g''' ; \end{cases}$$

e l'equazioni (14) combinate colle equazioni (13) diverranno

$$(20)\quad \begin{cases} l\delta P - e\delta\varpi = l'\delta' P + l''\delta'' P + \text{ec} - \delta\varpi(n\beta - m\gamma), \\ m\delta P - f\delta\varpi = m'\delta' P + m''\delta'' P + \text{ec.} - \delta\varpi(l\gamma - n\alpha), \\ n\delta P - g\delta\varpi = n'\delta' P + n''\delta'' P + \text{ec.} - \delta\varpi(m\alpha - l\beta) ; \end{cases}$$

sotto questa forma moltiplicate successivamente per l, m, n e sommate, osservando che

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

$$le + mf + ng = 0$$

esse danno

$$\delta P = \delta' P(ll' + mm' + nn') + \delta'' P(ll'' + mm'' + nn'') + \text{ec.}$$

e siccome i coefficienti

$$ll' + mm' + nn',$$

$$ll'' + mm'' + nn'',$$

$$\text{ec.} \qquad \text{ec.}$$

rappresentano i coseni degli angoli che l'asse del moto risultante forma cogli assi dei movimenti componenti; dimostrano che *allorquando tutti gli assi dei movimenti componenti passano per un medesimo punto, la traslazione risultante è uguale alla somma delle traslazioni componenti ciascheduna moltiplicata nel coseno dell' angolo, che il respettivo asse del moto forma coll' asse del movimento risultante.*

30. Nel caso che consideriamo, l'asse del movimento risultante non passa in generale per il punto per cui sono condotti gli assi dei movimenti componenti. Ciò non può accadere se non quando le coordinate α, β, γ, sodisfano anche all'equazioni (17) dell'asse del movimento, cioè quando si hanno le condizioni

$$\beta\delta o'' - \gamma\delta o' + \delta s = \frac{\delta o(\delta o\delta s + \delta o'\delta s' + \delta o''\delta s'')}{\delta o^2 + \delta o'^2 + \delta o''^2},$$

$$\gamma\delta o - \alpha\delta o'' + \delta s' = \frac{\delta o'(\delta o\delta s + \delta o'\delta s' + \delta o''\delta s'')}{\delta o^2 + \delta o'^2 + \delta o''^2},$$

$$\alpha\delta o' - \beta\delta o + \delta s'' = \frac{\delta o''(\delta o\delta s + \delta o'\delta s' + \delta o''\delta s'')}{\delta o^2 + \delta o'^2 + \delta o''^2};$$

delle quali una è la conseguenza delle altre due. Tali condizioni per la divisione si riducono alle seguenti

$$\frac{\beta\delta o'' - \delta o' + \delta s}{\gamma\delta o - \alpha\delta o'' + \delta s'} = \frac{\delta o}{\delta o'},$$

$$\frac{\gamma\delta o - \alpha\delta o'' + \delta s'}{\alpha\delta o' - \beta\delta o + \delta s''} = \frac{\delta o'}{\delta o''}.$$

E siccome nella fatta supposizione

$$\delta s = l'\delta' \mathrm{P} + l''\delta'' \mathrm{P} + \mathrm{ec.} - \delta\omega(n\beta - m\gamma),$$

$$\delta s' = m'\delta' \mathrm{P} + m''\delta'' \mathrm{P} + \mathrm{ec.} - \delta\omega(l\gamma - n\alpha),$$

$$\delta s'' = n'\delta' \mathrm{P} + n''\delta'' \mathrm{P} + \mathrm{ec.} - \delta\omega(m\alpha - l\beta),$$

e per altra parte

$$\delta o = l\delta\omega \ldots \delta o' = m\delta\omega \ldots \delta o'' = n\delta\omega;$$

sostituendo, le due sovrascritte condizioni diverranno

$$(21) \quad \ldots \quad \begin{cases} \dfrac{l'\delta'P + l''\delta''P + \text{ec.}}{m'\delta'P + m''\delta''P + \text{ec.}} = \dfrac{l'\delta'\varpi + l''\delta''\varpi + \text{ec.}}{m'\delta'\varpi + m''\delta''\varpi + \text{ec.}}; \\[2ex] \dfrac{m'\delta'P + m''\delta''P + \text{ec.}}{n'\delta'P + n''\delta''P + \text{ec.}} = \dfrac{m'\delta'\varpi + m''\delta''\varpi + \text{ec.}}{n'\delta'\varpi + n''\delta''\varpi + \text{ec.}}; \end{cases}$$

le quali saranno necessarie perchè l' asse del movimento risultante passi per il punto di concorso degli assi dei movimenti componenti.

31. È d' altronde facile verificare che le condizioni (19) (21) riunite involgono anche le condizioni (18) dell' articolo 28; che esse riducono l' equazioni (20), alle seguenti

$$l\delta P = l'\delta'P + l''\delta''P + \text{ec.}$$

$$m\delta P = m'\delta'P + m''\delta''P + \text{ec.}$$

$$n\delta P = n'\delta'P + n''\delta''P + \text{ec.}$$

e che perciò nella contemplata ipotesi la composizione delle traslazioni si fa mediante formole del tutto analoghe a quelle che servono alla composizione delle rotazioni.

32. Le formole (13) e (14), le quali, come abbiamo veduto, servono alla composizione dei movimenti, sciolgono ugualmente i problemi che possono essere proposti intorno alla decomposizione. Sebbene essi non presentino veruna difficoltà, ne esporremo alcuni, per l' interesse offerto dai risultati, e primieramente ci proporremo il seguente quisito. *Dato un movimento risultante determinare i movimenti componenti, dei quali gli assi sono dati di posizione.* Le incognite saranno evidentemente le sole quantità $\delta'P$, $\delta'\varpi$: $\delta''P$, $\delta''\varpi$: $\delta'''P$, $\delta'''\varpi$ ec. ed il problema 1.° sarà solubile, sotto certe condizioni soltanto, allorquando il numero degli assi dati dei movimenti componenti cercati sarà minore di tre; 2.° sarà in generale solubile ed indeterminato quando tali assi dati siano al numero di tre; 4.° e finalmente ammetterà indifinite soluzioni,

quando il numero degli assi dati sia maggiore di tre. Esamineremo i due primi casi.

33. Già si prevede che la decomposizione, o trasformazione di un movimento in un altro non è possibile, e le formole (13) e (14), le quali diverebbero

$$l\omega = l'\delta'\omega \ldots m\delta\omega = m'\delta'\omega \ldots n\delta\omega = n'\delta'\omega;$$

$$l\delta\,\mathrm{P} - e\delta\omega = l'\delta'\mathrm{P} - e'\delta'\omega\,,$$

$$m\delta\mathrm{P} - f\delta\omega = m'\delta\mathrm{P} - f'\delta'\omega\,,$$

$$n\delta\mathrm{P} - g\delta\omega = n'\delta'\mathrm{P} - g'\delta'\omega\,;$$

lo pongono in evidenza; poichè combinate colle condizioni

$$le + mf + ng = 0,$$

$$l'e + m'f + n'g = 0;$$

esse danno facilmente

$$l = l' \ldots m = m' \ldots n = n';$$

$$\delta\omega = \delta'\omega \ldots \delta\mathrm{P} = \delta'\mathrm{P};$$

$$e = e' \ldots f = f' \ldots g = g';$$

e richiedono in conseguenza l'identità dei due assi, e della rotazione e traslazione relativa.

