SULLA TRASFORMAZIONE

DELLE FORMOLE INTEGRALI DUPLICATE E TRIPLICATE

MEMORIA

DEL SIGNOR

DOTTOR GABRIO PIOLA

Ricevuta adì 16. *Giugno* 1828.

Nella teorica della trasformazione delle formole integrali duplicate e triplicate due ricerche, per quanto a me pare, possono ancora farsi. È la prima una dimostrazione accomodata al metodo delle funzioni analitiche dove le lettere non indicano se non i posti occupati da quantità qualsivogliano, è la seconda uno schiarimento intorno ai limiti tra i quali si debbono definire gl'integrali trasformati. Si può credere che alla prima domanda abbia soddisfatto nella Teorica delle funzioni (1) il Lagrange; ma il suo discorso presenta ancora quel principio di una variabilità assunta e dimessa alternativamente dalle indeterminate, che è il fondamento della dimostrazione data la prima volta da Eulero: e non sembra totalmente conforme allo spirito di chi scrisse che le funzioni derivate e le primitive si deducono le une dalle altre per mezzo di quantità che entrano in questa operazione in un modo puramente istrumentale (2). L'altra parte della questione è toccata in varii Autori che nelle diverse applicazioni ne diedero implicitamente la soluzione: ma non fu, per quello che è a mia cognizione, trattata di proposito. In tale stato di cose,

(1) Théor. des fonct. P. 2. n. 81.

(2) Leçons sur les fonct. pag. 15. Edit. in 8.

vedendo che i due teoremi per la trasformazione delle formole integrali duplicate e triplicate erano di tutta importanza nella Geometria e principalmente nella Meccanica, mi sono formato la seguente analisi, la quale potrebbe riuscire ad altri utile come lo fu a me per riconoscere chiaramente la verità di quei due teoremi; ed io spero che chi vorrà pazientemente seguirmi nei calcoli e nei ragionamenti, troverà una risposta adequata alle due proposte ricerche.

§. I.

Trasformazione delle formole integrali duplicate.

1. Premetto un cenno relativo agli integrali semplici. Si desume dalla natura delle funzioni analitiche questo principio; che l'integrale $\int dx\phi(x)$ preso per la x, che sta nella funzione $\phi(x)$ come una variabile semplice, e tenuto incompleto somministra una funzione di x ove, se al luogo di detta lettera si mette un'altra funzione qualsivoglia $x[p]$ di una nuova variabile p, si ha lo stesso resultato che si sarebbe ottenuto immediatamente dall'integrale $\int dp\phi(x[p])x'[p]$ tenuto parimenti incompleto; dove $x'[p]$ indica la derivata della $x[p]$ per la p al modo Lagrangiano omai generalmente adottato, e che sempre useremo anche in seguito.

2. Conseguenza diretta del principio antecedente si è che definendo l'integrale $\int dx\phi(x)$ e dando alla variabile nei due limiti i valori $x[a]$, $x[b]$ si ha lo stesso risultato che si ottiene dall'integrale $\int dp\phi(x[p])x'[p]$ definito fra i limiti a, b. Il teorema può scriversi come segue

$$(1) \qquad \int_{x[a]}^{x[b]} dx\phi(x) = \int_a^b dp\phi(x[p])\,x'[p] \qquad (*)$$

(*) Questa maniera di scrivere gl'integrali definiti ponendo ai piedi del segno $\int$ la quantità che esprime il valore della variabile nel primo limite, e in

3. Propongasi l'integrale duplicato

$$\int dx \int dy \, V(x, y)$$

e si cerchi nella ipotesi che le due variabili debbano mantenersi sempre fra di loro affatto indipendenti: eseguita la doppia operazione, si otterrà una funzione delle due variabili x, y, che indichiamo per $U(x, y)$, a cui se aggiungasi una somma $F(x)+\psi(y)$ di due funzioni arbitrarie, avrassi, come è noto, l'integrale duplicato completo. Non parlando ora di questa aggiunta, e riguardando il solo integrale $U(x, y)$ indefinito ed incompleto, diciamo che se in luogo delle x, y si pongano due funzioni qualsivogliano $x[p]$, $y[q]$ la prima della nuova variabile p, e la seconda della nuova variabile q, l'integrale duplicato

$$\int dp \int dq \, V(x[p], y[q]) x'[p] y'[q]$$

sarà espresso da $U(x[p], y[q])$ essendo la forma U quella stessa trovata precedentemente. Ciò discende immediatamente dal principio esposto nel n. 1. Di simili integrali duplicati, è notissimo che l'ordine da tenersi nelle integrazioni è arbitrario, potendosi cominciare da quella delle due variabili che più piace.

4. Ma gl' integrali duplicati, di cui ora si è discorso, non sono quelli di uso frequente nelle matematiche: tali sono invece altri integrali duplicati nei quali le variabili rimangono fra di loro indipendenti in una sola integrazione. Dice Eulero (*) che di questi e dei primi grandissima è la differenza; perchè quantunque nella prima integrazione si proceda egualmente, quando si passa all'altra integrazione, la variabile che nel primo caso si tratta come una costante, diventa invece in ambi i limiti del primo integrale funzione dell'altra variabile. Nondimeno l'inversione nell'ordine delle integrazioni de-

---

alto quella che esprime il valore della variabile nel secondo limite, è stata la prima volta introdotta dal Sig. *Fourier*: si adotta in questa memoria essendo essa presentemente accettata da tutti i Geometri Francesi.

