### SULLA TEORIA

## DELLE FUNZIONI DISCONTINUE.

# MEMORIA

DI GABRIO PIOLA

Ricevuta adi 23. Aprile 1830.

Se attentamente si considerano i recenti progressi dell'analisi, pare che il filosofo amico unicamente delle utili cognizioni possa distinguerne due parti, e porre nella prima alcune teoriche di sottile invenzione ma di cui non saprebbesi per avventura ben prevedere quale debba essere finalmente lo scopo, e raccogliere nella seconda le vere scoperte d'onde la scienza può sperare maggiori e sempre crescenti vantaggi. Fra quest' ultime tengono, se io non m' inganno, posto primario quelle dottrine sulla discontinuità delle funzioni che promosse da alcuni grandi viventi Geometri, furono immediatamente trovate di somma utilità nei più intralciati problemi di fisica matematica: e non è forse illusione il pensare che il meglio di esse ancora s'ignori, e che venendo quanto che sia a prodursi con pienezza d'insegnamento, debba l'effetto superare di molto l'aspettativa. A dare per tanta impresa qualche avviamento secondo la mia possibilità, è diretta la presente memoria, in cui mi propongo: primieramente di dichiarare l'indole delle questioni con una metafisica facile che contenga il principio di una persuadente dimostrazione: in secondo luogo d'indicare come ciò che finora in tale materia è stato trovato, si possa prestamente dedurre dalle formole generali col metodo che verrò sponendo: per ultimo di mostrare come si giunga a dare al calcolo un andamento più largo di quello finora usato, e così ad aprire nuove vie per simili ricerche.

## Dichiarazione del principio di Discontinuità nelle Funzioni.

1. Ad una variabile in una formola si può attribuire un numero indefinito di valori, di cui ciascuno può differire dall' antecedente e dal seguente meno d'ogni quantità assegnabile. Questa maniera di dire è sinonima ma forse più chiara dell' altra comunemente usata, che i valori della variabile crescono o calano per gradi insensibili. Una variabile la quale nella questione che si ha di mira deve prendere una tale successione di valori, dicesi avere un corso continuo. Or ecco un principio fondamentale nella presente teorica; se il corso della variabile è da - ∞ a + ∞, certamente il numero dei valori diversi ch' essa può prendere è matematicamente infinito: ma è infinito anche il numero dei valori diversi che può prendere la variabile nel suo corso particolare fra due limiti a, b grandezze finite di cui la seconda supera per ipotesi la prima di una differenza assegnabile: di più se questo tratto si divide in un numero finito di parti, è infinito anche il numero dei valori diversi possibili a prendersi dalla variabile dentro il solo tratto che corrisponde ad una di queste parti. Così per assegnare un numero matematicamente infinito di punti in una retta, non è necessario che la retta si estenda all'infinito da ambe le estremità: anche in un brevissimo pezzo di essa, purchè sia di finita lunghezza, è infinito il numero dei punti che vi si possono distinguere, se non coll'atto certamente col pensiero.

a. Le equazioni identiche, nelle quali i due membri sono formole diverse di forma ma eguali di valore, sussistono in generale per tutti i valori possibili delle variabili da — ∞ a + ∞, ed anche immaginari. È vero che si dà qualche caso di eccezione: per esempio l' equazione tra la funzione di una variabile e il suo sviluppo colla serie di Taylor può di-

venir falsa, come è notissimo, per alcuni valori particolari della variabile. È vero altresì che le equazioni identiche le quali, come quella ultimamente nominata, hanno in un membro una funzione sotto forma finita e nell' altro una serie infinita, si devono ritenere erronee (1) per tutti i valori particolari della variabile che producono nelle serie infinite la divergenza. Però queste speculazioni sono di tutt'altro genere di quelle che quì ci conducono a stabilire una proposizione, la quale sul principio fa qualche urto a motivo della sua singolarità, ma trovasi di verità inconcussa e di estrema importanza. Si danno equazioni che sussistono solamente pel corso delle variabili fra limiti la cui differenza è una quantità finita. Così se trattasi di una sola variabile x, l'equazione sarà vera solamente per tutto il tratto finito della x fra certi limiti a, b, e sarà falsa pei valori di x antecedenti ad a, e per quelli susseguenti a b. Una tale proposizione servendo di base a tutta la teorica che ho preso ad esporre, merita di essere con diligenza esaminata e riconosciuta. Parmi che non si possa contrastare al Sig. Fourier la gloria di averne data la vera dimostrazione: ed ora io non farò che seguire in una maniera generale quello stesso andamento che il detto Geometra ha tracciato per un caso particolare (2). Nè può essere senza sorpresa il vedere come una verità rimasta per tanto tempo così recondita, emerga da assai facili considerazioni sulla natura delle equazioni lineari a più incognite.

3. Vuolsi una equazione tra una funzione qualunque  $\phi(x)$  e una serie che ne' suoi termini contenga la stessa x, e vuolsi che questa equazione sia vera unicamente pei valori di x compresi fra a, b. Si assuma un'altra funzione  $\psi_{n}(x)$  di x e di un indice n numero intero, la cui forma  $\psi_{n}$  is in origine entitaria e indipendente dalla forma  $\phi$ : si divida per n la dif-

<sup>(1)</sup> Poisson, Journal de l'Ecole Polyt, Cah. 19, pag. 501. (2) Theorie de la Chaleur, Chep. III, Sect. VI.

576 Sulla Teoria delle Funzioni ec. ferenza b-a dei due limiti e si ponga per abbreviazione

$$o = \frac{b-a}{n};$$

poscia si formi un quadro di equazioni come segue

$$\phi(a) = A_{_1}\psi_{_1}(a) + A_{_3}\psi_{_3}(a) + A_{_3}\psi_{_3}(a) + \cdots + A_{_{n+1}}\psi_{_{n+1}}(a)$$

$$\begin{split} \vec{\phi}(a+o) &= & \mathbb{A}_{_1} \psi_{_1}(a+o) \ + \mathbb{A}_{_2} \psi_{_2}(a+o) \ + \mathbb{A}_{_3} \psi_{_3}(a+o) \ + \cdots \\ & \cdots \cdot + \mathbb{A}_{_{n+1}} \psi_{_{n+1}}(a+o) \end{split}$$

$$\phi(a+2o) = \Lambda_1 \psi_1(a+2o) + \Lambda_2 \psi_2(a+2o) + \Lambda_3 \psi_3(a+2o) + \dots + \Lambda_{n+1} \psi_{n+1}(a+2o)$$

$$\phi(a+3o) = \Lambda_1 \psi_1(a+3o) + \Lambda_2 \psi_2(a+3o) + \Lambda_3 \psi_3(a+3o) + \dots$$
  
 $\dots + \Lambda_{n+1} \psi_{n+1}(a+3o)$ 

$$\begin{split} \dot{\phi}(a+(n-\iota)\phi) &= \Lambda_{_1}\psi_{_1}(a+(n-\iota)\phi) + \Lambda_{_2}\psi_{_2}(a+(n-\iota)\phi) \\ &+ \Lambda_{_3}\psi_{_3}(a+(n-\iota)\phi) + .... + \Lambda_{_{n+\iota}}\psi_{_{n+\iota}}(a+(n-\iota)\phi) \end{split}$$

$$\phi(b) = A_{_1}\psi_{_1}(b) + A_{_2}\psi_{_2}(b) + A_{_3}\psi_{_3}(b) + \cdots$$
 $\cdots + A = \psi_{_{-1}}(b)$ 

Quì  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$ ,  $\Lambda_3$ , ...,  $\Lambda_{n+1}$  sono coefficienti incogniti da determinarsi, o siccome essi sono di numero n+1 precisamente come le equazioni, si vede che la loro determinaziono può sempre intendersi come fatta: nella quale supposizone i medesimi coefficienti risecomo quantità che dipendono

no da cinque cose: dalle due forme  $\phi, \psi$ , da due limiti a, b, e da lummero n per cui è divisa la differenza b-a. So ora nelle precedenti equazioni (a) si sostituiscano ai coefficienti incogniti i loro valori determinati come si è detto, è manifesto che tutte quelle equazioni diventeranno identiche: il che è lo stesso che dire in altri termini; l'e quazione

(3) 
$$\phi(x) = A_1 \psi_1(x) + A_2 \psi_2(x) + A_3 \psi_3(x) + .... + A_{n+1} \psi_{n+1}(x)$$

ove  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ..... $A_{n+1}$  s'intendono avere i valori costanti trovati come fu esposto, è *vera* per gli n+1 valori di x seguenti,

 $a, a+o, a+2o, a+3o, \dots a+(n-1)o, b$ 

e per tutti gli altri valori di x prima di a o dopo b o intermedj fra a, a+v: a+v, a-v=a: a-v, a-3v: c. l' equazione (3) non sussiste e deve dirsi falsa. Onde fissar meglio le idee, se nella (3) i due membri rappresentano le ordinate di due curve piane rificrite agli stessi assi, queste curve avrano un numero n+1 di punti d'incontro corrispondenti agli altri valori dell' ascissa x ultimamente scritti; per tutti gli altri valori dell' ascissa x ultimamente scritti; per tutti gli altri valori dell' ascissa le ordinate saranno diverse, e i corsi delle curve sranno distriti; ben è vero che moltiplicando i punti d'incontro ne verrà di conseguenza che i detti corsi delle due curve fra i limiti a, b che esprimono le ascisse estreme, si approssimeranno sempreppiù verso la coincidenza.

4. Quanto più è grande nella (1) il numero x, tanto più grande è il numero delle equazioni (2), e quindi tanto maggiore è il numero dei valori di x intermed] fra a, b per cui si verifica l' equazione (3). Il problema è sempre solubile anche quando n' diventa numero grandissimo, perchè insieme col numero delle equazioni (2) cresce in esse quello dei coeficienti da determinaris, e vi è sempre eguale. Si vede perciò come sia possibile, impiegando un numero infinito di coeficienti, di verificare l'equazione (3) per l'infinito numero dei valori di x compresi fra i valori estremi a, b. Tale risultavioni (3) verificare l'avoir estremi a, b. Tale risultavione (3).

Tomo XX.

mento potrà esistere come limite di tutti quegli altri risultamenti che si otterranno crescendo continuamento il numero delle equazioni (a), e che ad esso sempreppià si avvicineranno. Allora l'equazione (3) avrà nel secondo membro una serie infinitar e i valori dic coefficienti  $\Lambda_s$ ,  $\Lambda_s$ ,  $\Lambda_s$ , asranno i limiti verso i quali continuamente convergeranno al crescere di n quelle funzioni dell'indice stesso n, che per essi si cavano dalla soluzione delle equazioni (a). Una tale equazione (3) avente nel secondo membro una serie infinita, sarà vera per tutti i valori di x compresi fra a e b, m ape i valori di x prima di a e dopo b sarà falsa. I corsi delle curve piane le cui ordinato sono espresse dai due membri della equazione suddetta coincideranno perfettamente per tutto il corso della accissa da a a b, b ma prima e dopo saranno distinti. Ecco la stessa proposizione cunuciata al numero a.

 Scriviamo l'equazione (3) quando il secondo membro è una serie infinita giusta l'esposto nel numero precedente e poniamo

(4) 
$$\phi(x) = \dot{A}_1 \psi_1(x) + \dot{A}_2 \psi_2(x) + ... + \dot{A}_i \psi_i(x) + ... \text{ all' inf.}$$

dove le  $\overset{.}{\Lambda}_1,\overset{.}{\Lambda}_2,\overset{.}{\Lambda}_3$ , ecc. marcate con un punto in alto, sono le  $\overset{.}{\Lambda}_1,\overset{.}{\Lambda}_2,\overset{.}{\Lambda}_3$ , ecc. nelle quali è stata fatta  $n=\infty$ . Dietro un principio noto nella teorica delle serie si potranno anche intendere i coefficienti  $\overset{.}{\Lambda}_1,\overset{.}{\Lambda}_2,\overset{.}{\Lambda}_3,\ldots$ , funzioni dell' indice, cioè dedotti tutti da una medesima funzione  $\overset{.}{\Lambda}_1$  dell' indice i in cui facciasi successivamente  $:=1, a, 3, \ldots$ , c. Difatto si capisce che potendosi nel secondo membro della precedente equazione senza alterarme il valore, cambiare i termini fra di loro di posto in tutte le maniere, la ragione per cui uno qualunque dei coefficienti  $\overset{.}{\Lambda}_1,\overset{.}{\Lambda}_3,\overset{.}{\Lambda}_3$  e. diversifica dai compagni, non può vonire da altro se non dall' essere esso coefficienti  $\overset{.}{\Lambda}_1,\overset{.}{\Lambda}_2,\overset{.}{\Lambda}_3$  e. diversifica dai compagni, non può vonire da altro se non dall' essere esso coeffi-

ciente di diversa quantità variabile, per es. della  $\psi_a(x)$  piuttosto che della  $\psi_a(x)$ ; ma come queste stesse quantità variabili non diversificano fra loro per diversa forma di funzione ma solo per diverso valore dell' indice, anche quelle quantità la cui differenza è attaccata a quest'unica ragione, diversificheranno alla stessa maniera. Adunque la precedente equazione (4) potrà scriversi

(5) 
$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta i. \dot{\Lambda}_{i} \psi_{i}(x)$$

significando l' espressione del secondo membro l' integrale finito per i della funzione  $A.\psi_i(x)$  definito fra i limiti i,  $\infty$ . (\*)

Questa equazione (5) ci fa palese come il valore della funzione  $\phi(x)$  per il solo corso della variabile fra a, b può essere rappresentato da un' altra espressione in cui la variabile è posta sotto un altro simbolo di funzione ψ affatto diverso da φ.Tali seconde espressioni che riempiono gli uffici delle prime, sono poi affette da segni di integrali definiti, che possono, se si vuole, cangiarsi in integrali definiti continui, e che sono presi per tutt' altra lettera che non è la variabile x. Essendo la (5) in quanto alla sostanza la stessa equazione (4), di essa pure varrà ciò che si è detto di quella, cioè che se i due membri significano le ordinate di due curve piane riferite agli stessi assi, dette curve anderanno insieme per tutto il tratto dell'ascissa da x=a fin x=b, comunque prima e dopo siano distinte: al qual fatto geometrico singolarissimo è stato dal Fourier dato il nome di osculazione finita. In questa coincidenza di valori (per un tratto continuo finito della variabile) di due formole di

<sup>(\*)</sup> Vedi la Nota posta in fondo a questa memoria dore rendo ragione della notazione qui adottata, ed espongo alconi teoremi sul calcolo degli integrali finiti definiti che mi sono necessari; dei quali uno dei primi è quello che permette il passazgio dalle espressioni como la (4) alle espressioni come la (5).

diversa forma, che danno per tutt'altro tratto diversi valori, sta il principio della discontinuità delle funzioni.

 $\phi(a), \phi(a+o), \phi(a+2o), \phi(a+3o), \dots \phi(a+mo)$ 

essendo a+mo ovvero a+m  $\frac{c-a}{n}$  quantità immediatamente minore di b, talchè  $a+(m+1)\frac{c-a}{n}$  sarebbe di b maggiore. Per le altre n-m equazioni che restano, adottiamo nei primi membri una forma  $\chi$  diversa da  $\phi$  e scrivismoli

 $\chi(a+(m+1)\omega), \ \chi(a+(m+2)\omega), \dots \chi(c).$ 

infinita anche m, ma il rapporto m è finito ed eguaglia h-a, talchè a+mo diventa b. Allora i coefficienti A, A, A, ... prendono i valori limiti che si cavano dai loro valori generali dedotri dalla soluzione delle equazioni (2), ove pongansi m, n infinite: essi dipenderanno unicamente dalle tre forme φ, χ, ψ, e dai tre valori a, b, c. La serie infinita del secondo membro della (4), che può indicarsi per  $\sum_{i=1}^{\infty} \Delta i$ . A  $\psi(x)$  sarà una tale funzione di x, che per tutti i valori di x da a a b darà gli stessi risultamenti della funzione φ(x), e per tutti i valori di x da b a c darà gli stessi risultamenti della funzione  $\chi(x)$ . È evidente che se invece di due funzioni  $\phi(x)$ ,  $\chi(x)$  ne prendessimo tre, potremmo collo stesso metodo costruire una serie infinita (da compendiarsi poi mediante la sommatoria) la quale per un certo tratto finito del corso della variabile avrà tutti i valori coincidenti con quelli cavati dalla prima funzione, per un tratto seguente li avrà coincidenti coi valori cavati dalla seconda funzione, e per il terzo tratto li avra coincidenti con quelli cavati dalla terza. Questa speculazione si estende senza difficoltà al caso di un numero qualunque di forme che si cambjuo nei primi membri delle equazioni (2). Se allora si prenda l'espressione integrale  $\sum_{i=1}^{\infty}\Delta i.\dot{A}_{i}\psi_{i}(x)$  per l'ordinata di una curva piana, è chiaro che una tal curva sarà discontinua: il suo corso andrà d'accordo per un tratto finito dell'ascissa colla curva dell'ordinata φ(x), pel tratto seguente dell'ascissa colla curva dell'ordinata z(x), e così di seguito. Pertanto una sola espressione, che non si muta mai, tradotta alla Geometria potrà rappresentare contorni discontinui.

7. Meritano singolare attenzione quelle espressioni che si trovano dietro il principio del numero precedente, e che contenendo una variabile, pure conservano per un tratto finito e anche infinito del corso della variabile un valore costante che può essere anche zero. Infatti il discorso del numero precedente sta tutto egualmente, anche supponendo che le prime m+1 equazioni invece di avere i primi membri formati colla forma  $\phi$ , come si è detto, li avessero formati tutti della stessa quantità costante k. Questo sarebbe il caso particolare di  $\phi(x)=k$ ; v i si aggiunga l altro caso particolare di  $\chi(x)=0$ , e la  $\Sigma^{\infty}\Delta i.\dot{\Lambda}, \psi(x)$  sarà una tale funzione discontinua di x che pel

tratto da x=a a x=b avrà sempre uno stesso valor costante k, e pel tratto da x=b a x=c avrà sempre uno stesso valor costante k, e pel tratto da x=b a x=c avrà sempre il valore zero. Si sa che

pel tratto da x=b a x=c avrå sempre il valore zero. Si sa che nelle applicazioni si problemi fisici, come nella teoriea del calore o in quella delle onde, occorrouo simili funzioni discontinue, che per lunghi e anche infiniti tratti del corso della variabili sono sempre di valor costante o millo, e danno alle volte valori variabili solo corrispondentemente a qualche breve tratto. 8. È pure cossa degna di molta considerazione quel man-

tenersi una costanza di espressione nella quantità  $\sum_{i=1}^{\infty} \Delta i \dot{A}_i \psi_i(x)$  nel mentre i valori da essa rappresentati soffrono dei salti. Vedremo, per un esempio, più tardi quale è questa espressione nel caso che significhi l'ordinata del controno discontinuo di un triangolo: l'ascissa dopo avere appartenuto ad un lato apparerra al seguente e passerà il vertice ove la retta di contorno è spezzata: eppure di un tale passaggio niun sintomo apparirà nella trovata espressione, la quale è una serie che presenta eleganza e regolarità come le altre serie infinite. Ecco una proprietà recondita di tali espressioni che non si crederebbe se non fosse altrimenti dimostrata in modo da non lasciar dubbio.