34. Quando poi due sono gli assi dati dei movimenti, nei quali si vuol decomporre un movimento dato, l'equazioni (13) e (14) divengono

$$(22) \quad \ldots \left\{ \begin{array}{l} l\delta\omega = l'\delta'\omega + l''\delta''\omega\,, \\ m\delta\omega = m'\delta'\omega + m''\delta''\omega\,, \\ n\delta\omega = n'\delta'\omega + n''\delta''\omega\,, \end{array} \right.$$

$$(23) \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} l\delta P - e\delta\omega = l'\delta' P + l''\delta'' P - e'\delta'\omega - e''\delta''\omega, \\ m\delta P - f\delta\omega = m'\delta' P + m''\delta'' P - f'\delta'\omega - f''\delta''\omega, \\ n\delta P - g\delta\omega = n'\delta' P + n''\delta'' P - g'\delta'\omega - g''\delta''\omega; \end{cases}$$

e solo quattro essendo le incognite

$$\delta' P,\ \delta'\omega;\ \delta'' P,\ \delta'';\omega$$

fra le quantità date devono necessariamente verificarsi due equazioni di condizione, acciocchè la decomposizione possa aver luogo. Di fatti le due prime equazioni (22) danno le due rotazioni componenti

$$(24) \quad . \quad . \quad . \quad \delta'\omega = \frac{\delta\omega(lm''-l''m)}{l'm''-l''m'},\ \delta''\omega = \frac{\delta\omega(l'm-lm')}{l'm''-l''m'}$$

le quali sostituite nella terza somministrano l' equazione di condizione

$$(25) \quad . \quad . \quad n(l'm''-l''m')+n'(l''m-lm'')+n''(lm'-l'm)=0.$$

Quindi, per brevità ponendo

$$e\delta\omega - e'\delta'\omega - e''\delta''\omega = E\delta\omega,$$

$$f\delta\omega - f'\delta'\omega - f''\delta''\omega = F\delta\omega,$$

$$g\delta\omega - g'\delta'\omega - g''\delta''\omega = G\delta\omega;$$

ovvero

$$E = \frac{e(l'm''-l''m')+e'(l''m-lm'')+e''(lm'-l'm)}{(l'm''-l''m')},$$

$$F = \frac{f(l'm''-l''m')+f'(l''m-lm'')+f''(lm'-l'm)}{(l'm''-l''m')},$$

$$G = \frac{g(l'm''-l''m')+g'(l''m-lm'')+g''(lm'-l'm)}{(l'm''-l''m')};$$

le tre equazioni (23) danno il valore delle due traslazioni componenti

$$(26) \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \delta' \mathrm{P} = \dfrac{m''(l\delta - \mathrm{PE}\delta o) - l''(m\delta \mathrm{P} - \mathrm{F}\delta o)}{(l'm'' - l''m')}, \\[2ex] \delta'' \mathrm{P} = \dfrac{l'(m\delta \mathrm{P} - \mathrm{F}\delta o) - m'(l\delta \mathrm{P} - \mathrm{E}\delta o)}{(l'm'' - l''m')}, \end{cases}$$

e ricordandoci della condizione (25), già trovata somministrano l' altra

$$(27) \quad . \quad . \quad \mathrm{E}(m'n'' - m''n') + \mathrm{F}(l''n' - l'n'') + \mathrm{G}(l'm'' - l''m') = 0.$$

35. Passando all' interpretazione del significato geometrico delle due condizioni (25) e (27), non sarà difficile riconoscere che l' equazione (24) indica che i tre assi di movimento rappresentati dall' equazioni (1), (3) e (5) dell' articolo 25 sono paralleli ad un medesimo piano. Di fatti, prendendo le condizioni necessarie affinchè le tre preindicate rette (1), (3) e (5) sieno parallele ad un piano

$$z + \mathrm{A}y + \mathrm{B}x = \mathrm{D},$$

troviamo

$$n + \mathrm{A}m + \mathrm{B}l = 0,$$

$$n' + \mathrm{A}m' + \mathrm{B}l' = 0,$$

$$n'' + \mathrm{A}m'' + \mathrm{B}l'' = 0,$$

tralle quali equazioni eliminando A e B si ha la condizione (25).

Riguardo poi alla seconda equazione di condizione, se trasformiamo le coordinate, prendendo per asse delle z la linea retta perpendicolare comune alle due rette (3) e (5), siccome per la condizione già sopra dimostrata le tre rette (1), (3), (5) saranno parallele al nuovo piano delle x, y, e quindi si avranno

$$n = 0 \ . \ . \ . \ n' = 0 \ . \ . \ . \ n'' = 0 \, ;$$

la condizione (27) di cui si tratta si ridurrà a $G = 0$. Ma le rette (3) e (5) nella nuova disposizione degli assi appoggiandosi all'asse z, saranno inoltre

$$g' = 0 \qquad \text{e} \qquad g'' = 0,$$

perciò la condizione stessa $G = 0$, si ridurrà ulteriormente a $g = 0$. Sotto questa forma c'indicherà che la retta (1) essa pure si appoggia all'asse z, e siccome questa retta è parallela al piano x, y, nella nuova disposizione di assi, le tre rette saranno perpendicolari all'asse z. Riunendo pertanto in un solo enunciato le due condizioni, concluderemo che *la decomposizione di un dato movimento in due altri non sarà possibile, a meno che le minime distanze delle tre rette assi dei movimenti non si misurino sopra una medesima comune perpendicolare.*

Considerazioni analoghe alle precedenti ci mostrerebbero inoltre che *gli assi dei due movimenti componenti essendo paralleli tra loro, la decomposizione non è possibile, se non quando anche l' asse del movimento risultante è pure ad essi parallelo, e che in quest' ultima supposizione la decomposizione ammette indefinito numero di soluzioni.*

36. Passiamo adesso alla decomposizione di un dato movimento in tre altri, di cui sono dati gli assi. Per mezzo delle sei equazioni.