(*) Cal. Int. T. IV. Supp. VI. §. 7.

ve ammettersi anche in questo secondo caso, purchè facciasi nel modo che siam per dire; come si conosce chiaramente tenendo di mira il fine a cui è indirizzata la ricerca dei detti integrali duplicati. Infatti la regola che si tiene è questa: eseguita sulla $V(x,y)$ la prima integrazione per y, si definisce il trovato integrale fra due valori di y

$$(2) \qquad y = y_1(x) \quad ; \quad y = y_2(x)$$

che sono radici di una stessa equazione data

$$(3) \qquad f(x, y) = 0$$

poscia la seconda integrazione per x si estende fra due limiti $x = a$, $x = b$, che sono i valori del massimo o del minimo che prende la x considerata nella precedente equazione come funzione implicita della y: ossia, ciò che è lo stesso, sono due radici di quella equazione a cui si perviene eliminando y fra le due

$$f(x, y) = 0; \quad f'(y) = 0.$$

Così facendo si sa che nelle applicazioni il valore ottenuto esprime la misura di un qualche concreto, per esempio, la quadratura di una superficie piana circoscritta da una curva continua. Ma essendo quel concreto riferito a due coordinate, non vi è alcuna ragione per la quale una delle variabili debba essere all' altra preferita. Questo è chiarissimo, e ne conseguita che il resultato finale deve essere lo stesso, se si cominci ad integrare dalla x e si estenda l' integrazione fra i limiti $x = x_1(y)$; $x = x_2(y)$ radici della stessa $f(x,y) = 0$ e si passi alla seconda integrazione per y estendendola fra i limiti $y = \alpha$, $y = \beta$ radici di quella equazione a cui si giunge eliminando x fra le due $f(x, y) = 0$; $f'(x) = 0$.

5. Sia dato, come più sopra, l' integrale duplicato $\int dx \int dy V(x, y)$, e l' equazione dei limiti $f(x, y) = 0$; e si stabilisca di estendere la prima integrazione per y tra i limiti $y_1(x)$, $y_2(x)$, e la seconda per x tra i limiti a, b. Ora in luogo di y pongasi una funzione qualunque $y[x, p]$ dell' al-

tra variabile x e di una nuova p, e con $y'[p]$ esprimasi la derivata parziale della $y[x,p]$ per la p: si dice che l'integrale duplicato

$$\int dx \int dp \mathrm{V}(x, y[x, p]) y'[p]$$

condurrà allo stesso valore finale se la prima integrazione per p si estenda fra i limiti $p_1(x)$, $p_2(x)$ valori di p cavati alla stessa maniera dalla equazione

$$(4) \qquad f(x, y[x, p]) = 0$$

e la seconda integrazione si estenda fra i limiti a, b come sopra. Ciò sarà provato quando si conosca che la funzione di x preparata per la seconda integrazione, ossia, il che è lo stesso, il resultato della prima integrazione dopo la definizione dell' integrale, sia il medesimo in ambi i casi. L'equazione (1) del n. 2 dà

$$(5) \qquad \int_{p_1(x)}^{p_2(x)} dp\, \mathrm{V}(x, y[x,p]) y[p] = \int_{y[x,p_1(x)]}^{y[x,p_2(x)]} dy \mathrm{V}(x,y)$$

e però la proposizione è provata quando sia vera quest'altra equazione

$$(6) \qquad \int_{y[x,p_1(x)]}^{y[x,p_2(x)]} dy \mathrm{V}(x,y) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \mathrm{V}(x,y)$$

la quale suppone le due equazioni

$$(7) \qquad y[x, p_1(x)] = y_1(x) \quad ; \quad y[x, p_2(x)] = y_2(x).$$

Ora queste equazioni hanno veramente luogo, come è facile a riconoscere osservando che il ritrovamento delle due $p_1(x)$, $p_2(x)$ radici della equazione (4) conduce primieramente alle due equazioni

$$y[x,p] = y_1(x) \quad ; \quad y[x,p] = y_2(x)$$

le quali, sciolte per p, danno poi i valori $p = p_1(x)$, $p = p_2(x)$; questi valori sostituiti nelle precedenti equazioni da cui sono cavati, debbono evidentemente renderle identiche, e allora si hanno le equazioni (7).

6. Presentemente possiamo proporci la trasformazione generale delle formole integrali duplicate. Sia tutto come al principio del n.° precedente, e siano anche date le due equazioni

(8) $$x = x[p, q] \quad ; \quad y = y[p, q]$$

per le quali le due variabili si esprimono generalmente in funzione di due nuove variabili p, q.

Dalla prima di queste equazioni (8) si può intendere cavata la q in funzione di x, p.