9. Si può nelle equazioni (a) del n.º 3. supporre il secondo membro formato non di una sola serie, ma di due, di tre, ec: allora essendo maggiore il numero delle incognite, bisognerà dare una più grande estensione al corso della variabile per abbracciare un maggior numero di equazioni e tanto quanto basta per determinare tutte le incognite. Faremo il caso di due serie: riterremo tutto come al n.º 3. e porremo il sistema

$$\begin{array}{c} \text{Dt Garrio Piola} & 583 \\ + A_{_1} \psi_{_1}(a) & + A_{_2} \psi_{_3}(a) & + A_{_3} \psi_{_3}(a) & + \dots \\ \phi(a) = \mathbf{C} & \cdots + A_{_n} \psi_{_n}(a) \\ + B_{_1} \theta_{_1}(a) & + B_{_2} \theta_{_3}(a) & + B_{_3} \theta_{_3}(a) & + \dots \\ & \cdots + B_{_n} \theta_{_n}(a) \\ + A_{_1} \psi_{_1}(a+o) + A_{_2} \psi_{_1}(a+o) + A_{_3} \psi_{_3}(a+o) + \dots \\ \phi(a+o) = \mathbf{C} & \cdots + A_{_n} \psi_{_n}(a+o) \\ + B_{_1} \theta_{_1}(a+o) + B_{_2} \theta_{_3}(a+o) + B_{_3} \theta_{_3}(a+o) + \dots \\ & \cdots + B_{_n} \theta_{_n}(a+o) \\ + A_{_1} \psi_{_1}(a+2o) + A_{_2} \psi_{_2}(a+2o) + A_{_3} \psi_{_3}(a+2o) + \dots \\ & \cdots + A_{_n} \psi_{_n}(a+2o) \\ \phi(a+2o) = \mathbf{C} & + B_{_1} \theta_{_1}(a+2o) + B_{_2} \theta_{_3}(a+2o) + B_{_3} \theta_{_3}(a+2o) + \dots \\ & \cdots + A_{_n} \psi_{_n}(a+2o) \\ & + B_{_1} \theta_{_1}(a+2o) + B_{_2} \theta_{_3}(a+2o) + B_{_3} \theta_{_3}(a+2o) + \dots \\ & \cdots + A_{_n} \psi_{_n}(a+2ao) \\ & \vdots \\ & + A_{_1} \psi_{_1}(a+(2n-1)o) + A_{_2} \psi_{_3}(a+(2n-1)o) + \dots \\ & \cdots + A_{_n} \psi_{_n}(a+(2n-1)o) \\ & + B_{_1} \theta_{_1}(a+(2n-1)o) + B_{_2} \theta_{_3}(a+(2n-1)o) \\ & + A_{_1} \psi_{_1}(a+(2n-1)o) + A_{_2} \psi_{_3}(a+(2n-1)o) \\ & + A_{_1} \psi_{_3}(a+(2n-1)o) + A_{_2} \psi_{_3}(a+(2n-1)o) \\ & + A_{_1} \psi_{_3}(a+(2n-1)o) + \dots \\ & - A_{_1} \psi_{_3}(a+(2n-1)o) +$$

 $\phi(a+(ab-a)) = C + B_1 \theta_1(ab-a) + B_2 \theta_2(ab-a) + \dots + B_n \theta_n(ab-a)$ 

(6)

dove i coefficienti incogniti sono di numero 2n+1 come le equazioni. Potranno dunque tutti essere determinati, e allora l'equazione

sarà vera pei 2n+1 valori di x seguenti

a, a+o, ... a+(n-1)o, b, a+(n+1)o, .... a+(n-1)o, 2b-a.

Quando poi si passa al risultamento del limite per n infinita l'equazione

ha nel secondo membro una doppia serie infinita, e può compendiarsi nella espressione

(9) 
$$\phi(x) = \dot{\mathbf{C}} + \sum_{i}^{\infty} \Delta i . \dot{\mathbf{A}}_{i} . \psi_{i}(x) + \sum_{i}^{\infty} \Delta i . \dot{\mathbf{B}}_{i} \theta_{i}(x)$$

la quale è vera soltanto per tutti i valori di x compresi fra

10. Noterò per la storia della scienza che l'idea pinttosto astrusa delle funzioni discontinue è stata raggiunta dai
Geometri già da quasi un secolo. Ecco un passo di Lagrange in cui si rileva assai chiaramente "On voit la nécessité
"d'admettre dans ce calcul d'autres courbes que celles, que
"les Géomètres ont considèré jusqu à présent, et d'emploier
"un nouveau genre des ionctions variables indépendentes de
"la loi de continuité, et qu'on peut trés bien appeller fon-

32 la loi de continuité, et qu' on peut tres bien appende fon-32 ctions irrégulieres et discontinues. Mais ce n'est pas ici le ,, seul usage qu' on doit faire de ces sortes de fonctions: el-" les sont nécessaires pour un grand nombre de questions , importantes de Dynamique et d'Hydrodynamique. Car lorsque , on a un sistème de corps, ou de points mobiles, dont le ", nombre est infini, et qu' on en cherche les mouvemens, " aprés les avoir, come que ce soit, derangé de leur état " d'équilibre, il est facile de comprendre que tous ces mou-,, vemens ne pourront étre contenus dans une même formu-,, le , à moins qu'elle ne soit aussi applicable au premier " état du systeme, qui est tout-à-fait arbitraire, et dans le-" quel la loi de continuité est le plus souvent violée: M. Euler " est, je crois, le prémier qui ait introduit dans l'analyse " ce nouveau genre de fonctions ec. (1). " Ma Lagrange ha fatto molto più: egli ha assegnata una serie periodica il cui valore eguaglia fra certi limiti quello di una funzione qualunque, onde un chiarissimo Geometra vivente, che arricchì anch' egli de' suoi trovati questo ramo d'analisi, ebbe a dire: c'est à Lagrange que l'analyse est redevable de la première " formule générale de cette espéce (2). Niun Geometra però, s' io ben m' avviso, ha più avanzata una teoria così importante quanto il Sig. Fourier, il quale nel suo trattato del calore (opera che senza un soverchio apparato di calcoli è tutta sparsa di profonde viste analitiche ) oltre esser giunto ad alcune grandi scoperte ha, insieme mostrata la via da tenersi pei futuri progressi. Le funzioni discontinue finora assegnate dai Geometri sono tutte espresse o per serie infinite compendiate per mezzo delle sommatorie, o per integrali definiti; ultimamente però il Sig. Guglielmo Libri ha escogitate espressioni di funzioni discontinue formate colle sole quantità trascendenti ordinarie (3); su di che aspetteremo le ulteriori

<sup>(1)</sup> Miscell. Taur. T. a. pag. 18.

<sup>(</sup>a) Poisson. Journal de l'Ecole Polyt. Cah. 19. psg. 444.
(3) Memoires de Mathematique et de Physique. Florence 1829.

Tomo XX.

XX.

sue dichiarazioni. Egli è auche felicemente riuscito ad asseguare espressioni analitiche in cui la discontinuità è necessaria conseguenza di quella conosciuta e propria di alcumi integrali definiti; ottima risposta per via di fatto alle difficoltà di coloro che ancor dubitasero dell' esistenza di tali funzioni. A me pare però che per cercare a priori queste funzioni discontinue senza attaccarsi ad altri risultamenti già noti, e per mostrare il modo e la ragion metafisica della loro formazione, la via da tenersi sia quella che negli antecedenti numeri ho incominciato a dichiarare.

S. 2.

Si propone un metodo generale che può tenersi in queste ricerche.

11. Mostrerò come si possa dalle equazioni (a). (6) dedurrequazioni contenenti una funzione arbitraria alla quale attibuendo una determinazione opportuna frasi così strada alla ricerca delle funzioni come  $\hat{\Lambda}_i$ , nel cui ritrovamento sta

$$\begin{split} & \Sigma_o^{n+1} \Delta h. \phi(a+ho) f(a+ho) = \Lambda_z \Sigma_o^{n+1} \Delta h. \psi_z(a+ho) f(a+ha) \\ & + \Lambda_z \Sigma_o^{n+1} \Delta h. \psi_z(a+ho) f(a+ho) + \cdot \cdot \cdot \cdot \end{split}$$

<sup>(1)</sup> Vedi la Nota posta in fine della presente Memoria, Teor. II.

+ 
$$A_{\downarrow} \Sigma_{0}^{n+1} \Delta h. \psi_{\downarrow}(a + h\omega) f(a + h\omega) + \dots$$
  
+  $A_{n+1} \Sigma_{n}^{n+1} \Delta h. \psi_{n+1}(a + h\omega) f(a + h\omega),$ 

e siccome per un teorema del calcolo degli integrali finiti definiti (1)

$$\Sigma_{o}^{m}\Delta m.F(ms) = \Sigma_{o}^{mo} \Delta a.F(a)$$

quando  $\Delta m=1$ , e  $\Delta a=o$ ; la precedente equazione può anche scriversi

$$\begin{split} \Sigma_{o}^{b-a+o} \Delta a.\phi(a+a)f(a+a) &= \Lambda_{1} \sum_{o}^{b-a+o} \Delta a \psi_{1}(a+a)f(a+a) \\ &+ \Lambda_{3} \sum_{o}^{b-a+o} \Delta a.\psi_{3}(a+a)f(a+a) + \dots \\ &+ \Lambda_{i} \sum_{o}^{b-a+o} \Delta a.\psi_{i}(a+a)f(a+a) + \dots \\ &+ \Lambda_{n+1} \sum_{o}^{b-a+o} \Delta a.\psi_{n+1}(a+a)f(a+a). \end{split}$$

Moltiplicata questa equazione in ambi i membri per o, si può a dirittura avere il risultamento del limite pel caso di n cresciuta fino all'infinito ossia di o diminuita fino a zero: infatti allora ognuno degli integrali finiti definiti precedenti ha per limite un integrale continuo (a), e si ottiene

$$\int_{0}^{b-a} da.\phi(a+a)f(a+a) = \dot{\Lambda}_{i} \int_{0}^{b-a} da.\psi_{i}(a+a)f(a+a) +$$

<sup>(</sup>s) Vedi la Nota suddetta, Tear. III.

<sup>(</sup>a) Chi non avesso in pronto altre autore in cui trovare la ragione di questo passo, può consultare la mia Memoria sull'applicazione dei principi della Meccanica analitica del Lagrange, coronata dall' Istituto, alla pag. 10a. 134.

$$+\dot{A}_{a}\int_{0}^{b-a}da.\psi_{a}(a+a)f(a+a)+....+\dot{A}_{i}\int_{0}^{b-a}da\psi_{i}(a+a)f(a+a)+ec.$$

la quale per un teorema del calcolo degli integrali definiti assai facile a dimostrarsi (1) si può scrivere

(10) 
$$\int_{a}^{b} da.\phi(a)f(a) = \dot{A} \int_{a}^{b} da.\psi_{\downarrow}(a)f(a) + \dot{A} \int_{a}^{b} da.\psi_{\downarrow}(a)f(a)$$

$$+ \dot{A} \int_{a}^{b} da\psi_{\downarrow}(a)f(a) + .... + \dot{A} \int_{a}^{b} da.\psi_{\downarrow}(a)f(a) + ..... \text{ all' inf.}$$

che può anche compendiarsi nella

(11) 
$$\int_{a}^{b} da.\phi(a)f(a) = \sum_{i}^{\infty} \Delta i.\dot{\Lambda}_{i} \int_{a}^{b} da.\psi_{i}(a)f(a).$$

Queste equazioni (10), (11) contengono a dirittura le quantità del limite, e sono quelle dietro cui, disponendo della funzione arbitraria f(a), cercare di determinare i coefficienti À A, A, ec. Si poteva cavare a dirittura la (10) dalla (4) moltiplicandola in ambi i membri per f(x), e poi integrando per

$$\int_{a}^{b} dx.\phi(x) = \int_{a}^{b-a} dx.\phi(a+x)$$

è subito dimottrato ponendo nel primo integrale x = a + y, e poi rimettendo x in luogo di y dopo che, fatto le sostituzioni, si capiace che la y non entra se non in un modo puramente istrumentale, onde può essere supplita da qualsivoglia altra lettera.

<sup>(1)</sup> Desiderando un libro in cui il calcolo degli integrali definiti sia, come meriterebbe, trattate di proposito in tutta la sua estensione; citerò frattanto per questo teorema il Cauchy Resume des leçons données a l'Ecolo Palyth. Leçon 22, equat. 17. Anche senza citazioni, il teorema che si legge nella equazione.

x fra i limiti a, b: ma l'analisi precedente ha il vantaggio di provare cho i limiti fra cui nella (re) debbone essere definiti gl'integrali, sono quelli stessi fra cui si è stabilita vera l'equazione (3). Di più nel caso del m.º 6, quando tra la prima e l'ultima equazione il primo membro cambia una o più volte di forma, l'adottato metodo di dimostrazione è anche maggiormente opportuno, come con ca vadrassi.

Un andamento affatto simile di calcolo tenuto sulla (6) conduce alla equazione

$$\begin{split} +\dot{\mathbf{A}}_{i}\int_{a}^{ab-a}da.\psi_{i}(a)f(a)+...\\ +\dot{\mathbf{A}}_{i}\int_{a}^{ab-a}da.\psi_{i}(a)f(a)+\mathrm{ec}.\\ (1a)\int_{a}^{ab-a}da.\psi(a)f(a)=\dot{\mathbf{C}}\int_{a}^{ab-a}daf(a)\\ +\dot{\mathbf{B}}_{i}\int_{a}^{ab-a}da.\theta_{i}(a)f(a)+...\\ +\dot{\mathbf{B}}_{i}\int_{a}^{ab-a}da.\theta_{i}(a)f(a)+\mathrm{ec}. \end{split}$$

che può compendiarsi nella

dove la f(a) è parimenti una funzione di forma arbitraria. 12. Comincierò, per dare un esempio, a dedurre dalle precedenti equazioni generali una formola notissima e di grand' uso negli scritti de' moderni analisti. Sia nella (3)

$$\psi(x) = \sin \frac{i\pi x}{r}$$

dove r è una quantità qualunque reale positiva, e vogliasi che l'equazione (4) sia vera fra i limiti o, r. La (10) diventa

$$\int_{0}^{r} da.\phi(a)f(a) = \dot{A}.\int_{0}^{r} da.\sin(\frac{\pi a}{r}f(a) + \dot{A}.\int_{0}^{r} da.\sin(\frac{\pi a}{r}f(a) + ... + \dot{A}.\int_{0}^{r} da.\sin(\frac{\pi a}{r}f(a) + ec.$$

Dispongasi dell'arbitraria f(a) facendola eguale a sin.  $\frac{i\pi\dot{a}}{a}$ ; e siccome il calcolo degli integrali definiti (il che si prova facilmente per mezzo dell'integrazione ordinaria) dà

$$\int_{0}^{r} da.\sin.\frac{k\pi a}{r}\sin.\frac{i\pi a}{r} = 0; \int_{0}^{r} da \left(\sin.\frac{i\pi a}{r}\right)^{3} = \frac{r}{a};$$

essendo nella prima di queste k un numero intero qualunque diverso da i; tutti i termini nel secondo membro dell'ultima equazione si annullano, tranne quello che ha  $\hat{\mathbf{A}}_i$  per cofficiente, e si cava

$$\dot{A}_i = \frac{a}{r} \int da \cdot \phi(a) \sin \cdot \frac{i\pi a}{r}$$

per cui la (5) diventa

(14) 
$$\phi(x) = \frac{\alpha}{r} \sum_{i=1}^{\infty} \Delta i \int_{-r}^{r} d\alpha . \phi(\alpha) \sin_{i} \frac{i\pi \alpha}{r} \sin_{i} \frac{i\pi \alpha}{r}$$

Se avessimo presa per  $\psi_i(x)$  la forma più generale

sin.  $(\mathbf{H}_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\mathbf{x} = \mathbf{b}} - \mathbf{j},$  dove  $\mathbf{H}_{\mathbf{i}}$  è una funzione qualunque razionale intera di  $i_i$  e quindi avessimo disposto della f(a) ponendola eguale a sin.  $(\mathbf{H}_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\mathbf{x} = \mathbf{b}} - \mathbf{j})$ : lo stesso andamento di calcolo ci avrebbe somministrata la

(15) 
$$\phi(x) = \frac{a}{b \cdot x_a} \sum_{i}^{\infty} \Delta i \cdot \int_{-a}^{b} da \cdot \phi(a) \sin \cdot \left( \prod_{i} \pi \frac{a-a}{b-a} \right) \sin \cdot \left( \prod_{i} \pi \frac{x-a}{b-a} \right)$$

che è vera soltanto fra i limiti a, b.