$$(28) \quad . \ . \ . \quad \begin{cases} l\delta\omega = l'\delta'\omega + l''\delta''\omega + l'''\delta'''\omega \, , \\ m\delta\omega = m'\delta'\omega + m''\delta''\omega + m'''\delta'''\omega \, , \\ n\delta\omega = n'\delta'\omega + n''\delta''\omega + n'''\delta'''\omega \, ; \end{cases}$$

$$(29) \quad \begin{cases} l\delta P - e\delta\omega = l'\delta' P + l''\delta'' P + l'''\delta''' P - e'\delta'\omega - e''\delta''\omega - e'''\delta'''\omega \, , \\ m\delta P - f\delta\omega = m'\delta' P + m''\delta'' P + m'''\delta''' P - f'\delta'\omega - f''\delta''\omega - f'''\delta'''\omega \, , \\ n\delta P - g\delta\omega = n'\delta' P + n''\delta'' P + n'''\delta''' P - g'\delta'\omega - g''\delta''\omega - g'''\delta'''\omega \, , \end{cases}$$

avremo i valori delle sei incognite che saranno

$$(30)\ldots\begin{cases}\delta'\omega=\dfrac{(m'''n''-m''n'''l)+(l'''n''-l''n''')m+(l'''m''-l''m''')n}{(l'''m''-l''m''')n'+(l'm'''-l'''m')n''+(l''m'-l'm'')n'''}\,\delta\omega\,,\\[2ex]\delta''\omega=\dfrac{(m'''n'-m'n''')l+(l'n'''-l'''n')m+(l'''m'-l'm''')n}{(l'''m''-l''m''')n'+(l'm'''-l'''m')n''+(l''m'-l'm'')n'''}\,\delta\omega,\\[2ex]\delta'''\omega=\dfrac{(m''n'-m'n'')l+(l'n''-l''n')m+(l''m'-l'm'')n}{(l'''m''-l''m''')n'+(l'm'''-l'''m')n''+(l''m'-l'm'')n'''}\,\delta\omega\,;\end{cases}$$

$$(31)\begin{cases}\delta'\mathrm{P}=\dfrac{(m'''n''-m''n''')(l\delta\mathrm{P}-\mathrm{E}\delta\omega)+(l'''n''-l''n''')(m\delta\mathrm{P}-\mathrm{F}\delta\omega)+(l'''m''-l''m''')(n\delta\mathrm{P}-\mathrm{G}\delta\omega)}{(l'''m''-l''m''')n'+(l'm'''-l'''m')n''+(l''m'-l'm'')n'''}\\[2ex]\delta''\mathrm{P}=\dfrac{(m'''n'-m'n''')(l\delta\mathrm{P}-\mathrm{E}\delta\omega)+(l'n'''-l'''n')(m\delta\mathrm{P}-\mathrm{F}\delta\omega)+(l'''m'-l'm''')(n\delta\mathrm{P}-\mathrm{G}\delta\omega)}{(l'''m''-l''m''')n'+(l'm'''-l'''m')n''+(l''m'-l'm'')n'''}\\[2ex]\delta'''\mathrm{P}=\dfrac{(m''n'-m'n'')(l\delta\mathrm{P}-\mathrm{E}\delta\omega)+(l'n''-l''n')(m\delta\mathrm{P}-\mathrm{F}\delta\omega)+(l''m'-l'm'')(n\delta\mathrm{P}-\mathrm{G}\delta\omega)}{(l'''m''-l''m''')n'+(l'm'''-l'''m')n''+(l''m'-l'm'')n'''}\,.\end{cases}$$

nei quali per brevità sono stati posti

$$\mathrm{E}\delta\omega,\quad \mathrm{F}\delta\omega,\quad \mathrm{G}\delta\omega$$

invece dei quadrinomi

$$e\delta\omega-e'\delta'\omega-e''\delta''\omega-e'''\delta'''\omega\,,$$

$$f\delta\omega-f'\delta'\omega-f''\delta''\omega-f'''\delta'''\omega,$$

$$g\delta\omega-g'\delta'\omega-g''\delta''\omega-g'''\delta'''\omega.$$

Le formole (30) e (31) serviranno ad effettuare la proposta decomposizione, la quale non diverrà impossibile, se non nel caso in cui il comune denominatore dei valori trovati sia uguale a zero. Ma questa condizione

$$(l'''m''-l''m''')n'+(l'm'''-l'''m')n''+(l''m'-l'm'')n'''=0$$

esprime, per ciò che abbiamo mostrato all' articolo 35, che i

tre assi dei movimenti componenti sono paralleli ad un medesimo piano, dunque *un dato movimento potrà sempre essere decomposto in tre altri dei quali sieno dati gli assi, purchè questi tre assi non sieno paralleli ad un medesimo piano.*

37. La decomposizione per altro diverrà possibile, anche nella supposizione del parallelismo ad un medesimo piano dei tre assi dei movimenti componenti, purchè l'asse dato del movimento risultante sia esso pure parallelo a quello stesso piano. Di fatti sarà facile verificare che in questo caso si annullano anche i numeratori dei valori delle componenti $\delta'\omega$, $\delta''\omega$, $\delta'''\omega$; $\delta'P$, $\delta''P$, $\delta'''P$; e che questi valori divengono indeterminati; risultato il quale indica, non solamente che il problema diviene solubile ma che ammette inoltre indefinito numero di soluzioni. Per verificare direttamente questa indeterminazione, prenderemo il piano delle x, y parallelo ai quattro assi dei movimenti, cioè porremo

$$n = 0 \ldots . n' = 0 \ldots n'' = 0 \ldots n''' = 0$$

e le sei equazioni (28) e (29) si ridurranno alle sole cinque

$$l\delta\omega = l'\delta'\omega + l''\delta''\omega + l'''\delta'''\omega,$$

$$m\delta\omega = m'\delta'\omega + m''\delta''\omega + m'''\delta'''\omega;$$

$$l\delta P - e\delta\omega = l'\delta'P + l''\delta''P + l'''\delta'''P - e'\delta'\omega - e''\delta''\omega - e'''\delta'''\omega,$$

$$m\delta P - f\delta\omega = m'\delta'P + m''\delta''P + m'''\delta'''P - f'\delta'\omega - f''\delta''\omega - f'''\delta'''\omega,$$

$$g\delta\omega = g'\delta'\omega + g''\delta'\omega + g'''\delta'''\omega;$$

delle quali le due prime e la quinta daranno i valori delle componenti di rotazione, mentre tralle componenti di traslazione non rimanendo che due sole equazioni, il valore di una di esse potrà essere preso a volontà.

38. Supponiamo, per altro esempio di decomposizione, che uno degli assi dei tre movimenti componenti sia dato parallelo all'asse del movimento risultante, cioè che sieno

$$l' = l \ . \ . \ . \ m' = m \ . \ . \ . \ n' = n.$$

I valori (30) e (31) diverranno

$$\delta'\omega = \delta\omega \ . \ . \ . \ \delta''\omega = 0 \ . \ . \ . \ \delta'''\omega = 0$$

$$\delta'P = \delta P + \frac{\delta\omega((m'''n'' - m''n''')(e-e') + (l'''n'' - l''n''')(f-f') + (l'''m'' - l''m''')(g-g'))}{(l'''m'' - l''m''')n' + (l'''m' - l'm''')n'' + (l''m'' - l''m')n'''},$$

$$\delta''P = \frac{\delta\omega((m'''n' - m'n''')(e-e') + (l'n''' - l'''n')(f-f') + (l'''m' - l'm''')(g-g'))}{(l'''m'' - l''m''')n' + (l'''m' - l'm'')n'' + (l'm'' - l''m')n'''},$$

$$\delta'''P = \frac{\delta\omega((m''n' - m'n'')(e-e') + (l'n'' - l''n')(f-f') + (l''m' - l'm'')(g-g'))}{(l'''m'' - l''m''')n' + (l'''m' - l'm''')n'' + (l'm'' - l''m')n'''},$$

e proveranno che *uno degli assi dei tre movimenti componenti essendo parallelo all' asse del movimento risultante, la rotazione componente attorno a quell' asse è uguale alla rotazione risultante; le altre due rotazioni componenti sono nulle, ed i valori delle traslazioni componenti non cambiano, trasportando parallelamente a loro stessi i due assi dei movimenti componenti non paralleli all' asse del movimento risultante.*