(9) $$q = q(x, p)$$

il qual valore, se sostituiscasi nelle (8), le riduce

(10) $$x = x[p, q(x, p)]$$

(11) $$y = y[p, q(x, p)]$$

Di queste la prima, cioè la (10) deve essere manifestamente un' equazione identica, però insieme con essa sussisteranno tutte le sue derivate tanto per x che per p: gioverà notare le due prime

(12) $$0 = x'(p) + x'(q)q'(p)$$

(13) $$1 = x'(q)q'(x)$$

l' altra equazione (11) servirà come segue. Vedemmo (n.° prec.) che il valor finale dell'integrale duplicato non muta se pongasi in luogo di y una funzione dell' altra variabile x e di una nuova p, purchè la funzione $V(x, y[x,p])$ si moltiplichi per $y'[p]$, e si prenda il primo integrale per p. Poniamo dunque in luogo di y la $y[p, q(x, p)]$ data dal secondo membro della (11), che è veramente una funzione delle due x, p (non facendo alcuna differenza l' esservi la p in parte esplicita in parte implicita alla $q(x,p)$) solamente avvertiamo che la derivata parziale per la p avrà due termini, dei quali il primo sarà dovuto al p esplicito alla $q(x,p)$ e l' altra al p implicito, sarà cioè

$$y'[p] = y'(p) + y'(q)q'(p).$$

Questa espressione può subire due cangiamenti, in luogo di

$q'(p)$ si potrà porre il suo valore $-\frac{x'(p)}{x'(q)}$ cavato dalla (12) e si avrà

$$y'[p] = \frac{x'(q)\,y'(p) - y'(q)\,x'(p)}{x'(q)}$$

poscia si potrà mettere $q'(x)$ in luogo di $\frac{1}{x'(q)}$ in virtù della equazione (13), e così avrassi

$$y'[p] = \{x'(q)y'(p) - y'(q)x'(p)\}\,q'(x);$$

quindi l' integrale duplicato si trasformerà nella espressione

(14) $\int dx \int dp \mathrm{V}(x[p,q(x,p)], y[p,q(x,p)])\{x'(q)y'(p) - y'(q)x'(p)\}q'(x)$;

dove osservo che veramente la V avrebbe dovuto scriversi $\mathrm{V}(x, y[p, q(x,p)])$, ma ho potuto surrogare alla x semplice la quantità $x[p, q(x,p)]$ che gli è eguale per la (10), e nella quale la p non entra che apparentemente.

In questa espressione (14) è da notarsi che anche nel fattore binomiale formato colle derivate parziali

$$x'(q)\,y'(p) - y'(q)\,x'(p)$$

sta dappertutto la quantità composta $q(x,p)$ in luogo della lettera semplice q; talchè se pongasi

$$\mathrm{T}(p,q) = \mathrm{V}(x[p,q], y[p,q])\{x'(q)\,y'(p) - y'(q)x'(p)\}$$

considerando le derivate parziali come dedotte immediatamente dalle equazioni (8), e quindi aventi la q lettera semplice, il precedente integrale duplicato (14) potrà scriversi

(15) $\int dx \int dp \mathrm{T}(p, q(x,p))\,q'(x)$.

Dal complesso delle cose fin' ora vedute risulta che se si prende il precedente integrale (15) cominciando l'integrazione dalla p ed estendendola fra i limiti $p_1(x), p_2(x)$ dedotti dall'equazione

(16) $f(x, y[p, q(x,p)]) = 0$

e poi si passa alla seconda per x estendendola fra i limiti $x = a$ $x = b$, si avrà lo stesso resultato finale come se, non avendo fatta alcuna trasformazione, si fosse operato alla maniera espressa al principio del n.° 5.

7. Cerchiamo ora se nell' ultimo integral duplicato (14), o (15) si può rovesciare l' ordine delle integrazioni; e osserviamo che questo sarà provato quando si arrivi a dimostrare che i valori $x=a$, $x=b$ limiti della seconda integrazione sono quelli stessi a cui saremmo giunti cercando nella equazione (16) dei limiti i valori del massimo e del minimo della stessa x considerata come funzione di p (n.° 4.). Questo poi è cosa assai facile: perocchè le equazioni, dalle quali, eliminata p, si hanno per x i valori del massimo e del minimo, sono la stessa equazione (16) e quest' altra

$$f'(y)\{y'(p)+y'(q)q'(p)\}=0$$

ossia, dividendo quest' ultima pel secondo fattore, le due

(17) $\quad f(x,y[p,q(x,p)])=0 \quad ; \quad f'(y[p,q(x,p)])=0.$

Ora si vede subito che la p si elimina fra quest' ultime due eliminando tutta la funzione $y[p,q(x,p)]$, la quale operazione dà lo stesso resultato che si sarebbe ottenuto eliminando la y lettera semplice fra le due $f(x,y)=0$; $f'(y)=0$, come al n.° 4.

8. Pertanto invertiamo le integrazioni nell' integrale duplicato (14) o (15), cioè incominciamo dalla x, integrando fra i limiti $x=x_1(p)$, $x=x_2(p)$ desunti dall' equazione (16), e poi passiamo all' integrazione per p fra i limiti $p=m$, $p=n$ che sono i valori del massimo e del minimo ottenuti eliminando x fra le due