13. Sia il caso del n.º 6, si esprima cioè per F(x) una funzione discontinua che pel tratto a a a b deve somministrare gli stessi valori della g(x), e pel tratto da b a c gli stessi valori della Z(x). Si potrà egualmente formare una equazione che tenga luogo della (c). Seguendo l'andamento descritto al prec. n.º 11. si formerà primieramente una equazione colle sommatorie finite che sarà

$$\textstyle \boldsymbol{\Sigma}_{_{0}}^{m+1} \Delta h. \phi(a+ho) f(a+ho) + \boldsymbol{\Sigma}_{m+1}^{n+1} \Delta k. \chi(a+ho) f(a+ho) =$$

$$\mathbf{A}_{_{1}}\boldsymbol{\Sigma}_{_{0}}^{m+1}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{h}.\boldsymbol{\psi}_{_{1}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}\boldsymbol{o})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}\boldsymbol{o})+\ldots+\mathbf{A}_{_{1}}\boldsymbol{\Sigma}_{_{0}}^{m+1}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{h}.\boldsymbol{\psi}_{_{1}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}\boldsymbol{o})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}\boldsymbol{o})+\mathrm{ec}\,.$$

$$+ \mathbb{A}_{i} \sum_{m=1}^{n+i} \Delta k. \psi_{i}(a+ko) f(a+ko) + \ldots + \mathbb{A}_{i} \sum_{m=1}^{n+i} \Delta k \psi_{i}(a+ko) f(a+ko) + \mathrm{cc.}$$

dove h, k sono due lettere denotanti numeri interi introdotte per formare l'espressione delle sommatorie. Da questa si passerà all'altra parimenti colle sommatorie finite,

$$\underset{\circ}{\Sigma_{b-a+go}^{b-a+go}}\Delta a.\phi(a+a)f(a+a)+\Sigma_{b-a+go}^{c-a+o}\Delta a.\chi(a+a)f(a+a)=$$

$$A_1 \sum_{o}^{b-a+go} \Delta a. \psi_1(a+a) f(a+a) + ... + A_i \sum_{o}^{b-a+go} \Delta a. \psi_i(a+a) f(a+a) + ec.$$

$$+ \mathbb{A} \sum_{b=a+po}^{c-a+p} \Delta a. \psi_1(a+a) f(a+a) + ... + \mathbb{A} \sum_{b=a+po}^{c-a+p} \Delta a. \psi_1(a+a) f(a+a) + cc.$$

in virtù del teorema del calcolo degli integrali finiti definiti al n. 11. citato in nota, osservando essere mo=b-a, no=c-a, ed esprimendo per g un numero minore dell'unità. Da tale equazione poi si passerà a quella del limite, che a motivo di due teoremi noti (1) oltre quello già citato in nota al n.º 11 si riduce primieramente

$$\int_{-a}^{b-a} da.\phi(a+a)f(a+a) + \int_{-a}^{c-a} da.\chi(a+a)f(a+a) =$$

$$\dot{\mathbf{A}}.\int_{a}^{c-a} da.\psi_1(a+a)f(a+a) + \dots + \dot{\mathbf{A}}.\int_{a}^{c-a} da.\psi_1(a+a)f(a+a) + cc.$$
e poscia
(16) 
$$\int_{a}^{b} da.\phi(a)f(a) + \int_{a}^{c} da.\chi(a)f(a) = \dot{\mathbf{A}}.\int_{a}^{c} da.\psi_1(a)f(a) + \dots$$

$$f(a) + \int_{a} d\alpha \cdot \chi(a) f(a) = A \int_{a} d\alpha \cdot \psi_{1}(a) f(a) + \cdots$$
  
 $A \int_{a} d\alpha \cdot \psi_{2}(a) f(a) + ec.$ 

che è l'equazione che tiene luogo della (10), e che vi è al tutto simile nel secondo membro. Quindi nel caso di

$$\psi_i(x) = \sin \left(i\pi \frac{x-a}{c-a}\right)$$
 prendendo  $f(a) = \sin \left(i\pi \frac{a-a}{c-a}\right)$ 

si provano similmente zero tutti i termini del secondo mem-

(1) Questi due teoremi sono

$$\int_{a}^{\gamma} dx \cdot \hat{\phi}(x) = \int_{a}^{\beta} dx \cdot \hat{\phi}(x) + \int_{\beta}^{\gamma} dx \cdot \hat{\phi}(x);$$

$$\int_{\beta-a}^{\gamma-a} dx \cdot \hat{\phi}(a+x) = \int_{\beta}^{\gamma} dx \cdot \hat{\phi}(x)$$

Il primo si prova subito supponendo F(x) l'integrale indefinito  $fdx \phi(x)$ , e facendo le sostituzioni: il secondo ponendo a-x=y, e poi a sostituzione finita, rimettendo x per y, come si disse già in un caso simile potersi eseguire dietre il riflesso che le variabili sotto i segni d'integrali definiti non indicano che il posto di una lettera destinata a scomparire dopo la definizione dell'integrale. Questi teoremi si possono anche vedere dimostrati nell'opera del Canchy sopra citato.

bro fuori del solo che contiene  $\dot{A}_i$  il quale riesce  $\dot{A}_i$   $\frac{c-a}{a}$ , laonde

$$\dot{A}_i = \frac{a}{c-a} \int_a^b d\alpha. \hat{\varphi}(\alpha) \sin. \left( i\pi \frac{a-a}{c-a} \right) + \frac{a}{c-a} \int_b^c d\alpha. \chi(\alpha) \sin. \left( i\pi \frac{a-a}{c-a} \right) :$$

epperò la funzione discontinua che denominammo F(x) è

(17) 
$$F(x) = \sum_{c=a}^{a} \sum_{i}^{\infty} \Delta i \left[ \int_{a}^{b} da.\phi(a) \sin \cdot \left( i\pi \frac{a-a}{c-a} \right) + \int_{b}^{c} da\chi(a) \sin \cdot \left( i\pi \frac{a-a}{c-a} \right) \sin \cdot \left( i\pi \frac{x-a}{c-a} \right) \right]$$

14. Per fare una applicazione geometrica, sia F(x) la funzione discontinua che rappresenta simultaneamente le ordinate variabili dei punti di due rette congiunte ad angolo, le quali insieme con una terza che coincide coll'asse delle ascisse chiudono il perimetro di un triangolo. Sia  $\phi(x) = k \frac{x-a}{k-a}$  l'equazione della prima retta, e  $\chi(x) = k \frac{x-a}{k-a}$  quella della seconda retta, dove kè la perpendicolare abbassata dal vertice del triangolo sull'asse delle ascisse, aè l'ascissa pel punto d'incontro dell'asse colla grima retta, b l'ascissa pel piede della perpendicolare anzidetta, c l'ascissa pel piede della perpendicolare conda retta; sarà per la (17)

$$\begin{split} \mathbf{F}(x) &= \tfrac{ak}{c-a} \sum_{1}^{\infty} \Delta i \! \left[ \int_{a}^{b} \! d\alpha \, \tfrac{a-a}{c-a} \sin \left( i\pi \, \tfrac{a-a}{c-a} \right) \right. \\ &\left. + \int_{b}^{c} \! d\alpha \, \tfrac{c-a}{c-b} \sin \left( i\pi \, \tfrac{a-a}{c-a} \right) \right] \sin \left( i\pi \, \tfrac{x-a}{c-a} \right); \end{split}$$

qui le integrazioni si possono eseguire, giacchè abbiamo la formola d'integrale indefinito

Tomo XX.

594 Sulla Teoria delle Funzioni ec.  $\int dx.(A+Bx)\sin.(C+Dx) = -\frac{\tau}{D} (A+Bx)\cos.(C+Dx)$ 

$$+\frac{B}{D^{a}}\sin(C+Dx)$$

che ci conduce a trovare

$$\begin{split} \frac{1}{c-a} \int_{-a}^{b} da & \frac{c-a}{b-a} \sin \left( i\pi \frac{b-a}{c-a} \right) = -\frac{1}{4\pi} \cos \left( i\pi \frac{b-a}{c-a} \right) \\ & + \frac{1}{12\pi} \frac{c-a}{b-a} \sin \left( i\pi \frac{b-a}{c-a} \right) ; \\ \frac{1}{c-a} \int_{-a}^{b} d\alpha & \frac{c-a}{c-b} \sin \left( i\pi \frac{b-a}{c-a} \right) = \frac{1}{4\pi} \cos \left( i\pi \frac{b-a}{c-a} \right) \\ & + \frac{1}{12\pi} \frac{c-a}{c-b} \sin \left( i\pi \frac{b-a}{c-a} \right) \end{split}$$

laonde sostituendo viene

(18) 
$$F(x) = \frac{2k(c-a)^5}{\pi^*(b-a)(c-b)} \sum_{i}^{\infty} \Delta i. \frac{1}{i^5} \sin \left(i\pi \frac{b-a}{c-a}\right) \sin \left(i\pi \frac{x-a}{c-a}\right)$$

la quale non contiene più integrali continui ed è, come si vede, una serie infinita di legge manifesta. Nel caso di a=0,  $k=\frac{\pi}{4}\pi$ ,  $c=\pi$ , la precedente dà

$$F(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \Delta i \cdot \frac{1}{i^{n}} \sin \cdot \frac{i\pi}{4} \sin \cdot ix,$$

ossia

$$F(x) = \frac{4}{\pi} \left[ \sin x + \frac{\tau}{3^a} \sin .3x + \frac{\tau}{5^a} \sin .5x + \frac{\tau}{7^a} \sin .7x + \text{ec.} \right]$$

elegantissima serie trovata da Fourier.

15. L' integrale finito definito nella (18) si può eseguire ma allora la formola una torna a scomporsi in due per le due parti separatamente continue. È pregio dell'opera il trattenersi un momento a dimostrarlo, perche ciò primieramente serviria a verificare i calcoli precedenti, e in secondo luego mostre-

rà con un esempio come le funzioni discontinue vogliono essere espressioni formate con segni integrali simili o continui; talchè questi tolti, esse cessano d'esistere. Scomponendo nella (18) il prodotto dei seni in differenza di coseni essa diventa,

(19) 
$$F(x) = \frac{k(c-a)^3}{\pi^3(b-a)(c-b)} \left[ \sum_{\frac{a}{2}}^{\infty} \Delta i \frac{t}{i^3} \cos(i\pi \frac{b-x}{c-a}) - \sum_{\frac{a}{2}}^{\infty} \Delta i \frac{t}{i^3} \cos(i\pi \frac{b+x-2a}{c-a}) \right]$$

ma abbiamo (\*)

$$\Sigma_{i}^{\infty} \Delta i \cdot \frac{\cos i \xi}{i^{a}} = \frac{\xi^{a}}{4} - \frac{\xi \pi}{a} + \frac{\pi^{a}}{6}$$

purchè la  $\xi$  sia compress fra o, ax. Questa condizione si vede adempiuta in entrambi gl'integrali precedenti finche x è compresa fra a,b: ma se x passa b, diventa negativa la quantità sotto al coseno del primo integrale, e manca la condizione. Però tenendoci al solo corso di x fra a,b, cerchinsi i due integrali colla formola precedente, e la loro differenza sarà

$$\frac{\pi^{b}}{4}\left(\frac{b-x}{c-a}\right)^{a}-\frac{\pi^{b}}{a}\left(\frac{b-x}{c-a}\right)-\frac{\pi^{b}}{4}\left(\frac{b+x-aa}{c-a}\right)^{a}+\frac{\pi^{b}}{a}\left(\frac{b+x-aa}{c-a}\right)$$

che si raccoglie in  $\frac{\pi^2(x-a)(c-b)}{(c-a)^2}$ , la quale sostituita nella (19) la

riduce  $F(x) = k \frac{x-a}{1-a}$ , cioè l'equazione della prima retta. Quando x passa b, allora per fare che il primo degli integrali finiti della (19) rientri nella condizione, hisogna mutare il segno alla quantità sotto al coseno e scriverla

$$\sum_{i}^{\infty} \Delta i \cdot \frac{1}{i^{2}} \cos \left( i \pi \frac{x-b}{c-a} \right);$$

cercati poscia i due integrali la loro differenza è

<sup>(\*)</sup> Poisson, Journal. Polyt, Chap. 19. psg. 413.

$$\frac{\pi^{2}}{4}\left(\frac{x-b}{c-a}\right)^{2} - \frac{\pi^{2}}{a}\left(\frac{x-b}{c-a}\right) - \frac{\pi^{2}}{4}\left(\frac{b+x-2a}{c-a}\right)^{2} + \frac{\pi^{2}}{a}\left(\frac{b+x-2a}{c-a}\right)$$

che si compendia in  $\frac{\pi^{a}(b-a)(c-a)^{a}}{(c-a)^{a}}$ , per cui la (19) diventa

 $F(x) = k \frac{c-x}{c-b}$ , che è l'equazione della seconda retta.

16. Per fare un caso della serie doppia del n.º 9, sia  $\psi_i(x) = \sin \frac{i\pi x}{r}$ ,  $\theta_i(x) = \cos \frac{i\pi x}{r}$ , e facciasi a = -r, b = 0: la (12) sarà

$$+\dot{\Lambda}_{i}\int_{-da}^{r}da\sin\frac{\pi\sigma}{f}(a)+\cdots$$

$$+\dot{\Lambda}_{i}\int_{-r}^{r}da\sin\frac{i\pi\sigma}{f}(a)+cc.$$

$$\int_{-r}^{r}da\phi(a)f(a)=\dot{C}\int_{-r}^{r}daf(a)$$

$$\int_{-da} da \, \phi(a) f(a) = 0 \int_{-da} da \, f(a)$$

$$+ \hat{B}_1 \int_{-da}^{r} da \cos \frac{\pi a}{r} f(a) + \cdots$$

$$+ \hat{B}_1 \int_{-da}^{r} da \cos \frac{i\pi a}{r} f(a) + ec.$$

Qui per determinare tutti i coefficienti bisogna fare tre diverse ipotesi della funzione arbitraria f(a). Facciasi primieramente  $f(a) = \sin \frac{i\pi a}{r}$ , e a motivo delle formole seguenti che tutte facilmente si provano per mezzo dell' integrazione ordinaria.

dinaria. 
$$\begin{cases} \int_{-r}^{r} da.\sin.\frac{i\pi a}{r} = 0; & \int_{-r}^{r} da.\sin.\frac{i\pi a}{r} \sin.\frac{i\pi a}{r} = 0 \\ \int_{-r}^{r} da.\cos.\frac{i\pi a}{r} \sin.\frac{i\pi a}{r} = 0; & \int_{-r}^{r} da.\cos.\frac{i\pi a}{r} \sin.\frac{i\pi a}{r} = 0 \\ \int_{-r}^{r} da.\left(\sin.\frac{i\pi a}{r}\right)^{a} = r \end{cases}$$

si trova

$$\dot{\Lambda}_{i} = \frac{1}{r} \int_{-r}^{r} da. \, \phi(a) \sin. \, \frac{i\pi a}{r}.$$

Facciasi in seguito  $f(\alpha) = \cos \frac{i\pi \alpha}{r}$ , e a motivo delle formole

(a1) 
$$\begin{cases} \int_{-r}^{r} da.\cos \frac{i\pi a}{r} = 0 ; \int_{-r}^{r} da.\cos \frac{i\pi a}{r}\cos \frac{i\pi a}{r} = 0 \\ \int_{-r}^{r} da \left(\cos \frac{i\pi a}{r}\right)^{a} = r \end{cases}$$

e della terza e quarta delle precedenti si cava

$$\vec{B} = \frac{1}{r} \int_{-r}^{r} d\alpha \vec{\phi} (\alpha) \cos \frac{i\pi \alpha}{r}.$$

Per ultimo facciasi f(a)=0 e per le due prime formole delle precedenti (20), (21), e per la  $\int_{-r}^{r} da$ . i = 2r, viene

$$\dot{\mathbf{C}} = \frac{1}{ar} \int_{-r}^{r} da. \hat{\varphi}(a);$$

pertanto l'equazione (9) è nel nostro caso

$$\phi(x) = \frac{1}{\alpha r} \int_{-r}^{r} da. \phi(a) + \frac{1}{r} \sum_{i}^{\infty} \Delta i. \int_{-r}^{r} da. \phi(a) \times \left[ \sin. \frac{i\pi x}{r} + \cos. \frac{i\pi n}{r} \cos. \frac{i\pi x}{r} \right]$$

che può scriversi

(22) 
$$\phi(x) = \frac{1}{r} \int_{-r}^{r} d\alpha.\phi(\alpha) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{i}^{\infty} \Delta i.\cos \left( \frac{i\pi}{r} (\alpha - x) \right) \right]$$

celebre formola trovata da Fourier (\*); essa è vera per tutti i valori di x compresi fra -r, +r.

<sup>(\*)</sup> Théorie de la Chaleur, pag. 272.

17. La proprietà singolare della precedente (a) si è che il valore del suo secondo membro al crescere di  $\tau$  converge verso una quantità finita, epperò sussiste anche per  $\tau$  infinita. In tal caso nel secondo membro sottentra un altro integrale continuo in luogo dell'integrale finito: poichè facendo  $\underline{x} = \mu$  la formola può scriversi

$$\phi(x) = \frac{\mu}{2\pi} \int_{-r}^{r} da.\phi(a) + \frac{\mu}{\pi} \sum_{i}^{\infty} \Delta i. \int_{-r}^{r} da.\phi(a) \cos.(i\mu(a-x))$$

dove il secondo termine è un integrale finito che all' impicciolire di  $\mu$  si accosta come a limiti ad un integrale continuo. Infatti per un teorema degli integrali finiti definiti citato anche al  $n^{\circ}$  11 si ha

$$\sum_{i}^{\infty} \Delta i. \int_{-r}^{r} da. \phi(a) \cos(i\mu (a - x))$$

$$= \sum_{i}^{\infty} \Delta p. \int_{-r}^{r} da. \phi(a) \cos(p(a - x))$$

essendo  $\Delta i = 1$ ,  $\Delta p = \mu$ : e

$$\mu \Sigma_{p}^{\infty} \Delta p. \int_{-\pi}^{\pi} da. \phi(a) \cos.(p(a-x))$$

per un altro teorema citato allo stesso numero, ha per limite l'integrale continuo

$$\int_{0}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha. \phi(\alpha) \cos. \left( p \left( \alpha - x \right) \right),$$

laonde, scomparendo nel limite anche il primo termine del secondo membro, l'equazione diventa

$$\phi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} da \cdot \phi(a) \cos \cdot (p(a-x))$$

che può anche scriversi (\*)

(23) 
$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} da.\phi(a) \int_{-\infty}^{\infty} dp.\cos.(p(x-a))$$
.

Questa è l'insigne formola di Fourier che è vera per tutti di valori di x da  $-\infty$  a  $+\infty$ , Per essa la variabile x è totta di sotto al simbolo generale  $\phi$  di una funzione qualunque e posta unicamente sotto un coseno: per essa tutte le derivazioni e integrazioni, anche nel sistema delle differenze finite e, che sulla  $\phi(x)$  non si possono che accennare, si eseguiscono invoce immediatamente: e si giunge anche ad esprimere le derivate e le-primitive d'indice frazionario colla stessa facilità come quelle d'indice intero: il che aprie la strada a tratera un infinito numero di trascendenti di nuova specie. Essa è il fondamento di gran parte dei muovi calcoli, e può vermmente riezuardarsi per una grande scoperta analitica.

Notero che anche dalla (14) del n.º 12. con un ragionamento affatto simile al precedente si cava la

(24) 
$$\phi(x) = \frac{a}{\pi} \int_{0}^{\infty} da. \phi(a) \int_{0}^{\infty} dp. \sin. pa \sin. px$$

la quale però non è vera se non pei valori positivi della x.

18. È noto che la (23) si estende facilmente ad una funcione  $\phi(x, y, z, z, ...)$  con un numero n di variabili : giacche si comincia à toglierne la x per sostituiryi una costante den

$$\int_{-a}^a\!dx\,f(x)\!=\!2\!\!\int_a^a\!\!dx\,f(x)\ \, \mbox{ so lo sviluppo di }f(x)\ \, \mbox{per le potenze intere} \\ o\ \, \mbox{crescenti di }x\ \, \mbox{non contiene che potenze }pari. \label{eq:final_contiene}$$

$$\int_{-\infty}^{a} dx. f(x) = 0$$
 56 lo aviluppo di  $f(x)$  per le potenze intere e crescenti di  $x$  non contiene che potenze dispari.

Entrambi si dimostrano subito sostituendo a f(x) gli aviluppi in serie.