39. Potendo ognuno estendere ad altri casi considerazioni analoghe all'antecedenti, sulle quali ci siamo già troppo dilungati; limiteremo ciò che ci resta da dire all' esposizione delle formole relative al caso, nel quale i tre assi dei movimenti componenti sono tra loro rettangolari. In questa supposizione si verificheranno le formole dell'articolo 5, nelle quali ad a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'', sieno stati sostituiti l', m', n'; l'', m'', n''; l''', m''', n'''; e quindi fatte le corrispondenti riduzioni, le formole (30) e (31) diverranno

$$(32) \quad \begin{cases} \delta'\omega = (ll' + mm' + nn')\delta\omega, \\ \delta''\omega = (ll'' + mm'' + nn'')\delta\omega, \\ \delta'''\omega = (ll''' + mm''' + nn''')\delta\omega, \end{cases}$$

$$(33) \quad \ldots \begin{cases} \delta' P = (ll' + mm' + nn')\delta P - \delta\omega(l' E + m' F + n' G), \\ \delta'' P = (ll'' + mm'' + nn'')\delta P - \delta\omega(l'' E + m'' F + n'' G), \\ \delta''' P = (ll''' + mm''' + nn''')\delta P - \delta\omega(l''' E + m''' F + n''' G); \end{cases}$$

quando poi si volesse che i tre assi dei movimenti componenti passassero per un medesimo punto α, β, γ; si dovrebbe far uso dei valori

$$E = e - (n\beta - m\gamma),$$

$$F = f - (l\gamma - n\alpha),$$

$$G = g - (m\alpha - l\gamma);$$

ed affinchè gli assi medesimi fossero paralleli a quelli delle coordinate, scrivere che

$$l' = 1 \ldots m' = 0 \ldots n' = 0,$$

$$l'' = 0 \ldots m'' = 1 \ldots n'' = 0,$$

$$l''' = 0 \ldots m''' = 0 \ldots n''' = 1,$$

ciò che riduce i valori delle componenti a

$$\delta'\omega = l\delta\omega \ldots \delta''\omega = m\delta\omega \ldots \delta'''\omega = n\delta\omega,$$

$$(34) \quad \ldots \begin{cases} \delta' P = l\delta P - \delta\omega(e - (n\beta - m\gamma)), \\ \delta'' P = m\delta P - \delta\omega(f - (l\gamma - n\alpha)), \\ \delta''' P = n\delta P - \delta\omega(g - (m\alpha - l\beta)), \end{cases}$$

le quali finalmente, se gli assi dei movimenti componenti si confondono con quelli delle coordinate, cioè se $\alpha = 0$.. $\beta = 0$... $\gamma = 0$, divengono

$$(35)\ .\ .\ \begin{cases} \delta'\omega = l\delta\omega\ .\ .\ .\ \delta''\omega = m\delta\omega\ .\ .\ .\ \delta'''\omega = n\delta\omega, \\ \delta'\mathrm{P} = l\delta\mathrm{P} - e\delta\omega\ .\ .\ \delta''\mathrm{P} = m\delta\mathrm{P} - f\delta\omega\ .\ .\ \delta'''\omega = n\delta\mathrm{P} - g\delta\omega; \end{cases}$$

formole che serviranno alla decomposizione di un movimento in tre altri aventi per assi quelli delle coordinate x, y, z.

40. Prima di abbandonare questo argomento faremo una osservazione alla quale ci richiama naturalmente la forma dell' equazioni generali (13), (14) paragonata con quella delle ultime trovate all' articolo antecedente. Decomporremo per metterla in maggiore evidenza tanto il movimento risultante δ, quanto i movimenti componenti δ', δ'', δ''' ec. ciascheduno in tre altri, i quali abbiano per assi del moto quelli delle coordinate. Quindi adotteremo a scanso di equivoci le caratteristiche

$$\delta_x,\ \delta_y,\ \delta_z,$$

$$\delta'_x,\ \delta'_y,\ \delta'_z,$$

$$\delta''_x,\ \delta''_y,\ \delta''_z,$$

ec. ec.

per indicarci le componenti dei movimenti δ, δ', δ'' ec. respettivamente relativi agli assi x, y, z. Le formole (35) ci daranno

$$l\delta\omega = \delta_x\omega,\quad l'\delta'\omega = \delta'_x\omega,\quad l''\delta''\omega = \delta''_x\omega,\ \text{ec.}$$

$$m\delta\omega = \delta_y\omega,\quad m'\delta'\omega = \delta'_y\omega,\quad m''\delta''\omega = \delta''_y\omega,$$

$$n\delta\omega = \delta_z\omega,\quad n'\delta'\omega = \delta'_z\omega,\quad n''\delta''\omega = \delta''_z\omega,$$

ed

$$l\delta P - e\delta\omega = \delta_x P, \quad l'\delta' P - e'\delta'\omega = \delta'_x P, \quad l''\delta'' P - e''\delta''\omega = \delta''_x P,$$

$$m\delta P - f\delta\omega = \delta_y P, \quad m'\delta' P - f'\delta'\omega = \delta'_y P, \quad m''\delta'' P - f''\delta''\omega = \delta''_y P,$$

$$n\delta P - g\delta\omega = \delta_z P, \quad n'\delta' P - g'\delta'\omega = \delta'_z P, \quad n''\delta'' P - g''\delta''\omega = \delta''_z P,$$

e perciò le formole (13) e (14) si potranno scrivere nel modo seguente

$$\delta_x \omega = \delta'_x \omega + \delta''_x \omega + \delta'''_x \omega + \text{ec.},$$

$$\delta_y \omega = \delta'_y \omega + \delta''_y \omega + \delta'''_y \omega + \text{ec.},$$

$$\delta_z \omega = \delta'_z \omega + \delta''_z \omega + \delta'''_z \omega + \text{ec.}$$

$$\delta_x P = \delta'_x P + \delta''_x P + \delta'''_x P + \text{ec.},$$

$$\delta_y P = \delta'_y P + \delta''_y P + \delta'''_y P + \text{ec.},$$

$$\delta_z P = \delta'_z P + \delta''_z P + \delta'''_z P + \text{ec.}$$

e corrisponderanno al seguente teorema nel quale l'analogia tralle traslazioni e le rotazioni è perfetta. *Se il movimento δ è risultante di un qualsivoglia numero di movimenti δ', δ'', δ''' ec. e che tutti questi movimenti vengano decomposti ciascheduno in altri tre dei quali gli assi siano tre rette rettangolari tra loro, la componente, sia di traslazione, sia di rotazione del movimento δ relativa ad uno dei tre assi rettangolari è uguale alla somma delle corrispondenti componenti, sia di traslazione, sia di rotazione dei movimenti δ', δ'', δ'''* ec.