(18) $\quad f(x,y[p,q(x,p)])=0 \quad ; \quad f'(x)+f'(y)y'(q)q'(x)=0$

la qual seconda è la derivata della prima presa per rapporto ad x. Otterremo così primieramente l' integrale

$$(19) \qquad \int_{x_1(p)}^{x_2(p)} dx\, \mathrm{T}(p,q(x,p))q'(x)$$

il quale, pel n.° 2, eguaglierà quest' altro

$$(20) \qquad \int_{q(x_1(p),p)}^{q(x_2(p),p)} dq\, \mathrm{T}(p,q)$$

e quest' ultimo eguaglierà l' integrale

$$(21) \qquad \int_{q_1(p)}^{q_2(p)} dq\, \mathrm{T}(p, q)$$

che è, come si vede, definito fra i limiti $q = q_1(p)$, $q = q_2(p)$, i quali sono radici della equazione

$$(22) \qquad f(x[p, q], y[p, q]) = 0$$

sciolta per q; non essendo questa equazione che la (3) colla sostituzione dei valori (8). Sarà provata l' eguaglianza dei due ultimi integrali quando siano provate le equazioni

$$(23) \qquad q(x_1(p), p) = q_1(p) \quad ; \quad q(x_2(p), p) = q_2(p)$$

e queste provansi nel modo seguente. L' equazione (16) a motivo della (10) può scriversi

$$f(x[p, q(x, p)], y[p, q(x, p)]) = 0$$

Sciogliere ora questa equazione per x e cavarne i valori $x_1(p)$, $x_2(p)$ richiede che prima se ne cavi la quantità composta $q(x, p)$: il che facendo si fa come sciogliendo la (22) per q. Si hanno così per $q(x, p)$ due valori $q(x, p) = q_1(p)$; $q(x, p) = q_2(p)$ e da queste equazioni si hanno poi i valori $x_1(p)$, $x_2(p)$ che risostituiti nelle equazioni stesse mostrano la verità delle equazioni (23).

9. Passando presentemente all' altra integrazione per p, osserviamo che le equazioni (18) a motivo delle (10), (13) possono scriversi

$$f(x[p, q(x, p)], y[p, q(x, p)]) = 0 \; ; \qquad f'(x)x'(q) + f'(y)y'(q) = 0$$

e che si elimina fra queste la x eliminando la funzione $q(x, p)$; la qual' ultima operazione conduce allo stesso resultato che l' eliminazione della q espressa con una lettera semplice fra le due

$$(24) \quad f(x[p, q], y[p, q]) = 0 \quad ; \quad f'(x)x'(q) + f'(y)y'(q) = 0 .$$

e questo si sa essere il sistema delle due equazioni dalle quali, eliminata q, si hanno i valori del massimo e del minimo

della p considerata nella (22) come funzione implicita della stessa q.

10. Raccogliendo le cose dette nei due numeri precedenti si vede che rovesciando nell'integrale duplicato (15) l'ordine delle integrazioni e prendendo la prima per x fra i limiti $x_1(p)$, $x_2(p)$ desunti dall'equazione (16), e la seconda per p fra i limiti $p=m$, $p=n$ desunti dal sistema delle (18) dopo averne scacciata la x: si ha lo stesso risultato che si ottiene dall'integrale duplicato

$$\int dp \int dq \, \mathrm{T}(p, q)$$

estendendo la prima integrazione per q fra i limiti $q_1(p)$, $q_2(p)$ radici della (22) e la seconda integrazione per p fra i limiti $p=m$, $p=n$ che ottengonsi dal sistema delle (24), scacciata la q. Ma si può (n.° 7.) rovesciar l'ordine delle integrazioni nell'integrale (15) senza alterare il valore finale, e lo stesso integrale (15) preso colle integrazioni dirette (n.° 6. sul fine) eguaglia l'integrale duplicato $\int dx \int dy \mathrm{V}(x, y)$ preso come si è detto al principio del n.° 5: adunque, rimettendo per $\mathrm{T}(p, q)$ il suo valore (n.° 6.), si ha finalmente il Teorema desiderato, cioè

„ L'integrale duplicato $\int dx \int dy \mathrm{V}(x, y)$, presa la prima „ integrazione per y fra i limiti $y_1(x)$, $y_2(x)$ desunti dall'e- „ quazione $f(x,y)=0$, e la seconda integrazione per x fra „ i limiti a, b, che si cavano, scacciata la y, dal sistema del- „ le due $f(x,y)=0$, $f'(y)=0$: presenta lo stesso valore fi- „ nale dell'integrale duplicato

(25) $$\int dp \int dq \mathrm{V}(x[p, q], y[p, q]) \{ x'(q) y'(p) - y'(q) x'(p) \}$$

„ prendendo la prima integrazione per q fra i limiti $q_1(p)$, „ $q_2(p)$ dedotti dall'equazione $f(x[p, q], y[p, q])=0$, e poi „ la seconda integrazione per p fra i limiti $p=m$, $p=n$ ca- „ vati dalle due

„ $f(x[p,q], y[p,q]) = 0$; $f'(x)x'(q) + f'(y)y'(q) = 0$.
„ dopo averne eliminata la q.

11. È chiaro (n.° 4) che se nell' integrale duplicato proposto può invertersi l' ordine delle integrazioni, potrà anche invertersi nell' integrale duplicato (25) risultante dopo la trasformazione. Vedemmo infatti che nelle equazioni (24) havvi la stessa relazione formata colle nuove variabili p, q, la stessa dipendenza per la ricerca del massimo e del minimo che al n.° 4. ci persuase ad ammettere l' inversione. Se dunque l' integrale (25) s' incomincia da p e si estende fra due limiti $p_1(q)$, $p_2(q)$ radici dell' equazione $f(x[p,q], y[p,q]) = 0$, e poi si passa alla seconda integrazione per q estendendola fra i limiti $q = \mu$, $q = \nu$ che si ottengono dalle equazioni

$$f(x[p,q], y[p,q]) = 0 \quad ; \quad f'(x)x'(p) + f'(y)y'(p) = 0$$

dopo avere eliminata la p: si avrà lo stesso valore di prima, e il valor finale sarà ancora eguale a quello che si ha dall' integrale duplicato $\int dx \int dy V(x,y)$ preso alla maniera più volte esposta.