<sup>(\*)</sup> Due teoremi del calcolo degli integrali definiti, il primo dei quali vale per render regione dell'attuale passaggio, e l'altro riesce necessario da qui a peche linee, sono i sequenti

tro la formola integralo portata dalla stessa (a3), ove perciònel secondo membro sta dopo il primo integrale la funzione  $\phi(\alpha, y, z....)$ ; poi allo stesso modo si elimina da quest'ultima funzione la y, formando così un integrale quadruplicato, poi anche la z formando un integrale sestuplicato e. L'ultima formola in cui tutte le variabili z, y, z.... sono tolte di sotto alla funzione  $\phi$  e trasportate sotto altrettanti coseni è

(a5) 
$$\phi(x,y,z...) = \frac{1}{(a\pi)^r} \int_{-\infty}^{\infty} da_1 \int_{-\infty}^{\infty} da_2 ... \int_{-\infty}^{\infty} da_n \phi(a_1, a_2...a_s)$$
  
 $\times \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 \int_{-\infty}^{\infty} dp_2 ... ... \int_{-\infty}^{\infty} dp_n H$ 

essendo

$$H=\cos(p_1(x-a_1))\cos(p_2(y-a_2))....\cos(p_n(t-a_n))$$

dove la £ esprime l'altima delle n variabili x, y, z.... Averto qui un notabile miglioramento che si può introdurre in questa formola, il quale riesce assai vantaggioso nelle applicazioni: ed è che invoce di formare la H con un numero na di coseni, si può formare con un coseno solo e scivere

(26) 
$$H = \cos \left[ p_1(x-\alpha_1) + p_2(y-\alpha_2) + \dots + p_n(t-\alpha_n) \right]$$

nella quale le  $p_1$ ,  $p_3$ ,  $p_3$ , ...,  $p_n$  possono avere tanto il segno + che il segno -. Dimostrerò questa trasformazione pel caso di due variabili, cioè che invece della

(a7) 
$$\bar{\phi}(x,y) = \frac{1}{4\pi^*} \int_{-\infty}^{\infty} da \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \cdot \bar{\phi}(a,\beta)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq \cos \cdot (p(x-a)) \cos \cdot (q(y-\beta))$$

può prendersi la

(a8) 
$$\phi(x, y) = \frac{i}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \, \phi(a, \beta) \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq \, .$$

$$\cos[p(x - a) + q(y - \beta)].$$

Ma sarà facile capire che la dimostrazione è generale e si estende a un qualunque numero di variabili. Riflettasi all'espressione

$$c = \frac{i}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} da \int_{-\infty}^{\infty} d\beta . \phi(a, \beta) \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq.$$

$$\sin(p(x - a))\sin(q(y - \beta))$$

che subito si riconosce osservando che sono zero entrambi gl'integrali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \!\! dp. \! \sin. (p(x-\alpha)), \int_{-\infty}^{\infty} \!\! dq. \! \sin. (q(y-\beta))$$

a motivo di un noto teorema citato in nota nel numero precedente: e sottraendo tale equazione dalla (27) si vedrà nascere la (28).

19. Îl teorema generale che risulta dal sistema delle due equazioni (25), (26) si può anche dimostrare a posteriori alla estessa maniera con cui per una sola variabile è stato dimostrato dal Sig. Deflers, secondo riferisce il Sig. Poisson (°). Consiste l'artificio di questa dimostrazione nell'esprimere con lettere qualunque a, b, c... i limiti nella seconda serie d'integrali della (25), e poi ad operazioni finite porre queste lettere eguali all'infinito. Osservando il teorema seguente, che ai prova prontamente per mezzo dell'integrazione ordinaria

$$\int_{-a}^{a} dp.\cos.(Ap+B) = \frac{a}{A}\sin.Aa\cos.B$$

si riconosce come sia

<sup>(\*)</sup> Journal Polyt. Cha. 19. pag. 454. Tomo XX.

$$=\frac{2\sin(a(x-a_1))\cos[p_0(y-a_0)+cc]}{x-a_1}$$

e per la continua applicazione dello stesso principio

$$\int_{-a}^{a} d\rho_1 \int_{-b}^{b} dp_2 \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} dp_2 \cos \left[ p_1(x-a_1) + p_2(y-a_2) + \dots + p_n(t-a_n) \right]$$

$$= \underbrace{\frac{\sigma^* \sin(\alpha(x-a_1)) \sin \lambda(ty-a_2) - \dots \sin(ty-a_n)}{(x-a_1) + \dots + (x-a_n)}}$$

laonde chiamando X il secondo membro della (25) ove siansi messe le lettere a, b, c.... invece dei secondi limiti infiniti, potrà scriversi

$$X = \frac{1}{\pi^n} \int_{-\infty}^{\infty} da \frac{\sin(a(x-a_1))}{x-a_1} \int_{-\infty}^{\infty} da_2 \frac{\sin(b(y-a))}{y-a_2} \cdots \cdots$$

$$\dots \int_{-\infty}^{\infty} da_n \frac{\sin(a(t-a_n))}{t-a_n} \phi(a_1, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n);$$

ma nel luogo ora citato si dimostra come il valore della formola

$$\int_{-\infty}^{\infty} da \frac{\sin(a(x-a))}{x-a} F(a)$$

quando si fa  $a=\infty$  diventa  $\pi F(x)$ : epperò per la continua applicazione dello stesso principio, facendo successivamento infinite tutte le a,b,c...si (oblieramo nella precedente espressione l'uno dopo l'altro tutti gl'integrali, passando egni volta una delle variabili sotto il simbolo  $\phi$ , e verrà per ultimo  $X=\phi(x,y,x=\infty)$  come doveasi dimostrare.

20. Conchiuderò questo secondo paragrafo della memoria con una riflessione importante relativamente ai limiti. Qualche volta la forma della funzione y nelle equazioni (a) del n. 3. è tale che di quelle equazioni la prima, o l'ultima o en-

trambe rimangono escluse dal sistema. Così sono escluse entrambe nell'esempio del n. 13. in cui  $\psi(x) = \sin \frac{i\pi x}{r}$ , a=0, b=r; perchè è evidente che la prima e l'ultima di quelle equazioni sono false a meno che la forma  $\phi$  della funzione  $\phi(x)$  sia tale che soddisfaccia alle due condizioni φ(o)=o, φ(r)=o. Nondimeno l'equazione (10) del n. 11. contenente la funzione arbitraria f(a) rimane ancora la stessa, perchè generalmente parlando, rimangono gli stessi i limiti degli integrali definiti benchè accresciuti o diminuiti di quantità destinate a divenire minori d'ogni assegnabile. Siccome però si è trovato che integrali definiti, i cui limiti diversificano di quantità minori d'ogni assegnabile, possono differire di valori finiti, si ha di qui il mezzo di spiegare alcune difficoltà che si incontrano nell'apparente differenza di certi risultamenti ottenuti con diversi metodi. Questa parte di analisi è delicata e laboriosa, ond'io cercherò di evitarne il bisogno, non sentendomi per ora forze bastanti per tentarne una chiara esposizione. Farò soltanto osservare dietro quello che ora si è detto, come espressioni simili al secondo membro dell' equazione 14. del n.º 13. danno valori che non tengono la legge di continuità. Infatti quando x è maggiore di zero di una quantità piccola quanto si vuole, il valore di quella espressione è prossimissimo a φ(o), ed essendo x=0 quel valore è zero; similmente quando x è minore di r di una differenza impercettibile, il valore di quella espressione è prossimissimo a  $\phi(r)$ , ed essendo x=r torna a divenir zero. Possono dunque aver luogo dei salti bruschi nei valori di quelle espressioni, epperò se esse rappresenteranno ordinate di curve, l'andamento di queste potrà riuscire spezzato.

S. 3.

#### Nuovi tentativi di calcolo.

21. Il metodo tenuto negli esempi precedenti per determinare i coefficienti À facendo uso della funzione arbitraria f(a), è quello che il Sig. Fourier discute al n.º 424 della sua opera (1), e consiste nel prendere per f(a) una forma tale che le integrazioni definite facciano sparire tutti i coefficienti A , A,A, ec. a riserva di uno, il quale riesce per tal modo subito noto. Lo stesso Geometra fa vedere ch' esso può estendersi ad altri casi oltre i già trattati, ed uno ne reca altrove più complicato (2). Quantunque però un tal metodo sia un ritrovamento pieno di sagacità e riesca benissimo in alcuni casi, è evidentemente ristretto a un piccolo numero di essi. Havvene un altro generalissimo il quale si presenta spontaneamente, e consiste nel cavare dalla (10) un infinito numero di equazioni dando infiniti valori diversi alla funzione arbitraria, e quindi con queste infinite equazioni tentare la determinazione delle infinite incognite. Veramente l'enunciato di questo problema analitico è tale da spaventare sulle prime e da sembrare affatto superiore alle forze dell' analisi: ma pure nella realtà non è come nell'apparenza; ed è ancora al Sig. Fourier a cui si deve l'idea felice che ce ne somministra in varii casi la soluzione. Leggasi la fine del n.º 207. della sua opera (3), e sebbene si rileverà che il sistema delle sue equazioni è limitato a un caso particolare che si tratta anche coll' altro metodo, mentre quello or ora descritto è tendente a uno scopo generale, vi si vedrà nondimeno chiarissimamente espresso il grandioso principio, che non cessa di essere interamente dovuto a quell'illustre analista, perchè altri possa coglierne un maggior frutto. Ecco in che consiste: invece di prendere a dirittura le infinite equazioni fra infinite incognite, si prenda solamente un numero m di equazioni fra un numero m d'incognite, e siano le prime m equazioni di quelle infinite, ritenendo nei secondi membri i soli primi m termini del-

<sup>(1)</sup> Theorie de la Chaleur. pag. 566. (a) Theorie de la Chaleur. pag. 348.

<sup>(</sup>a) Theorie de la Chalenr. pag. 348.

(3) Theorie de la Chalenr. pag. 212.

le serie. La questione è certamente cambiata e le nuove incognite sono ben diverse dalle prime : esse sono funzioni di m che spesso potranno determinarsi colla teoria della soluzione delle equazioni lineari. Quando però ciò riesca, è evidente che più che si cresce il numero m delle incognite prese e delle equazioni trattate, la nuova questione si avvicina alla primitiva, e con essa finalmente si confonde quando si fa m infinita; pertanto fatta m=0 nelle funzioni trovate, esse diventano le quantità ricercate. Dunque il problema si riduce ad un altro più trattabile: cioè alla risoluzione di un numero m di equazioni lineari fra un numero m d'incognite. Questo è di gia stato sciolto in qualche caso (1), ed io qui ne darò la soluzione in un altro, il quale oltre il fornire una verità analitica per se stessa interessante, è anche tale che si applica alle presenti questioni. L'andamento del calcolo è piuttosto lungo, ma non per questo ho voluto tralasciare di dargli una sufficiente estensione, perchè possa pienamente conoscersi il metodo di soluzione, ch'io spero debba riuscire egualmente bene in altri casi simili.

22. Il sistema delle m equazioni fra mincognite è il seguente

$$\begin{split} &\frac{1}{e^{+a_1}}X_1 + \frac{1}{a^*_1g+1}X_h + \frac{1}{b^*_1g+1}X_h + \dots + \frac{1}{p^*_1g+1}X_1 + \dots + \frac{1}{m^*_1g+1}X_m = H_1 \\ &\frac{1}{e^{+a_1}}X_1 + \frac{1}{a^*_1g+2}X_h + \frac{1}{b^*_1g+2}X_h + \dots + \frac{1}{p^*_1g+2}X_h + \dots + \frac{1}{m^*_1g+2}X_m = H_k \\ &\frac{1}{e^{+a_2}}X_1 + \frac{1}{a^*_1g+2}X_h + \frac{1}{b^*_1g+2}X_h + \dots + \frac{1}{p^*_1g+2}X_h + \dots + \frac{1}{m^*_1g+2}X_m = H_k \\ &\frac{1}{e^{+a_1}}X_1 + \frac{1}{a^*_1g+2}X_h + \frac{1}{b^*_1g+2}X_h + \dots + \frac{1}{m^*_1g+2}X_h + \dots + \frac{1}{m^*_1g+2}X_m = H_h \\ &\frac{1}{e^{+a_1}}X_1 + \frac{1}{a^*_1g+2}X_h + \frac{1}{a^*_1g+2}X_h + \dots + \frac{1}{a^*_1g+2}X_h + \dots + \frac{1}{m^*_1g+2}X_h = H_h \end{split}$$

<sup>(1)</sup> Vedi Cauchy. Cours d'Analyse, P. 7. Chap. III.

dove le incognite sono X, X, X, X, X, X, e g è una quantità qualunque data, positiva o negativa, reale o immaginaria. Si vuole una formola generale che esprima una qualunque X, delle m incognite per quantità tutte note e per l'indice i, talché fatto i = 1, 2, 3, . . . . m la stessa formola dia i valori di tutte le incognite.

a3. Si moltiplichi ciascuna delle precedenti equazioni pel denominatore dell'ultimo termine del primo membro, e poi si sottragga all'antecedente: sparirà così l'ultima incognita X e avrassi una nuova riunione di m-1 equazioni fra m-1 incognite. Senza esporre il sistema di tutte queste m-1 exioni basterà scrivere l'[h]esima equazione del sistema precedente: anzi basterà trovare il coefficiente dell'incognita X in questa (h)esima equazione. Detto coefficiente è

$$\frac{m^{a}g + h^{a}}{i^{a}g + ah^{a}} = \frac{m^{a}g + (h + \epsilon)^{a}}{i^{a}g + (h + \epsilon)^{a}} = \frac{g(m^{a} - i^{a})((h + \epsilon)^{a} - h^{a})}{(i^{a}g + h^{a})(i^{a}g + (h + \epsilon)^{a})}$$

e se ne caveranno tutti i coefficienti della menzionata ( $h_{lein}$  ma equazione, facendovi successivamente [=1,2,3,...,(m-1), Vodesi così che tutti i termini del primo membro di detta equazione banno il fattor comune  $g([h+1]^2...h^2)$ , epperò l'equazione si può dividere per esso, e fatta v

$$\mathbf{H}_{i,h}\!\!=\!\!\frac{(m^{\mathsf{`}}\!g\!+\!h^{\mathsf{`}})\,\mathbf{H}_{h}-\!(m^{\mathsf{`}}\!g\!+\!(h\!+\!i)^{\mathsf{`}})\,\mathbf{H}_{h+1}}{g((h\!+\!i)^{\mathsf{`}}\!-\!h^{\mathsf{`}})}$$

verrà

(29) 
$$\frac{m^{n-1}}{(g+h^{2})^{2}(g+(h+r)^{2})}X_{+}+\dots+\frac{m^{n-n}}{(r(g+h^{2})^{2}(g+(h+r)^{2}))}X_{+}+\dots$$
  
  $+\frac{m^{n}-(m-1)^{2}}{(m-1)^{2}(g+h^{2})^{2}(g+(h+r)^{2})}X_{m-1}=H_{1,h};$ 

questa, ove facciasi successivamente h=1, 2, 3 ...m-1, darà tutte le m-1 equazioni, che come si disse, compongono

il secondo sistema. Da questo secondo potrà dedursene un terro fra m-a incognite, in cui manchi anche l'incognita  $X_{m-1}$  A ta fine si formi  $\Gamma(h+1)$ esima equazione del secondo sistema, che riesce subito ponendo nell'antecedente h+1 in luogo di h: poi fra queste due si elimini  $X_{m-1}$  moltiplicando una per  $(m-1)^2g+h^2$ , e l'altra per  $(m-1)^2g+(h+2)^2$ , e sottraendo a solito. Nella equazione risultante il coefficiente di  $X_m$  sarà

$$\begin{bmatrix} \frac{(m+1)^2g+h^3}{i^2g+h^3} - \frac{(m-1)^2g+(h+2)^2}{i^2g+(h+2)^2} \end{bmatrix} \frac{m^2-i^2}{i^2g+(h+1)^2}$$

$$= \frac{g((m-1)^2-i^2)(m^2-i^2)((h+2)^3-h^3)}{(i^2g+(h+2)^2)(g^2+(h+2)^2)(g^2+(h+2)^2)}$$

dove il fattore  $g((h+a)^2-h^i)$  è indipendente da i epperò costante in tutti i termini: si divida per esso, e fatta

$$\mathbf{H}_{a,h}\!\!=\!\!\frac{((m\!-\!\iota)^*\!\boldsymbol{\varepsilon}\!\!+\!\!h^{\flat})\mathbf{H}_{\iota,h}\!-\!((m\!-\!\iota)^*\!\boldsymbol{\varepsilon}\!\!+\!\!(h\!+\!a)^*\!)\mathbf{H}_{\iota,h\!+\!\iota}}{\boldsymbol{\varepsilon}((h\!+\!a)^*\!-\!h^{\flat})}$$

si avrà l'equazione

(3o) 
$$\frac{((m-1)^{n}-b^{2})(m^{2}-b^{2})}{(l^{2}r_{2}+b^{2})(l^{2}r_{2}+(b+1)^{2})(l^{2}r_{2}+(b+2)^{2})} X_{i} \dots$$

$$+ \frac{((m-1)^{n}-(m-1)^{2}(m-1)^{2}(m^{2}-(b+1)^{2})(m^{2}-(b+1)^{2})}{((m-1)^{2}r_{2}+(b+1)^{2})((m-1)^{2}r_{2}+(b+1)^{2})((m-1)^{2}r_{2}+(b+1)^{2})} X_{m-a} = H_{a,h}$$

che sarà l'(h)esima del terzo sistema e fornirà tutte le equazioni di questo sistema facendo successivamente h=1, 2, 3...m-2.