41. Per dare attualmente una applicazione della esposta teoria, riprendiamo le formole trattate nella prima parte di questa Memoria relative al movimento di un sistema di forma invariabile.

Ricordiamoci che supponendo il movimento determinato dalle variazioni delle quantità a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', α, β, γ, le quali determinano la posizione dei tre assi x_{I}, y_{I}, z_{I} invariabilmente rilegati al sistema, l'asse del moto è rappresentato dall' equazioni (29) dell' articolo 14, la traslazione è espressa dall' equazione (28) dello stesso articolo, e la rotazione dall' equazione (31) del susseguente articolo 18. Quindi proponiamoci di decomporre il movimento di cui si tratta in tre altri aventi per assi gli assi rettangolari delle x, y, z.

Dovremo per ciò far uso delle formole (35) dell' articolo 39, facendo prima coincidere l'asse del movimento rappresentato dall' equazioni (29) dell' articolo 14 colla retta rappresentata dall' equazioni

$$ny - mz = e,$$
$$lz - nx = f,$$
$$mx - ny = g,$$

che nell'articolo 39 è l' asse del movimento, di cui si vuol operare la decomposizione. Per far coincidere queste rette dovremo adunque come abbiamo veduto all' articolo 20, scrivere le equazioni

$$l = \frac{\delta p}{\delta \omega} \qquad m = \frac{\delta q}{\delta \omega} \qquad n = \frac{\delta r}{\delta \omega};$$

$$e = \frac{\beta\delta r - \gamma\delta q - \delta a}{\delta \omega} + \frac{\delta p \delta \mathrm{P}}{\delta \omega^2},$$

$$f = \frac{\gamma\delta p - a\delta r - \delta\beta}{\delta \omega} + \frac{\delta q \delta \mathrm{P}}{\delta \omega^2},$$

$$g = \frac{a\delta q - \beta\delta p - \delta\gamma}{\delta \omega} + \frac{\delta r \delta \mathrm{P}}{\delta \omega^2},$$

le quali, fatte le sostituzioni nell' equazioni (35) trasformate

in conformità della notazione introdotta all' articolo 40, daranno per le componenti cercate

$$(36)\ \ldots \begin{cases} \delta_x \omega = \delta p \ldots \delta_y \omega = \delta q \ldots \delta_z \omega = \delta r; \\ \delta_x \mathrm{P} = \delta \alpha - (\beta \delta r - \gamma \delta q), \\ \delta_y \mathrm{P} = \delta \beta - (\gamma \delta p - \alpha \delta r), \\ \delta_z \mathrm{P} = \delta \gamma - (\alpha \delta q - \beta \delta p); \end{cases}$$

e qui osserveremo che invece delle tre ultime equazioni, in forza delle formole (32) dell' articolo 19, potremo sostituire le altre tre

$$\delta_x \mathrm{P} = \delta x - (y \delta r - z \delta q),$$
$$\delta_y \mathrm{P} = \delta y - (z \delta p - x \delta r),$$
$$\delta_z \mathrm{P} = \delta z - (x \delta q - y \delta p);$$

le quali danno le tre traslazioni componenti per mezzo delle coordinate di un qualsivoglia punto del sistema di forma invariabile, e delle loro variazioni.

42. Qualora poi si volessero avere le componenti dell'indicato movimento, prendendo gli assi x_1, y_1, z_1 per assi di tali componenti, si dovrebbero adoprare le formole (32) e (33) dell' articolo 39. Perciò, sostituiti i valori di l, m, n, e, f, g, in quelli di E, F, G contemplati all' indicato articolo, troveremo

$$\mathrm{E} = \frac{\delta p \delta \mathrm{P}}{\delta \omega^2} - \frac{\delta \alpha}{\delta \omega},$$

$$\mathrm{F} = \frac{\delta q \delta \mathrm{P}}{\delta \omega^2} - \frac{\delta \beta}{\delta \omega},$$

$$\mathrm{G} = \frac{\delta r \delta \mathrm{P}}{\delta \omega^2} - \frac{\delta \gamma}{\delta \omega},$$

e considerando che per effettuare l' applicazione delle citate formole (32) e (33) al caso presente dovremo porre

$$l' = a \ldots m' = a' \ldots n' = a'',$$

$$l'' = b \ldots m'' = b' \ldots n'' = b'',$$

$$l''' = c \ldots m''' = c' \ldots n''' = c'';$$

fatte le sostituzioni, ed eseguite le riduzioni, ricordandoci che per le formole (21) dell' articolo 7 si hanno

$$\delta p' = a\delta p + a'\delta q + a''\delta r,$$

$$\delta q' = b\delta p + b'\delta q + b''\delta r,$$

$$\delta r' = c\delta p + c'\delta q + c''\delta r;$$

troveremo

$$(37) \ldots \begin{cases} \delta_{x_1}\varpi = \delta p' \ldots \delta_{y_1}\varpi = \delta q' \ldots \delta_{z_1}\varpi = \delta r'; \\ \delta_{x_1} \mathrm{P} = a\delta\alpha + a'\delta\beta + a''\delta\gamma, \\ \delta_{y_1} \mathrm{P} = b\delta\alpha + b'\delta\beta + b''\delta\gamma, \\ \delta_{z_1} \mathrm{P} = c\delta\alpha + c'\delta\beta + c''\delta\gamma, \end{cases}$$

formole le quali servono alla decomposizione del movimento in tre altri i quali hanno per assi quelli delle coordinate x_1, y_1, z_1.

43. A render completa questa serie di formole, avvertiremo finalmente che la combinazione dell' equazioni (36) e (37), eliminando δp, δq, δr, $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, darà le seguenti

$$\delta_{x_1}\omega = a\delta_x\omega + a'\delta_y\omega + a''\delta_z\omega,$$

$$\delta_{y_1}\omega = b\delta_x\omega + b'\delta_y\omega + b''\delta_z\omega,$$

$$\delta_{z_1}\omega = c\delta_x\omega + c'\delta_y\omega + c''\delta_z\omega;$$

$$\delta_{x_1}\mathrm{P} = a\delta_x\mathrm{P} + a'\delta_y\mathrm{P} + a''\delta_z\mathrm{P} + \delta_x\omega(a'\gamma - a''\beta)$$
$$+ \delta_y\omega(a''\alpha - a\gamma) + \delta_z\omega(a\beta - a'\alpha),$$

$$\delta_{y_1}\mathrm{P} = b\delta_x\mathrm{P} + b'\delta_y\mathrm{P} + b''\delta_z\mathrm{P} + \delta_x\omega(b'\gamma - b''\beta)$$
$$+ \delta_y\omega(b''\alpha - b\gamma) + \delta_z\omega(b\beta - b'\alpha),$$

$$\delta_{z_1}\mathrm{P} = c\delta_x\mathrm{P} + c'\delta_y\mathrm{P} + c''\delta_z\mathrm{P} + \delta_x\omega(c'\gamma - c''\beta)$$
$$+ \delta_y\omega(c''\alpha - c\gamma) + \delta_z\omega(c\beta - c'\alpha);$$

le quali serviranno a trasformare un sistema di movimenti componenti di cui gli assi sieno rettangolari, in un altro sistema di movimenti componenti parimenti rettangolari.