12. Rimane ad avvertire, come fanno tutti gli Autori, che il binomio

$$x'(q)y'(p) - y'(q)x'(p)$$

può a piacimento avere il segno contrario: il che si fa manifesto ripetendo da capo le operazioni esposte in questo paragrafo e solo cambiando (ciò che è in pieno arbitrio) fra di loro le variabili x, y.

§. II.

Trasformazione delle formole integrali triplicate.

13. Propongasi l' integrale triplicato

(26) $$\int dx \int dy \int dz V(x, y, z)$$

e l' equazione dei limiti

(27) $$f(x, y, z) = 0;$$

la regola che si tiene in queste integrazioni è la seguente. Si prende ad arbitrio l'ordine delle variabili per le quali debbonsi eseguire le tre integrazioni, per esempio l'ordine z, y, x: ed è chiaro che può variarsi in sei modi differenti a ciascun dei quali si adatta facilmente, cambiando solo le denominazioni delle lettere, il discorso che esponiamo, supposto l'ordine z, y, x. Si eseguisce la prima integrazione per z, ritenendo costanti le y, x, e la si estende fra i limiti

(28) $$z = z_1(x, y) \quad ; \quad z = z_2(x, y)$$

che sono radici della equazione (27) sciolta per z. Poscia si passa all'altra integrazione per y che si estende fra i limiti

(29) $$y = y_1(x) \quad ; \quad y = y_2(x)$$

i quali sono radici di quella equazione che si ottiene eliminando z fra le due

(30) $$f(x, y, z) = 0 \quad ; \quad f'(z) = 0$$

e sono i valori del massimo e del minimo che prende la y nella equazione (27) considerata come funzione implicita di quella variabile z per la quale è stata fatta la prima integrazione, ritenuta x costante. In ultimo si fa l'integrazione per x estendendola fra i limiti $x = a$, $x = b$ che si cavano dall'equazione risultante dopo l'eliminazione delle due variabili y, z fra le tre

(31) $$f(x, y, z) = 0 \; ; f'(z) = 0 \; ; f'(y) = 0$$

e sono i valori del massimo e del minimo che prende la x nella equazione (27) considerata come funzione implicita delle due variabili y, z.

14. Il valore finale dell'integrale triplicato che si deduce dopo le tre definizioni spiegate nel n.° prec. esprime nelle applicazioni la misura di un qualche concreto, per esempio, la solidità o la massa di un corpo. Siccome però (come si disse al n.° 4. in un caso similissimo) non havvi alcuna ragione per la quale, mentre quel concreto si riferisce a tre

assi ortogonali, si abbia delle tre coordinate a scegliere una in preferenza delle altre: segue di necessità che sortirà sempre lo stesso valore finale qualunque sia l'ordine con cui si prendono le tre variabili nelle integrazioni.

15. La trasformazione generale di questi integrali triplicati si può dimostrare nel modo seguente. Siano date tre equazioni per le quali le tre prime variabili si esprimano col mezzo di tre nuove p, q, r

$$(32) \qquad x = x[p, q, r]; \; y = y[p, q, r]; \; z = z[p, q, r];$$

e prima di far la sostituzione di questi valori sotto l'integrale triplicato (26) vediamo alcune conseguenze delle poste equazioni (32) che ci saranno necessarie nel progresso.

Immaginiamo che dalle due prime si cavino i valori di q, r per x, y, e p, dimodochè quelle possano esprimersi per queste colle equazioni

$$(33) \qquad q = q(x, y, p) \quad ; \quad r = r(x, y, p);$$

se le funzioni che formano i secondi membri di quest'ultime si sostituiscano in luogo di q, r nelle stesse equazioni da cui furono dedotte, si avranno manifestamente le equazioni identiche

$$(34) \quad x = x[p, q(x, y, p), r(x, y, p)]; \; y = y[p, q(x, y, p), r(x, y, p)];$$

e se le medesime funzioni pongansi allo stesso modo nella terza delle (32), avrassi di più quest' altra

$$(35) \qquad z = z[p, q(x, y, p), r(x, y, p)].$$

Ora essendo identiche le equazioni (34) sussisteranno insieme ad esse tutte le loro equazioni derivate prese per p, per x, e per y. Al nostro caso non giovano che quelle di primo ordine; avremo pertanto le due derivate prese rapporto a p che saranno

$$(36) \qquad \begin{aligned} 0 &= x'(p) + x'(q)q'(p) + x'(r)r'(p) \\ 0 &= y'(p) + y'(q)q'(p) + y'(r)r'(p), \end{aligned}$$

le due derivate rapporto alla x

$$(37)\qquad \begin{aligned} 1 &= x'(q)\,q'(x) + x'(r)\,r'(x) \\ 0 &= y'(q)\,q'(x) + y'(r)\,r'(x) \end{aligned}$$

e le due rapporto alla y

$$(38)\qquad \begin{aligned} 0 &= x'(q)\,q'(y) + x'(r)\,r'(y) \\ 1 &= y'(q)\,q'(y) + y'(r)\,r'(y). \end{aligned}$$