Fra l'antecedente equazione e quella che si cava dalla mediasima mettendo h+1 invece di h si elimini similmente  $\sum_{m-3}$ , erisulterà un'equazione con sole m-3 incognite in cui il coefficiente di  $X_i$  sarà

 $\frac{((m-a)^a-i^a)((m-1)^b-i^a)(m^a-i^b)}{(i^ag+h^a)(i^ag+(h+1))(i^ag+(h+a)^a)(i^ag+(h+3)^b)}$ 

608 Sulla Teoria delle Funzioni ec. ed il secondo membro

(31) 
$$H_{3,h} = \frac{((m-a)^s g + h^s) H_{a,h} - ((m-a)^s g + (h+3)^s) H_{a,h+1}}{g((h+3)^s - h^s)}$$

e fatta in essa h=1,2,3...m-3 si avrà il quarto sistema di equazioni fra sole m-3 incognite. Seguitando collo stesso metodo si capisce faciliente che quando le incognite sarano ridotte a  $m-\mu$  il coefficiente di  $X_1$  nella  $\{h\}$ esima equazione del  $\{\mu+1\}$ esimo sistema sarà

$$(3a) \frac{((m-\mu+1)^n-i^*)((m-\mu+1)^n-i^*) \dots \dots (m^n-i^*)}{(i^*g+h^2)(i^*g+(h+1)^*) \dots \dots (i^*g+(h+\mu)^*)}$$

ed il secondo membro

(33) 
$$H_{\mu,h} = \frac{((m-\mu+1)^8g+h^4)H_{\mu-1,h} - ((m-\mu+1)^8g+(h+\mu)^8)H_{\mu-1,h+1}}{g((h+\mu)^8-h^8)}$$

24. Bisogna ora studiare la forma di questa  $\mathbf{H}_{\mu,h}$  in funzione delle prime  $\mathbf{H}_h$ ,  $\mathbf{H}_{h+1}$ , ec. desumendola con successive sostituzioni dalle precedenti (29), (30), (31), ec. Queste sostituzioni danno

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{1,h} &= \frac{m^{b_{+}} + \frac{h^{a}}{g}}{(h+1)^{a_{-}h^{b_{+}}}} \mathbf{H}_{h} + \frac{m^{b_{+}} + (g+1)^{b_{-}}}{h^{2_{-}}(h+1)^{a_{-}}} \mathbf{H}_{h+1} ; \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{a},\hat{\mathbf{a}}} = \frac{\left((m-1)^{i} + \frac{k^{i}}{\ell}\right) \left(m^{3} + \frac{k^{i}}{\ell}\right)}{((k+1)^{m-k})^{i}((k+2)^{m-k})} \mathbf{H}_{\hat{\mathbf{a}}} + \frac{\left((m-1)^{2} + \frac{(k+1)^{2}}{\ell}\right) (m^{3} + \frac{(k+1)^{2}}{\ell})}{(k^{2} - (k+1)^{2})((k+2)^{m} - (k+1)^{2})} \mathbf{H}_{\hat{\mathbf{b}}, +1}}{\mathbf{H}_{\hat{\mathbf{a}}} + \frac{(k+1)^{2}}{\ell}} \mathbf{H}_{\hat{\mathbf{b}}} + \frac{(m-1)^{2} + \frac{(k+1)^{2}}{\ell}}{\ell} \mathbf{H}_{\hat{\mathbf{b}}} + \frac{(m-1)^{2} + \frac{(m-1)^{2} + \frac{(k+1)^{2}}{\ell}}{\ell} \mathbf{H}_{\hat{\mathbf{b}}} + \frac{(m-1)^{2} + \frac{(m-1)^{2}}{\ell}}{\ell} \mathbf{H}_{\hat{\mathbf{b}}} + \frac{(m-1)^{2}}{\ell} \mathbf{H}_{\hat{\mathbf{b}}} + \frac{(m-1)^{2} + \frac{(m-1)^{2}}{\ell}}{\ell} \mathbf{H}_{\hat{\mathbf{b}}} + \frac{(m-1)^{2}}{\ell} \mathbf{H}_{\hat{\mathbf{b$$

$$+\frac{\left((m-1)^{2}+\frac{(h+a)^{k}}{8}\right)\left(m^{3}+\frac{(h+a)^{2}}{8}\right)}{(h^{3}-(h+a)^{2})((h+1)^{2}-(h+a)^{2})} + \prod_{h+a}$$

$$\begin{split} & \text{D1 Cambo Polia} \\ & \text{H}_{3,h} \!\! = \!\! \frac{\!\! \left(\!\! (m\!-\!2)^3 \!\! + \frac{h_3}{8} \!\! \left) \!\! \left(\!\! (m\!-\!1)^3 \!\! - \frac{h_3}{8} \!\! \right) \!\! \left(\!\! m^3 \!\! + \frac{(h\!-\!1)^3}{8} \!\! + \frac{(h\!-\!1)^3}{8} \!\! + \frac{(h\!-\!1)^3}{8} \!\! \right) \!\! \left(\!\! m^3 \!\! + \frac{(h\!-\!1)^3}{8} \!\! + \frac{(h\!-\!1)^3}{8} \!\! + \frac{(h\!-\!1)^3}{8} \!\! + \frac{(h\!-\!1)^3}{8} \!\! + \frac{(h\!-\!2)^3}{8} \!\! + \frac{(h\!-\!2)^3}{8} \!\! + \frac{(h\!-\!2)^3}{8} \!\! + \frac{(h\!-\!3)^3}{8} \!\!$$

e così di seguito. Qui la legge dei numeratori è manifesta: quella dei denominatori si capisce facilmente osservando che sono composti di tanti fattori biuonj, in cui la seconda parte negativa è costante in egni coefficiente: nel coefficiente  $H_h \doteq h^*$ , nel coefficiente di  $H_{h+1} \doteq (h+2)^*$ , ce. La prima parte poi è formata prendendo l'uno dopo l'altro i termini della serie  $h^*$ ,  $(h+1)^*$ ,  $(h+3)^*$ , ce. ma avendo avvertenza di saltar sempre via quel termine che a motivo della seconda parte costante in quel coefficiente darebbe un fattore zero. Ciò ben assicurato: se pongasi per brevità  $m-\mu=k$ , e si facciano le denominazioni

$$((k+1)^{3} + \frac{h^{3}}{a})((k+2)^{3} + \frac{h^{3}}{a})....(a)$$

$$\begin{split} & \text{SULLA I BORLA PERLA PURILANS GU.} \\ & M_h \!\!=\! \!\! \frac{ \left( (k\!+\!1)^3 \!\!+\! \frac{b^3}{\varepsilon} \right) \! \left( (k\!+\!2)^3 \!\!+\! \frac{b^3}{\varepsilon} \right) \dots \cdot \left( m^3 \!\!+\! \frac{b^3}{\varepsilon} \right) }{ ((k\!+\!1)^2 \!\!+\! \frac{b^3}{\varepsilon} ) \! \left( (k\!+\!2)^3 \!\!+\! \frac{b^3}{\varepsilon} \right) \dots \cdot \left( (k\!+\!n\!-\!n\!-\!k)^3 \!\!+\! \frac{b^3}{\varepsilon} \right) }{ \left( (k\!+\!2)^3 \!\!+\! \frac{(k\!+\!n\!+\!1)^3}{\varepsilon} \right) \! \left( (k\!+\!2)^3 \!\!+\! \frac{(k\!+\!n\!+\!1)^3}{\varepsilon} \right) \dots \cdot \left( m^3 \!\!+\! \frac{(k\!+\!n\!+\!1)^3}{\varepsilon} \right) }{ \left( k^3 \!\!-\! \frac{(k\!+\!n\!-\!1)^3}{\varepsilon} \right) \! \left( (k\!+\!2)^3 \!\!+\! \frac{(k\!+\!n\!-\!1)^3}{\varepsilon} \right) \dots \cdot \left( m^3 \!\!+\! \frac{(k\!+\!n\!-\!1)^3}{\varepsilon} \right) } \end{split}$$

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} N_h = \frac{(k-(k+1)^2)((k+2)^m(k+1)^2)...((k+m-k)^m(k+1)^n)}{g} \\ 0_h = \frac{((k+1)^4 + \frac{(k+2)^2}{g})\left((k+2)^4 + \frac{(k+2)^2}{g}\right)....\left(m^3 + \frac{(k+2)^2}{g}\right)}{((k-(k+2)^2)!((k+1)^m-(k+2)^2)...((k+m-k)^m-(k+2)^m)} \\ \vdots \\ V_h = \frac{((k+1)^2 + \frac{(k+m-k)^2}{g}) \cdot \dots \cdot \left(m^2 + \frac{(k+m-k)^2}{g}\right)}{(k^2 - (k+m-k)^2)...(k^2 - (k+m-k)^2)...(k^2 - (k+m-k)^2)} \end{array}$$

si ha

(35) 
$$H_{\mu,h} = M_h H_h + N_h H_{h+1} + O_h H_{h+3} + .... + V_h H_{h+3:-k}$$

25. Conosciuta così la H , se pongasi anche

$$L_{i,h} = \frac{((k+1)^{n-i^{k}})((k+1)^{n-i^{k}})...(n^{n-i^{k}})}{(i^{2}_{s}+h^{2})(i^{2}_{s}+(h+1)^{n})....(i^{n}_{s}+(h+n-k)^{n})}$$
(36)

ove il secondo membro non è che l'espressione (3a): il sistema delle m-μ ovvero k equazioni fra un egual numero d'incognite potrà scriversi

$$\mathbf{L}_{_{1,1}}\mathbf{X}_{_{1}}+\mathbf{L}_{_{3,1}}\mathbf{X}_{_{2}}+\mathbf{L}_{_{3,1}}\mathbf{X}_{_{3}}+....+\mathbf{L}_{_{i,1}}\mathbf{X}_{_{i}}+...+\mathbf{L}_{k_{j,1}}\mathbf{X}_{_{k}}=\mathbf{H}_{_{p,1}}$$

$$\begin{split} \mathbf{L}_{i,\mathbf{a}}\mathbf{X}_{i}^{*} + \mathbf{L}_{a,\mathbf{a}}\mathbf{X}_{a}^{*} + \mathbf{L}_{3,\mathbf{a}}\mathbf{X}_{3}^{*} + \dots + \mathbf{L}_{i,\mathbf{a}}\mathbf{X}_{i}^{*} + \dots + \mathbf{L}_{k,\mathbf{a}}\mathbf{X}_{k}^{*} = \mathbf{H}_{\mu,\mathbf{a}} \\ \mathbf{L}_{i,\mathbf{a}}\mathbf{X}_{i}^{*} + \mathbf{L}_{3,\mathbf{a}}\mathbf{X}_{a}^{*} + \mathbf{L}_{3,\mathbf{a}}\mathbf{X}_{a}^{*} + \dots + \mathbf{L}_{k,\mathbf{a}}\mathbf{X}_{k}^{*} = \mathbf{H}_{\mu,\mathbf{a}} \end{split}$$

$$\begin{split} \mathbf{L}_{i,h}\mathbf{X}_{i} + \mathbf{L}_{s,h}\mathbf{X}_{s} + \mathbf{L}_{3,h}\mathbf{X}_{s} + \dots + \mathbf{L}_{i,h}\mathbf{X}_{s} + \dots + \mathbf{L}_{k,h}\mathbf{X}_{k} = \mathbf{H}_{g,h} \\ \mathbf{L}_{i,h+1}\mathbf{X}_{i} + \mathbf{L}_{s,h+1}\mathbf{X}_{s} + \mathbf{L}_{3,h+1}\mathbf{X}_{s} + \dots + \mathbf{L}_{i,h+1}\mathbf{X}_{s} + \dots + \mathbf{L}_{k,h+1}\mathbf{X}_{k} = \mathbf{H}_{g,h+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \end{split}$$

$$\mathbf{L}_{s,k}\mathbf{X}_{i} + \mathbf{L}_{s,k}\mathbf{X}_{i}^{i} + \mathbf{L}_{3,k}\mathbf{X}_{3} + .... + \mathbf{L}_{i,k}\mathbf{X}_{i} + .... + \dot{\mathbf{L}}_{k,k}\mathbf{X}_{k} = \mathbf{H}_{\mu,k}.$$

Adesso con un andamento di operazione affatto simile bisogna eliminare da questo le prime incognite fino ad un certo numero.

26. Si osservi che per la (36) le funzioni L hanno la seguente proprietà

(37) 
$$L_{i,k+i} = \frac{i^3g + h^4}{i^3g + (h+m-k+i)^3} L_{i,k}$$
.

Moltiplicando quindi per  $g+h^{\circ}$  l'(h)esima equazione del sistema precedente e per  $g+(h+m-k+1)^{\circ}$  l'equazione (h+1)esima, e poi sottraendo al solito, il coefficiente di  $X_i$  nell'equazione che risulta sarà

$$(g+h^{\circ})L_{i,h}-(g+(h+m-k+1)^{\circ})L_{i,h+1}$$

ossia per la proprietà della (37)

$$\mathbf{L}_{i,h}\Big[g+h^{\mathtt{a}}-\tfrac{(i^{\mathtt{a}}g+h^{\mathtt{a}})(g+(h+m-k+1)^{\mathtt{a}})}{i^{\mathtt{a}}g+(h+m-k+1)^{\mathtt{a}}}\Big]$$

che si riduce

$$g((h+m-k+1)^s-h^2) \, {\textstyle \frac{(1-i^s)L_{i,h}}{i^sg+(h+m-k+1)^s}}$$

dove il fattore  $g((h+m-k+1)^a-h^a)$  è indipendente da i epperò comune a tutti i termini del primo membro di quell'equazione. Dividasi adunque per questo fattore, e ponendo per brevità h+m-k=p, l'equazione sarà

$$\frac{(\imath-a^{\flat})L_{a,h}}{a^{\flat}g+(p+i)^{\flat}} \ X_a + \ldots + \frac{(\imath-i^{\flat})L_{i,h}}{i^{\flat}g+(p+i)^{\flat}} \ X_i + \ldots + \frac{(\imath-k^{\flat})L_{k,h}}{k^{\flat}g+(p+i)^{\flat}} \ X_k = K_{i,h}$$

essendo

(38) 
$$K_{\underline{t},h} = \frac{\left(1 + \frac{h^{2}}{\delta}\right)H_{\underline{\mu},h} - \left(1 + \frac{(p+1)^{2}}{\delta}\right)H_{\underline{\mu},h+1}}{(p+1)^{2} - h^{2}}$$

talchè quando facciasi  $k=1, 2, 3, \dots, k-1$  si avranno k-1 equazioni in cui manca anche l'incognita X

Fra la precedente equazione (h)esima e quella che si cava da essa ponendo h-1 in luogo di h si climini similmente  $X_a$ : il che risces moltiplicando la prima per  $a^*g_++h^h$ , e la seconda per  $a^*g_++(p+1)^*$ , indi sottraendo e mettendo per  $L_{a,h+1}$  il suo valore dedotto dalla (37) ove facciasi i=a. Il coefficiente di  $X_i$  nella nuova equazione dopo aver diviso pel fattore costante è

$$(t-i^2)(a^3-i^3)L_{l,h}$$
  
 $(i^3g+(p+1)^3)(i^3g+(p+2)^3)$ 

e il secondo membro

(39) 
$$K_{a,b} = \frac{\left(2^{a} + \frac{h^{a}}{\varepsilon}\right)K_{\tau,h} - \left(2^{a} + \frac{(p+1)^{a}}{\varepsilon}\right)K_{\tau,h+\tau}}{(p+2)^{a} - h^{a}};$$

così proseguendo si vede che nel sistema in cui mancano tutte le prime incognite fino a  $X_i$  il coefficiente di  $X_i$  è

$$\begin{array}{c} (1-i^{b})(\alpha^{b}-i^{*})...(l^{b}-i^{s})\bar{\mathbb{L}}_{i^{*}J_{i}} \\ (\bar{i}^{s}g+(p+1)^{b})(i^{b}g+(p+2)^{b})..(i^{b}g+(p+1)^{s}) \end{array}$$

e il secondo membro

(40) 
$$K_{l,h} = \frac{\left(l^2 + \frac{h^2}{8}\right)K_{l-1,h} - \left(l^2 + \frac{(p+1)^2}{8}\right)K_{l-1,h+1}}{(p+l)^2 - h^2}$$

e se mettasi per  $L_{i,h}$  il suo valore dato dalla (36) , il coeffi-

ciente di X sarà espresso da

$$\frac{(i-i^{2})(\alpha^{2}-i^{3})...(l^{2}-i^{3})((l+1)^{2}-i^{3})((l+4)^{3}-i^{3})...(m^{3}-i^{3})}{(i^{2}g+h^{2})(i^{2}g+(h+1)^{3})...(i^{3}g+(p+l^{3})}$$

a7. Rimane a dedurre il valore di  $K_{l,h}$  nella (4c) dalle precedenti (38), (39), ec. e dal valore di  $H_{\mu,h}$  dato dal sistema delle (34), (35). Per avviarei a questa ricerca osserviamo le seguenti proprietà delle funzioni  $M, N, O, \dots V$ , che prontamente si dimestrano per mezzo delle (34)

$$\begin{pmatrix} M_{h+1} = \frac{(h-(h+1)^h}{(p+1)-(h+1)^h}, N_h \\ N_{h+1} = \frac{(h-(h+1)^h}{(p+1)-(h+2)^h}, O_h \\ O_{h+1} = \frac{(h-(h+2)^h}{(p+1)-(h+2)^h}, P_h \end{pmatrix}$$

Per queste e per la (35) si vede che la (38) può scriversi

$$\begin{split} \mathbf{K}_{i,h} &= \frac{\mathbf{i} + \frac{h^{*}}{(p+1)^{k-1}} \mathbf{M}_{h} \mathbf{H}_{h}}{\mathbf{i}} \\ &+ \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{i} + \frac{h^{*}}{(p+1)^{k-1}} \mathbf{M}_{h} \mathbf{H}_{h} \\ &\vdots \\ (p+1)^{k-1} \mathbf{i}^{k} - \frac{1 + \frac{(p+1)^{k}}{\varepsilon}}{(p+1)^{k-1}} \cdot \frac{h^{k-((h+1)^{k}}}{(p+1)^{k-((h+1)^{k}})} \end{array} \right\} \mathbf{N}_{h}^{\mathbf{H}}_{h+1} \\ &+ \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{i} + \frac{h^{*}}{\varepsilon} - \frac{1 + \frac{(p+1)^{k}}{\varepsilon}}{(p+1)^{k-1}} \cdot \frac{h^{k-((h+2)^{k}}}{(p+1)^{k-((h+2)^{k})}} \end{array} \right\} \mathbf{O}_{h}^{\mathbf{H}}_{h+2} \\ &+ \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{1} + \frac{h^{*}}{\varepsilon} - \frac{1 + \frac{(p+1)^{k}}{\varepsilon}}{(p+1)^{k-1}} \cdot \frac{h^{k-((h+2)^{k})}}{(p+1)^{k-1}} \cdot \frac{h^{k-((h+2)^{k})}}{(p+1)^{k-1}} \end{array} \right\} \mathbf{P}_{h}^{\mathbf{H}}_{h+3} \\ &+ \mathbf{e} \mathbf{C}. \end{split}$$

614 SULLA TRORIA DELLE FUNZIONI ec. che si riduce

$$\begin{split} \mathbf{K}_{i_1h} &= \frac{\mathbf{I} + \frac{h^*}{g}}{(p+1)^{-h^*}}, \ \mathbf{M}_h \mathbf{H}_h + \frac{\mathbf{I} + \frac{(h+1)^*}{g}}{(p+1)^{-h} - (h+1)^*} \ \mathbf{N}_h \mathbf{H}_{h+t} \\ &+ \frac{\mathbf{I} + \frac{(h+2)^*}{g}}{(p+1)^{-h} - (h+2)^*} \ \mathbf{O}_k \mathbf{H}_{h+s} + \text{ec.} \end{split}$$

Sostituiscasi nella (39) questo valore di  $K_{1,\hat{h}^3}$  dal quale si forma subito quelle di  $K_{1,\hat{h}+1}$ , ed eliminando di nuovo le  $M_{\hat{h}+1}$ ,  $N_{\hat{h}+1}$ , ec. mediante le (42), verrà

$$\begin{split} \mathbf{K}_{\mathbf{a},h} &= \frac{\mathbf{i} + \frac{h^{*}}{\ell}}{(p+1)^{m-h^{*}}} \cdot \frac{\alpha^{*} + \frac{h^{*}}{\ell}}{(p+1)^{m-h^{*}}} \mathbf{M}_{h} \mathbf{H}_{h} \\ &+ \frac{\mathbf{i} + \frac{(h+1)^{*}}{(p+1) - ((h+1)^{*}}}{(p+1)^{m}((h+1)^{*})} \mathbf{N}_{h} \mathbf{H}_{h+1} + \mathrm{e.c.} \end{split}$$