44. Colle proposizioni dimostrate in questa seconda parte della nostra Memoria, ci sembra aver dato alla teoria della composizione dei movimenti tutta la generalità desiderabile, completando ed estendendo ad un qualsivoglia movimento le formole del Lagrange (*a*) per la decomposizione dei movimenti di rotazione attorno ad un punto fisso.

(*a*) Mécanique Analitique. Paris 1811 Tome I. pag. 57. et suivantes.

APPENDICE
ALLA
MEMORIA
INTORNO ALLE PROPRIETÀ GEOMETRICHE
DEL MOVIMENTO
DI UN SISTEMA DI FORMA INVARIABILE

DEL CAVALIERE GAETANO GIORGINI.

Ricevuta adì 3. Febbrajo 1832.

1. Da qualche tempo io aveva trasmessa a Modena, per essere inserita negli atti della Società Italiana la mia Memoria sopra le proprietà geometriche del movimento infinitesimo di un sistema rigido, quando, per suggerimento del mio egregio amico Cav. Giuliano Frullani, feci ricerca dell'opuscolo del Cav. Giulio Mozzi Patrizio Fiorentino, pubblicato in Napoli nel 1763, col titolo di *Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi*, del quale non aveva avuta per lo innanzi veruna notizia. Dalla lettura di quell' opuscolo interessante rilevai come all' autore di esso sia dovuto il Teorema fondamentale della teoria dei movimenti infinitamente piccoli dei corpi solidi, da me analiticamente esposto nell' accennata memoria, che cioè:

Qualunque movimento infinitamente piccolo di un sistema di forma invariabile si riduce alla traslazione del sistema parallelamente ad una determinata retta, ed alla simultanea rotazione di esso attorno alla retta medesima.

È però vero che la dimostrazione del Mozzi non è rigorosa: essa è fondata sull' erronea supposizione che un movimento infinitesimo di rotazione di un corpo solido attorno ad

un punto fisso, sia determinato dall' archetto descritto da un sol punto del corpo, mentre questo elemento infinitesimo della curva descritta dal punto non può esser bastante a determinare il piano di rotazione di esso; nè la decomposizione di questo archetto infinitamente piccolo in due piccole rette, per questo effetto immaginata dal Mozzi, è per verun conto ammissibile.

2. Per questa ragione, sebbene la dimostrazione analitica datane nella mia memoria non manchi, per quanto a me pare, del necessario rigore, volli sull' esempio del Mozzi, e per mio esercizio, ricercare una dimostrazione sintetica del Teorema, ed in questa ricerca mi avvenne di estenderlo ad ogni traslocamento anche finito di un corpo. Aveva comunicato questo risultato al prelodato Cav. Frullani, quando per lettera di altro mio dotto amico di Francia, il Sig. Michele Chasles, e successivamente per l'annunzio che egli ne fece al pubblico nel Fascicolo di Novembre del Bullettino delle Scienze del Barone di Ferrussac per l' anno 1830, appresi che anche esso era dal canto suo arrivato al medesimo teorema, come corollario di altre più estese ricerche geometriche sopra i corpi solidi simili, delle quali l'indicato bullettino contiene enunciati soltanto i risultati principali.

Siccome ciò non ostante una dimostrazione diretta può riuscire di qualche interesse, esporrò in questa appendice la mia, la quale appoggiandosi unicamente alla geometria più elementare, può essere atta a facilitare l'applicazione del Teorema alla Tecnologia pratica.

3. Premesse queste dichiarazioni, ecco l' enunciato della proposizione oggetto di questa Appendice.

Teorema. *Un corpo solido, o sistema rigido di punti, può sempre esser condotto da una data posizione in un' altra qualsivoglia diversa, mediante un movimento continuo analogo a quello della vite; cioè a dire di traslazione nella direzione di una determinata retta, e di rotazione simultanea attorno alla retta medesima.*

4. Prima di procedere alla dimostrazione, osserveremo che un sistema rigido di punti, tutti collocati in un medesimo piano, è dato di posizione nel piano, allorquando si conosce quella di due dati punti di esso sistema, ai quali tutti gli altri sieno riferiti; e che similmente la posizione di un dato corpo solido nello spazio è pure determinata da quella di tre punti dati di esso.

Premessa questa osservazione passeremo ad esporre i Lemmi seguenti.

Lemma 1.° ABC ec. A'B'C' ec. *indicando* (*Fig.* 1.) *due diverse posizioni in un medesimo piano di un sistema rigido di punti, si potrà sempre dalla prima passare nella seconda posizione, mediante una semplice rotazione del sistema attorno ad un punto fisso* O *del piano.*

Per la sovra espressa osservazione, basterà mostrare che i due punti A, B possono essere trasportati nell' altra loro posizione A', B' mediante l'indicata rotazione. A questo effetto sia R il punto d' incontro delle rette AB, A'B': si costruisca la circonferenza di circolo, che passa per i tre punti R, A ed A'; quindi l' altra circonferenza analoga condotta per i tre punti R, B e B'. Sia O il secondo punto d' incontro delle due circonferenze; dico che questo sarà il centro della rotazione indicata. Di fatti se consideriamo i triangoli OAB, OA'B', troveremo, che il lato AB dell' uno è eguale al lato A'B' dell' altro. Che l' angolo OAB è eguale al suo corrispondente OA'B', essendo ambedue per costruzione i supplementi del medesimo angolo OA'R: che similmente gli angoli OBA, OB'A' sono eguali, come supplementi l'uno e l'altro del medesimo angolo OBR: quindi concluderemo che i due indicati triangoli sono eguali come aventi due lati eguali tra loro adiacenti ad angoli respettivamente eguali. Facendo adunque ruotare il triangolo OAB attorno al punto O, quando il lato OA sarà arrivato sopra il suo eguale OA', il lato OB sarà venuto a posarsi sopra il suo eguale OB'; quindi il sistema rigido supposto invariabilmente rilegato ai punti A, B, dalla posizione

ABC ec. sarà passato all'altra posizione A'B'C' ec., ruotando attorno al punto O; ciocchè si voleva dimostrare.

E inutile avvertire che il Lemma precedente suppone non solamente l'eguaglianza delle parti, ma anche quella della disposizione di esse nelle due figure ABC ec. A'B'C' ec., non bastando evidentemente a costituire l'identità del sistema rigido nelle due posizioni una semplice eguaglianza di simmetrie delle parti, le quali sarebbero in questo caso disposte in un ordine inverso.