Si cavano dalle equazioni (36) le due

$$(39)\qquad q'(p) = \frac{x'(r)y'(p) - y'(r)x'(p)}{x'(q)y'(r) - y'(q)x'(r)}\,;\quad r'(p) = \frac{x'(p)y'(q) - y'(p)x'(q)}{x'(q)y'(r) - y'(q)x'(r)}$$

dalle (37) le due

$$q'(x) = \frac{y'(r)}{x'(q)y'(r) - y'(q)x'(r)}\quad;\quad r'(x) = \frac{-y'(q)}{x'(q)y'(r) - y'(q)x'(r)}$$

e dalle (38) le due

$$q'(y) = \frac{-x'(r)}{x'(q)y'(r) - y'(q)x'(r)}\quad;\quad r'(y) = \frac{x'(q)}{x'(q)y'(r) - y'(q)x'(r)}\,.$$

Queste ultime quattro poi somministrano

$$q'(x)r'(y) - r'(x)q'(y) = \frac{x'(q)y'(r) - y'(q)x'(r)}{(x'(q)y'(r) - y'(q)x'(r))^2}$$

ossia

$$(40)\qquad q'(x)r'(y) - r'(x)q'(y) = \frac{1}{x'(q)y'(r) - y'(q)x'(r)}\,.$$

16. Richiamo l' equazione (35) e la derivo per rapporto a p, indicando per $z'[p]$ la derivata di z per la p tanto esplicita che implicita alle $q(x, y, p)$, $r(x, y, p)$, ottengo

$$z'[p] = z'(p) + z'(q)q'(p) + z'(r)r'(p)\,;$$

metto in questa in luogo delle $q'(p)$, $r'(p)$ i loro valori dati dalle (39), e mi viene

$$z'[p] = \frac{z'(p)[x'(q)y'(r) - y'(q)x'(r)] + z'(q)[x'(r)y'(p) - y'(r)x'(p)] + z'(r)[x'(p)y'(q) - y'(p)x'(q)]}{x'(q)y'(r) - y'(q)x'(r)}$$

dove faccio sparire il denominatore servendomi dell'equazione (40), ed ho

$$z'[p] = \{z'(p)[x'(q)y'(r) - y'(q)x'(r)] + z'(q)[x'(r)y'(p) - y'(r)x'(p)] + z'(r)[x'(p)y'(q) - y'(p)x'(q)]\}\{q'(x)r'(y) - r'(x)q'(y)\}.$$

Osservo che in questa espressione il secondo membro è composto di due fattori, cioè di un binomio, e di un sestinomio formati con tante derivate parziali. Le derivate parziali che compongono il sestinomio sono altrettante funzioni di $p, q(x,y,p)$, $r(x,y,p)$, cioè contengono le quantità composte $q(x,y,p)$, $r(x,y,p)$ nel luogo delle lettere semplici q, r. Intendiamo pertanto che sianvi in esso sestinomio le lettere semplici q, r invece delle quantità composte, e poniamo per brevità

$$(41) \qquad S[p,q,r] = z'(p)[x'(q)y'(r) - y'(q)x'(r)] + z'(q)[x'(r)y'(p) - y'(r)x'(p)] + z'(r)[x'(p)y'(q) - y'(p)x'(q)]$$

dove le derivate parziali sono funzioni delle p, q, r quali deduconsi direttamente dalle equazioni (32): sarà

$$(42) \qquad z'[p] = S[p, q(x,y,p), r(x,y,p)]\{q'(x)r'(y) - r'(x)q'(y)\}$$

17. Queste cose premesse, torniamo a considerare l'integrale proposto. Veggasi primieramente come sia vera l'equazione tra gl' integrali semplici

$$(43) \quad \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz\, V(x,y,z) = \int_{p_1(x,y)}^{p_2(x,y)} dp\, V(x,y,z[p, q(x,y,p), r(x,y,p)])z'[p]$$

dove nel primo integrale i limiti sono quelli dati dai secondi membri delle equazioni (28); e nel secondo vi è nella V in luogo di z la quantità composta eguale, data dal secondo membro della (35): vi è la $z'[p]$ sua derivata per p espressa nel modo convenuto al n.° 16. precedente: e i due limiti sono valori di p cavati dalla equazione

$$(44) \qquad f(x,y,z[p, q(x,y,p), r(x,y,p)]) = 0$$

che è la (27) colla z composta data dalla (35). Se in luogo

dei due limiti $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ nel primo integrale della equazione (43) vi fossero queste altre quantità

$$z[p, q(x,y,p_1(x,y)), r(x,y,p_1(x,y))];$$

$$z[p, q(x,y,p_2(x,y)), r(x,y,p_2(x,y))],$$

la verità della detta equazione sarebbe una immediata conseguenza del teorema del n.° 2; perchè dunque sia vera l'equazione (43) tale come sta, bisogna che siano identiche queste altre

$$(45)\qquad \begin{aligned} z[p, q(x,y,p_1(x,y)), r(x,y,p_1(x,y))] &= z_1(x,y) \\ z[p, q(x,y,p_2(x,y)), r(x,y,p_2(x,y))] &= z_2(x,y) \end{aligned}$$

il che facilmente si dimostra osservando che per cavare i due valori $p_1(x,y), p_2(x,y)$ dalla (44) si comincia a cavarne la z composta come facevasi della z semplice sciogliendo l'equazione (27) per dedurne le (28). Così si hanno per la z composta due valori che sono

$$z[p, q(x,y,p), r(x,y,p)] = z_1(x,y)$$

$$z[p, q(x,y,p), r(x,y,p)] = z_2(x,y)$$

e queste equazioni, sciolte separatamente per rispetto alla p, danno i due valori $p = p_1(x,y)$; $p = p_2(x,y)$ i quali risostituiti nelle stesse equazioni da cui furono dedotti le rendono identiche, venendo in tal modo dimostrate le (45).