Così proseguendo a trovare K3,h, K4,h, ec. avrassi per analogia

$$(43) \quad K_{l,k} = \frac{1 + \frac{h^*}{\varepsilon}}{(p+1)^{l-1}}, \quad \frac{a^* + \frac{h^*}{\varepsilon}}{(p+s)^{l-1}}, \quad \dots, \frac{P + \frac{h^*}{\varepsilon}}{(p+s)^{l-1}}, M_k H_k$$

$$+ \frac{1 + \frac{(h+s)^*}{\varepsilon}}{(p+s)^{l-1}(h+s)}, \quad \frac{a^* + \frac{(h+s)^*}{\varepsilon}}{\varepsilon}, \quad \frac{p^* + \frac{(h+s)^*}{\varepsilon}}{(p+l)^{l-1}(h+s)}, N_k H_{h+s}$$

$$+ \frac{1 + \frac{(h+s)^*}{\varepsilon}}{(p+s)^{l-1}(h+s)}, \quad \frac{a^* + \frac{(h+s)^*}{\varepsilon}}{(p+s)^{l-1}(h+s)}, \quad \frac{P + \frac{(h+s)^*}{\varepsilon}}{(p+s)^{l-1}(h+s)}, \quad \delta_k H_{h+s}$$

$$+ \frac{1 + \frac{(h+s)^*}{(p+s)^{l-1}(h+s)}}{(p+s)^{l-1}(h+s)}, \quad \frac{a^* + \frac{(h+s)^*}{\varepsilon}}{(p+s)^{l-1}(h+s)}, \quad \delta_k H_{h+s}$$

dove la legge è manifesta.

a8. Mediante questa equazione (43), e l'espressione (41) abbiamo noto il coefficiente di X, e il secondo membro nell' (h)esima equazione di quel sistema contenente un numero me —  $\mu$  —  $\mu$  di equazioni; nel- quale delle incognite X, X, X, X, ... X, mancano tutte le prime sino alla X, inclusiva, e tutte le ultime dalla X, esclusiva in poi. Essendo arbitrarii i numeri interi l,  $\mu$ , che mentre si accrescono, diminiscono sempreppiù il numero delle incognite superstiti, possiamo farii tali che di queste non ne rimanga più che una sola, cioè la X; il che riesce ponendo l=-1,  $\mu=m-i$ . Allora, per le denominazioni accettate a titolo di hrevita, abbiamo l=-1, p=l-k-m-i, che è poi p=1+l-m-i, perchè Tultimo sistema non contenendo che una sola equazione, la l non può avere che il valore 1. Quest' unica equazione è della forma

 $(44) \qquad \qquad \Omega X_i = \Psi$ 

dove le  $\Omega$ ,  $\Psi$  saranno date dalle espressioni (41), (43) nelle quali h, l, k, p prendano gli indicati valori. Sarà così

$$\begin{aligned} & \Omega = \frac{(i-a)^2(s^4-a)^2...(s^{(b-1)^2-1})^2((i+1)^2-2^3)...(n^5-i^3)}{(s^2c^4-1)^2(s^2+a^2)^2(s^2+a^2)...(s^2c^2+a^2)} \\ & \Psi = \frac{1+\frac{s}{s}}{(s+m-i)^3-s} \cdot \frac{3^2+\frac{s}{s}}{(s+m-i)^3-s} \cdot \frac{(i-1)^2+\frac{s}{s}}{m^3-s} M_1 H_z \\ & + \frac{1+\frac{s}{s}}{(s+m-i)^3-s} \cdot \frac{\Delta^2+\frac{s}{s}}{(s+m-i)^2-s} \cdot \frac{(i-1)^3+\frac{s}{s}}{n^3-s^2} N_1 H_z \\ & + \frac{1+\frac{s}{s}}{s} \cdot \Delta^2+\frac{s}{s} \cdot \frac{(i-1)^3+\frac{s}{s}}{n^3-s^2} \cdot \frac{1}{s} \\ & + \frac{1+\frac{s}{s}}{s} \cdot \Delta^2+\frac{3^2}{s} \cdot \frac{(i-1)^3+\frac{3^2}{s}}{n^3-s^2} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} \end{aligned}$$

+ ec.

616 Sulla Teoria delle Funzioni ec. dove debbono sostituirsi i valori di  $M_{_{1}}$ ,  $N_{_{1}}$ ,  $O_{_{1}}$ , . . . . cavati dalle (34) in cui si pongano parimenti  $k\!=\!i$ ,  $k\!=\!i$ , cioè

$$\begin{split} \mathbf{M}_{i} &= \frac{\left((i+1)^{i} + \frac{1}{\varepsilon}\right)\left((i+2)^{i} + \frac{1}{\varepsilon}\right) \dots \left(m^{3} + \frac{1}{\varepsilon}\right)}{\binom{(i-1)(i-2)\dots((i+2)-1)}{\varepsilon} - 1} \dots \left(m^{3} + \frac{1}{\varepsilon}\right)}{N_{i}} \\ \mathbf{N}_{i} &= \frac{\left((i+1)^{i} + \frac{\alpha^{2}}{\varepsilon}\right)\left((i+2)^{i} + \frac{\alpha^{2}}{\varepsilon}\right) \dots \left(m^{2} + \frac{\alpha^{2}}{\varepsilon}\right)}{\binom{(i-2)(i-2)^{2}\dots((i+2)-i)^{2}-\alpha^{2}}{\varepsilon}} \end{split}$$

$$\begin{split} \mathbf{O}_{i} &= \frac{\left((i+1)^{i} + \frac{3}{\epsilon}\right)\left((i+a)^{i} + \frac{3}{\epsilon}\right) \dots \left(m^{2} + \frac{3}{\epsilon}\right)}{(i-2^{i})(e^{i} - 2^{i}) \dots \left((i+am-i)^{m} - 3^{m}\right)} \\ &= \frac{\left((i+1)^{i} + \frac{(i+am-i)^{n}}{\epsilon}\right) \dots \left(m^{2} + \frac{(i+am-i)^{2}}{\epsilon}\right)}{(i-2^{i})(am-i)^{m} - \frac{(i+am-i)^{2}}{\epsilon}} \\ \mathbf{V}_{i} &= \frac{\left((i+1)^{i} + \frac{(i+am-i)^{n}}{\epsilon}\right) \dots \left(m^{2} + \frac{(i+am-i)^{2}}{\epsilon}\right)}{(i-2^{i})(am-i)^{m} - \frac{(i+am-i)^{2}}{\epsilon}} \end{split}$$

Facciasi questa sostituzione e il valore finale di Ψ potrà scriversi

 $\begin{aligned} & + \frac{1}{\mathbf{i}^{*} + \frac{h^{*}}{\delta}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 + \frac{h^{*}}{\delta} \left( 2^{3} + \frac{h^{*}}{\delta} \right) \left( 3^{3} + \frac{h^{*}}{\delta} \right) & \dots & \left( m^{3} + \frac{h^{*}}{\delta} \right)}_{\mathbf{i}^{*} + \mathbf{i}^{*} + \frac{h^{*}}{\delta}} \\ & + \frac{1}{\hat{i}^{*} + \frac{h^{*}}{\delta}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 + \frac{h^{*}}{\delta} \left( 2^{3} + \frac{m^{*}}{\delta} \right) \left( 3^{3} + \frac{m^{*}}{\delta} \right) & \dots & \left( m^{3} + \frac{m^{*}}{\delta} \right)}_{\mathbf{i}^{*} + \mathbf{i}^{*} + \frac{m^{*}}{\delta}} \\ & + \frac{1}{\hat{i}^{*} + \frac{m^{*}}{\delta}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 + \frac{m^{*}}{\delta} \left( 2^{3} + \frac{m^{*}}{\delta} \right) \left( 3^{3} + \frac{m^{*}}{\delta} \right) & \dots & \left( m^{3} + \frac{m^{*}}{\delta} \right)}_{\mathbf{i}^{*} + \mathbf{i}^{*} + \frac{m^{*}}{\delta}} \\ & + \frac{1}{\hat{i}^{*} + \frac{m^{*}}{\delta}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 + \frac{m^{*}}{\delta} \left( 2^{3} + \frac{m^{*}}{\delta} \right) \left( 3^{3} + \frac{m^{*}}{\delta} \right) & \dots & \left( m^{3} + \frac{m^{*}}{\delta} \right)}_{\mathbf{i}^{*} + \mathbf{i}^{*} + \frac{m^{*}}{\delta}} \\ & + \frac{1}{\hat{i}^{*} + \frac{m^{*}}{\delta}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 + \frac{m^{*}}{\delta} \left( 3^{3} + \frac{m^{*}}{\delta} \right) \left( 3^{3} + \frac{m^{*}}{\delta} \right) & \dots & \left( m^{3} + \frac{m^{*}}{\delta} \right)}_{\mathbf{i}^{*} + \mathbf{i}^{*} + \frac{m^{*}}{\delta}} \\ & + \frac{1}{\hat{i}^{*} + \frac{m^{*}}{\delta}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 + \frac{m^{*}}{\delta} \left( 3^{3} + \frac{m^{*}}{\delta} \right) \left( 3^{3} + \frac{m^{*}}{\delta} \right) & \dots & \left( m^{3} + \frac{m^{*}}{\delta} \right)}_{\mathbf{i}^{*} + \mathbf{i}^{*} + \frac{m^{*}}{\delta}} \\ & + \frac{1}{\hat{i}^{*} + \frac{m^{*}}{\delta}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 + \frac{m^{*}}{\delta} \left( 3^{3} + \frac{m^{*}}{\delta} \right) \left( 3^{3} + \frac{m^{*}}{\delta} \right) & \dots & \left( m^{3} + \frac{m^{*}}{\delta} \right)}_{\mathbf{i}^{*} + \mathbf{i}^{*} + \frac{m^{*}}{\delta}} \\ & + \frac{1}{\hat{i}^{*} + \frac{m^{*}}{\delta}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 + \frac{m^{*}}{\delta} \left( 3^{3} + \frac{m^{*}}{\delta} \right) \left( 3^{3} + \frac{m^{*}}{\delta} \right) & \dots & \left( m^{3} + \frac{m^{*}}{\delta} \right)}_{\mathbf{i}^{*} + \mathbf{i}^{*} + \frac{m^{*}}{\delta}} \\ & + \frac{1}{\hat{i}^{*} + \frac{m^{*}}{\delta}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 + \frac{m^{*}}{\delta} \left( 3^{3} + \frac{m^{*}}{\delta} \right) \left( 3^{3} + \frac{m^{*}}{\delta} \right) & \dots & \left( m^{*} + \frac{m^{*}}{\delta} \right)}_{\mathbf{i}^{*} + \mathbf{i}^{*} + \frac{m^{*}}{\delta}} \\ & + \frac{1}{\hat{i}^{*} + \frac{m^{*}}{\delta}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 + \frac{m^{*}}{\delta} \left( 3^{3} + \frac{m^{*}}{\delta} \right) \left( 3^{3} + \frac{m^{*}}{\delta} \right) & \dots & \left( m^{*} + \frac{m^{*}}{\delta} \right) \\ & + \frac{m^{*}}{\delta} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 + \frac{m^{*}}{\delta} \left( 3^{3} + \frac{m^{*}}{\delta} \right) & \dots & \left( m^{*} + \frac{m^{*}}{\delta} \right) \\ & + \frac{m^{*}}{\delta} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 + \frac{m^{*}}{\delta} \left( 3^{3} + \frac{m^{*}}{\delta} \right) & \dots & \left( m^{*} + \frac{m^{*}}{\delta} \right) \\ & + \frac{m^{*}}{\delta} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 + \frac{m^{*}}{\delta} \left( 3^{3} + \frac{m^{*}}{\delta} \right) & \dots & \left( m^{*} + \frac{m^{*}}{\delta} \right) \\ & + \frac{m^{*}}{\delta} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 + \frac{m^{*}$ 

espressione assai elegante e di legge ben manifesta: ritenendo che in tutti i denominatori manca quel fattore che renderebbe la quantità zero: così nel termine (h)esimo manca il fattore h.º-h.º.

29. Che in conseguenza della (44) la frazione

in cui Ω, Ψ hanno i valori (45), (46), sia l'espressione generale dell'incognita X, talché fatto i=1,2,3 ... m si abbiano note tutte le incognite nel sistema delle equazioni scritte al n. 22: è questa una verità analitica per se stessa importante che può avere varie applicazioni. Essa lo diventa tanto più, in quantochè le trovate forme (45), (46) si adattano prontamente al caso di m infinita, e secondo si è detto al n.º 21, sciolgono il problemà per un infinito numero d'incognique quando i primi membri delle equazioni riferite al n.º 22 sono altrettante serie infinite. Allora i termini delle funzioni che compongono le espressioni delle Ω, Ψ sono altrettanti prodotti infiniti, e quindi le dette Ω, Ψ possono ridursi

(47) 
$$\Omega = \frac{1}{i^2} \cdot \frac{(1-i^2)\left(1-\frac{i^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{i^2}{a^2}\right)\cdots\cdots\cdots}{(1+g_1^{i^2})\left(1+g_2^{i^2}\right)\left(1+g_2^{i^2}\right)\left(1+g_2^{i^2}\right)\cdots\cdots},$$

(48) 
$$\Psi = \frac{1}{i^{2} + \frac{1}{\delta}} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)\left(1 + \frac{1}{\epsilon^{2}}\right)\left(1 + \frac{1}{\epsilon^{2}}\right) \cdot \dots \cdot H_{1} + \frac{1}{\delta}}{\left(1 - \frac{1}{\epsilon^{2}}\right)\left(1 - \frac{1}{\delta^{2}}\right) \cdot \dots \cdot H_{1} + \frac{1}{\delta}}$$

$$Tomo XX.$$

È chiaro che per avere questa (47) si sono divisi il numeratore e il denominatore della (45) pel prodotto infinito 1º.2º.3º..., e che non essendovi nel numeratore il fattore i2-i2 mentre nel denominatore vi è il fattore i's+i', per questo motivo compare il fattore i che moltiplica tutta la frazione per prodotti infiniti; operazioni molto simili spiegano le riduzioni che

danno la (48). 30. Le (47), (48) si riducono a forme finite: abbiamo (\*)

$$\frac{e^{u}-e^{-u}}{a}=u\left(1+\frac{u^{a}}{\pi^{a}}\right)\left(1+\frac{u^{a}}{3^{2}n^{a}}\right)\left(1+\frac{u^{a}}{5^{2}\pi^{a}}\right)\cdot\cdot\cdot\cdot$$

dalla quale facendo prima  $u=i\pi\sqrt{g}$ , poi  $u=\frac{h\pi}{1/g}$ si deducono

(49) 
$$\frac{e^{i\pi 1/6} - e^{-i\pi 1/6}}{a} = i\pi 1/g (1+gi^2) \left(1+g\frac{i^3}{a^3}\right) \left(1+g\frac{i^3}{3^3}\right) \cdot \cdots$$

(50) 
$$\frac{\frac{h\pi}{V\varepsilon} - \frac{h\pi}{V\varepsilon}}{a} = \frac{h\pi}{V\varepsilon} \left(1 + \frac{h^a}{\varepsilon}\right) \left(1 + \frac{h^a}{\varepsilon^{2a}}\right) \left(1 + \frac{h^a}{\varepsilon^{2a}}\right) \cdots$$

<sup>(\*)</sup> Eulero, Int. in analysin inf. T. I. n.º 156.

Abbiamo anche (\*)

$$\sin u = u \left(1 - \frac{u^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{u^2}{a^2 \pi^2}\right) \left(1 - \frac{u^2}{5^2 \pi^2}\right) \dots$$

si estragga dal secondo membro il fattore  $1-\frac{i\hbar^{2}}{k^{2}r^{2}}$  che diventa zero per  $u=k\pi$ , e si cerchi il valore di  $\frac{\sin u}{1-\frac{i\hbar^{2}}{k^{2}r^{2}}}$  pel caso di  $u=k\pi$ . Si trova colla nota regola ch'esso è

$$-\frac{1}{a}k\pi\cos k\pi$$
;

quindi fatto prima  $u=i\pi$ , poi  $u=h\pi$  otteniamo

(51) 
$$-\frac{1}{a}i\pi\cos i\pi = i\pi(1-i^a)\left(1-\frac{i^a}{a^a}\right)\left(1-\frac{i^a}{3^a}\right)\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

da cui è escluso il fattore i  $-\frac{i^2}{i^2}$  che renderebbe zero il secondo membro;

(52) 
$$-\frac{1}{2}h\pi\cos h\pi = h\pi (1-h^2)\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{h^2}{3^2}\right)\cdots$$

da cui è parimenti escluso il fattore  $t = \frac{h^2}{h^2}$ .

Ora le (49), (51) cambiano la (47) nella seguente

$$\Omega = -\frac{\pi \sqrt{g \cos i\pi}}{i(e^{i\pi \sqrt{g}} - e^{-i\pi \sqrt{g}})}$$

e le (50), (52) riducono similmente la (48) tale che può scriversi

<sup>(\*)</sup> Eulero. Int. in analysin inf. T. I. n.º 158.