5. Da quanto abbiamo dimostrato nel precedente articolo dedurremo che, qualora il sistema rigido comprenda oltre i punti situati in un medesimo piano nelle due posizioni, anche altri punti fuori del piano; l'indicato movimento di rotazione attorno al punto O dei punti A, B, C ec. situati nell'accennato piano strascinerà tutto il sistema rigido in un corrispondente moto di rotazione attorno ad una retta condotta per il punto O perpendicolarmente a quel piano, per modo che i punti A, B, C essendo passati in A', B', C', tutti gli altri punti del sistema rigido nella prima posizione saranno pure venuti a coincidere coi loro corrispondenti nella seconda: d'onde potremo inferire il Lemma 2.° *Se tre punti* A, B, C *di un corpo solido ed i loro corrispondenti* A', B', C' *in una seconda posizione di esso sono posti in un medesimo piano* P, *il corpo solido potrà sempre esser condotto dalla prima nella seconda posizione, mediante un movimento di semplice rotazione attorno ad un asse fisso perpendicolare al piano* P.

6. Suppongasi adesso (*Fig.* 2.) che i punti A, B, C; A', B', C' non essendo nel medesimo piano, si abbassino da essi sopra un piano dato P le perpendicolari A*a*, B*b*, C*c*; A'*a*', B'*b*', C'*c*', e che *a*, *b*, *c*, *a*', *b*', *c*' essendo i piedi di queste perpendicolari nel piano P, siano ordinatamente tali perpendicolari A*a*, B*b*, C*c* eguali alle loro corrispondenti A'*a*', B'*b*', C'*c*'; dico che in questa ipotesi i due triangoli *abc*, *a'b'c'* saranno eguali. E di fatti per i due punti A ed A' si conducano alle linee B*b*, B'*b*' le perpendicolari A*p* ed A'*p*': esse saranno evi-

dentemente eguali ai lati ab ed $a'b'$ dei due menzionati triangoli. Di più si osservi che le linee Bp, $B'p'$ eguali respettivamente alle differenze $Bb-Aa \ldots B'b'-A'a'$ sono eguali tra loro, poichè per supposizione $Bb=B'b'$ ed $Aa=A'a'$. Ne concluderemo che i due triangoli rettangoli ApB, $A'p'B'$ avendo le ipotenuse AB, $A'B'$ eguali, ed i lati Bp' e Bp' pure eguali tra loro, sono eguali, e che in conseguenza il lato Ap dell'uno è eguale al lato $A'p'$ dell' altro. Ma già abbiamo detto che

$$ab = Ap \ldots a'b' = A'p',$$

dunque il lato ab del triangolo abc è eguale al lato $a'b'$ del triangolo $a'b'c'$. Si mostrerebbe nello stesso modo che i lati bc, ca sono eguali ai lati $b'c'$, e $a'c'$. Quindi i triangoli stessi sono eguali come già si era annunziato.

Ciò posto, determinato nel piano P, come nel Lemma 1. il centro O di rotazione dei due anzidetti triangoli eguali abc, $a'b'c'$, se immaginiamo i tre punti A, B, C del corpo solido, e però il corpo solido stesso invariabilmente rilegati ai punti a, b, c; e che in conseguenza mentre il triangolo abc ruota nel piano P attorno al centro O, il solido ruoti attorno ad un' asse OX condotto per O perpendicolarmente al piano P; allorquando il triangolo abc sarà arrivato nella posizione $a'b'c'$, le perpendicolari Aa, Bb, Cc saranno venute a coincidere colle loro eguali $A'a'$, $B'b'$, $C'c'$, i punti A, B, C coi punti A', B', C', ed il corpo solido sarà passato dalla prima nella seconda posizione. Siamo perciò in diritto di concludere che:

Lemma 3.° *Allorquando le distanze di tre punti* A, B, C *di un corpo solido da un piano* P, *sono eguali respettivamente alle distanze dal piano medesimo dei tre punti corrispondenti* A', B', C' *dello stesso solido in una seconda posizione; questo corpo si potrà sempre condurre dalla prima nella seconda posizione anzidetta, per mezzo di una semplice rotazione attorno ad un asse perpendicolare al piano* P.

7. Ci proporremo adesso di mostrare che;

Lemma 4.° *Se* A, B, C; A', B', C' (*Fig.* 3.ª) *indicano tre punti corrispondenti a due diverse posizioni di un medesimo solido, si potrà sempre determinare un piano* P *tale, che abbassate dai punti* A, B, C, *e dai corrispondenti* A', B', C' *sopra di esso altrettante perpendicolari, le tre differenze delle perpendicolari condotte dai punti corrispondenti nelle due posizioni siano eguali tra loro.*

Si conducano difatti le rette AA', BB', CC', che uniscono i tre punti corrispondenti nelle due posizioni: quindi per un punto Q scelto a volontà, s'immaginino tre rette QL, QM, QN ordinatamente eguali alle tre preindicate AA', BB', CC'; il piano LMN che conterrà le tre estremità di tali rette sarà il piano P. Per farlo vedere, conducasi dal punto Q sopra questo piano la perpendicolare QR, della quale R sia il piede; poi dai punti A, B, C; A', B', C', si abbassino le perpendicolari Aa, Bb, Cc; A'a', B'b', C'c' sopra il medesimo piano LMN; e per i punti A', B', C' sopra le rette Aa, Bb, Cc le perpendicolari A'A'', B'B'', C'C'', delle quali A'', B'', C'', essendo i piedi, avremo evidentemente

$$AA'' = Aa - A'a' \ldots BB'' = Bb - B'b' \ldots CC'' = Cc - C'c'.$$

Ciò posto, le linee QL e QR essendo per costruzione respettivamente parallele alle linee AA', AA'', gli angoli LQR, A'AA'' sono eguali, ed in conseguenza sono eguali anche i triangoli rettangoli QRL, AA''A' come aventi le ipotenuse QL, ed AA' eguali, e gli angoli LQR, A'AA'' eguali. Nè risulta che

$$QR = AA'' = Aa - A'a':$$

in modo del tutto analogo si prova che

$$QR = BB'' = Bb - B'b',$$

$$QR = CC'' = Cc - C'c';$$

e quindi se ne deduce che le tre differenze $Aa-A'a'$, $Bb-B'b'$, $Cc-C'c'$ sono eguali; ciocchè dimostra che il piano LMN soddisfà alle condizioni imposte al piano P nell' enunciato del Lemma, e che in conseguenza questo piano P esiste sempre, come si doveva provare.

8. Premesse queste proposizioni, e qualunque sieno le due posizioni ABC, A'B'C' del corpo solido, determinato colla costruzione indicata all' articolo antecedente il piano P, tale che abbassate sopra di esso le perpendicolari Aa, Bb, Cc; $A'a'$, $B'b'$, $C'c'$, le tre differenze $AA''=Aa-A'a'$, $BB''=Bb-B'b'$, $CC''=Cc-C'c'$, sieno eguali tra loro; si potrà immaginare che partendo dalla prima posizione ABC il solido, prenda un movimento di traslazione verso il piano P, tale che i punti A, B, C scorrano perpendicolarmente ad esso piano per spazi eguali alle accennate differenze, e vengano a coincidere coi punti A'', B'', C''.