18. Essendo vera l'equazione (43) fra gl'integrali semplici, è manifestamente vera anche la seguente fra gl'integrali triplicati

$$(46)\qquad \int_a^b dx \int_{y(x)}^{y(x)} dy \int_{z(x,y)}^{z(x,y)} dz\, V(x,y,z)$$

$$= \int_a^b dx \int_{y(x)}^{y(x)} dy \int_{p(x,y)}^{p(x,y)} dp\, V(x,y,z[p, q(x,y,p), r(x,y,p)]z'[p]$$

dove le altre due integrazioni per y e per x sono fatte allo stesso modo. Ora vogliamo dimostrare che anche nell'integrale triplicato che forma il secondo membro della precedente equazione (46) si può invertere a piacimento l'ordine delle integrazioni, come (n. 13. 14.) può farsi nell' integrale triplicato che forma il primo membro della stessa equazione (46). Ciò sarà provato quando si dimostri, che, adoperando l'equazione (44) per le definizioni di quell' integrale, le variabili x, y, p conservano fra di loro analoghe relazioni conducenti alle stesse proprietà di massimo e di minimo come le x, y, z, quando si adopera per le definizioni l'equazione (27) nel modo spiegato al n.° 13. Or questo appunto ha luogo nel nostro caso. Infatti eliminare la z semplice fra le (30) dà lo stesso risultato che eliminare la z composta fra la (44) e la seguente

$$(47) \qquad f'(z[p, q(x,y,p), r(x,y,p)]) = 0$$

il quale risultato è poi lo stesso che si significa dicendo di eliminare la p tra la (44) e la sua derivata per p; giacchè la derivata della (44) per p è la (47) precedente moltiplicata per $z'[p]$, e può intendersi che questo fattore $z'[p]$ siasi fatto sparire colla divisione: nè può farsi altrimenti la eliminazione di p fra la (44) e la (47) che eliminazione la z composta. Per l'altra definizione bisogna che abbàsi lo stesso risultato eliminando z, y fra le (31), ed eliminando p, y fra la (44), la sua derivata per p, e la sua dervata per y. Questo pure si verifica perchè la derivata della (44) per p è la (47), e la derivata per y è

$$f'(y) + f'(z) \{ z'(q)q'(y) + z'(r)r'(y) \} = 0$$

che si riduce alla $f'(y) = 0$ a motivo del fattore $f'(z)$ che è zero per la stessa (47). È visibile che in questo secondo caso non vi è altra differenza che quella di avere la z composta invece della z semplice fra le quantità che si scacciano: e ciò non altera il risultato che rimane dopo le eliminazioni.

19. Poichè dunque può farsi, invertiamo le integrazioni nel secondo integrale della (46) tenendo in ultimo quella per p. Prima però sostituiremo alla $z[p]$ il suo valore dato dalla (42), e osserveremo che a motivo delle equazioni identiche (34) la (44) si può scrivere senza alterazione

$$f\{x[p, q(x,y,p), r(x,y,p)], y[p, q(x,y,p), r(x,y,p)], z[p, q(x,y,p), r(x,y,p)]\} = 0$$

e la quantità $V(x, y, z[p, q(x,y,p), r(x,y,p)])$ parimenti

$$V\{x[p, q(x,y,p), r(x,y,p)], y[p, q(x,y,p), r(x,y,p)], z[p, q(x,y,p), r(x,y,p)]\}.$$

Quindi è che ponendo per brevità

(48) $\varkappa[p, q, r] = f(x[p, q, r], y[p, q, r], z[p, q, r])$

(49) $T[p, q, r] = V(x[p, q, r], y[p, q, r], z[p, q, r])\, S[p, q, r]$,

dove la $S[p, q, r]$ è quella della equazione (41), e le q, r stanno come lettere semplici: l' integrale triplicato può scriversi

(50) $\int dp \int dx \int dy\, T[p, q(x,y,p), r(x,y,p)]\{q'(x)r'(y) - r'(x)q'(y)\}$

e parimenti l' equazione dei limiti

(51) $\varkappa[p, q(x,y,p), r(x,y,p)] = 0.$

Il precedente integrale triplicato dovrà essere preso primieramente per y fra due limiti $y_1(x,p)$, $y_2(x,p)$ radici dell' equazione (51), poscia per x fra due limiti $x_1(p)$, $x_2(p)$ desunti dall' equazione che risulta eliminando y fra la (51) e la seguente

(52) $\varkappa'(q)q'(y) + \varkappa'(r)r'(y) = 0;$

e in ultimo per p fra i limiti $p = \alpha$, $p = \beta$ radici dell' equazione risultante dopo l' eliminazione di x, y fra la (51) la (52) e la seguente

$$(53) \qquad \varkappa'(q)q'(x) + \varkappa'(r)r'(x) = 0.$$

I ragionamenti antecedenti persuadono che il valor finale dell' integrale triplicato ottenuto come ultimamente si è detto, eguaglierà l'integrale del secondo membro della (46) e quindi anche quello del primo.