(54) 
$$\Psi = -\sum_{i}^{\infty} \Delta h, \underbrace{\frac{h\pi}{V \mathcal{E}} - \frac{h\pi}{V \mathcal{E}}}_{\pi \cos h\pi} \underbrace{\frac{h\pi}{V \mathcal{E}} - \frac{h\pi}{V \mathcal{E}}}_{h} H_{h}$$

31. Facciasi g=s', e dal fin qui detto conchiudasi questa verità interessante. Nel sistema delle infinite equazioni fra un infinito numero d'incognite

$$H_{i} = \frac{1}{i^{2}+1} X_{i} + \frac{1}{a^{2}i^{3}+1} X_{a} + \frac{1}{3^{2}i^{2}+1} X_{3} + \ldots + \frac{1}{i^{2}i^{2}+1} X_{i} + cc.$$

$$\mathbf{H_a} = \frac{\tau}{s^2 + a^2} \mathbf{X_1} + \frac{\tau}{a^2 s^2 + a^2} \mathbf{X_a} + \frac{\tau}{3^2 s^2 + a^2} \mathbf{X_3} + \ldots + \frac{\tau}{3^2 s^2 + a^2} \mathbf{X_4} + \mathrm{ec.}$$

$$H_3 = \frac{\tau}{r^2 + 3^4} \cdot X_1 + \frac{\tau}{a^2 r^2 + 3^4} \cdot X_2 + \frac{\tau}{3^4 r^2 + 3^4} \cdot X_3 + \ldots + \frac{\tau}{r^2 a^2 + 3^5} \cdot X_4 + ec.$$

$$H_{\underline{h}} \! = \! \tfrac{t}{s^{2} \! + \! h^{2}} \; X_{1} \! + \! \tfrac{t}{s^{2} s^{2} \! + \! h^{2}} \; X_{\underline{a}} \! + \! \tfrac{t}{s^{2} s^{2} \! + \! h^{2}} \; X_{\underline{3}} \! + \! \ldots \! + \! \tfrac{t}{s^{2} s^{2} \! + \! h^{2}} \; X_{\underline{i}} \! + \! \mathrm{ec.}$$

l'incognita X, da cui si deducono tutte le altre, si trova per la formola

(55) 
$$X_{i} = \frac{1}{e^{\pi}} \cdot \frac{i \left(e - e^{-i\pi z}\right)}{\cos \lambda \pi} \sum_{i}^{\infty} \Delta h \cdot \frac{h \left(e^{-h \frac{\pi}{z}} - \frac{h \pi}{z}\right)}{\cos h \pi \left(i^{2} + \frac{h^{2}}{z^{2}}\right)} H_{h}$$

3a. Facciasi g=-s², e con qualche facile riduzione si dedurrà anche quest'altra verità. Nel sistema delle infinite equazioni fra un infinito numero d'incognite

$$\begin{split} \mathbf{H}_{i} &= \frac{1}{1-\sigma^{2}}\,\mathbf{X}_{i} + \frac{1}{1-\sigma^{2}\sigma}\,\mathbf{X}_{j} + \frac{1}{1-\sigma^{2}\sigma^{2}}\,\mathbf{X}_{3} + \ldots + \frac{1}{1-\sigma^{2}\sigma^{2}}\,\mathbf{X}_{i} + \mathrm{ec.} \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{2-\sigma^{2}}\,\mathbf{X}_{i} + \frac{1}{2-\sigma^{2}\sigma^{2}}\,\mathbf{X}_{3} + \frac{1}{2-\sigma^{2}\sigma^{2}}\,\mathbf{X}_{3} + \ldots + \frac{1}{2-\sigma^{2}\sigma^{2}}\,\mathbf{X}_{i} + \mathrm{ec.} \end{split}$$

$$\mathbf{H}_{3}^{=} = \frac{1}{3^{3-2^{2}}} \mathbf{X}_{1}^{+} + \frac{1}{3^{3-2^{2}}} \mathbf{X}_{2}^{-} + \frac{1}{3^{3-2^{2}}} \mathbf{X}_{3}^{+} + \dots + \frac{1}{3^{3-2^{2}}} \mathbf{X}_{1}^{+} + 0.$$

$$\mathbf{H}_{h}\!=\!\tfrac{1}{h^{2}\!-\!s^{2}}\,\mathbf{X}_{1}\!+\!\tfrac{1}{h^{2}\!-\!s^{2}\!s^{2}}\,\mathbf{X}_{a}\!+\!\tfrac{1}{h^{2}\!-\!s^{2}\!s^{2}}\,\mathbf{X}_{3}\!+\!...\!+\!\tfrac{1}{h^{2}\!-\!p_{2}\!h}\,\mathbf{X}_{i}\!+\!\operatorname{ec}$$

l'incognita generale X, è determinata per la formola

(56) 
$$X_i = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\sin i\pi t}{\cos i\pi} \sum_{1}^{\infty} \Delta h \cdot \frac{h \sin \frac{h\pi}{s}}{\cos h\pi} \left(i^2 - \frac{h^2}{s^2}\right) H_h$$

33. Stabiliti questi teoremi, comincierò a mostrame l'utilida con un esempio in cui si veda ridotto all'atto il metodo teoricamente esposto più sopra al n.º 215e che conducendo ad un risultamento noto serva di conferma agli stessi termi, sulla verità dei quali per la lunghezza dei calcoli precedenti avrebbe potuto per avventura taluno avere qualche inquiettudine. Sia nella equazione (4) del n.º 5 ⟨⟨x)=sini dar si abbia cioè l'equazione

 $\phi(x) = A \sin ax + A \sin 2ax + ... + A \sin iax + ec.$ 

che può scriversi

(57) 
$$\phi(x)=\sum_{i}^{\infty} \Delta_{i}.\dot{\Lambda}_{i}\sin iax;$$

e vogliasi che l'equazione sia vera fra i limiti e, r. L'equazione (10) del n.º 11. sarà

$$\int_{0}^{r}da.\phi(a)f(a)=\dot{A}_{1}\int_{0}^{r}da.\sin.aaf(a)+\dot{A}_{2}\int_{0}^{r}da.\sin.2aaf(a)+...$$

$$+\dot{A}\int_{0}^{r}da\sin iaaf(a)+ec.$$

dalla quale, secondo il detto al  $n.^{\circ}$  21, dando infiniti valori diversi alla funzione arbitraria f(a) si deve cavare un infinito numero di equazioni. Facciasi successivamente

$$f(\alpha) = \sin \frac{\pi \alpha}{r}$$
,  $\sin \frac{\pi \alpha}{r}$ ,  $\sin \frac{3\pi \alpha}{r}$ , . . .  $\sin \frac{h\pi \alpha}{r}$ , ec.

osservisi essere

$$\int_{0}^{r} da.\sin.iaa\sin.\frac{h\pi\alpha}{r} = \frac{h\pi}{r} \cdot \frac{\sin.iarcos.h\pi}{a^{2}i^{2} - \frac{h^{2}\pi^{2}}{r^{2}}}$$

come subito si dimostra per mezzo dell'integrazione ordinaria: ossia, posto  $a=s\,\frac{\pi}{r}$ ,

$$\int_{0}^{r} d\alpha \sin i a \alpha \sin \frac{h \pi a}{r} = \frac{r}{\pi} h \cos_{s} h \pi \frac{\sin i \pi s}{\mu^{s} i^{2} - h^{s}}$$

laonde se mettasi

$$\dot{A}_{i} = \frac{\pi}{r} \frac{X_{i}}{\sin i \pi s}$$
(58)

si hanno le infinite equazioni

$$\frac{1}{\cos \pi} \int_{0}^{\tau} da . \phi(a) \sin \frac{\pi a}{\tau}$$

$$=\frac{1}{i^{4}-1}X_{1}+\frac{1}{a^{3}i^{4}-1}X_{2}+\ldots +\frac{1}{i^{3}i^{6}-1}X_{i}+ec.,$$

$$\frac{1}{2\cos 2\pi} \int_{0}^{r} da. \phi(a) \sin \frac{2\pi a}{r}$$

$$= \frac{1}{\rho - a^2} X_1 + \frac{1}{a^2 \rho^2 - a^2} X_2 + \ldots + \frac{1}{\rho \rho^2 - a^2} X_1 + \text{ec.} \,,$$

$$\frac{1}{3\cos 3\pi} \int_{0}^{r} da \cdot \hat{\phi}(a) \sin \cdot \frac{3\pi a}{r}$$

$$= \frac{1}{a^{2}-3^{2}} X_{2} + \frac{1}{a^{2}a^{2}-3^{2}} X_{2} + \dots + \frac{1}{a^{2}a^{2}-3^{2}} X_{1} + \text{ec.},$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{h\cos k\sigma} \int_{0}^{\tau} da \cdot \vec{\phi}(a) \sin \cdot \frac{h\sigma a}{r}$$

$$=\frac{1}{s^a-h^a}\,X_1^{}+\frac{1}{s^as^a-h^a}\,X_2^{}+\ldots\ldots+\frac{1}{l^as^a-h^a}\,X_i^{}+\operatorname{ec.},$$

il sistema delle quali confrontato con quello del numero precedente dà

$$H_h = -\frac{1}{h\cos ha} \int_0^r da \cdot \tilde{\phi}(a) \sin \frac{h\pi a}{r}$$

epperò per la (56), essendo (cos.hπ)°= 1

$$X_{i} = \frac{4i\sin .i\pi i}{\pi^{2}\cos .i\pi} \int_{0}^{r} da. \, \phi(a) \Sigma_{i}^{\infty} \Delta h \, \frac{\sin . \, \frac{k\pi}{r} \sin . \, \frac{k\pi a}{r}}{\frac{k^{2}}{r^{2}} - i^{2}}$$

e per la (58)

$$\dot{\mathbf{A}}_{i} = \frac{4ir^{b}}{\pi r cos.i\pi} \int_{0}^{r} da.\hat{\boldsymbol{\phi}}(a) \, \boldsymbol{\Sigma}_{i}^{\infty} \Delta h \, \frac{\sin. \frac{\hbar y}{s} \sin. \frac{\hbar \pi a}{r}}{h^{b} - i^{b} s^{a}},$$

quindi la (57) in cui per  $\alpha$  si metta  $\frac{\pi s}{r}$ 

(59) 
$$\phi(x) = \frac{4\pi}{8r} \int_{0}^{x} da \ \phi(a) \sum_{i=1}^{\infty} \Delta i \frac{\sin \frac{\pi i \pi x}{r}}{\cos \frac{\pi i}{r}} \sum_{i=1}^{\infty} \Delta h \frac{\sin \frac{h\pi}{r} \sin \frac{h\pi a}{r}}{h^{2} - 2^{2}}$$

34. È notabilissimo come la precedente formola conserva tuttavia l'arbitraria s. L'integrale finito per h si può eseguire: allora si cade in un risultamento noto, e l'indeterminata s per certe condizioni necessarie all'integrazione resta determinata e diventa eguale all'unità: fermiamoci per poco a dimostrarlo.

$$\sin \frac{h\pi}{s} \sin \frac{h\pi a}{r} = \frac{1}{a} \cos \left(\frac{r}{s} - a\right) \frac{h\pi}{r} - \frac{1}{a} \cos \left(\frac{r}{s} + a\right) \frac{h\pi}{r}$$

avremo

$$\Sigma_{1}^{\infty} \Delta h \frac{\sin \frac{h\pi}{r} \sin \frac{h\pi}{r}}{h^{-r/2}} = \frac{1}{a} \sum_{1}^{\infty} \Delta h \frac{\cos \left(\frac{r}{r} - a\right) \frac{h\pi}{r}}{h^{n-r/2}}$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} \Delta h \frac{\cos \left(\frac{r}{r} + a\right) \frac{h\pi}{r}}{h^{n-r/2}}$$

Ma si sa essere (\*)

(61) 
$$\sum_{1}^{\infty} \Delta h. \frac{\cos h\pi}{h^{2}-k^{2}} = \frac{\tau}{2k^{2}} - \frac{\pi}{2k} \cdot \frac{\cos k(\pi-\pi)}{\sin k\pi}$$

formola che è vera solamente pei valori di x compresi fra zero e 21, inclusi anche questi limiti. Applicando questa formola a trovare i due integrali del secondo membro della precedente (60), e rammentandoci che a prende tutti i valori da o a r, si vede pel primo che non può essere s>1, perchè nei valori di a prossimi ad r verrebbe negativa la quantità sotto al coseno: similmente pel secondo si vede che non può essere s<1, perchè pei valori di a prossimi ad ril coefficien-

<sup>(\*)</sup> Poisson. Journal. Polyt, Cab. 19. pag. 418.

te di h sotto il coseno passerebbe al di là dell'altro limite 2π: in conseguenza deve essere ==1. Aspettiamo però a fare ===1 dopo eseguita l'applicazione della formola (61): il che è indifferente, ma riesce comodo: avremo

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Delta h. \frac{\cos\left(\frac{r}{i} - \alpha\right)^{\frac{1}{2\sigma}}}{\frac{h^2 - r^2 a^2}{r}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}a^2}} - \frac{\pi}{a_{ii}} \cdot \frac{\cos\left(i\pi s - i\pi + \frac{i\pi sa}{r}\right)}{\sin\beta\sigma s}$$

Poniamo questi valori nel secondo membro della (60), e chiamandone per un momento I il primo membro, otterremo con pronta riduzione

$$I = \frac{\pi}{\frac{\pi}{ais}} \frac{\sin(i\pi s - i\pi)\sin\frac{i\pi s a}{r}}{\frac{4i\pi i\pi s}{r}}$$

e scomponendo il primo seno del numeratore, e insieme avvertendo essere sin.ia=0

$$I = \frac{\pi}{ais} \cos i\pi \sin \frac{i\pi i\pi}{r}$$

valore che sostituito nella (59) la riduce (fatta s = 1)

$$\phi(x) = \frac{\alpha}{r} \int_{0}^{r} d\alpha. \, \phi(\alpha) \, \Sigma_{1}^{\infty} \Delta i. \sin. \, \frac{i\pi \pi}{r} \sin. \, \frac{i\pi \alpha}{r}$$

formola assai nota, e anche in questa memoria trovata con altro metodo al n.º 12. e segnata (14).

35 Ho tentato varie altre determinazioni della forma  $\psi_i(x)$  nell'equazione (4) del nº 5, e della forma arbitraria f(a) nell'equazione (ro) per cercare nuovi risultamenti col metodo posto al nº a.1, e coi teoremi dei nº 31, 3a: il che, siccosposto al n° a.1, e coi teoremi dei nº 31, 3a: il che, siccosposto al n° a.1, e coi teoremi dei nº 31, 3a: il che, siccosposto al n° a.

Tomo XX.

me è manifesto, poteva farsi in moltissimi modi diversi. Debbo però dichiarare d'essere sempre giunto o allo stesse formole di Fourier, o ad altre che da esse si possono dedurer: il qual secondo mezzo di dimostrazione sarà da ognuno preferito a quello di seguire a priori calcoli lunghi e intralicati. Per recarne un esempio: una delle formole più curiose a cui venni dopo molto giro di operazioni è la seguente

(62) 
$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{a}{\sigma^*} \int_0^\infty da. \tilde{\varphi}(a) \int_0^\infty dp. \left( \frac{a}{a^* - p^*(x-a)^*} - \frac{a}{a^* - p^*(x+a)^*} \right)$$

la quale è molto simile alla (24) che quì richiamo

$$\phi(x) = \frac{a}{\pi} \int_{0}^{\infty} da \cdot \phi(a) \int_{0}^{\infty} dp \sin p a \sin p x$$

ma ha queste due singolarità, che la x tolta fuori dal simbolo  $\phi$  non viene a collocarsi sotto trascendenti circolari ma in funzioni razionali assai semplici, e che contiene una indeterminata a che può essere un qualunque numero positivo. Essa pero può dedursi dalla formola di Fourier or ora ripetuta, ed ecco come. Pongasi  $\phi\left(\frac{x}{n}\right)$  per  $\phi(x)$ , ciò che non fa diletto, essendo u una lettera esprimente una quantità qualunque positiva, poi facciasi  $\frac{x}{n}=y$  avremo

$$\vec{\varphi}(y) = \frac{a}{\pi} \int_{0}^{\infty} da \cdot \vec{\varphi} \left(\frac{a}{a}\right) \int_{0}^{\infty} dp \cdot \sin pyu \cdot \sin p\alpha.$$

Adesso si faccia α=uβ, e verrà

$$\phi(y) = \frac{au}{\pi} \int_{0}^{\infty} d\beta . \phi(\beta) \int_{0}^{\infty} dp. \sin. pyu. \sin. p\beta u,$$

si divida per u e si moltiplichi per sin.au, essendo a una quantità qualunque positiva, sarà

$$\phi(\gamma) \frac{\sin_{\theta} du}{u} = \frac{a}{\pi} \int_{0}^{\infty} d\beta \cdot \hat{\varphi}(\beta) \int_{0}^{\infty} dp \cdot \sin_{\theta} au \cdot \sin_{\theta} pyu \cdot \sin_{\theta} p\beta u ;$$

osservisi essere per trasformazioni trigonometriche

$$\begin{aligned} & & \sin. au. \sin. pyu. \sin. p\beta u \\ & = \frac{\pi}{4} \sin. (a + p(y - \beta))u + \frac{1}{4} \sin. (a - p(y - \beta))u \\ & - \frac{1}{4} \sin. (a + p(y + \beta))u - \frac{1}{4} \sin. (a - p(y + \beta))u \end{aligned}$$

epperò so ne faccia la sostituzione nella precedente, e poi si integri per u fra i limiti o, co. Rammentate le note formole

$$\int_{0}^{\infty} dx. \frac{\sin ax}{x} = \frac{\pi}{a}; \quad \int_{0}^{\infty} dx. \sin ax = \frac{\pi}{a}$$

verrà, dopo aver moltiplicato per  $\frac{a}{\pi}$ , e rimesse x, a per y, $\beta$ 

$$\phi(x) = \frac{1}{n^*} \int_0^{\infty} da. \phi(a) \int_0^{\infty} dp. \left( \frac{1}{a + px - px} + \frac{1}{a - px + px} \right)$$

$$= \frac{1}{a + px + px} - \frac{1}{a - px - px}.$$

Qui le quattro frazioni sotto il secondo segno integrale si possono compendiare in varie maniere: due ne distinguo che danno le formole

$$\phi(x) = \frac{a}{\pi i} \int_{0}^{\infty} da.\phi(a) \int_{0}^{\infty} dp. \left( \frac{a}{a^{-}p^{*}(x-a)^{*}} - \frac{a}{a^{-}p^{*}(x+a)^{*}} \right)$$

$$(63) \quad \phi(x) = \frac{a}{\pi i} \int_{0}^{\infty} da.\phi(a) \int_{0}^{\infty} dp. \left( \frac{pa}{(px+a)^{*}-p^{*}a^{*}} - \frac{pa}{(px-b)^{*}-p^{*}a^{*}} - \frac{pa}{(px-b)^{*}-p^{*}a^{*}} \right)$$

delle quali la prima è la (62).

36. È facile verificare queste formole per qualche caso particolare in cui si sappiano faro le integrazioni. Per un esempio si a  $\phi(x) = \frac{1}{x}$ , e la (63) potrà scriversi

$$\frac{1}{x} = \frac{a}{\pi^*} \int_0^\infty \frac{dp}{p} \int_0^\infty da. \left( \frac{1}{\alpha^3 - \left( \frac{px - a}{p} \right)^3} - \frac{1}{\alpha^3 - \left( \frac{px + a}{p} \right)^3} \right),$$

ora l'integrazione ordinaria dimostra prontamente la formola

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^2-k^2} = \pm \frac{1}{2k} \log \cdot (-1)$$

trovata anche dal Poisson con altri metodi più complicati: epperò per la sua applicazione si ha dalla precedente prendendo il segno superiore

$$\frac{t}{x} = \frac{\log(-t)}{\pi^2} \int_0^{\infty} dp \left( \frac{t}{px-a} - \frac{t}{px+a} \right)$$

che può ridursi alla espressione

$$\frac{1}{x} = \frac{2a\log(-1)}{x^3x^3} \int_0^\infty dp, \frac{1}{p^3 - \frac{a^3}{x^3}};$$

quest'ultimo integrale si ha dalla stessa formola ora usata che, preso il segno inferiore, dà per esso il valore  $-\frac{x}{3a} \log (-1)$ . Sostituendo ottiensi

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{x} \frac{[\log(-1)]^k}{n^k}$$

equazione che si riconoscerà identica quando pongasi per log.(-1) il suo valore π√-1 dato dalla celebre analogia di Giovanni Bernoulli.