Dopo questo movimento le indicate differenze essendosi annullate il corpo solido sarà arrivato ad una posizione intermedia A''B''C'', nella quale i punti A'', B'', C'' si troveranno alla medesima distanza dal piano P, che i punti corrispondenti A', B', C' della posizione A'B'C'. Quindi in virtù del Lemma 3.° il corpo solido potrà passare da questa posizione A''B''C'', alla posizione A'B'C' mediante una semplice rotazione attorno ad un asse perpendicolare al piano P.

È dunque provato che un corpo solido può esser condotto da una posizione qualunque ad un altra pure qualunque, mediante due consecutivi movimenti, l'uno di traslazione parallelamente ad una determinata retta, l' altro di rotazione attorno alla retta medesima. Quindi egli è pure evidente che invece di fare consecutivi i due movimenti sopra descritti, si potranno operare simultanei come nella vite, ciocchè costituisce il teorema che ci eramo proposti di dimostrare, enunciato all' articolo 3.°

9. Le proposizioni esposte conducono ad altre relative alla traslocazione dei corpi solidi. Basterà enunciare le seguenti per riconoscerne la dipendenza.

Fig. 1.

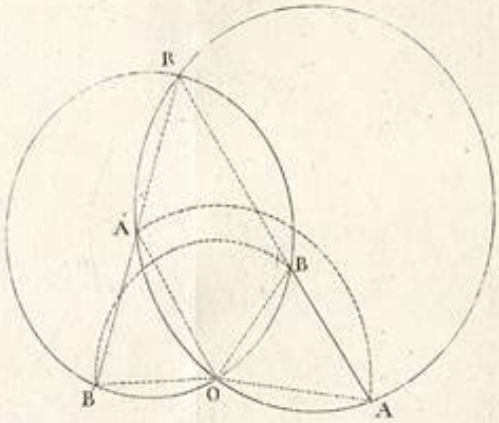


Fig. 2.

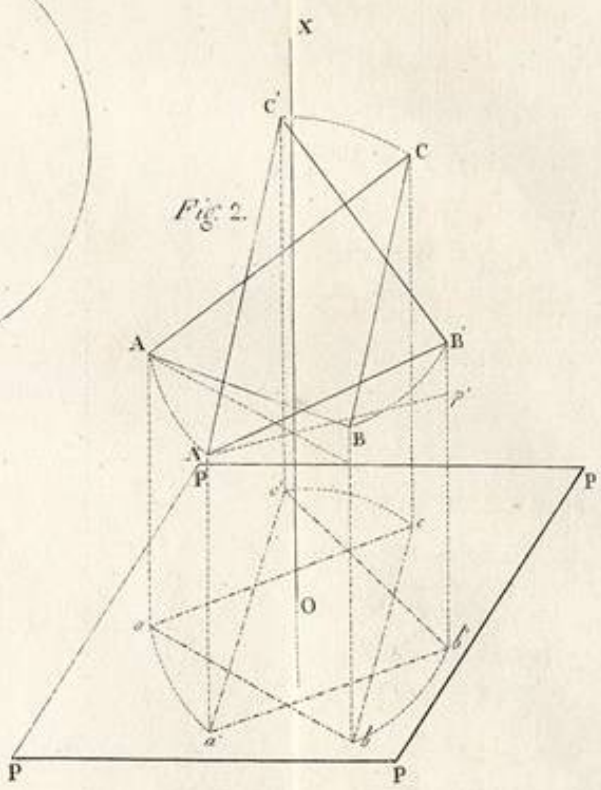
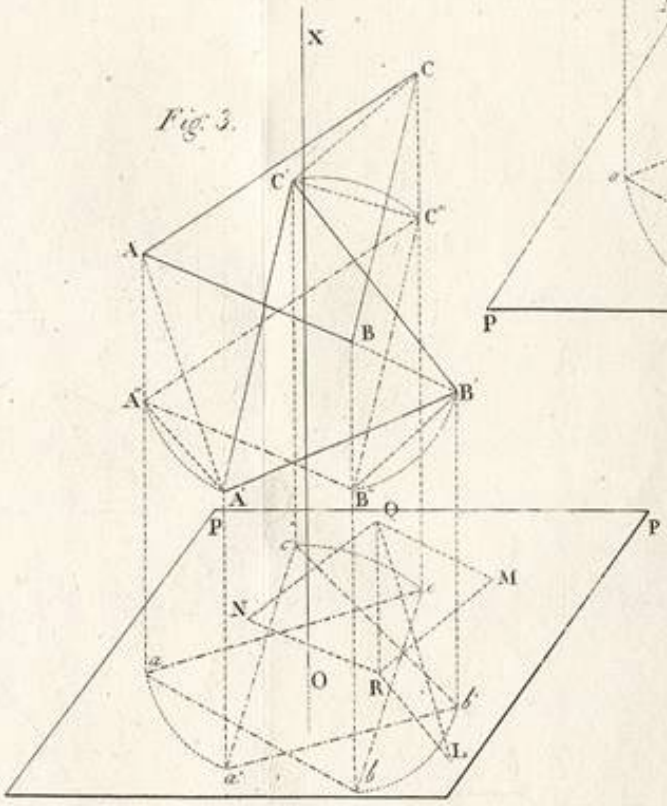


Fig. 3.



1.° *Sarà sempre possibile di determinare un piano tale che le projezioni sopra di esso delle figure eguali corrispondenti, prese due posizioni diverse di un corpo solido, sieno esse pure figure eguali.*

2.° *Un corpo solido può essere in numero indefinito di modi condotto da una posizione data in altra qualsivoglia posizione parimente data, per mezzo di due movimenti consecutivi uno di traslazione, l' altro di rotazione.*

Il primo potrà seguire una qualsivoglia direzione.

Il secondo potrà essere operato attorno ad una qualunque delle rette perpendicolari al piano P *determinato come nel Lemma* 4.°

La direzione però della traslazione, e la posizione dell'asse della rotazione dipenderanno l' uno dall' altro in modo che la projezione della linea percorsa nella traslazione sopra l' asse di rotazione sia costante; che data la direzione della traslazione, se ne deduca l' asse di rotazione e vice-versa; che la quantità angolare della rotazione sia la medesima per qualunque asse di rotazione.

10. Finiremo questa appendice coll'osservare, che le proposizioni dimostrate danno luogo ad altrettanti problemi grafici di possibile applicazione nella tecnologia pratica. Così per esempio al teorema oggetto principale di questo scritto corrisponde il problema seguente. *Date due diverse posizioni di un corpo solido, determinare l' asse della vite ed il rapporto della rotazione alla traslazione, ossia il passo della vite medesima, alla quale converrebbe supporre il corpo invariabilmente rilegato per condurlo dall' una nell' altra posizione.*

E la soluzione di questa e di altre analoghe questioni non presenterà altra difficoltà, che quella del tutto grafica dell' applicazione degli ordinari processi della Geometria Descrittiva alle costruzioni indicate nei Lemmi sopra riferiti.