20. L'integrale duplicato

$$(54) \int_{x_1(p)}^{x_2(p)} dx \int_{y_1(x,p)}^{y_2(x,p)} dy \; \mathrm{T}[p, q(x,y,p), r(x,y,p)] \{q'(x)r'(y) - r'(x)q'(y)\}$$

che con una nuova integrazione per p diventa il triplicato (50), e dove le quantità dei limiti sono determinate come si è detto al numero precedente, equivale all' integrale duplicato

$$(55) \qquad \int_{q_1(p)}^{q_2(p)} dq \int_{r_1(q,p)}^{r_2(q,p)} dr \; \mathrm{T}[p, q, r]$$

dove $r_1(q,p)$, $r_2(q,p)$ sono radici della equazione

$$(56) \qquad \varkappa[p, q, r] = 0$$

sciolta per r, e $q_1(p)$, $q_2(p)$ sono radici dell' equazione che risulta eliminando r fra la precedente e la

$$(57) \qquad \varkappa'(r) = 0$$

Questa proposizione è una immediata conseguenza del teorema per la trasformazione degli integrali duplicati che superiormente abbiamo dimostrato al n.° 10: basta un poco di attenzione per ciò rilevare, ponendo mente che la p è quì una costante la quale si esprime per ragione della terza integrazione, ma che potrebbe ommettersi finchè si considera solamente l'integrale duplicato antecedente. Notisi ancora che l'eliminazione di x, y fra le (51), (52), (53) dà lo stesso ri-

sultato che l' eliminazione di q, r fra la (56), la (57) e la seguente

$$(58) \qquad \varkappa'(q) = 0;$$

perocchè le (52), (53) combinate fra loro si riducono facilmente alle

$$\varkappa'(q)\left\{\frac{q'(x)r'(y) - r'(x)q'(y)}{r(y)}\right\} = 0$$

$$\varkappa(r)\left\{\frac{r'(x)q'(y) - q'(x)r'(y)}{q(y)}\right\} = 0$$

che divise pel secondo fattore sono le (57), (58) colla sola differenza di contenere le q, r composte invece delle semplici, la quale è pure la sola differenza fra le (51) e (56). Tale differenza non influisce sul risultato ottenuto dopo le eliminazioni, come è manifesto.

21. Dal fin qui detto si arriva a comprendere che l' integrale triplicato (50) preso come si è esposto al n.° 20. darà lo stesso risultato finale dell'integrale

$$\int_{\alpha}^{\beta} dp \int_{q(p)}^{q(p)} dq \int_{r(q,p)}^{r(q,p)} dr \; T[p, q, r]$$

dove le quantità dei limiti hanno i valori indicati nel numero precedente; ma quell' integrale (50) eguaglia (n.° 19. sul fine) il primo integrale dell' equazione (46); dunque

$$\int_{a}^{b} dx \int_{y_1(x)}^{y(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z(x,y)} dz \; V(x,y,z) = \int_{\alpha}^{\beta} dp \int_{q(p)}^{q(p)} dq \int_{r(q,p)}^{r(q,p)} dz \; T[p, q, r].$$

Rimettasi per $T[p, q, r]$ l'espressione equivalente data dalle (41), e (49), e per l' equazione dei limiti in luogo della $\varkappa[p,q,r]$ l'espressione equivalente data dalla (48), e uscirà il Teorema desiderato, che „ l'integrale triplicato $\int dx \int dy \int dz V(x,y,z)$ „ preso servendosi dell' equazione dei limiti $f(x, y, z) = 0$ per

„ definire le successive integrazioni come si è esposto al n.°
„ 13, dà lo stesso valore finale dell' integrale triplicato

„ $\int dp \int dq \int dr V(x[p,q,r], y[p,q,r], z[p,q,r]) S[p,q,r]$

„ essendo

$$S[p,q,r] = z'(p)[x'(q)y'(r) - y'(q)x'(r)] + z'(q)[x'(r)y'(p) - y'(r)x'(p)] + z'(r)[x'(p)y'(q) - y'(p)x'(q)]$$

„ preso servendosi dell' equazione dei limiti

$$f(x[p,q,r], y[p,q,r], z[p,q,r]) = 0$$

„ la quale viene trattata colle nuove variabili p, q, r in un
„ modo affatto analogo a quello con cui la $f(x,y,z) = 0$ vie-
„ ne trattata colle vecchie variabili x, y, z.

22. In quest' ultimo integrale triplicato l' ordine delle integrazioni potrà cambiarsi in sei modi differenti senza alterare il valore finale, e ciò per le stesse ragioni che al n.° 14. ci persuasero dell' analoga proprietà nell' integrale non trasformato. Il segno poi del sestinomio $S[p,q,r]$ può ad arbitrio prendersi positivo o negativo, finchè la questione si considera puramente dalla parte dell' analisi, perchè niente v' è che qualifichi una delle tre variabili in preferenza delle altre, onde possono fra di loro scambiarsi per le derivazioni: il che facendo viene quel sestinomio a mutare di segno.

PROF. D. GIUSEPPE BERALDI DIOCESI DI MODENA CENSORE

PROF. GIOVANNI BERALDI STATI ESTENSI CENSORE