37. I due teoremi dei n. 31, 32, anche indipendente-

mente dalla loro applicazione al metodo esposto nel n.º at forniscono due formole interessanti. Le (h)esime equuzioni di quei dne sistemi, ove alle X<sub>s</sub>,X<sub>s</sub>,X<sub>s</sub>, ec. sostituiscansi leepressioni date dalle (55), (56), compendiando alla solita maniera le serie infinite dei secondi membri possono scriversi

(64) 
$$H_{\underline{k}} = \frac{r^{k}}{\pi^{k}} \sum_{i}^{\infty} \Delta i. \frac{i\cos i\pi \left( \frac{e}{e} - \frac{e^{-i\pi s}}{e^{s} - e^{k\pi}} \right)}{\sum_{i}^{\infty} \Delta k. \frac{k\cos k\pi \left( \frac{e^{-i}}{e} - \frac{e^{-i\pi s}}{e^{-i}} \right)}{k\pi} H_{\underline{k}}$$

(65) 
$$H_{h} = \frac{4s^{2}}{\pi^{2}} \sum_{i}^{\infty} \Delta i. \frac{i\cos i\pi \sin i\pi s}{h^{2} - i^{2}s^{2}} \sum_{i}^{\infty} \Delta k. \frac{k\cos k\pi \sin \frac{k\pi}{s}}{s^{2}s^{2} - k^{2}} H_{k}$$

dove i coseni cos.in, cos.km si pongono indifferentemente nel numeratore o nel denominatore per una ragiono sopra accennata. Vedesi che ho mutata la lettera nei due integrali delle (55) (56) il che era lecito entrandovi essa in un modo meramente istrumentale. Così le precedenti (64), (65) sono formate cogli integrali finiti in un modo somigliante a quello con cui le formole di Fourier, o le (62), (63) sono fatte cogli integrali contiuni: la variabile h è tolta di sotto a un simbolo qualunque H di funzione, e trasportata in un denominatore di una funzione razionale. Però quasi tutte le proprietà di quelle insigni formole si riscontrano anche nelle (64), (65), che come quelle si estendono facilmente a un qualunque numero di variabili.

38. Agevolmente e senza intermedj di altre teoriche si traducono le (64), (65) in integrali continui. Ciò può farsi in varie maniere: eccone una. Si elimini il fattore i.cos.in (e similmete anche l'altro kcos.hr) mediante il teorema

(66) 
$$i\cos i\pi = \left(\frac{g^{b}}{l^{2}} - i^{b}\right) \int_{0}^{\pi} dt \cdot \frac{t\sin gt \sin ilt}{\sin \cdot \frac{g\pi}{L}}$$

che prontamente si dimostra coll'integrazione ordinaria: poi pongasi  $H_{av}$  invece di  $H_{h}$ , essendo o una quantità che paò diventar piccola quanto si vuole: indi si passi dagli integrali finiti ai continui col metodo noto e già praticato anche in questa memoria. Non mi fermo sui risultamenti che somministrano formole delle quali può ripetersi quanto dissi al n.º 35.

39. Piuttosto trovo meritevole d'attenzione l' uso delle (64), (65) tali come sono, per la ricerca di integrali finiti de finiti fra x e ∞, cho se ne possono dedurre in numero tanto grande quanto si vuole. Serviranno entrambe, ma per la seconda osservo, che quando s è numero intero, s'incontra la circostauza del passaggio per l'infinito: circostanza che esige tutta la cautela (\*). Faro un solo esempio sulla (65). Sia

$$H_h = \frac{\sin hx \cos hx}{\sin \frac{hx}{4}}$$

si ha

$$\frac{\sin hx \cos hx}{\sin \frac{hx}{2}} = \frac{4i^*}{\pi^*} \sum_{1}^{\infty} \Delta i, \frac{i\cos ix \sin hx}{i^2 i^2 - h^2} \sum_{1}^{\infty} \Delta k, \frac{k\sin k}{k^2 - i^2}$$

Ammettendo la condizione che x sia compresa fra o,  $2\pi$  esclusi i limiti, abbiamo (\*\*)

<sup>(\*)</sup> Poisson. Journal Polyt. Cah. 18. pag. 3a5. (\*\*) Poisson. Journal. Polyt. Cah. 19. pag. 418.

$$\sum_{i}^{\infty} \Delta k, \frac{k \sin k x}{k^{2} - i^{2} s^{2}} = \frac{\pi}{a} \frac{\sin i s (\pi - x)}{\sin i \pi s}$$

quindi sostituendo si cava

(67) 
$$\Sigma_{\tau}^{\infty} \Delta i. \frac{i \cos i \pi \sin i \pi (n-x)}{i^{2} - \frac{h^{2}}{s^{2}}} = \frac{\pi}{2} \frac{\sin h \pi \cos h \pi}{\sin \frac{h \pi}{s}}$$

formola che facilmente si verifica in molte maniere dando ad x e ad s dei valori particolari.

Non voglio dissimulare che ritenendo s quantità reale, la formola (64) incontrerà le difficoltà cui soggiacciono le serie divergenti: non così la (65), che si risolve in una serie convergente.

## Sugli integrali finiti definiti.

Essendo P una funzione analitica formata di molte lettere, esprimerò per ΣΔx.P piuttosto che per ΣP l'integrale finito indefinito preso relativamente alla x, e ciò a fine d'indicare la variabile per cui si è fatta l'integrazione, in perfetta similitudine a quanto si pratica negl'integrali continui. Qui però bisognerà esprimere a parte anche una quantità finita o cui è eguale la differenza Δx. Immaginando trovata per ΣΔx.P la funzione F(x, a) che vi è eguale, scriverò  $\sum_{\alpha}^{b} \Delta x.P$  invece della differenza F(b,o)-F(a,o), e chiamerò questa espressione l' integrale finito della P preso per rapporto ad x e definito fra i limiti x=a, x=b, essendo Δx=o. Il sig. Fourier segna questo integrale definito colle due equazioni x=a, x=b scritte costantemente una sotto e una sopra il simbolo  $\Sigma$  , il che è un po' più lungo per la scrittura e riesce incomodo per la stampa. Questa ragione, e più quella della piena somiglianza colla notazione adottata per gli integrali definiti continui, varrà, spero, perchè mi sia condonata la piccola innovazione introdotta.

Raccolgo alcuni principi e teoremi relativi a questi integrali finiti definiti, di molti dei quali faccio uso nella precedente Memoria.

 Si possono rovesciare i limiti cambiando il segno all' integrale. Questo principio discende immediatamente dalla definizione.

II. Dalla equazione notissima nel calcolo delle differenze, che subito si costruisce sulla definizione che ne forma il fondamento

 $\Sigma \Delta x.\phi(x+no) = \phi(x)+\phi(x+o)+....+\phi(x+(n-1)o)+\Sigma \Delta x.\phi(x);$ 

mettendo x=a e trasponendo l'ultimo termine, si ha pel detto or ora

(a)  $\Sigma_a^{a+no}\Delta x.\phi(x)=\phi(a)+\phi(a+o)+\phi(a+2o)+...+\phi(a+(n-1)o)$ 

e se o=1, a=m ponendo n per m+n, e cambiando per comodo la x esprimente numero intero in i

 $(\beta) \qquad \textstyle \sum_{m}^{n} \Delta i.\phi(i) = \phi(m) + \phi(m+1) + \phi(m+2) + \ldots + \phi(n-1)$ 

che quando n=00, m=1 diventa

$$(\gamma) \qquad \Sigma_{\tau}^{\infty} \Delta i. \phi(i) = \phi(\tau) + \phi(2) + \phi(3) + \text{ec. all' inf.}$$

I primi membri di queste (a),  $(\beta)$ ,  $(\gamma)$  sono espressioni ora adottate per significare compendiosamente serie finite o infinite e tali equazioni provano ch'esse sono veri integrali finiti e non modi capricciosi di scrivere.

III. Osservisi il seguente teorema

$$\Sigma_{mg}^{no} \Delta x. \phi(x) = \Sigma_{m}^{n} \Delta i. \phi(io)$$

dove è  $\Delta x=0$ ,  $\Delta i=1$ . Esso si prova subito sciogliendo i due membri nelle due serie equivalenti mediante le  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$ : questo è il teorema usato nella memoria ai n. 11. 13.

IV. Essendo  $b = a + m\omega$ ,  $c = a + n\omega$  è

$$\Sigma^{b} \Delta x.\phi(x) + \Sigma^{c}_{b} \Delta x.\phi(x) = \Sigma^{c}_{a} \Delta x.\phi(x)$$

come nel caso analogo degli integrali continui; il teorema si prova colla formola (α) precedente.

V. Tutte le serie infinite di cui si conosce la somma (e grandissimo ne è il numero in analisi) somministrano altrettante formole integrali definite fra 1, co date per espressioni finite e note. Per un esempio la notissima

$$\frac{a}{1-a} = a + a^2 + \dots + a^i + ec.$$

si traduce a motivo della (7) nella formola

$$\sum_{i}^{\infty} \Delta i. a = \frac{a}{i-a}$$

la quale è però soltanto vera quando  $a < \tau$ , ossia quando la serie infinita è convergente.

VI. Il principio della derivazione e integrazione per le costanti, che nel calcolo degli integrali definiti continui conduce a tanti nuovi risultamenti, vale similmente anche per gl'integrali di cui parliamo: si possono addurre ben molti esempj in cui esso somministra formole riconosciute altrimenti per vere.

VII. Non solo dalle serie infinite ma anche dalle espressioni per prodotti infiniti si cavano formole come all'art. V; ciò avviene perchè queste espressioni si riducono a quelle seTomo XX. 68

rie derivando logaritmicamente per alcuna delle costanti. A re carne un esempio: dalla espressione

$$\sin\!z = z \, \Big( t - \tfrac{z^a}{\pi^a} \Big) \! \Big( t - \tfrac{z^a}{z^a \pi^a} \Big) \! \Big( t - \tfrac{z^a}{\delta^2 \pi^a} \Big) \cdot \cdots \cdot$$

ponendo z=xx, e prendendo i logaritmi si ha

$$\log \sin \pi x = \log x + \log \pi + \sum_{i}^{\infty} \Delta i \cdot \log \left(1 - \frac{x^{2}}{i^{2}}\right)$$

e derivando per x facilmente si deduce

(e) 
$$\sum_{i=1}^{\infty} \Delta i_i \frac{i}{i^2 + x^4} = \frac{i}{ax^2} - \frac{\pi}{ax} \cot \pi x$$

Se il secondo membro di questa equazione si scrive sotto la forma  $\frac{\sin \pi x - x \cos \pi x}{\alpha x^2 \sin \pi x}$ , diventa  $\frac{\circ}{\circ}$  per x = 0: ma colla nota regola si cava il vero valore e quindi la formola

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Delta i \cdot \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

che è conosciuta dietro l'uso di principi analitici differenti.

VIII. Cl'integrali di cui qui si parla si usano talvolta promiscuamente cogli integrali continui, e sono dati gli uni per gli altri. Così il Poisson sul principio di una sua elegantissima memoria (\*) dimostra l'equazione ad integrali misti

$$\sum_{i}^{\infty} \Delta i \frac{x}{((ai-1)\pi + g)^{2} + x^{2}} = \int_{0}^{\infty} dt. \frac{e^{-gt} \sin xt}{e^{t} - e^{-\pi t}}$$

dove g deve essere compresa fra -π,∞: eccone un altro

<sup>(\*)</sup> Journal Polyt. Cab. 18. pag. 296. co attempt of the

esempio. Dalla

$$\Sigma_{i}^{\infty} \Delta i. e^{-ix} = \frac{i}{e^{x} - 1}$$

che si ottiene subito dalla  $(\delta)$  col porre  $a=e^{-x}$ ; moltiplicando per  $\sin kx$ ,  $\cos kx$ , e poi integrando per x da o all' $\cos$ , si hanno per formole assai note (\*)

$$\Sigma_{i}^{\infty} \Delta i \cdot \frac{k}{k^{2}+i^{2}} = \int_{0}^{\infty} dx. \frac{\sin kx}{e^{x}-1}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Delta i, \frac{i}{k^2+i^2} = \int_{0}^{\infty} dx, \frac{\cos kx}{e^2-1}$$

Di questi integrali finiti il primo è conosciuto (\*\*) per una for mola che si cava anche subito dalla (s) ove pongasi  $x=k\sqrt{-1}$ , e si conchiude

$$\int_{0}^{\infty} dx \cdot \frac{\sin kx}{e^{x}-1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\frac{k\pi}{e} + e^{-k\pi}}{\frac{k\pi}{e} - e^{k\pi}} - \frac{i}{2k}.$$

IX. Notabilissima per questi integrali, come per gl'integrali continui, è la circostanza che spesso ha luogo, di potere assegnare il valore dell'integrale definito fra certi limiti, mentre non se ne saprebbe trovare l'integrale indefinito. Cosi mentre il calcolo delle differenze non sa dare l'integrale indefinito  $\Delta \Delta t. \frac{d^4}{2}$  si ha da una serie nota

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Delta i \cdot \frac{a^{i}}{i} = -\log \cdot (1-a)$$

(\*) Poisson, Journal Polyt, Cah. 16, pag. 219. (\*\*) Poisson, Journal Polyt, Cah. 19, pag. 416. formola che potevasi prontamente dedurre anche dalla precedente (d) integrando per la costante a fra o, a dopo averla

tutta divisa per la stessa a.

X. La precedente osservazione non toglie che il mezzo più ovvio per la ricerca degli integrali definiti sia quello di tentare il passaggio per l'integrale indefinito. Pertanto dimostrerò quì due formole d'integrali finiti indefiniti che sono fecondissime di applicazioni, e tanto più volentieri in quanto che il metodo usato riesce egualmente bene in varii altri casi analoghi. Pongo

$$X = \Sigma \Delta x. p^x \cos .ax;$$
  $Y = \Sigma \Delta x. p^x \sin .ax,$ 

prendo dal calcolo delle differenze i quattro dati seguenti

 $\Delta \sin ax = (\cos aa - 1)\sin ax + \sin aa \cos ax$ 

 $\Delta \cos ax = (\cos a\phi - 1)\cos ax - \sin a\phi \sin ax$ 

$$\Sigma \Delta x. p^x = \frac{p^x}{p^0 - 1}$$

$$\Sigma \Delta x. (\mathbf{U}_x \mathbf{Z}_x) = \mathbf{U} \Sigma \Delta x. \mathbf{Z} - \Sigma \Delta x. [(\mathbf{Z} + \Sigma \Delta x. \mathbf{Z}) \Delta \mathbf{U}]$$

coi quali le due equazioni di posizione si cambiano nelle seguenti

$$X = \cos ax \frac{p^x}{p^0 - 1} - \Sigma \Delta x.$$

$$\left[ \left[ (\cos a\phi - 1)\cos ax - \sin a\phi \sin ax \right] \frac{p^{x+y}}{p^{x}-1} \right]$$

$$Y = \sin ax \frac{p^x}{p^0 - 1} - \Sigma \Delta x.$$

$$\left[ \left[ (\cos .ao - 1) \sin .ax + \sin .ao \cos .ax \right] \frac{p^{\alpha + \phi}}{p^{\phi} - 1} \right],$$

e queste (osservando che gl'integrali dei secondi membri, sgombrati più che è possibile dei fattori costanti, sono quegli stessi designati colle lettere X, Y) danno con facili riduzioni le due equazioni

$$(p^{\circ}\cos.a\phi - 1)X - p^{\circ}\sin.a\phi Y = p^{\circ}\cos.ax$$
  
 $p^{\circ}\sin.a\phi X + (p\cos.a\phi - 1)Y = p^{\circ}\sin.ax.$ 

Si risolvano queste col metodo elementare, e sostituendo ad X, Y, le formole rappresentate, si avranno

$$\sum \Delta x. p^{x} \cos .ax = p^{x} \underbrace{p^{\theta} \cos [a(x-\theta)] - \cos .ax}_{1-2p^{\theta} \cos .a\theta + p^{2\theta}}$$

$$\Sigma \Delta x. p^{x} \sin .ax = p^{x} \cdot \frac{p^{a} \sin [a(x-a)] - \sin .ax}{1 - 2p^{a} \cos .aa + p^{a}}$$

Quindi si deducono le espressioni generali per  $\sum_a^{\beta} \Delta x. p^x \cos ax$ 

 $\sum_{\alpha}^{\theta} \Delta x_{\beta}^{\sigma} \sin \alpha x$  qualunque siano i limiti  $\alpha$ ,  $\beta$ : e moltiplicando la prima per  $\cos q$ , la seconda per  $\sin q$  e sottráendo, poi la prima per  $\sin q$  e la seconda per  $\cos q$  e sommando, si hanno quelle anche più generali di

$$\Sigma_a^{\beta} \Delta x. p^x \cos(ax+q), \ \Sigma_a^{\beta} \Delta x. p^x \sin(ax+q).$$

Non iscrivo queste formole per amore di brevità, e perchè ognuno lo può fare.

Dalle (7), definendo le integrazioni fra 1, co, messa c=1, e quindi surrogata la lettera i alla x, si hanno subito

(0) 
$$\sum_{i}^{\infty} \Delta i. p^{i} \cos.ai = \frac{p(\cos.a-i)}{1-ap\cos.a+p^{i}}$$

$$\sum_{i}^{\infty} \Delta i. p^{i} \sin.ai = \frac{p\sin.a}{1-ap\cos(a+p^{i})}$$

le quali suppongono p<1. Queste formole che il Poisson trova coll'uso delle serie (\*) ed altre che ne conseguono, sono manifestamente casi assai particolari delle

$$\sum_{x}^{\beta} \Delta x.p^{x} \cos.ax, \qquad \sum_{a}^{\beta} \Delta x.p^{x} \sin.ax$$

che insegnammo a trovare.

Si determinano per le premesse anche le formole integrali indefinite

$$\Sigma \Delta x. p^x \sin ax \sin bx$$
,  $\Sigma \Delta x. p^x \sin ax \cos bx$ ,

$$\Sigma \Delta x.p^x \cos .ax \cos .bx$$

scomponendo per trasformazioni trigonometriche i prodotti di seni e coseni in seni e coseni semplici, il che le riduce alla forma delle trovate: così si determinano anche formole integrali contenenti un qualunque prodotto di seni e coseni, e quindi anche le

$$\Sigma \Delta x.p^{x}(\sin ax)^{m}, \quad \Sigma \Delta x.p^{x}(\cos ax)^{m},$$

essendo m numero intero. In seguito passando a definizioni fra limiti scelti ad arbitrio si dedurrà un grandissimo nu-

<sup>(\*)</sup> Journal Polyt. Cah. 19. psg. 405.

mero di formole integrali finite definite che saranno eguali ad espressioni note.

E se dopo aver introdotto sotto i segni integrali un numero qualunque di fattori formanti un prodotto

cos.axcos.bxcos.cx...., ovvero sin.axcos.bxcos.cx..., ec.

si rifletta che le lettere  $a, b, c_{\nu}$ ... sono quantità che rimangono affatto arbitrarie, si capirà che potendo derivare o integrare a piacimento per queste costanti le equazioni formate dalle formole integrali e dai loro valori trovati come sopra, si estende all'infinito il numero di altri nuovi integrali finiti definiti che possono aversi dai precedenti.